تحقق و پایداری
سیستمهای LTI

۵-۱) تحقق سیستمهای LTI

تابع تبدیل، نمایش یکتائی از دینامیک ورودی و خروجی یک سیستم LTI می باشد، درصورتی که این رابطۀ دینامیکی با تعداد نامحدودی معادلۀ حالت قابل تفسیر و تعبیر است. هـر یـک از معادلات حالت که مفسر دیفرانسیلی یک تابع تبدیل باشد، یـک تحقـق بـرای آن تـابع تبـدیل نامیده می شود. به عنوان مثال:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + u \\ y = x \end{cases} \tag{۵-۱}$$

و

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + au \\ y = \dfrac{1}{a}x \end{cases} \tag{۵-۲}$$

هر دو محقق کنندۀ یک تابع تبدیل $\dfrac{1}{s+1}$ می باشند.

تعریف تحقق:

یک معادلهٔ حالت- خروجی $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + D \end{cases}$ یک تحقق برای تابع تبدیل H(s) است اگر

$.H(s) = C\ (sI - A)^{-1} B + D$

حال می توان ارتباط مشخصی بین H و اجزاء سیستم حالت بدست آورد و امکان وجود تحقق و یکتائی و عدم یکتائی آنرا بررسی نمود. می توان نشان داد که معادلات حالت تحقق توابع تبدیل گویائی می باشند که سره یا اکیداً سره می باشند. بدین معنی که در نمایش تابع تبـدیلی آنهـا درجهٔ صورت کوچکتر یا مساوی درجهٔ مخرج است. با توجه به اینکه:

$$\lim_{s\to\infty} H(s) = D \qquad (۳-۵)$$

درصورتیکه $D \neq 0$ باشد تابع تبدیل H(s) سره[1] خواهد بود. لذا تابع تبدیل سره را می توان با تقسیم مستقیم صورت و مخرج به فرم زیر

$$H(s) = \hat{H}(s) + D \tag{۴-۵}$$

تبدیل نمود و تحقق $\hat{H}$ را می توان با فرم کلی:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \tag{۵-۵}$$

بدست آورد. بنابراین بدون از دست دادن عمومیت مسئله می توان سیستمهای مورد بحث را به سیستمهای اکیداً سره[2] محدود نمود. در هر حال قضیهٔ وجود تحقق به صورت زیر بیان می شود.

قضیهٔ ۵–۱) وجود تحقق

یک ماتریس تبدیل $H(s)$ را می توان به صورت معادلات فضای حالـت تحقـق دارد، اگـر و تنهـا اگر، $H(s)$ ماتریس گویای سره (یا اکیداً سره) باشد.

۵-۲) تحقق کاهش ناپذیر[۳]

یکی از مشخصه های مهم تحقق، کاهش ناپذیر بودن رتبهٔ معادلات حالت می باشد. همانگونه که در این بخش نشان داده خواهد شد این مشخصه با خواص کنترل پذیری و رؤیت پذیری سیستم در ارتباط است. ابتدا اجازه دهید با یک مثال ایدهٔ تحقق کاهش ناپذیر را بررسی کنیم.

تحقق تابع تبدیل $\frac{1}{s+1}$ را می توان بفرم زیر نوشت:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + u \\ y = x_1 \end{cases} \qquad (۵\text{-}۶)$$

تحقق دیگری برای سیستم نیز می توان نوشت:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 + u \\ \dot{x}_2 = -2x_2 \\ y = x_1 + x_2 \end{cases} \qquad (۵\text{-}۷)$$

برای مشاهدهٔ سریع این برابری کافی است به تعریف تابع تبدیل یک سیستم رجوع کنیم.

همانگونه که قبلاً گفته شد تابع تبدیل سیستم رابطهٔ بین خروجـی و ورودی در حالـت شـرایط اولیه صفر (zs) می باشد. با درنظر گرفتن معادلهٔ حالت دوم، پاسخ شـرط اولیـه x_2 در کلیـهٔ زمانها صفر است چراکه در این معادله u تاثیر مستقیم ندارد. لذا با این توصـیف هـر دو معادلـهٔ حالت به یک تابع تبدیل $\frac{1}{s+1}$ تبدیل خواهند شد.

حال دقت کنید که برای تابع تبدیل مرتبهٔ اول $\frac{1}{s+1}$ یک تحقق با یک متغیر حالت x_1 و یـک تحقق با دو متغیر حالت x_2, x_1 تعیـین شـده اسـت. بـه تحققـی کـاهش ناپـذیر یـا مینیمـال می گوئیم که با حداقل متغیرهای حالت انجام پذیرد.

تعریف: تحقق کاهش ناپذیر

تحقق یک تابع تبدیل $H(s)$ کاهش ناپذیر یا مینیمال است اگر هیچ تحقق با تعـداد متغیـر حالت کمتر از آن نتوان یافت.

برای بررسی خواص تحقق های کاهش ناپذیر لازمست پارامترهای مارکوف و ماتریس هنکل را معرفی نمائیم.

کمیتهـای $\left\{CA^{i-1}b, \quad i=1,2,\ldots\right\}$ را "پارامترهـای مـارکوف[۱]" مـی نامنـد. ویژگـی خـاص پارامترهای مارکوف اینست که در تحقق های مختلف از یک تابع تبدیل ایـن پارامترهـا تغییـر ناپذیر باقی می مانند. بدین ترتیب پارامترهای مارکوف به صورت منحصر بفـرد از تـابع تبـدیل قابل استخراج می باشند. برای تعیین این پارامترها از روی تـابع تبـدیل مـی تـوان بسـط تـابع تبدیل را برحسب توانهای منفی s^{-i} بنویسیم.

برای تعیین این پارامترها از روی تابع تبدیل می توان بسط تابع
تبدیل را برحسب توانهای منفی s^{-i} بنویسیم.

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \sum_{i=0}^{\infty} h_i \, s^{-i} \qquad (۸-۵)$$

که در آن

s^{-2}

$$(sI - A)^{-1} = s^{-1}I + s^{-1}A + s^{-3}A^2 + \ldots \qquad (۹-۵)$$

با مقایسهٔ دو معادلهٔ فوق مشخص می شود که پارامترهای مارکوف همان ضرایب بسط چند جمله ای فوق h_i می باشند.

$$\text{پارامتر مارکوف} \rightarrow h_i = CA^{i-1}b \qquad (i = 1, 2, \ldots) \qquad (۱۰-۵)$$

حال اگر تحقق های مختلفی را از یک تابع تبدیل H(s) داشته باشیم مسلماً ضرایب بسط توانی فوق برای کلیهٔ تحقق ها بایستی یکسان باشند لذا

$$C_1 A_1^{\,i-1} B_1 = C_2 A_2^{\,i-1} B_2 \qquad (۱۱-۵)$$

یعنی پارامترهای مارکوف تغییر ناپذیر بوده و به شکل تحقق مربوط نخواهند شد.

ماتریس هنکل[1] نیز با استفاده از پارامترهای مارکوف به ترتیب زیر تشکیل می شود.

$$M(i,j)=\begin{bmatrix} h_i & h_{i+1} & \cdots & h_{i+j} \\ h_{i+1} & h_{i+2} & \cdots & h_{i+j+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{i+j} & h_{i+j+1} & \cdots & h_{i+2j} \end{bmatrix} \qquad (۱۲-۵)$$

مسلماً ماتریس هنکل نیز که از پارامترهای تغییر ناپذیر مارکوف تشکیل می شود خود تغییر ناپذیر است و با نوع تحقق تغییر نمی کند. با این مقدمه به ارتباط بین تحقق کاهش ناپذیر و کنترل پذیری و رؤیت پذیری می پردازیم.

قضیهٔ ۵–۲)

تحققی کاهش ناپذیر است، اگر و تنها اگر، کنترل پذیر و رؤیت پذیر باشد.

عدم حضور یک مقدار ویژهٔ ماتریس A در قطبهای تابع تبدیل سیستم نشانگر وجود مود پنهـان و یا عدم کنترل پذیری یا رؤیت پذیری در سیستم می باشد. برای سیستمهای SISO این مهـم در قطبهای تکراری نیز تعمیم می یابد. یعنی اگر مقدار ویژهٔ تکـراری A بـا تکـرر r باشـد، و در کمتر از این تعداد در تابع تبدیل دیده شود سیستم کنترل پذیری یا رؤیـت پـذیری خـود را از دست داده است. اما این موضوع همیشه برای سیستمهای MIMO صادق نیست.

۵–۳) تحقق سیستمهای SISO

در این بخش روشهای مختلف تحقق سیستمهای تک ورودی- تک خروجی بررسی می گردنـد. اساساً علت نامگذاری تفسیر تابع تبدیل به نمایش فضای حالت با عنوان تحقق مربوط به زمـانی است که پیاده سازی کنترل کننده ها یا فیلترها بصورت الکترونیکی و توسط Op-Amp صـورت می پذیرفت. از Op-Amp هم به عنوان تقویت کننده، هم به عنوان انتگرال گیر (با اضافه کردن یک خازن) و هم به عنوان جمع کننده و مقایسه کننده می توان استفاده کرد.

لذا تحقق سیستمها توسط این المانها به صورت بلوک دیاگرام ارائه خواهد شـد. امـا امـروزه نـه تنها به علت پیاده سازی بلکه به خاطر استفاده از تئوری کنترل مدرن بـرای طراحـی و تنظـیم کنترل کننده ها لازمست سیستمها را در فرم فضای حالت بررسی کنیم. انواع مختلف روشـهای تحقق بسیار متنوع می باشند، که در بخشهای بعدی به برخی از آنها می پردازیم. بسته به نـوع تحقق خواص مشخصی را از آنها می توان انتظار داشت، که بهترین خصوصیت در تحقق کاهش ناپذیر بودن آنست.

در اینجا فرض کنید یک تابع تبدیل اکیداً سره با مشخصات زیر را بخـواهیم

به فرم ماتریسی $\left[A, B, C, D\right]$ محقق نمائیم.

$$H(s) = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \ldots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_0} \qquad (۱۶\text{-}۵)$$

لذا در حالت کلی ممکن است قطب و صفر مشترکی در این تابع تبدیل موجـود باشـد، کـه بـه صورت مود پنهان در چند جمله ای های فوق قابـل مشـاهده مسـتقیم نباشـد. درصـورتی کـه بخواهیم تحقق، کاهش ناپذیر باشد لازمست ابتدا مودهای پنهان را پیدا کرده و حذف نمـائیم و سپس عملیات تحقق را صورت دهیم.

۵-۳-۱) تحقق کانونیکال کنترل پذیری

سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$H(s)=\frac{b_{n-1}s^{n-1}+b_{n-2}s^{n-2}+\ldots+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_0}$$

در تحقق کانونیکال کنترل پذیری از متغیرهای حالت به فرم زیر استفاده می کنیم.

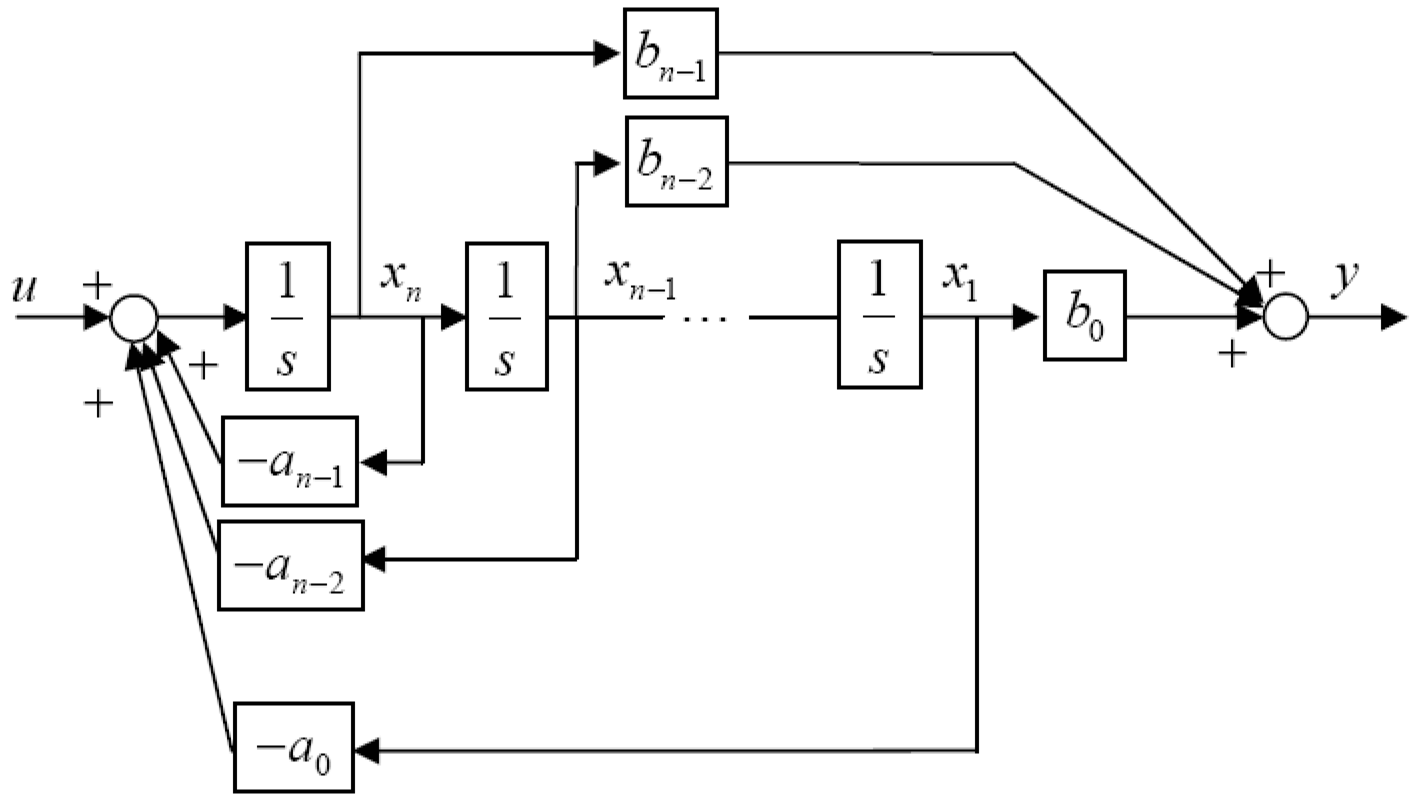
$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=x_3\\ \dot{x}_n=-a_{n-1}x_n-a_{n-2}x_{n-1}-\ldots-a_0x_n(t)+u(t)\\ y=+b_{n-1}x_n+b_{n-2}x_{n-1}+\ldots+b_1x_2+b_0x_1\end{cases} \quad (۱۷\text{-}۵)$$

لذا در حالت ماتریسی خواهیم داشت:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \\ 0 & & \vdots & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \underset{\sim}{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \qquad (۱۸\text{-}۵)$$

$$y = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 \cdots & b_{n-1} \end{bmatrix} x$$

فرم بلوک دیاگرام آن به ترتیب زیر است:



شکل (۵-۱) بلوک دیاگرام تحقق کانونیکال کنترل پذیری

همانگونه که از نام تحقق پیداست این تحقق کنترل پذیر است. برای بررسی این مدعا، ماتریس کنترل پذیری را تشکیل می دهم.

$$\mathbb{C}=\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & * \\ \vdots & \vdots & 1 & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \vdots & & * \\ 1 & * & * & \cdots & * \end{bmatrix} \qquad (۱۹-۵)$$

که در آن * عنصر غیر صفر می باشد. همانگونه که مشخص است برروی قطر فرعی این ماتریس تماماً عناصر 1 قرار دارند. لذا رتبهٔ ماتریس کنترل پذیری برابر n بوده و این سیستم کنترل پذیر می باشد. اما رؤیت پذیر بودن این تحقق بسته به آنست کـه سیســتم مودهـای پنهـان نداشــته باشد.

تحقق کانونیکال کنترل پذیری همواره کنترل پذیر است و درصورتی که تابع تبدیل مورد تحقق قطب و صفر مشترکی نداشته باشد، رؤیت پذیر نیز خواهد بود.

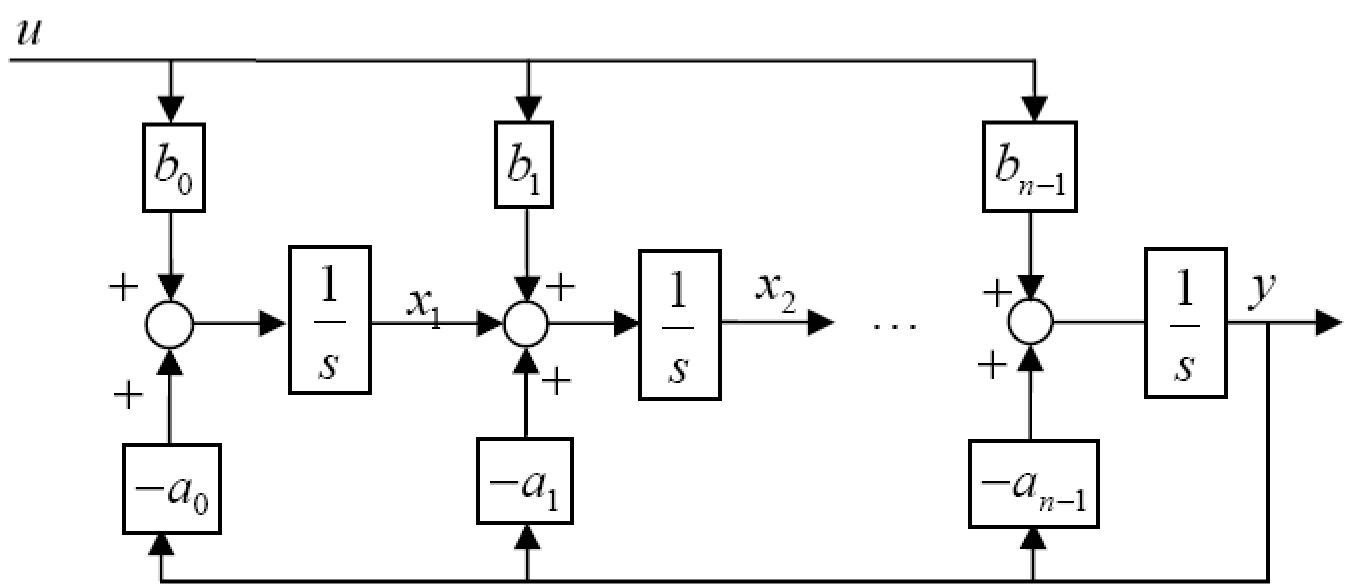
۵-۳-۲) تحقق کانونیکال رؤیت پذیری

این تحقق به فرم زیر می باشد.

$$\dot{x}=\begin{bmatrix} 0 & 0\cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \vdots & \vdots \\ \vdots & & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} x+\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix} u \qquad (۵-۲۰)$$

$$y=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

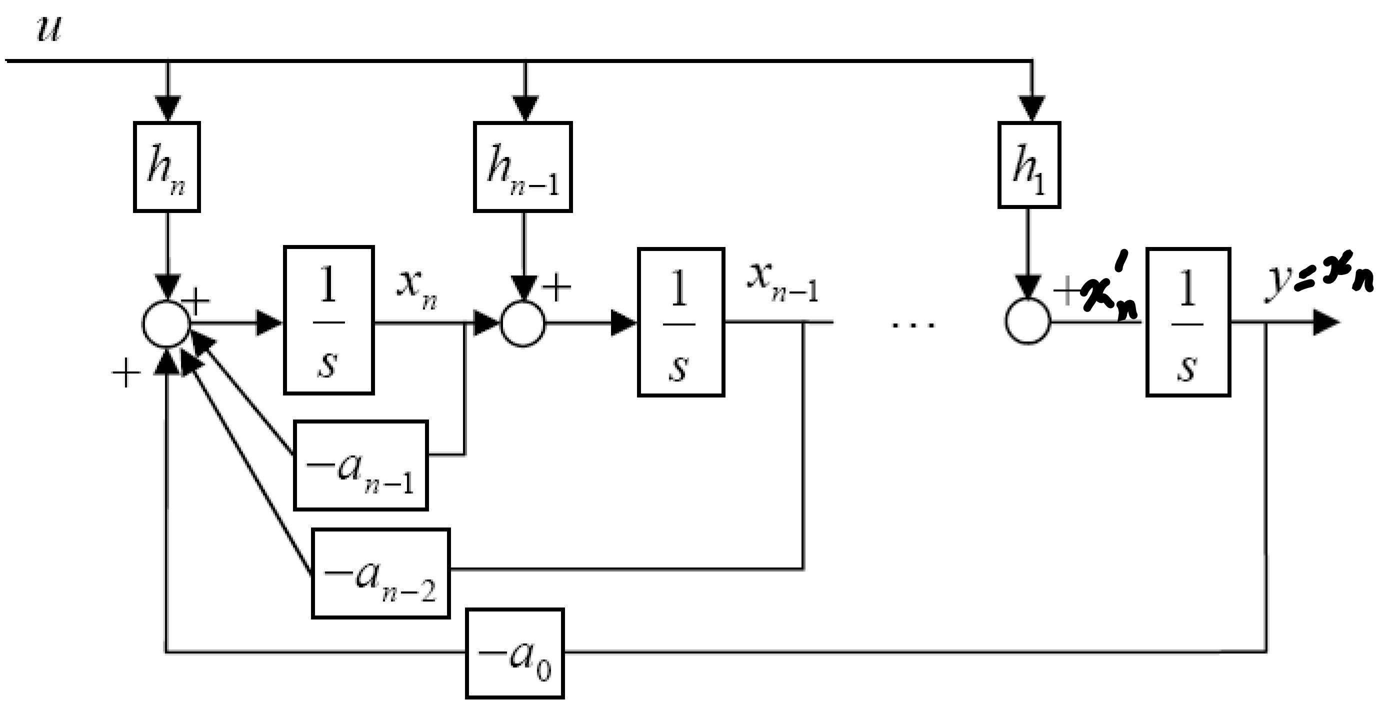
توجه کنید که این تحقق دوگان تحقق کانونیکال کنترل پذیری است که در آن $A_0 = A_c^T , b_0 = C_c^T , C_0 = b_c^T$ لذا با توجه به خاصیت دوگانی سیستمهای خطی این تحقق به صورت ذاتی رؤیت پذیر می باشد و درصورتی که تابع تبدیل سیستم قطب و صفر مشترک نداشته باشد کنترل پذیر هم خواهد بود. (مینیمال می گردد). شکل زیر تحقق رؤیت پذیری به صورت کانونیکال را نشان می دهد.



شکل ۵-۲ بلوک دیاگرام تحقق کانونیکال رؤیت پذیری

۵-۳-۳) تحقق کانونیکال رؤیتگر

بلوک دیاگرام این تحقق مطابق شکل زیر است.



شکل (۵-۳) بلوک دیاگرام تحقق کانونیکال رؤیتگر

و یا به فرم ماتریسی زیر:

$$\dot{x}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} x+\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} u \qquad (۲۱\text{-}۵)$$

$$y=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} x$$

که در آن h_i پارامترهای مارکوف در سیستم می باشند.

$$H(s)=\sum_{i=1}^{\infty} h_i s^{-i} \qquad (۲۲\text{-}۵)$$

و از رابطهٔ زیر قابل محاسبه می باشند.

$$\begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{n-1} & 1 & & \vdots \\ \vdots & & 1 & 0 \\ a_1 & a_2 \cdots & a_{n-1} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_{n-1} \\ b_{n-2} \\ \vdots \\ b_0 \end{bmatrix} \qquad (۲۳\text{-}۵)$$

با محاسبۀ مستقیم ماتریس رؤیت پذیری می توان نشان داد برای این تحقق

$$\mathbf{O}=\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}=I \qquad (۲۴\text{-}۵)$$

لذا این تحقق همواره رؤیت پذیر می باشد. همگن بودن ماتریس رؤیت پذیری نه تنها رؤیت پذیر سیستم را نشان می دهد بلکه یکنواختی عددی در محاسبۀ متغیر های حالت سیستم را از روی اطلاعات خروجی سیستم مشخص می سازد. از طرف دیگر ماتریس کنترل پذیری این تحقق عبارتست از

$$\begin{aligned}\mathbb{C}&=\begin{bmatrix} B & AB\cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}\\ &=M(1,n-1)\end{aligned} \qquad (۲۵\text{-}۵)$$

ماتریس هنکل با آرایه های n-1,1. همانند قبل تنها زمانی سیستم کنترل پذیر خواهد بود که تابع تبدیل H(s) دارای صفر و قطب مشترک نباشد.

۵-۳-۴) تحقق کانونیکال کنترلر

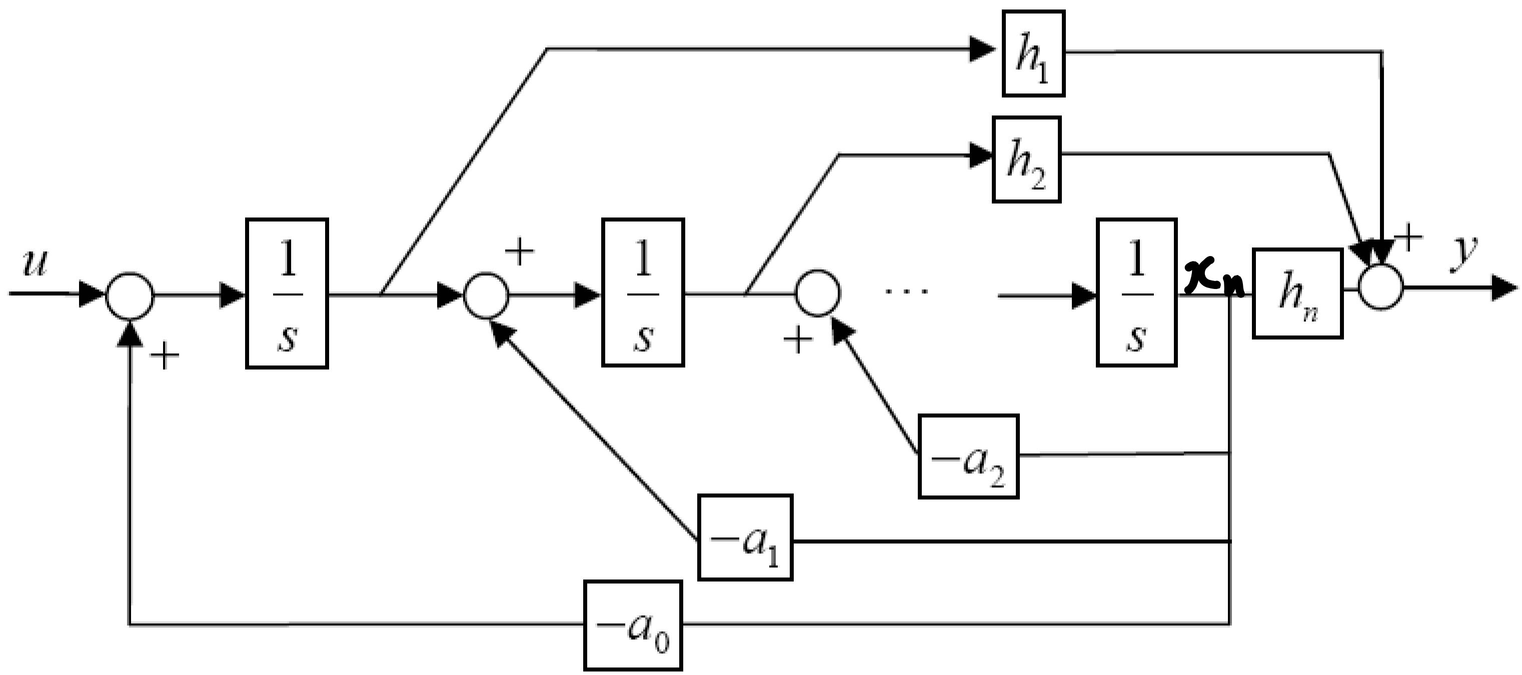
این تحقق دوگان تحقق قبل می باشد لذا

$$\dot{x}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} x+\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u \qquad (۵-۲۶)$$

$$y=\begin{bmatrix} h_1 & h_2 \cdots & h_n \end{bmatrix} x$$

که در آن h_i پارامترهای مارکوف می باشند. لذا ماتریس کنترل پذیری سیستم ماتریس واحد بوده و ماتریس رؤیت پذیری آن ماتریس هنکل می باشد.

نماد بلوکی این تحقـق بـه فـرم زیـر است:



شکل (۵-۴) بلوک دیاگرام تحقق کانونیکال کنترلر

مثال ۵-۱) تحقق های مختلف تابع تبدیل زیر را بدست آورید:

$$H(s)=\frac{s^2+1}{s^3+6s^2+11s+5}$$

نخست توجه کنید قطب و صفرهای سیستم متمایز بوده و لذا تحقـق هـای بدسـت آمـده کـلاً کاهش ناپذیر می باشند.

الف) تحقق کانونیکال کنترل پذیری

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -5 & -11 & -6\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}x$$

ب) تحقق کانونیکال رؤیت‌پذیری

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 0 & -5\\ 1 & 0 & -11\\ 0 & 1 & -6\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

ج) تحقق کانونیکال رؤیت ~~پذیری~~ گر

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -5 & -11 & -6\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\ -6\\ 26\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}y$$

که در آن پارامترهای مارکوف از رابطهٔ زیر تعیین شده اند.

$$\begin{bmatrix}h_1\\ h_2\\ h_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 6 & 1 & 0\\ 11 & 6 & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ -6\\ 26\end{bmatrix}$$

د) تحقق کانونیکال کنترل ~~پذیری~~ کننده

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 0 & -5\\ 1 & 0 & -11\\ 0 & 1 & -6\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}u$$

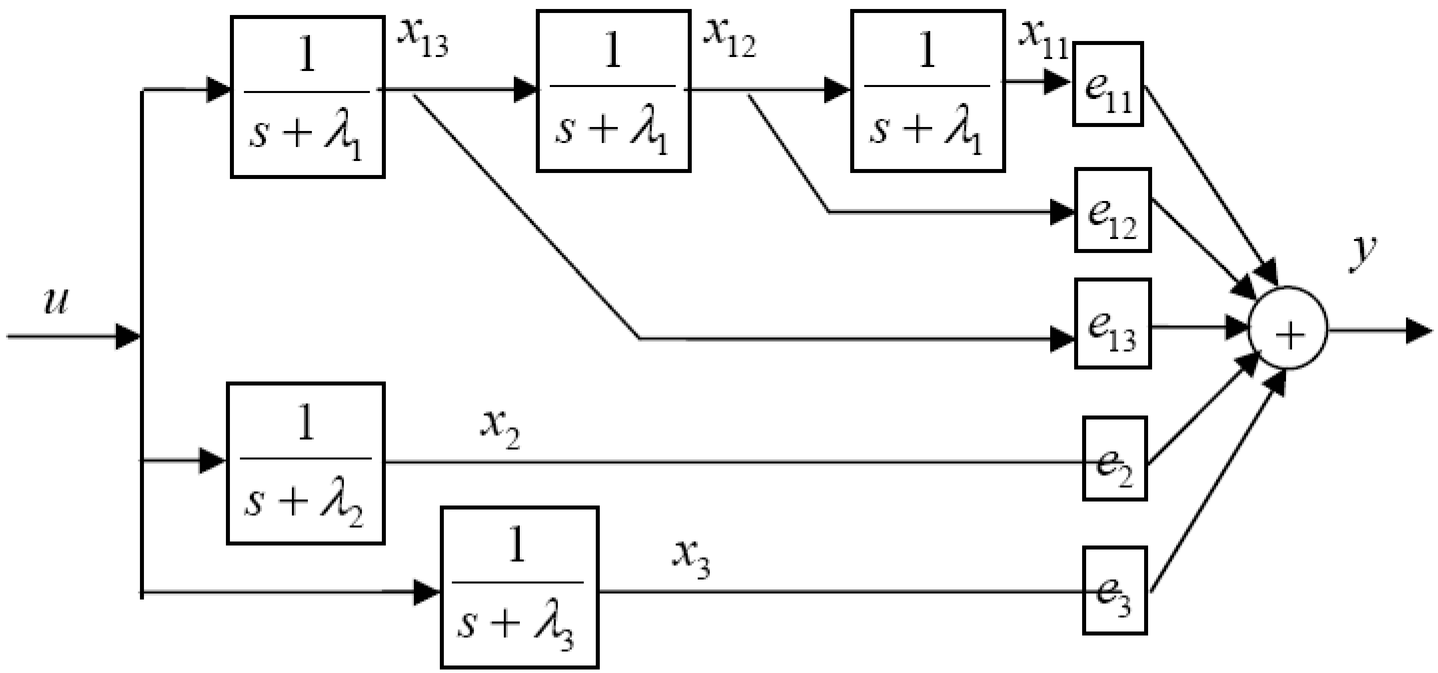
$$y=\begin{bmatrix}1 & -6 & 26\end{bmatrix}x$$

۵-۳-۵) تحقق کانونیکال جوردن

برای سادگی نمایش این روش اجازه دهید از یک مثال برای بیان این تحقق استفاده کنیم. ایدهٔ اصلی تحقق استفاده از فرم جوردن می باشد. که ضمن سادگی مشخصات این سیستم را تعبیر می کند. اما فرم جوردن در توابع تبدیل یعنی جداسازی قطبها و این عمل توسط کسرهای جزئی انجام می شود. به عنوان مثال تابع تبدیل اکیداً سره درجهٔ پنجمی را درنظر بگیرید که دارای یک ریشهٔ تکراری با تکرر ۳ می باشد. این تابع تبدیل را با استفاده از کسرهای جزئی به اجزاء خود تقسیم می کنیم.

$$H(s)=\frac{e_{11}}{(s-\lambda_1)^3}+\frac{e_{12}}{(s-\lambda_1)^2}+\frac{e_{13}}{(s-\lambda_1)}+\frac{e_2}{s-\lambda_2}+\frac{e_3}{s-\lambda_3} \qquad (۲۷\text{-}۵)$$

بدین ترتیب به دو صورت می توان این تابع تبدیل تجزیه شده را تحقق بخشید. شکل زیر نحوۀ تجزیۀ اول آنرا نمایش می دهد.



شکل (۵-۵) نمایش سیستم در تحقق کانونیکال جوردن رؤیت پذیر

لذا در اینحالت:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \qquad (۲۸-۵)$$

$$y = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_2 & e_3 \end{bmatrix} x$$

همانگونه که در شکل ملاحظه می شود خروجی ایـن تحقـق از کلیـهٔ متغیرهـای حالـت تـأثیر پذیرفته است و لذا این تحقق رؤیت پذیر است.

ضمناً تحقق فوق حدرا را

کنترل پذیر نیز هست

مثال

سیستم زیر را به فرم کانونیکال جوردن محقق کنید.

$$H(s)=\frac{s^2-2s+1}{s^3+4s^2+5s+2}=\frac{(s-1)^2}{(s+1)^2(s+2)}$$

$$=\frac{4}{(s+1)^2}+\frac{-8}{(s+1)}+\frac{9}{(s+2)}$$

$$\dot{x}=\left[\begin{array}{cc|c}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ \hline 0 & 0 & -2\end{array}\right]x+\left[\begin{array}{c}0\\ 1\\ \hline 1\end{array}\right]u$$

$$y=\left[\begin{array}{cc|c}4 & -8 & 9\end{array}\right]x$$

۵-۴) تحقق سیستمهای یک ورودی- چند خروجی SIMO

ماتریس تبدیل یک سیستم SIMO یک بردار ستونی از توابع تبدیل می باشد، که مخرج کلیه توابع تبدیل یکسان می باشند.

$$G(s)=\frac{1}{d(s)}\begin{bmatrix} b_1(s) \\ b_2(s) \\ \vdots \\ b_m(s) \end{bmatrix} \qquad d(s)=(sI-A) \qquad (۵\text{-}۲۹)$$

برای بدست آوردن تحقق این گونه سیستمها کافی است تحقق تک تک اجزاء بدست آمده و با یکدیگر به فرم ماتریسی ترکیب شوند. ماتریس حالت این تحقق ها یکسان است چرا که $d(s)$ در کلیهٔ توابع تبدیل تکراری است. از طرف دیگر تنها فرمهای کنترل کننده، کنترل پذیری و ~~کنترل پذیری~~ فرم جوردن برای ترکیب سیستمها مناسب می باشد، چراکه ورودی کلیهٔ سیستمها یکسان است. لذا تحقق ها به فرم زیر خواهند بود.

$d(s)=s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\dots+a_0$

$b_i(s)=b_{i,n-1}s^{n-1}+\dots+b_{i0} \quad i=1,2,\dots,m$

الف) کانونیکال کنترل پذیری

$$\dot{x}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_1 \quad \ldots & -a_{n-1} \end{bmatrix} x+\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y=\begin{bmatrix} b_{10} & b_{11} & \cdots & b_{1\,n-1} \\ b_{20} & b_{21} & \cdots & b_{2\,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m0} & b_{m1} & \cdots & b_{m\,n-1} \end{bmatrix} x \qquad \begin{matrix} \leftarrow b_1 \\ \leftarrow b_2 \\ \\ \leftarrow b_m \end{matrix}$$

(۵-۳۰)

ب) کانونیکال کنترل کننده

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & & 0 & -a_1 \\ \vdots & 1 & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{m1} & h_{m2} & \cdots & h_{mn} \end{bmatrix} x \qquad (۳۱-۵)$$

که در آن h_{ji} پارامترهای مارکوف مربوط به b_j می باشد.

ج) کانونیکال جوردن

بازهم مثال پنج حالته قبل را جهت سادگی نمایش درنظر می گیریم:

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\\1\end{bmatrix}u$$

(۳۲-۵)

$$y=\begin{bmatrix}e_{111} & e_{112} & e_{113} & e_{12} & e_{13}\\ e_{211} & e_{212} & e_{213} & e_{22} & e_{23}\\ \vdots & & & & \vdots\\ e_{m11} & e_{m12} & e_{m13} & e_{m2} & e_{m3}\end{bmatrix}$$

نکته: دقت کنید که اگر در یکی از توابع تبدیل مربوط به ماتریس تبدیل سیستم حذف و صفر قطبی امکانپذیر باشد برای آنکه بتوان کلیهٔ تحقق ها را با یکدیگر ترکیب نمود لازمست کـه از حذف صفر و قطب اجتناب نموده و ماتریس A را به ازای کلیهٔ قطبها (واقعـی و پنهـان) تحقـق دهیم.

تحقق های بدست آمده، کنترل پذیر بوده و اگر جمله های $b_1(s)$ تا $b_m(s)$ و $d(s)$ حتی با هم عامل مشترک نداشته باشند رویت پذیر نیز می باشد.

مثال ۵-۳)

تحقق کانونیکال کنترل ~~کننده~~ پذیری را برای سیستم زیر تعیین کنید.

پاسخ: صفر و قطبهای حذف شده را بازسازی می کنیم.

$$H(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{(s^2+1)(s+1)}\\ \dfrac{s}{(s+1)(s+2)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{s+2}{(s^2+1)(s+1)(s+2)}\\ \dfrac{s(s^2+1)}{(s^2+1)(s+1)(s+2)}\end{bmatrix}$$

$$d(s)=s^4+3s^3+3s^2+3s+2$$

$b_1(s) = s + 2$

$b_2(s) = s^3 + s$

لذا تحقق زیر را می توان براحتی بدست آورد.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -3 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow s+2 \\ \rightarrow s^3 + 0s^2 + s + 0 \end{matrix}$$

سؤال: آیا تحقق فوق کاهش ناپذیر است؟

۵-۵) تحقق سیستمهای چند ورودی- تک خروجی MISO

ماتریس تبدیل چنین سیستمی یک بردار سطری از توابع تبدیل گویا خواهد بود.

$$H(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{B_1(s)}{a_1(s)} & \dfrac{B_2(s)}{a_2(s)} & \cdots & \dfrac{B_r(s)}{a_r(s)}\end{bmatrix} \tag{۳۳-۵}$$

درحالت کلی بایستی کلیهٔ چند جمله ایهای مخرج یکسان باشند. درصورتی که به علـت حـذف صفر و قطب مسترک در تعدادی از آنهااین حالت دیده نشود می توان با مخرج مشترک گیـری فرم استاندارد زیر را تعیین نمود.

$$H(s)=\frac{1}{a(s)}\begin{bmatrix}b_1(s) & b_2(s) & \cdots & b_r(s)\end{bmatrix} \tag{۳۴-۵}$$

بحث تحقق در اینحالت نیز کاملاً مشابه حالت SIMO می باشد با این تفـاوت کـه چـون کلیـهٔ سیستمها دارای یک خروجی می باشند، از فرمهای رؤیت پذیر و رؤیتگر بایستی استفاده نمود.

$a(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0$

$b_i(s) = b_{i,n-1}s^{n-1} + \cdots + b_{i0} \quad i=1,2,\dots,r$

الف) تحقق کانونیکال رؤیت پذیری

$$\dot{x}=\begin{bmatrix} 0 & 0\cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & & -a_1 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}x+\begin{bmatrix} b_{10} & & b_{r0} \\ b_{11} & & b_{r1} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{1\;n-1} & \cdots & b_{r\;n-1} \end{bmatrix}u \qquad (۳۵-۵)$$

$$y=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}x$$

ب) تحقق کانونیکال رؤیت گر

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} h_{11} & \cdots & h_{r1} \\ h_{12} & & h_{r2} \\ \vdots & & \vdots \\ h_{1n} & \cdots & h_{rn} \end{bmatrix} u \qquad (۳۶\text{-}۵)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

۵–۶) تحقق سیستم های چند ورودی و چند خروجی MIMO

ماتریس تبدیل یک سیستم MIMO را به صورت زیر درنظر بگیرید.

$$G(s) = \left[Gij(s) \right]_{m\times r} \qquad (۳۸\text{-}۵)$$

که m تعداد خروجی و r تعداد ورودی سیستم می باشد. با توجه به اینکه ورودی و خروجی این سیستم هیچکدام واحد نمی باشند، مانند حالتهای قبل نمی توان به سادگی با فرض یک ماتریس ثابت A تحقق های اجزاء را با یکدیگر ترکیب نمود. در اینجا بایستی برای سطرهای ماتریس G(s) (یا ستونهای آن) تحقق های را بدست آورده و سپس کل تحقق های سطری را با بلوک کردن ماتریسهای A در آن ترکیب نمود. در اینحالت مسلماً تحقق بدست آمده کاهش ناپذیر نبوده و می بایست با استفاده از روش جوردن یا روشهای دیگر نسبت به کاهش مرتبۀ آن پرداخت. روشهای زیادی در این زمینه وجود دارد که در زیر به ارائۀ یک روش متداول آن می پردازیم. فرض کنید سیستم r ورودی و m خروجی را به صورت سطری بازنویسی کنیم.

$$G(s)=\begin{bmatrix} \frac{b_{11}(s)}{a_1(s)} & \frac{b_{12}(s)}{a_1(s)} & \cdots & \frac{b_{1r}(s)}{a_1(s)} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{b_{m1}(s)}{a_m(s)} & \frac{b_{m2}(s)}{a_m(s)} & \cdots & \frac{b_{mr}(s)}{a_m(s)} \end{bmatrix} \qquad (۳۹-۵)$$

فرم تحقق بدست آمده بصورت زیر است.

$$\dot{x}=\begin{bmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_m \end{bmatrix}x+\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_m \end{bmatrix}\underset{\sim}{m} \qquad (۴۰-۵)$$

$$y=\begin{bmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_r \end{bmatrix}x$$

که در آن A_i ها از تحقق سطرهای ماتریس به فرم زیر تعیین می شوند.

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & -a_0^i \\ 1 & 0 & & \vdots \\ & 1 & & \\ \vdots & & & -a_0^i \\ 0 & \cdots & 1 & -a_0^i \end{bmatrix} \tag{۴۱-۵}$$

$$B_i = \begin{bmatrix} b_0^{i1} & b_0^{i2} & \cdots & b_0^{ir} \\ b_1^{i1} & b_0^{i2} & \cdots & b_0^{ir} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{n-1}^{i1} & b_{n-1}^{i2} & \cdots & b_{n-1}^{ir} \end{bmatrix} \tag{۴۲-۵}$$

$$C_i = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{row i} \\ \\ \end{array} \end{array} \tag{۴۳-۵}$$

مثال

$$G(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s+1} & \dfrac{1}{s+3}\\[2ex] \dfrac{1}{s+1} & \dfrac{1}{s+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{(s+1)(s+3)}\begin{bmatrix}s+3 & s+1\end{bmatrix}\\[2ex] \dfrac{1}{(s+1)}\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

$$A=\left[\begin{array}{cc|c}0 & -3 & 0\\ 1 & -4 & 0\\ \hline 0 & 0 & -1\end{array}\right] \qquad B=\left[\begin{array}{cc}3 & 1\\ 1 & 1\\ \hline 1 & 1\end{array}\right]$$

$$C=\left[\begin{array}{cc|c}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

مثال ۵–۴): با MATLAB حل شود

$$G(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s+1} & \dfrac{2}{s+3}\\[2mm] \dfrac{1}{s+1} & \dfrac{1}{s+1}\end{bmatrix}$$

با استفاده از دستور sysic و unpck خواهیم داشت:

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix};\quad B=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1.4142\\ -1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}-1 & -1.4142 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -1\end{bmatrix}$$

با استفاده از دستور minreal سیستم کاهش مرتبه یافته به صورت زیر تعیین می شود:

$$A=\begin{bmatrix} -1.2857 & 0.3598 & -0.6003 \\ 0.3598 & -1.4531 & 0.7559 \\ -0.6003 & 0.7559 & -2.2612 \end{bmatrix}; \quad B=\begin{bmatrix} -1.0690 & 1.0690 \\ 0.4760 & 0.1394 \\ 0.7941 & 1.3556 \end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix} 0 & -0.4351 & 1.5201 \\ 0 & 1.0505 & 0.6296 \end{bmatrix}$$

۵-۷) پایداری سیستمهای LTI

پایداری سیستمهای دینامیکی یکی از خصوصیتهای مهم و مطلوب مهندسی است. چرا که درصورت ناپایدار شدن درحالت کلی متغیرهایی از سیستم به سمت بی نهایت میل می کنند که در عمل با بزرگ شدن این متغیرها، حالت بحرانی و خطرناکی در سیستم اتفاق خواهد افتاد. لذا دور شدن از ناپایداری یکی از ضروریات سیستمهای کنترل می باشد. تعاریف متعددی برای پایداری وجود دارد. اجازه دهید در ابتدا با نگرش کلی بر معادلات دینامیکی (خطی و غیرخطی) تعاریفی چند از پایداری را ارائه نموده و سپس توجه خود را به سیستمهای LTI معطوف سازیم.

۵-۷-۱) تعاریف پایداری

سیستم غیرخطی $\dot{x}=f(x,t)$ را درنظر گرفته و فرض کنید x^* یک حالت تعادل برای سیستم است. در اینحالت $f(x^*,t)=0$ خواهد بود.

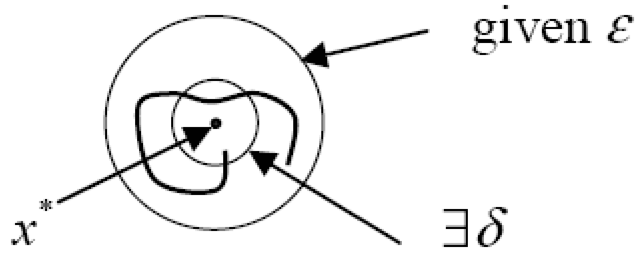
تعریف ۱: پایداری به مفهوم لیاپانوف (پایداری لیاپانوف)

سیستم فوق را که دارای یک پاسخ x(t) یا مسیر[۱] و نقطه تعادل x^* می باشد را درنظر بگیرید. این سیستم را پایدار لیاپانوف می گوئیم اگر:

$$\begin{gathered}\forall t_0\in\mathbb{R},\ \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0 \ni \\ \|x(t_0)-x^*(t_0)\|\le\delta \ \Rightarrow\ \|x(t)-x^*(t)\|\le\varepsilon\end{gathered} \tag{۴۴-۵}$$

در اینجا $\|\cdot\|$ نماد نرم یک بردار است، که به صورت نرم اقلیدسی می تواند تعریف شود:

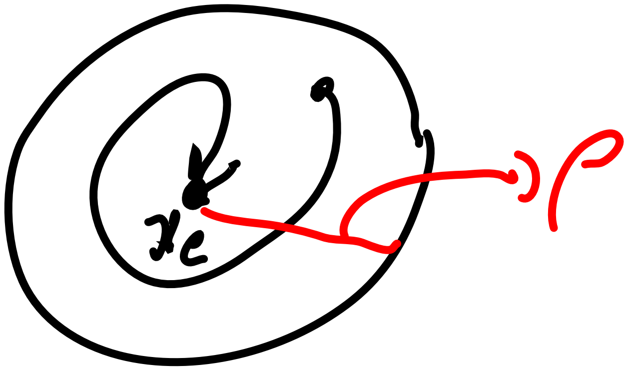
$$\|x(t)\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{N}x_i^2(t)} \tag{۴۵-۵}$$



ایده این تعریف اینست که با درنظر گرفتن شرایط اولیه نزدیک به نقطه تعادل می توان پاسخ را تا حد دلخواه نزدیک به نقطه تعادل تعیین نمود:

$$\forall t \; \| x(t) - x^*(t) \| < \delta$$

یا به عبارت دیگر مسیر در دایره δ حول x^* باقی خواهد ماند. در این تعریف، محدود بودن پاسخ لحاظ شده است ولی میل کردن به نقطه تعادل منظور نشده است و این موضوع از لحاظ عملی بسیار مهم است. لذا این تعریف را می توان به فرم زیر تقویت نمود



تعریف ۲: پایداری مجانبی لیاپانوف

پاسخ نامی $x^*(t)$ (یا نقطه تعادل) پایداری مجانبی است اگر

الف) پایداری لیاپانوف بر قرار بوده و علاوه بر آن:

ب) $$\forall t_0, \exists \rho(t_0) > 0 \ni \left\| x(t_0) - x^*(t_0) \right\| < \rho \Rightarrow \lim_{t \to \infty} \left\| x(t) - x^*(t) \right\| = 0$$

لذا در این تعریف محدوده همگرائی برای نقطه تعادل با ρ تعیین می شود. در حالی که ρ کل صفحه $\mathbb{R}^n$ را شامل شود این تعریف به حالت پایداری مجانبی فراگیر[1] نامیده می شود.

برای سیستم های خطی غیر متغیر با زمان دو نوع پایداری دیگر تعریف می شوند که عمومیت بیشتری دارند.

تعریف ۳: پایداری داخلی

یک سیستم LTI را پایدار داخلی می نامند، اگر پاسخ سیستم بـدون ورودی $x_{zi}(t)$ بـه ازای کلیه شرایط اولیه دلخواه به سمت صفر میل کند.

تعریف ۴: پایداری ورودی– خروجی BIBO

یک سیستم LTI پایدار ورودی– خروجی (BIBO) میباشد، اگر به ازای ورودی محدود (BI) و شرایط اولیه صفر پاسخ بدون شرایط اولیهٔ سیستم ($y_{zs(t)}$) محدود (BO) باقی بماند.

همانگونه که از تعریف پایداری در سیستمهای LTI روشـن اسـت دیـدگاه تعریـف در پایـداری داخلی کاملا منطبق بر نمایش سیستم به صورت معادلات حالـت و یـا دیـدگاه کنتـرل مـدرن می باشد. در صورتی که در تعریف دوم، شرایط اولیه صفر و ورودی– خروجی دلالت بر دیـدگاه کلاسیک یا نمایش سیستم به صورت تابع تبـدیل دارد. لـذا تـرجیح عمـومی تحلیـل پایـداری سیستمهای خطی بر پایداری داخلی بنیان گذارده می شود.

۵-۷-۲) قضایای پایداری سیستمهای LTI

قضیهٔ ۵-۳) پایداری داخلی

یک سیستم LTI پایدار داخلی است، اگر و تنها اگر، کلیه مقادیر ویژهٔ ماتریس A در نیم صفحه باز سمت چپ (OLHP) قرار گیرند: ($\forall \lambda_i \rightarrow \mathrm{Re}(\lambda i) < 0$)

قضیهٔ ۵–۵)

یک سیستم SISO خطی غیر متغیر با زمان پایداری BIBO می باشد، اگر و تنها اگر، کلیه قطبهای تابع تبدیل آن در نیم صفحهٔ باز سمت چپ قرار گیرند. $\forall p_i \rightarrow \mathrm{Re}(p_i) < 0$.

اثبات: این قضیه نیز کاملاً مشابه با اثبات قضیهٔ پایداری داخلی است که با تفکیک پاسخ به مضارب $t^k e^{p_i t}$ صورت می پذیرد.

■

در حالت MIMO نیز شرط لازم و کافی فوق بدین ترتیب تعمیم می یابد که کلیه عناصر ماتریس تبدیل بایستی دارای قطبهای پایدار $\operatorname{Re}(p_i) < 0$ باشند.

در تعریف پایداری داخلی و پایداری BIBO با اینکه با دو نگرش مختلف تعبیر شده اند با یکدیگر ارتباط منطقی دارند. اگر سیستمی پایدار داخلی باشد با توجه به اینکه خروجیها از ترکیب خطی متغیرهای حالت محدود تشکیل می شود حتماً پایدار BIBO می باشد. اما معکوس آن همیشه صادق نیست. چراکه تحقق یک تابع پایدار ممکن است شامل مودهای پنهان باشد که درصورتیکه این مودها ناپایدار باشند، پایداری داخلی خدشه دار می شود. اما درصورتی که تحقق انجام پذیرفته کاهش ناپذیر باشد امکان حذف صفر و قطب برای عناصر ماتریس تبدیل وجود نخواهد داشت و می توان از پایداری BIBO پایداری داخلی را نتیجه گرفت. به هر حال در تئوری سیستمهای خطی، در اغلب موارد پایداری داخلی دارای اهمیت اصلی است.

مهم

قضیهٔ ۵–۸)

سیستم خطی غیر متغیر با زمان $\dot{x} = Ax(t)$ پایدار مجانبی است اگر و تنها اگر پایدار داخلی باشد. یا

$$\boxed{\text{پایدار مجانبی = پایدار داخلی}}$$

سیستم LTI $\dot{x} = Ax$ پایدار مرزی است اگر و فقط اگر تمام مقادیر ویژه

آن جز حقیقی نامثبت داشته باشند. غیر تکراری برای محور موهومی و سمت چپ محور باشند

سیستم LTI $\dot{x} = Ax$ ناپایدار است اگر ماتریس A دارای مقادیر ویژه، تکراری

بر روی محور موهومی و یا در سمت راست آن باشد.

- قضیه خطی سازی لیاپانوف

سیستم غیر خطی $X'=f(X)$ را با نقطه تعادل صفر در نظر بگیرید فرض کنید معادل خطی شده سیستم بصورت $X'=AX$ با شد که ماتریس A ماتریس ژاکوبین سیستم می باشد. داریم:

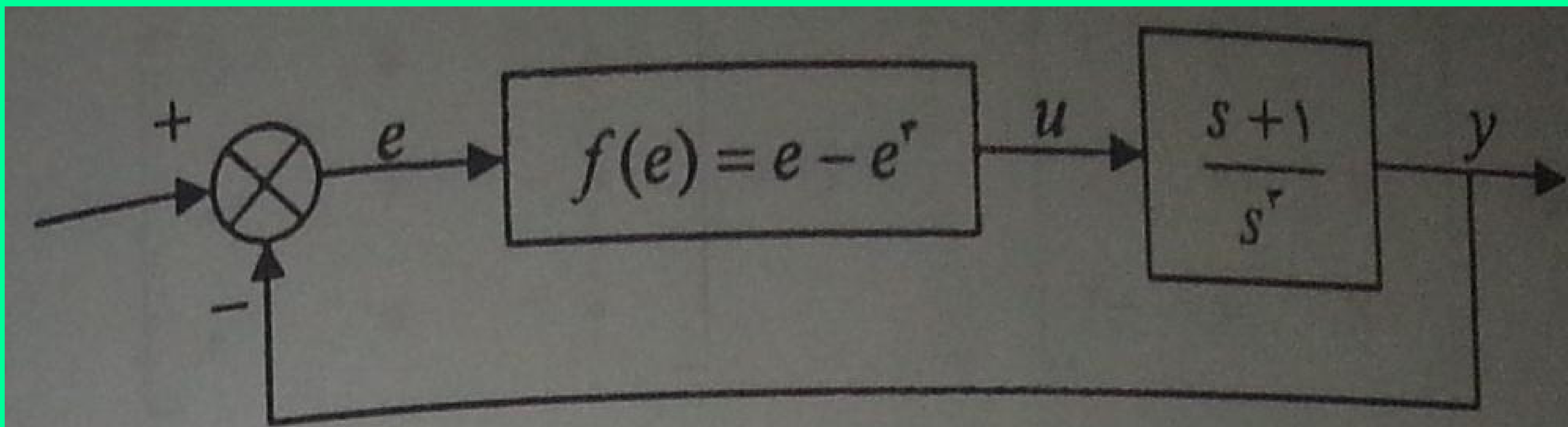
<u>**قضیه: روش خطی سازی لیاپانوف**</u>

۱- اگر سیستم خطی شده مطلقا پایدار باشد (تمامی مقادیر ویژه ماتریس A سیستم دارای قسمت حقیقی منفی باشند) آنگاه نقطه تعادل برای سیستم غیر خطی اولیه پایدار مجانبی خواهد بود.

۲- اگر سیستم خطی شده ناپایدار باشد (دست کم یکی از مقادیر ویژه ماتریس A دارای قسمت حقیقی مثبت باشد) آنگاه نقطه تعادل برای سیستم غیرخطی اولیه ناپایدار خواهد بود.

۳- اگر سیستم خطی شده پایدار مرزی باشد (دست کم یکی از مقادیر ویژه ماتریس A روی محور $j\omega$ بود و سایر مقادیر ویژه همگی سمت چپ محور $j\omega$ واقع شوند) آنگاه پایداری، ناپایداری و یا پایداری مجانبی سیستم غیر خطی اولیه کاملا نامشخص است.

تمرین: با استفاده از روش خطی سازی در مورد پایداری سیستم نظر دهید



$$\begin{cases} x' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u & ① \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x_3 \\ u = e - e^3 & ② \\ e = -x_3 = -y \end{cases}$$

با استفاده از ① و ② معادلات حالت غیر خطی سیستم بدست ما آید سپس با خطی سازی معادلات در مورد پایداری سیستم نظر داد.

$$\begin{cases} x_1' = u = -x_2 + x_3 \\ x_2' = x_1 - x_3 + x_3 \\ x_3' = x_2 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$|\lambda I - A| =$

$s^3 + s + 1 = 0$

سیستم خطی ناپایدار است.

نقطه تعادل سیستم نیز ناپایدار است.

۱ سیستم زیر را درنظر بگیرید.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & 1 \end{bmatrix} x$$

الف) آیا این سیستم پایدار داخلی است.

ب) تابع تبدیل $\dfrac{y}{u}$ را محاسبه نموده و نشان دهید این سیستم پایدار BIBO می باشد.

ج) فرض کنید یک ورودی اغتشاشی به سیستم به فرم زیر اعمال شود.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} w$$

نشان دهید با این ورودی تابع تبدیل $\dfrac{y}{w}$ پایدار BIBO نمی باشد.

الف) تحقق های کانونیکال کنترل کننده و کنترل پذیری تابع تبدیل زیر را بیابید.

$$G(s)=\frac{2}{(s+2)(s+3)^2}$$

ب) تحقق های رؤیت کننده و رؤیت پذیری را برای سیستم زیر پیدا کنید.

$$G(s)=\frac{s^3+2s^2+2s+1}{(s+1)^2(s+2)}$$

ج) آیا تحقق های بدست آمده کاهش ناپذیرند، بلوک دیاگرام این تحقق ها را رسم نموده و به صورت کالمن تجزیه کنید.

۳) یک تحقق کاهش ناپذیر برای ماتریسهای تبدیل زیر بیابید.

الف)
$$G(s)=\begin{bmatrix} \dfrac{s+2}{s+1} & \dfrac{2}{s+2} \\ \dfrac{s}{s+1} & \dfrac{s+1}{s+s} \end{bmatrix}$$

ب)
$$G(s)=\begin{bmatrix} \dfrac{s^2+1}{s^2} & \dfrac{2s+1}{s^2} \\ \dfrac{s+3}{s^2} & \dfrac{2}{s} \end{bmatrix}$$

۴

[redacted]) سیستم زیر را درنظر بگیرید.

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -1 & -2 & -10 & -4\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}x(t)$$

پایداری داخلی و BIBO سیستم را تحلیل نموده و برروی آن بحث کنید.

۵- برای تابع تبدیل داده شده زیر

$$g(s) = \frac{۱}{s + ۳}$$

(الف) یک تحقق می‌نیمال پیدا کنید.

(ب) یک تحقق کنترل پذیر و رؤیت‌ناپذیر پیدا کنید.

(ج) یک تحقق کنترل‌ناپذیر و رؤیت‌پذیر پیدا کنید.

(د) یک تحقق کنترل‌ناپذیر و رؤیت‌ناپذیر پیدا کنید.

۶

~~۴~~- حداقل دو تحقق برای ماتریس‌های تابع تبدیل زیر بدست آورید

(الف) $$G(s)=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+2} & \dfrac{1}{s^2+3s+2} \end{bmatrix}$$

(ب) $$G(s)=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{s^2+s+3} \\ \dfrac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

(پ) $$G(s)=\begin{bmatrix} \dfrac{2s}{(s+1)(s+2)(s+3)} \\ \dfrac{s^2+2s+2}{s(s+1)^2(s+4)} \end{bmatrix}$$

(ت) $$G(s)=\begin{bmatrix} \dfrac{2s+3}{(s+1)(s+2)(s+3)} & \dfrac{s^2+2s+2}{s(s+1)^2(s+4)} \end{bmatrix}$$

آیا تحقق‌های بدست آمده می‌نیمال می‌باشند؟

۷) در مورد پایداری سیستم‌های زیر با ماتریس حالت داده شده نظر دهید.

(الف) $A=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ -۱۰ & -۵ & -۶ \end{bmatrix}$ (ب) $A=\begin{bmatrix} ۱۰ & ۶ & ۴ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ -۲ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}$

(پ) $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۲ & ۰ \\ ۵ & -۱ & ۳ \\ ۰ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ (ت) $A=\begin{bmatrix} ۴ & ۴ & ۰ \\ ۳ & ۱ & ۴ \\ ۰ & - & ۲ \end{bmatrix}$

~~برای دو سیستم داده شده زیر~~

ث) $\dot{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ -k & -۱ & -۲ \end{bmatrix}\mathbf{x}$ ج) $\dot{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ -k & -۵ & -۶ \end{bmatrix}\mathbf{x}$

و

$$V(\mathbf{x})=۶k x_۱^۲+۲k x_۱ x_۲+۴۱ x_۲^۲+۱۲ x_۲ x_۳+x_۳^۲$$

~~نشان دهید که $\dot{V}(\mathbf{x})$ برای محدوده گسترده‌ای از k منفی معین است و مثبت معین باقی~~
~~می‌ماند. همچنین نشان دهید که سیستم‌ها پایدار مجانبی، فراگیر می‌باشند.~~
~~۳-۳ سیستم و تابع لیاپانوف زیر را در نظر بگیرید:~~

ح) $\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ -k & -۱ & ۰ \end{bmatrix}\mathbf{x}$

و

~~$V(\mathbf{x})=۲k x_۱^۲+ ۲k x_۱ x_۲ + \dots$~~

~~پایداری این سیستم را برای تغییرات k بررسی کنید.~~

۸- یک تابع لیاپانوف برای سیستم زیر پیداکرده و پایداری آنرا تعیین نمائید.

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

۹- پایداری نقطه تعادل سیستم زیر را تعیین کنید.

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1^3 - x_2$$

۱۰- پایداری نقطه تعادل سیستم زیر را تعیین کنید.

$$\dot{x}_1 = x_1 - x_2 - x_1^3$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + x_2 - x_1^3$$

۱۱- معادلات حالت و خروجی سیستمی عبارتند از

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ -۱ & -۱ & -۲ & -۱۰ & -۴ \end{bmatrix}\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}\mathbf{x}(t)$$

پایداری مجانبی، BIBO و پایداری-T این سیستم را بررسی کنید.