## دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی– دانشکده ریاضی

آزمون میان ترم درس معادلات دیفرانسیل (نیمسال دوم ۹۷-۹۶) جمع نمرات: ۶۰

تاریخ آزمون: ۱۳۹۷/۲/۲۴ مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه

- **این امتحان شامل ۵ سؤال است. پاسخ سؤالات را به ترتیب در دفترچه امتحانی بنویسید و در هر برگه دفترچه فقط و فقط به یک سؤال پاسخ دهید.**

۱- با استفاده از تغییر متغیر $y = z^{\alpha}$ معادله زیر را حل کنید. (۱۲ نمره)

$$(x-2y^3)dx+3y^2(2x-y^3)dy=0$$

---

۲- مسیرهای قائم دسته منحنی‌های زیر را بیابید. (۹ نمره)

$$r^{-1}=\sin^2(\theta)+c$$

---

۳- معادله مرتبه دوم زیر را با شرایط اولیه مشخص شده حل کنید: (۱۵ نمره)

$$y''\cos(y)+(y')^2\sin(y)-y'=0$$

$$y(-1)=\frac{\pi}{6},\quad y'(-1)=2$$

* یادآوری از روابط مثلثاتی: $\tan a+\tan b=\frac{\sin(a+b)}{\cos a\cos b}$

---

۴- جواب کلی معادله دیفرانسیل $y''+y=\cot(x)$ را بیابید. (۱۲ نمره)

---

۵- جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'=\frac{y}{x^3y^2\ln y-x}$ را بیابید. (۱۲ نمره)

---

با آرزوی موفقیت

« پاسخنامه میانترم معادلات دیفرانسیل »

( اردیبهشت ۹۷ - دانشگاه صنعتی خواجه نصیر الدین طوسی )

1) $(x-2y^3)dx + 3y^2(2x-y^3)\,dy = 0$ $\qquad y = z^{\alpha}$ تغییر متغیر

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-2y^3}{3y^2(y^3-2x)} \qquad \begin{cases} y = z^{\alpha} \\ y' = \alpha z^{\alpha-1} z' \end{cases}$$

$$\alpha z^{\alpha-1} z' = \frac{x-2z^{3\alpha}}{3z^{2\alpha}(z^{3\alpha}-2x)} \rightarrow z' = \frac{x-2z^{3\alpha}}{3\alpha z^{3\alpha-1}(z^{3\alpha}-2x)}$$

اگر $\alpha = \frac{1}{3}$ را جایگذاری کنیم به معادله همگن می رسیم :

$$\xrightarrow{\alpha=\frac{1}{3}} z' = \frac{x-2z}{z-2x} = \frac{1-2\frac{z}{x}}{\frac{z}{x}-2}$$

تغییر متغیر همگن

$$\begin{cases} \frac{z}{x} = u \rightarrow z = ux \\ \qquad \rightarrow z' = u'x + u \end{cases} \xrightarrow{\text{جایگذاری}} u'x + u = \frac{1-2u}{u-2}$$

$$\rightarrow u'x = \frac{-u^2+1}{u-2} \rightarrow \frac{u-2}{1-u^2}\,du = \frac{dx}{x} \xrightarrow[\text{تفکیک پذیر}]{\int}$$

$$-\frac{1}{2}\ln(1-u^2) + \ln\left(\frac{u-1}{u+1}\right) = \ln cx$$

$$\rightarrow \frac{u-1}{(u+1)\sqrt{1-u^2}} = cx \xrightarrow[z=y^3]{u=\frac{z}{x}} \boxed{\frac{\frac{y^3}{x}-1}{\left(\frac{y^3}{x}+1\right)\sqrt{1-\left(\frac{y^3}{x}\right)^2}} = cx}$$

ابراهیم شاه ابراهیمی _ اردیبهشت ۹۷

۲) $r^{-1} = \sin^2(\theta) + c \xrightarrow{\text{مشتق}} -r^{-2}\,dr = 2\sin\theta\cos\theta\,d\theta$

$\longrightarrow -\dfrac{dr}{r^2\,d\theta} = 2\sin\theta\cos\theta$ $\qquad \underbrace{\dfrac{r\,d\theta}{dr} \to -\dfrac{dr}{r\,d\theta}}_{\text{مسیر قائم}}$

$\longrightarrow \dfrac{d\theta}{dr} = \sin 2\theta$

$\longrightarrow \dfrac{d\theta}{\sin 2\theta} = dr \xrightarrow[\text{انتگرال گیری}]{\int} \boxed{r = -\dfrac{1}{2}\ln\left|\csc 2\theta + \cot 2\theta\right| + c}$

۳) $y'' \cos(y) + y'^{2} \sin(y) - y' = 0 \qquad y(-1) = \pi/6 \qquad y'(-1) = 2$

$$\xrightarrow[\text{فاقد } x]{\text{معادله غیرخطی}} \begin{cases} y' = u \\ y'' = u \dfrac{du}{dy} \end{cases} \xrightarrow{\text{جایگذاری}} u \frac{du}{dy} \cos(y) + u^2 \sin(y) - u = 0$$

$$\to u \left( \frac{du}{dy} \cos y + u \sin y - 1 \right) = 0 \begin{cases} u = 0 \to y' = 0 \to y = c \to \text{غیرقابل قبول} \\ \dfrac{du}{dy} \cos y + u \sin y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\div \cos y} \underbrace{u' + tg\,y \cdot u = \sec y}_{\text{معادله مرتبه اول خطی}} \to \text{عامل} = e^{\int tg\,y\,dy} = e^{-\ln(\cos y)} = \boxed{\frac{1}{\cos y}} = \sec y$$

$$\xrightarrow{\times \sec y} \underbrace{u' \sec y + tg\,y \cdot \sec y \cdot u}_{(u \sec y)'} = \sec^2 y \xrightarrow{\int} u \sec y = tg\,y + c_1$$

$$\xrightarrow{y' = u} \boxed{y' = \frac{tg\,y + c_1}{\sec y}} \quad (\mathrm{I})$$

$$\to \frac{\sec y}{tg\,y + c_1} dy = dx$$

فرم دلخواه $(tg\,c_1)$

$$\to \frac{\sec y}{tg\,y + tg\,c_1} dy = dx$$

$$\xrightarrow{\text{طبق راهنمایی سوال}} \frac{\sec y}{\dfrac{\sin(y + c_1)}{\cos y \cdot \cos c_1}} = \frac{\cos c_1}{\sin(y + c_1)}$$

$$\xrightarrow[\text{تفکیک پذیر}]{\int} \boxed{-(\cos c_1) \ln \left| \csc(y + c_1) + \cot(y + c_1) \right| = x + c_2} \quad (\mathrm{II})$$

$$\xrightarrow[y = \pi/6 \quad y' = 2]{\text{اعمال شرط در } (\mathrm{I})} 2 = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + c_1}{\frac{2}{\sqrt{3}}} \to c_1 \checkmark$$

$$\xrightarrow{\text{اعمال شرط در } (\mathrm{II})} c_2 \checkmark$$

۴) $y'' + y = \cot x$

$\xrightarrow{\text{قسمت همگن}} y'' + y = 0 \xrightarrow{\text{مشخصه}} t^2 + 1 = 0 \longrightarrow t^2 = -1 \longrightarrow t = \pm i \longrightarrow \boxed{y_h = c_1 \sin x + c_2 \cos x}$

$\xrightarrow{\text{روش لاگرانژ}} \begin{cases} y_1 = \sin x \\ y_2 = \cos x \end{cases} \longrightarrow w(x) = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = \underline{-1} \qquad g(x) = \cot x$

$$c_1 = -\int \frac{y_2 \cdot g(x)}{w(x)} dx \longrightarrow c_1 = -\int \frac{\cos x \cdot \cot x}{-1} dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin x} dx = \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin x} dx$$

$$= \int \csc x - \int \sin x = \boxed{-\ln|\csc x + \cot x| + \cos x}$$

$$c_2 = \int \frac{y_1 \cdot g(x)}{w(x)} dx \longrightarrow c_2 = \int \frac{\sin x \cdot \cot x}{-1} dx = -\int \cos x \, dx = \underline{-\sin x}$$

$\xrightarrow{y = c_1 \sin x + c_2 \cos x} \boxed{y_p = (-\ln|\csc x + \cot x| + \cos x)\sin x - \sin x \cdot \cos x} = -\sin x \cdot \ln|\csc x + \cot x|$

$$\boxed{y_{\text{کل}} = y_h + y_p}$$

ابراهیم شاه ابراهیمی _ اردیبهشت ۹۷

# تحلیل میانترم

سوال 1 - ایده تبدیل معادله به یک معادله همگن به کمک تغییر متغیر مجهول جزو حالات مرسوم در امتحانات معادلات دیفرانسیل نیست

سوال 2 - مسیرهای قائم پای ثابت اکثر امتحانات معادلات است اما فرم قطبی جزو حالات مرسوم نیست

سوال 3 - معادله مرتبه2 غیرخطی که از استاندارد فاصله داشت

سوال 4 - معادله مرتبه2 خطی باضرایب ثابت که به روش لاگرانژ حل میشد و کاملا استاندارد بود

سوال 5 - معادله مرتبه اول (کد3تایی)که با تغییرمتغیر از برنولی به خطی تبدیل میشد و کاملا استاندارد بود



۵) $y' = \dfrac{y}{x^3y^2\operatorname{Ln}y - x} \longrightarrow x' = \dfrac{x^3y^2\operatorname{Ln}y - x}{y} \longrightarrow x' + \dfrac{1}{y}x = x^3 y^2 \operatorname{Ln}y \xrightarrow[\text{برنولی}]{\div x^3}$

مزاحم

$\dfrac{x'}{x^3} + \dfrac{1}{yx^2} = y^2\operatorname{Ln}y \xrightarrow{\text{تغییر متغیر}} \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} = t \\ -\dfrac{2}{x^3}x' = t' \end{cases} \xrightarrow{\text{جایگذاری}} -\dfrac{t'}{2} + \dfrac{1}{y}t = y^2\operatorname{Ln}y$

$\xrightarrow{\times -2} t' - \dfrac{2}{y}t = -2y^2\operatorname{Ln}y \longrightarrow \text{عامل}: e^{\int -\frac{2}{y}dy} = e^{-2\operatorname{Ln}y} = e^{\operatorname{Ln}y^{-2}} = y^{-2}$

مرتبه اول خطی

$\xrightarrow{\times y^{-2}} \underbrace{t'\cdot y^{-2} - 2y^{-3}t}_{(t\cdot y^{-2})'} = -2\operatorname{Ln}y \xrightarrow{\int} t\cdot y^{-2} = -2(y\operatorname{Ln}y - y) + c$

$\xrightarrow{\frac{1}{x^2} = t} \boxed{\dfrac{1}{x^2y^2} = -2y(\operatorname{Ln}y - 1) + c}$

ابراهیم شاه‌ابراهیمی - اردیبهشت ۹۷



کارشناس ارشد مهندسی عمران
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
مدرس تخصصی ریاضیات دانشگاه