دانشگـاه تهـران

دانشکده فنی مهندسی

تست سرشکنی

دکترهاشمی فراهانی

فصل اول) مروری بر تئوری خطاها

فصل دوم) سرشکنی جهت دقت شبکه‌ها [illegible]

فصل سوم) شبکه‌های مبنای [illegible]

فصل چهارم) سرشکنی

فصل پنجم) شبکه‌ها [illegible] سرشکنی

فصل ششم) [illegible]

فصل اول : مروری بر تئوری خطاها

Residual

۱-۱) باقیمانده :

عبارتست از اختلاف هریک از اعضاء نمونه با میانگین

$$r_1 = x_1 - M$$
$$r_2 = x_2 - M$$
$$\vdots$$
$$r_n = x_n - M$$

x_i : اعضاء نمونه

M : میانگین

$$\sum_{i=1}^{n} r_i = \sum_{i=1}^{n} x_i - M$$

r_i : اختلاف (باقیمانده)

n : تعداد اعضاء نمونه

۱-۲) اختلاف :

اختلاف یک عضو انتخابی از نمونه با هریک از اعضاء نمونه . (عضو انتخابی می‌تواند شامل اعضاء نمونه بوده و یا خارج از نمونه باشد .)

$$v_1 = x_1 - x'$$
$$v_2 = x_2 - x'$$
$$\vdots$$
$$v_n = x_n - x'$$

x' : عضو انتخابی

۱-۲-۱) میانگین اختلاف‌ها :

از جمع روابط فوق داریم :

$$\sum_{i=1}^{n} v_i = \sum_{i=1}^{n} x_i - n x'$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} v_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} - x'$$

$$\bar{v} = \bar{x} - x'$$ میانگین اختلاف‌ها

$\bar{x}$: میانگین حسابی

x' : میانگین تصادفی

$$v_i - \bar{v} = (x_i - x') - (\bar{x} - x') = x_i - \bar{x}$$

همانطور که می‌بینیم، تفاضل میانگین اختلاف ها $(\bar{v})$ و اختلاف (v_i)، همان r_i باقیمانده ها را می‌دهد.

$$r_i = x_i - \bar{x}$$

پس با انتخاب یک عضو تصادفی از بین اعضا نمونه، در نهایت می‌توان به باقیمانده رسید.

$$\bar{x} = x' + \bar{v} = x' \pm \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x')$$

میانگین، از روابط فوق قابل محاسبه است. لذا خواهیم دید که میانگین همان برآورد محتمل یک مجهول از طریق کمترین مربعات است. (مفهوم فیزیکی میانگین : مرکز ثقل)

مثال ۱) محتمل ترین مقدار مشاهدات زاویه‌ای زیر را بیابید:

$$14°12'10'' ,\ 14°12'8'' ,\ 14°11'56'' ,\ 14°11'59'' ,\ 14°12'9''$$

روش اول این است که با استفاده از مشاهدات به میانگین حسابی دست یابیم:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = 14°12'4.4''$$

روش دوم: یک عضو بصورت تصادفی انتخاب می‌کنیم (که خارج از نمونه قرار دارد)

$$x' = 14°12'00'' \quad , \quad x_m = x' \pm \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x')$$

$$= 14°12'00'' + \frac{1}{5}(10'' + 8'' - 4'' - 1'' + 9'') = 14°12'4.4''$$

weighted Mean

۱-۳) میانگین وزن دار

وزن

$$A = \{1, 5, 3, 5, 7, 1, 2\}$$

نمونه روبرو را در نظر بگیرید:

c_i : تعداد دفعاتی که یک عضو تکرار شده است.

$$\bar{x} = \frac{c_1 d_1 + c_2 d_2 + \cdots}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i d_i}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{n} d_i =$$

$$\sum_{i=1}^{n} P(d_i) \cdot d_i = \bar{x}$$

$$\bar{x} = \frac{(2\times1)+(1\times3)+(2\times5)+(1\times7)+(1\times2)}{7} = \frac{24}{7} = 3.4$$

$$\bar{x} = \left(\tfrac{2}{7}\right)\times1 + \left(\tfrac{2}{7}\times5\right) + \left(\tfrac{1}{7}\times2\right) + \left(\tfrac{1}{7}\times3\right) + \left(\tfrac{1}{7}\times7\right)$$

$$\bar{x} = \frac{24}{7} = 3.4$$

فرمول دیگری که برای $\bar{x}$ قابل بیان است بصورت زیر می باشد

$$\bar{x} = \frac{P_1 x_1 + P_2 x_2 + \cdots P_n x_n}{P_1 + P_2 + \cdots + P_n} \Rightarrow \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} P_i}$$

Variance

۱-۴) واریانس :

مفهوم فیزیکی واریانس در یک نمونه تصادفی، عبارت است از مقداری که بوسیله آن خطای مطلق و همچنین خطای نسبی و یا دقت یک اندازه گیری قابل محاسبه است.

مفهوم ریاضی واریانس، عبارتست از

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - M)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} r_i^2$$

که داریم

$$M = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{m} p(d_i) \times d_i$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{m} d_i^2 \times p(d_i) \qquad \text{I}$$

$$\Longrightarrow \sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 - 2Mx_i + M^2)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i M + \sum_{i=1}^{n} M^2$$

$$\overset{\text{I}}{\Longrightarrow} \sum_{i=1}^{m} p(d_i) \times d_i^2 - 2 \sum_{i=1}^{n} d_i\, p(d_i) \cdot M + \sum_{i=1}^{n} M^2 p(d_i)$$

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{m} p(d_i) (d_i - M)^2$$

$$\left.\begin{array}{l} \sum d_i\, p(d_i)\, M = M^2 \\ \\ \sum M^2 p(d_i) = M^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \sigma^2 = \sum_{i=1}^{m} p(d_i)\, d_i^2 - M^2$$

واریانس نمونه:

در حالتی که مشاهدات محدود باشند.

$$S^2 = E\left(x - E(x)\right)^2$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

$$S^2 = E\left(x^2 - 2xE(x) + E^2(x)\right)$$

$$S^2 = E(x^2) - 2E(x)E(x) + E^2(x)$$

$$E(x) = M$$

$$S^2 = E(x^2) - E^2(x) \Rightarrow S^2 = E(x^2) - M^2$$

$$S^2 = \sum_{i=1}^{n} d_i^2 \, p(d_i) - M^2$$

$$x_1 = x - e_1 = \bar{x} - r_1$$

$$x_2 = x - e_2 = \bar{x} - r_2$$

$$\vdots$$

$$x_n = x - e_n = \bar{x} - r_n$$

x : مقدار واقعی کمیت

e : باقیمانده حقیقی

$\bar{x}$: میانگین کمیت

r : باقیمانده ظاهری

از جمع روابط فوق داریم

$$\sum r_i = 0$$

$$nM = nx - \sum_{i=1}^{n} e_i$$

$$M = x - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} e_i$$

$$\Rightarrow x_1 = x - e_1 = x - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} e_i - r_1$$

$$nr_1 = \cancel{n}x - \sum_{i=1}^{n} e_i - \cancel{n}x + ne_1$$

$$nr_1 = (n-1)e_1 - e_2 - \cdots - e_n$$

به طریق مشابه:

$$n r_2 = -e_1 + (n-1)e_2 - e_3 - \cdots - e_n$$
$$\vdots$$
$$n r_n = -e_1 - e_2 - \cdots + (n-1)e_n$$

طرفین روابط را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$n^2 r_1^2 = \left[(n-1)e_1 - e_2 - e_3 - \cdots - e_n\right]^2$$
$$\vdots$$
$$n r_n^2 = \left[-e_1 - e_2 - \cdots + (n-1)e_n\right]^2$$

$$\Rightarrow n^2 r_1^2 = (n-1)^2 e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + \cdots + e_n^2 - 2(n-1)e_1 e_2 - \cdots$$
$$\vdots$$
$$n^2 r_n^2 = e_1^2 + e_2^2 + \cdots + (n-1)^2 e_n^2 + 2e_1 e_2 - \cdots - 2e_1(n-1)e_n$$

بنا بر قانون کوواریانس $(\sum e_i e_j = 0)$ داریم:

$$n^2 r_1^2 = (n-1)^2 e_1^2 + e_2^2 + \cdots + e_n^2$$
$$n^2 r_2^2 = e_1^2 + (n-1)^2 e_2^2 + \cdots + e_n^2$$
$$\vdots$$
$$n^2 r_n^2 = e_1^2 + e_2^2 + \cdots + (n-1)^2 e_n^2$$

طرفین روابط بالا را جمع می‌کنیم:

$$n^2 \sum_{i=1}^{n} r_i^2 = \left[(n-1)^2 + (n-1)\right] \sum_{i=1}^{n} e_i^2$$
$$= (n-1)\left[n-1+1\right] \sum_{i=1}^{n} e_i^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} r_i^2 = \frac{n-1}{n} \sum_{i=1}^{n} e_i^2$$

$\sum r_i^2 \rightarrow$ باقیمانده ظاهری

$\sum e_i^2 \rightarrow$ باقیمانده حقیقی

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = S^2$$

می‌دانیم:

$$\Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{n-1} = S^2$$

در اندازه‌گیری‌های جزئی، به دلیل محدود بودن مشاهدات، عملاً از فرمول اخیر استفاده می‌گردد.

۱-۴-۱) انحراف معیار یک عضو از نمونه تصادفی (S_0)

$$S_0 = \frac{S}{\sqrt{n}} = \pm\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{n(n-1)}}$$

$$S_0^2 = \frac{S^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{n(n-1)}$$

واریانس

۱-۴-۲) واریانس نمونه‌های وزن دار:

اگر S^2 واریانس کل نمونه باشد، و هر کمیت تصحیحات وزن در اندازه‌گیری مستقل باشد، واریانس هر سری از اعضا نمونه، از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$S_{0(1)}^2 = \frac{S^2}{P_1} \quad , \quad S_{0(2)}^2 = \frac{S^2}{P_2} \quad , \ldots , \quad S_{0(n)}^2 = \frac{S^2}{P_n}$$

$$\Rightarrow P_1 S_{0(1)}^2 = P_2 S_{0(2)}^2 = \cdots = P_n S_{0(n)}^2 = K$$

$$P_1 = \frac{S^2}{S_{0(1)}^2} \quad , \quad P_2 = \frac{S^2}{S_{0(2)}^2} \quad , \ldots , \quad P_n = \frac{S^2}{S_{0(n)}^2}$$

جمع روابط گذشته :

$$M = \frac{x_1 \frac{S^2}{S_{0(1)}^2} + x_2 \frac{S^2}{S_{0(2)}^2} + \cdots + x_n \frac{S^2}{S_{0(n)}^2}}{\frac{S^2}{S_{0(1)}^2} + \frac{S^2}{S_{0(2)}^2} + \cdots + \frac{S^2}{S_{0(n)}^2}}$$

$$M = \frac{x_1 \frac{1}{S_{0(1)}^2} + x_2 \frac{1}{S_{0(2)}^2} + \cdots + x_n \frac{1}{S_{0(n)}^2}}{\frac{1}{S_{0(1)}^2} + \frac{1}{S_{0(2)}^2} + \cdots + \frac{1}{S_{0(n)}^2}}$$

از روابط فوق نتیجه می گیریم که

وزن با عکس واریانس نسبت مستقیم دارد

$$P_i = \frac{K}{S_{0(i)}^2}$$

$$nS^2 = P_1 S_{0(1)}^2 + P_2 S_{0(2)}^2 + \cdots + P_n S_{0(n)}^2$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_i S_{0(i)}^2}{\sum_{i=1}^{n} P_i}$$

$$n = P_1 + P_2 + \cdots + P_n = \sum_{i=1}^{n} P_i$$

$$S_{0(i)}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} r_i^2}{n-1}$$

$$\Rightarrow S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_i r_i^2}{(n-1)\sum_{i=1}^{n} P_i}$$

$$S_0^2 = \frac{S}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i y_i^2}{n(n-1)\sum_{i=1}^{n} p_i}$$

واریانس هر عضو از نمونه

تذکر: میانگین و واریانس مربوط به متغیر مقداری (از یک نوع) هستند.

همانطور که گفته شد، اختلاف هرکدام از مشاهدات i ام سنجیده برای یک کمیت، از میانگین، باقیمانده گفته می‌شود.

اگر باقیمانده‌ها از حد معینی تجاوز کنند، اشتباه نامیده می‌شوند و در غیر اینصورت خطا نام دارند.

پس باقیمانده‌ها ناشی از وجود موارد زیر هستند:

۱-۵) اشتباه:

عبارت است از میزان اختلاف غیرقابل قبول (با توجه به دقت مورد نیاز) یک مشاهده از مقدار واقعی آن.

معمولاً به دلیل اختلافی که با سایر اندازه‌گیری‌های مشابه دارند، قابل تشخیص می‌باشند.

اشتباه در اثر فراموشی و یا بی‌تجربگی عامل، بروز می‌کند.

با کاهش نقش عامل انسانی در اندازه‌گیری‌ها، می‌توان از بروز اشتباه جلوگیری نمود.

۱-۶) خطا:

عبارت است از میزان اختلاف قابل قبول یک مشاهده از مقدار واقعی آن.

۱-۶-۱) انواع خطاها

۱-۶-۱-۱) خطاهای سیستماتیک :

این نوع خطاها دارای منشأ، مقدار و جهت معین می‌باشند و دارای ۳ منشأ هستند:

۱- عامل انسانی : این خطاها توسط عامل، در حین مشاهده و یا ثبت آن ، وارد می‌شوند.

۲- خطاهای دستگاهی : این نوع خطاها به دو صورت مستقیم و غیرمستقیم ، در ایجاد خطای سیستماتیک نقش دارند.

اثر مستقیم خطاهای دستگاهی ، مانند ثبت قرائت نادرست و یا دایره بودن دستگاه.

و اثر غیرمستقیم آن مانند وجود خطای خروج از مرکزیت مودولیت هایی به طرف آن ها منجر به قرائت اشتباه می‌شود.

۳- خطاهای محاسباتی : این خطا در حین عملیات صورت می‌گیرد . مانند انحراف اداری نادرست.

۴- خطاهای طبیعی : مانند خطای انکسار، که منشأ بروز آن ، طبیعت است .

روش های کاهش خطای سیستماتیک به قرار ذیل اند:

۱- شناخت صحیح شرایط محیط اندازه‌گیری : مثلاً آگاهی از تغییرات درجه حرارت ، به دنبال آن ها می‌شود خطای انکسار .

۲- مهارت عامل : یک عامل ماهر ، هنگام قرائت به شرایط جوی توجه می‌کند و نیز از راه‌های جلوگیری از بروز خطا ، مثل استفاده از چتری و سایل (قراردادن چتر روی شخص) آگاه است .

۳- استفاده از دستگاه مناسب : هم‌چنانکه در بخش خطاهای دستگاهی بعنوان عامل بروز خطای سیستماتیک ذکر شد، وجود خطاهای خروج از مرکزیت، تنها زمانی قابل حذف یا کاهش است که از تئودولیت‌هایی استفاده نماییم که بوسیله میکرومتر، امکان قرائت دو طرف لمب وجود داشته باشد تا اثر این خطا حذف شود. پس انتخاب دستگاه مناسب در روند کاهش خطای سیستماتیک نقش مهمی دارد.

۴- استفاده از روش‌های مشاهداتی مناسب : مثل استفاده از روش کوپل، در قرائت زاویه به منظور حذف خطای کلیماسیون.

۵- انتخاب صحیح مدل ریاضی : بایستی روابط بین مشاهدات و مجهولات، به گونه‌ای انتخاب شوند که ضمن تناسب با شکل مسئله، خطاهای محاسباتی، تأثیری در برآورد کمیت‌های مجهول نداشته باشند.

۲-۱-۶-۲) خطاهای اتفاقی :

خطاهای سیستماتیک، بدلیل ضعف حواس انسانی و عدم دسترسی صحیح به شرایط محیط اندازه‌گیری، بطور کامل قابل حذف نیستند. چنانچه خطاهای سیستماتیک را به حداقل برسانیم، همواره خطاهایی در اندازه‌گیری‌ها باقی می‌مانند که خطای اتفاقی نام دارد.

خطاهای اتفاقی دارای جهت ثابت نیستند و برخلاف خطاهای سیستماتیک دارای منشأ معلوم نمی‌باشند در اینجاست که بایستی با استفاده از روش‌های آماری، خطای اتفاقی موجود را تعدیل کنیم تا مقادیر برآورد شده برای

کمیت های مجهول، محتمل ترین مقدار باشد.

با توجه به مفهوم خطاهای اتفاقی، به تعریف دو نوع خطای دیگری می پردازیم:

خطای مطلق:

میزان تاثیر خطای اتفاقی در اندازه گیری یک کمیت را خطای مطلق گوئیم.

خطای مطلق را انحراف معیار، خطای جذری متوسط و یا جذر واریانس گویند.

خطای نسبی (دقت):

نسبت خطای مطلق به اندازه خود کمیت را خطای نسبی گویند.

واحد خطای نسبی P.P.M (per part milion) است.

یعنی یک واحد از یک میلیون واحد.

و نیز با توجه به مفهوم واریانس، می توان دو نوع خطا تعریف کرد.

خطای ماکزیمم:

$$S_{max} = 8/3\, S$$

خطای محتمل:

$$S_{pro} = 2/3\, S$$

وقتی یک کمیت را بصورت تکراری، اندازه گیری میکنیم، مقدار محتمل برابر است با:

$$x_{pro} = \bar{x} + KS$$

K در رابطه فوق برحسب حدود اطمینان محاسبه می شود، که در فصول بعدی به ذکر آن می پردازیم.

۲-۱-۶-۱) خطاهای محاسباتی :

نشأ این خطا ، ناتوانی ماشین حساب و یا ماشین در مدل های ریاضی با حرکت ممیز می باشد که سبب می شود

همواره ، خطایی بعنوان خطای گرد کردن (Rounding error) در محاسبات وجود داشته باشد.

۱-۷) متغیر تصادفی :

تعریف : متغیر تصادفی تابعی است که دامنه آن فضای نمونه و برد آن زیرمجموعه ای از اعداد حقیقی است.

(یعنی متغیر تصادفی ما را از فضای نمونه به اعداد حقیقی می برد)

۱-۷-۱) انواع متغیر تصادفی :

۱- متغیر تصادفی گسسته : برد آن مجموعه شمارش پذیر است.

۲- متغیر تصادفی پیوسته : برد آن مجموعه شمارش ناپذیر است.

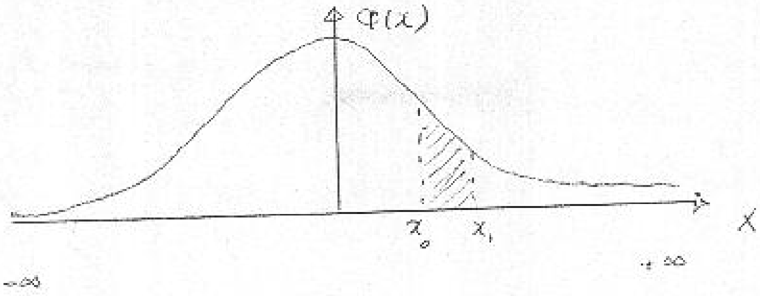
۱-۸) تابع تصادفی

۱-۸-۱) تابع تصادفی تک متغیره :

اگر X را متغیر تصادفی در نظر بگیریم ، $\varphi(X)$ تابع پیوسته توزیع احتمال متغیر تصادفی X خواهد بود.

در نتیجه تابع احتمال متقابل ، بصورت زیر است :

$$\int_{x_0}^{x_1} \varphi(x)\,dx = P\,(x_0 \leqslant X \leqslant x_1)$$



نکاتی درمورد تابع توزیع احتمال :

$$1)\ P(-\infty \leq X \leq +\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, dx = 1$$

$$2)\ M = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \varphi(x)\, dx$$

$$3)\ S^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-M)^2 \cdot \varphi(x)\, dx$$

$$S^2 = E(X-M)^2 = E(X^2) - M^2 = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$S^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x^2 + M^2 - 2Mx)\, \varphi(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \varphi(x)\, dx + M^2 \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, dx}_{1} - 2M \int \underbrace{x \cdot \varphi(x) \cdot dx}_{M}$$

$$S^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \varphi(x)\, dx - M^2$$

۲-۸-۱) تابع تصادفی چند متغیره :

اگر متغیر تصادفی X ، خود شامل چندین متغیر باشد ، یعنی X تابع برداری باشد ، تابع توزیع احتمال مربوط به X ، یک تابع توزیع احتمال چند متغیره خواهد بود.

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

در این حالت تعاریف میانگین و واریانس به حالت n بعدی تعمیم می‌یابند:

$$M_i = \int_{-\infty}^{+\infty} x_i \cdot \varphi(x) \cdot dx \quad = E(x_i)$$

$$S_i^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x_i - M_i)\, \varphi(x)\, dx$$

Covariance

۹-۱) کوواریانس

کوواریانس دو متغیر تصادفی x و y به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Cov(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M_x)(y - M_y)\, \varphi(x,y)\, dx\, dy$$

$$Cov(x,y) = S_{xy} = E\left[(x - E(x))(y - E(y)) \right] \circledast$$

هنگامی که دو متغیر تصادفی مستقل باشند، کوواریانس آنها صفر است.

نکته)

1) if $x = y \Rightarrow S_{xy} = S_{yx} = S_x^2 = S_y^2$

2) $S_{xy} = E(xy) - E(x)E(y) \quad = E(xy) - M_x M_y$

اثبات: با توجه به تعریف کوواریانس $\circledast$

$$S_{xy} = E\left[xy - xE(y) - yE(x) + E(x)E(y) \right]$$

$$= E(xy) - E(x)E(y) - E(y)E(x) + E(x)E(y)$$

$$= E(xy) - E(x)E(y)$$

۱-۱۰) ماتریس وریانس - کوورریانس : Variance - Covariance Matrix

در اکثر پروژه‌های نقشه‌برداری، مشاهدات بصورت منفرد مورد نیاز نمی‌باشند. بعنوان مثال در مورد انتقال مختصات نقطه، علاوه بر طول، به مشاهده زاویه نیز بپردازیم. علاوه براین، خطای این نوع مشاهدات، همچنین با هم تکرار می‌شوند.

مثلاً فضای مشاهداتی ما شامل طول و زاویه است، که این فضای مشاهداتی دوبعدی را تشکیل می‌دهد. در نتیجه فضایی به نام ماتریس وریانس - کوورریانس مشاهدات که در این حالت 2x2 است تشکیل می‌گردد.

ماتریس وریانس - کوورریانس، ماتریسی است که عناصر روی قطر اصلی آن را وریانس‌ها و سایر عناصر بصورت قرینه نسبت به قطر اصلی، کوورریانس‌ها را تشکیل می‌دهند.

$$\Sigma_X = \begin{bmatrix} var_{11} & Cov(1,2) & \cdots & Cov(1,n) \\ Cov(2,1) & var_{2,2} & \cdots & Cov(2,n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Cov(n,1) & \vdots & & var_{n,n} \end{bmatrix}$$

ماتریس فوق یک ماتریس مربعی است، چون هر اندازه که بین مجموعه‌ها وریانس وجود دارد، به همان میزان احتمال وجود کوورریانس بین آنها وجود دارد.

$$\Sigma_X = E\left[(X - E(X))(X - E(X))^T\right]$$

اثبات :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad X - \bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 - \bar{x} \\ x_2 - \bar{x} \\ \vdots \\ x_n - \bar{x} \end{bmatrix} , \quad (X - \bar{x})^T = \left[(x_1 - \bar{x}) , (x_2 - \bar{x}) , \dots (x_n - \bar{x}) \right]$$

$$(X - \bar{x})(X - \bar{x})^T = \begin{bmatrix} (x_1 - \bar{x})^2 & (x_1 - \bar{x})(x_2 - \bar{x}) & \cdots & (x_1 - \bar{x})(x_n - \bar{x}) \\ (x_2 - \bar{x})(x_1 - \bar{x}) & (x_2 - \bar{x})^2 & \cdots & (x_2 - \bar{x})(x_n - \bar{x}) \\ \vdots & & & \\ (x_n - \bar{x})(x_1 - \bar{x}) & \cdots & \cdots & (x_n - \bar{x})^2 \end{bmatrix}$$

$$E\left[(X - \bar{x})(X - \bar{x})^T\right] = \begin{bmatrix} E(x_1 - \bar{x})^2 & E\left[(x_1 - \bar{x})(x_2 - \bar{x})\right] & \cdots & E\left[(x_1 - \bar{x})(x_n - \bar{x})\right] \\ \vdots & & & \vdots \\ E\left[(x_n - \bar{x})(x_1 - \bar{x})\right] & & & E(x_n - \bar{x})^2 \end{bmatrix}$$

$$\sum_X = \begin{bmatrix} \sigma_{x_1}^2 & \sigma_{x_1 x_2} & \cdots & \sigma_{x_1 x_n} \\ \vdots & & & \\ \sigma_{x_n x_1} & \cdots & \cdots & \sigma_{x_n}^2 \end{bmatrix}$$

کاربرد ماتریس واریانس کوواریانس :

با توجه به قانون انتشار خطای اتفاقی :

$$\sum_{xx} = B \sum_{ll} B^T$$

در مرحله تجزیه و تحلیل اولیه ، دو حالت را در نظر قرار می‌دهیم . فرض کنیم هدف ما انتقال مختصات نقاط است.

پس باید دو نوع مشاهده طول و زاویه انجام دهیم.

۱- اگر دقت مشاهدات طول و زاویه (σ_l^2 و σ_α^2) معلوم باشد، یعنی روش ها و نوع دستگاه مشخص شده باشد، با استفاده از ماتریس واریانس - کوواریانس مجهولات در روابط ایجاد شده بین مشاهدات و مجهولات، دقت برآورد مجهولات قابل محاسبه است. (σ_y^2 و σ_x^2)

۲- اگر دقت برآورد مجهولات از ابتدا توسط کارفرما مشخص باشد (σ_x^2 و σ_y^2)، دقت مشاهدات (σ_α^2 و σ_l^2) قابل محاسبه هستند. دارای مثال در مورد روش های مشاهداتی و نوع دستگاه مناسب تصمیم گیری نمود.

۱-۱۱) قانون انتشار خطاها : Error propagation low

همانطور که در تقسیم بندی خطاها گفته شد، خطاها به ۳ دسته سیستماتیک، اتفاقی و اشتباه تقسیم می شوند. در اینجا به ذکر قانون انتشار خطای سیستماتیک و اتفاقی می پردازیم.

خطای کل، برابر برآیند خطای سیستماتیک و اتفاقی خواهد بود.

فرض کنید می خواهیم تابع $\underset{m\times1}{y} = \underset{m\times1}{f}(\underset{n\times1}{x})$ را حول نقطه $\underset{n\times1}{x} = \underset{n\times1}{x_0}$ خطی کنیم. بدین منظور از درجه اول سری تیلور استفاده می کنیم. به عبارت دیگر:

سری تیلور

$$y = f(x) = f(x_0) + \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x=x_0} (x - x_0) + \cdots$$

استفاده از درجه اول سری تیلور

$$y = f(x) = f(x_0) + \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x=x_0} (x - x_0)$$

قانون انتشار خطای سیستماتیک

$$y = f(x) \simeq \underset{m\times1}{f(x_0)} + \underset{m\times n}{J_{yx}}\Big|_{x=x_0} \underset{n\times1}{(x - x_0)}$$

قانون انتشار خطای سیستماتیک :

چنانچه x به اندازه Δx دارای خطای سیستماتیک باشد و هدف محاسبه میزان خطای سیستماتیک Δy باشد.

این یک مسئله ریاضی است و از طریق دیفرانسیل قابل حل می باشد.

$y = f(x)$

$x \rightarrow x + \Delta x$

$\Delta y = ?$

برای محاسبه Δy می توان دو روش ارائه کرد :

1) $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

در این رابطه هیچ تقریبی بکار نرفته است.

۲) $f(x) - f(x_0) \simeq J_{yx}\big|_{x=x_0} (x - x_0) \Rightarrow \Delta y \simeq J_{yx}\big|_{x=x_0} \Delta x$

در این رابطه از تقریب خطی کردن سری تیلور استفاده کرده ام.

در دو صورت این تقریب به تساوی تبدیل می شود :

۱) اگر $\Delta x = 0$ باشد یعنی اصلاً خطا نداشته باشیم.

۲) اگر تابع خطی باشد.

تذکر: هرچه Δx کوچکتر باشد، تقریب بهتری حاصل می کند

قانون انتشار خطای سیستماتیک را می‌توان بصورت زیر بیان کرد:

$$\begin{bmatrix} \delta f_1 \\ \vdots \\ \delta f_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \vdots \\ \delta x_n \end{bmatrix}$$

$$\delta f = J \, \delta$$

چنانچه از صورت فوق جهت بیان قانون انتشار خطای اتفاقی استفاده کنیم، داریم:

$$\begin{cases} \sigma f_1 = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right) \sigma x_1 + \cdots + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_n}\right) \sigma x_n \\ \vdots \\ \sigma f_n = \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_1}\right) \sigma x_1 + \cdots + \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right) \sigma x_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_{f_1}^2 = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_{x_1}^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_n}\right)^2 \sigma_{x_n}^2 + \cdots \\ \vdots \\ \sigma_{f_n}^2 = \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_{x_1}^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right)^2 \sigma_{x_n}^2 + \cdots \end{cases}$$

$$\boxed{\Sigma_y = \underbrace{J_{yx}}_{\text{ماتریس ضرایب مشاهدات}} \Big|_{x=x_0} \; \Sigma_x \; J_{yx}^T \Big|_{x=x_0}}$$

قانون انتشار خطای اتفاقی

قانون انتشار خطای اتفاقی:

چنانچه X، با دقت Σ_x اندازه‌گیری شده باشد و هدف این باشد که ببینیم Y با چه دقتی برآورد می‌شود

این یک مسئله آماری است و از طریق امید ریاضی قابل حل می‌باشد.

$$X_{n\times1} \longrightarrow \Sigma_{x_{n\times n}}$$

$$\Sigma_y = ?$$

خطای کل:

$$T = \sqrt{\delta^2 + \sigma^2}$$

$$Te \leq \sqrt{\delta^2 + (3\sigma^2)}$$

تولرانس

۱-۱۲) همبستگی

Corrolatin

$$\rho = \frac{Cov(x,y)}{\sqrt{Var(x) \cdot Var(y)}} = \frac{S_{xy}}{S_x \cdot S_y}$$

$$\rho = \frac{E[(x-E(x))(y-E(y))]}{S_x \cdot S_y}$$

نکاتی درمورد همبستگی :

$$1)\ -1 \leqslant \rho \leqslant 1$$

اثبات :

$$var\left(\frac{x}{S_x} + \frac{y}{S_y}\right) \geqslant 0$$

$$\frac{var(x)}{S_x^2} + \frac{var(y)}{S_y^2} + \frac{2\,Cov(x,y)}{S_x \cdot S_y} \geqslant 0$$

$$2 + 2\,\rho(x,y) \geqslant 0$$

$$2\,(1 + \rho(x,y)) \geqslant 0$$

$$1 + \rho(x,y) \geqslant 0$$

$$-1 \leqslant \rho(x,y) \qquad \text{I}$$

از طرفی :

$$var\left(\frac{x}{S_x} - \frac{y}{S_y}\right) \geqslant 0$$

$$\frac{var(x)}{S_x^2} + \frac{var(y)}{S_y^2} - \frac{2\,Cov(x,y)}{S_x \cdot S_y} \geqslant 0$$

$$2\,(1 - \rho(x,y)) \geqslant 0$$

$$1 - \rho(x,y) \geqslant 0$$

$$\rho(x,y) \leqslant 1 \qquad \text{II}$$

$$\text{I}\ ,\ \text{II} \Rightarrow \qquad -1 \leqslant \rho \leqslant 1$$

2) if $\rho = 1 \Rightarrow S_{xy} = S_x \cdot S_y$ نمونه ها کاملا وابسته (مثبت) هستند.

3) if $\rho = -1 \Rightarrow S_{xy} = -S_x \cdot S_y$ نمونه ها کاملا وابسته (منفی) هستند.

4) if $\rho = 0 \Rightarrow S_{xy} = 0$ نمونه ها مستقل از یکدیگر هستند.

نکته)

$$P(xy) = P(x) \cdot P(y)$$

استقلال :

اگر دو متغیر تصادفی مستقل باشند ناهمبسته هستند.

اگر دو متغیر تصادفی نرمال مستقل باشند ناهمبسته هستند و بالعکس.

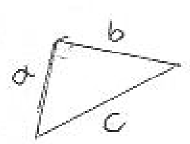
ناهمبستگی :

$$\rho = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_x^2 \cdot S_y^2}} \xrightarrow{\rho = 0} S_{xy} = 0$$

$$S_{xy} = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$$

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

مثال ۲) اضلاع زمین مثلثی شکل زیر را مساحی کرده اند. اندازه گیری ها به قرار ذیل اند:



$a = (5, 5.1, 5.4, 5.2, 5.4)$

$b = (6.5, 6.7, 6.2, 6.4, 6.6)$

واریانس ضلع سوم و مساحت زمین را بدست آورید.

حل)

$$S = \frac{1}{2}\,\bar{a}\cdot\bar{b}$$

$$C = \sqrt{\bar{a}^2 + \bar{b}^2}$$

$$\Sigma_x = B\cdot\Sigma_l\cdot B^T$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial A}{\partial \bar{a}} & \frac{\partial A}{\partial \bar{b}} \\ \frac{\partial C}{\partial \bar{a}} & \frac{\partial C}{\partial \bar{b}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\bar{b} & \frac{1}{2}\bar{a} \\ \frac{\bar{a}}{\sqrt{\bar{a}^2+\bar{b}^2}} & \frac{\bar{b}}{\sqrt{\bar{a}^2+\bar{b}^2}} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 3.22 & 2.61 \\ 0.629 & 0.776 \end{vmatrix}$$

$$\bar{a} = 5.22 \quad , \bar{b} = 6.44$$

$$\Sigma_l = \begin{vmatrix} S_a^2 & S_{ab} \\ S_{ba} & S_b^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.032 & 0 \\ 0 & 0.043 \end{vmatrix}$$

$$S_b^2 = \frac{\sum r_{ia}^2}{n-1} = \frac{\sum (a_i - \bar{a})^2}{n-1} = \frac{0.172}{4} = 0.043$$

$$S_a^2 = \frac{\sum_{i=1}^{5} r_{ib}^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{5} (b_i - \bar{b})^2}{n-1} = \frac{0.128}{4} = 0.032$$

چون در نمونه a و b، مستقل از یکدیگر اندازه‌گیری شده‌اند. کوواریانس آنها صفر است

$$S_{ab} = S_{ba} = 0$$

$$\Sigma_x = \begin{vmatrix} 3.22 & 2.61 \\ 0.629 & 0.776 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0.032 & 0 \\ 0 & 0.043 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3.22 & 0.629 \\ 2.61 & 0.776 \end{vmatrix} =$$

$$\Sigma_x = \begin{vmatrix} 0.10304 & 0.11223 \\ 0.020128 & 0.33368 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \overset{3.22}{\cancel{0.303}} & 0.629 \\ 2.61 & 0.776 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.624 & 0.15190 \\ 0.15190 & 0.03085 \end{vmatrix}$$

$S_A^2 = 0.624$ $S_C^2 = 0.3085$

۱۳-۱) ماتریس وزن

آن را با P نمایش می‌دهند

$$P \propto \Sigma_L^{-1}$$

$$P = Q_L^{-1}$$

ماتریس کوفاکتور (ماتریس وریانس، کوواریانس نسبی مشاهدات):

$$Q_L = K \Sigma_L \Rightarrow P = Q_L^{-1} = \frac{1}{K} \Sigma_L^{-1}$$

$$\frac{1}{K} = \delta_0^2$$ فاکتور وریانس اولیه

$$Q_L = \frac{1}{\delta_0^2} \Sigma_L$$

$$P = Q_L^{-1} = \delta_0^2 \Sigma_L^{-1}$$

δ_0^2 وریانس مشاهده‌ای با وزن واحد است.

$$\Sigma_L = \begin{bmatrix} \sigma_{l_1}^2 & & \\ & \sigma_{l_2}^2 & \\ & & \ddots \end{bmatrix}$$

$$\sigma_0^2 \begin{bmatrix} \sigma_{l_1}^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_{l_n}^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \sigma_0^2 \Sigma_L^{-1} = P = \begin{bmatrix} \sigma_0^2/\sigma_{l_1}^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_0^2/\sigma_{l_n}^2 \end{bmatrix}$$

$$\text{if } P = 1 \Rightarrow \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{l_i}^2} = 1 \Rightarrow \sigma_0^2 = \sigma_{l_i}^2$$

واریانس مشاهده‌ای با وزن واحد

زمانی که مشاهدات از انواع مختلفی هستند، P بدون واحد نخواهد بود

تنها در صورتی این امکان پذیر است که مشاهدات از یک جنس بوده باشند

نکته:

چنانچه مشاهده‌ای دارای خطای سیستماتیک باشد، تنها صحت آن تحت تاثیر قرار گرفته و روی دقت آن بی اثر است.

اثبات: فرض می‌کنیم کمیت l با خطای سیستماتیک v مشاهده شده باشد.

$$L = \begin{bmatrix} l_1 + v_1 \\ l_2 + v_2 \\ \vdots \\ l_n + v_n \end{bmatrix}$$

$$\sigma_L^2 = E\left[(L - E(L))^2\right] = E\left[\left((l + v_1) - E(L) - E(v_1)\right)^2\right] = E\left[(l - \bar{l})^2\right]$$

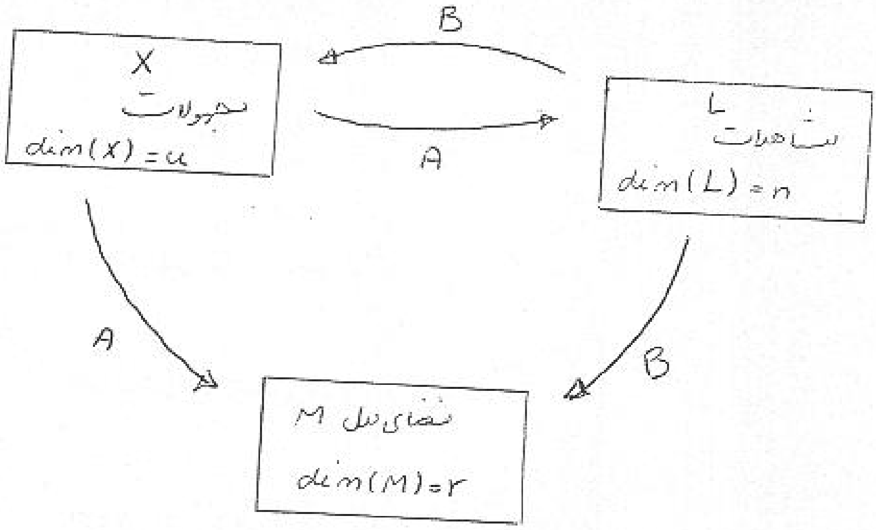
فصل دوم : سرشکنی چیست و علت نیاز به آن چه می باشد؟

۲-۱) مراحل انجام یک پروژه ژئودتیک :

۱- مشخص کردن مجهولات و دقت مورد نیاز برای آنها ($X_{u\times1}$ و Σ_x)

۲- تعیین مدل ریاضی :

مدل ریاضی بین مشاهدات (کمیت هایی که بطور مستقیم قابل اندازه گیری هستند) و مجهولات (کمیت های که بطور مستقیم قابل اندازه گیری نیستند) ، ارتباط برقرار می کند



مشاهدات در فضای تئوری صورت می گیرند و دارای خطای اتفاقی هستند.

مدل در فضای ریاضی نوشته می شود.

خطای اتفاقی از مشاهدات (L) به مجهولات منتقل می شود.

مشاهدات متغیر تصادفی هستند ، اما مجهولات به خودی خود متغیر تصادفی نیستند ، بلکه پس از بدست آمدن

متغیر تصادفی می‌شوند.

انواع مدل‌های ریاضی، در فصل ۴، معرفی خواهند شد.

۳- انتخاب یک روش از بین روش‌های موجود برای تعیین مختصات:

این مرحله، در واقع آنالیز اولیه (pre analysis) می‌باشد، که با دقت کافی و بصورت ترتیبی انجام می‌گیرد.

در این مرحله، براساس یکسری معیارها، به چند سؤال اساسی پاسخ می‌دهیم.

معیارهای ما از این قرارند:

۱- رسیدن به دقت مورد نیاز.

۲- به حداقل رساندن هزینه.

۳- به حداقل رساندن زمان.

خروجی این مرحله، پاسخ به سؤالات زیر است:

۱- چه مشاهداتی باید صورت گیرد؟ (طول یا زاویه یا ...)

۲- با چه دستگاهی، اندازه‌گیری صورت گیرد؟ (T_2 ، T_{16} ، ...)

۳- مشاهدات چگونه صورت گیرد؟ (روش بویند، روش تکرار و ...)

۴- جمع آوری اطلاعات و انجام مشاهدات

۵- ارزیابی مشاهدات

در این مرحله، دسته مشاهدات تکراری، بایستی از چند حیث مورد بررسی قرار گیرند:

۱- تصادفی بودن: معمولاً انجام نمی‌شود.

۲- نرمال بودن: باید متغیر تصادفی در دسته داشته باشیم. یک متغیر تصادفی در آزمون نرمال بودن (فصل ۳) بررسی می‌شود.

۳- وجود اشتباه: در صورت وجود، بایستی حذف شود.

۴- وجود خطای سیستماتیک.

شایان ذکر است که اجرای مراحل فوق، تنها در صورت تکراری بودن مشاهدات مفید می‌باشد.

این چهار مرحله (چهار آزمون) قبل از سرشکنی انجام می‌شود.

۶- تشکیل مدل ریاضی و حل آن، به منظور تعیین مجهولات (یا سرشکنی و سرشکنی):

۷- ارزیابی نتایج

اگر نتایج بدست آمده، قابل قبول بود، به مرحله بعد یعنی ارائه نتایج می‌رسیم. اما اگر نتایج قابل قبول نبود به بررسی عوامل آن می‌پردازیم.

عوامل غیر قابل قبول بودن نتایج بدست آمده به قرار ذیل اند:

۱- ممکن است آنالیز اولیه (مرحله ۳) دقیق نبوده باشد.

۲- ممکن است اشتباه حسابی صورت گرفته باشد.

۳- ممکن است مشاهدات اشتباه وجود داشته باشد.

۴- ممکن است مشاهدات ما آلوده به خطای سیستماتیک باشد.

۵- ممکن است مشاهدات ما نرمال نباشد.

پس از کشف عامل یا عوامل، به رفع آن می پردازیم و به مرحله محاسبات (مرحله ۶) برمی گردیم. این کار را تا آنجایی تکرار می کنیم که نتایج قابل قبولی بدست آید. آنگاه به مرحله ۸ می رویم.

۸- ارائه نتایج

بصورت جدول، نقشه و ...

۲-۲) مروری بر جبر خطی:

دستگاهی را با n معادله و n مجهول در نظر بگیرید:

$$\underset{n\times n}{A}\;\underset{n\times 1}{X} = \underset{n\times 1}{b}$$

ماتریسی به نام ماتریس افزوده (D) تعریف می کنیم که دارای ابعاد $n(n+1)$ است.

$$\underset{n(u+1)}{D} = [\underset{n\times u}{A} \; \vdots \; \underset{n\times 1}{b}]$$

یک قسمت آن ماتریس A و قسمت دیگر بردار b است:

1) if $r(A) = r(D) = u$

یک جواب منحصر به فرد داریم

2) if $r(A) = r(D) < u$

بی‌نهایت جواب وجود دارد.

3) if $r(A) \neq r(D)$

دستگاه جواب ندارد.

2-2-1) مدل‌هایی با جواب منحصر به فرد:

اگر تعداد معادلات با تعداد مجهولات برابر باشد $(n=u)$ دارای جواب منحصر به فرد خواهیم بود.

$$r(D) \leq \min(n, u+1) \overset{n=u}{\leq} \min(n, n+1) \longrightarrow r(D) \leq n$$

$$r(A) \leq \min(n, u) \xrightarrow{n=u} r(A) \leq n$$

$r(A) = r(D) = u$ حالت اول

Under determined Solution

2-2-2) مدل‌هایی با بی‌نهایت جواب (فرومعین)

اگر تعداد معادلات مستقل از تعداد مجهولات کمتر باشد $(n<u)$ بی‌نهایت جواب برای این دستگاه وجود دارد.

$$r(D) \leq \min(n, u+1) \xrightarrow{n<u} r(D) \leq n$$

$$r(A) \leq \min(n, u) \xrightarrow{n<u} r(A) \leq n$$

$\Rightarrow r(A) = r(D) < u$ حالت دوم

۳-۲-۲) مدل های بدون جواب (فرامعین) Over determined Solution

اگر تعداد معادلات مستقل، بیشتر از تعداد مجهولات باشد (n > u)، این دستگاه جواب ندارد.

$r(A) \leq \min(n,u) \longrightarrow r(A) \leq u$

$r(D) \leq \min(n,u+1) \longrightarrow r(D) \leq u+1$

$r(D) \geq r(A)$ همواره

$\Rightarrow r(A) \neq r(D)$ حالت سوم

دستگاه معادلاتی که در عمده پروژه های نقشه برداری با آن سروکار داریم، دستگاه های فرامعین است. زیرا همواره تعداد معادلات از تعداد مجهولات بیشتر باشد. چون مشاهدات بیش از حداقل مورد نیاز، صورت می گیرد. دلایل این امر به قرار ذیل اند:

۱) کشف مشاهدات اشتباه، بررسی وجود خطای سیستماتیک در مشاهدات و ... تنها در صورتی امکان پذیر است که مشاهدات اضافی صورت گرفته باشد.

(اگر یک کمیت را یک بار یا دو بار مشاهده کنیم، نمی توان مشاهده اشتباه را تشخیص داد. مشاهده اشتباه دارای اختلاف فاحش با سایر مشاهدات است. اگر تعداد مشاهدات صورت گرفته زیاد نباشد، نمی توان فهمید کدام یک مشاهده اشتباه است. چون خطای سیستماتیک، دارای اثری از یک سمت می باشد، حتی با مشاهدات اضافی نیز قابل تشخیص نیست، بلکه بایستی کمیت های مشاهداتی اضافی

داشته باشیم . مثل تشکیل مثلث و قرائت زاویه ، برای مشاهده طول)

۲- امکان رسیدن به جواب بهتر ، در صورت وجود مشاهدات اضافی ، وجود دارد .

۳- امکان برآورد پارامترهای کیفی مشاهدات و نیز مجهولات ، در صورت وجود مشاهدات اضافی میسر است . (ماتریس واریانس - کوواریانس مشاهدات و مجهولات .)

(امکان محاسبه واریانس برای یک کمیت ، تنها در صورت وجود مشاهدات تکراری ، وجود دارد .)

با توجه به توضیحات ارائه شده ، فرض می‌کنیم به ازاء هر مشاهده می‌توانیم یک معادله خطی بنویسیم :

$$\underset{n\times u}{A}\ \underset{u\times 1}{X} = \underset{n\times 1}{L} \qquad n > u$$

پس دستگاه فوق ، یک دستگاه فرامعین است که در حالت کلی جواب ندارد پس یک دستگاه ناسازگار است . (به دستگاهی که جواب ندارد ، ناسازگار می‌گوییم .) یعنی نمی‌توان مجهولی (X ای) پیدا کرد که در رابطه فوق صدق نماید و همواره $AX \neq l$. این دستگاه دارای دو نوع ناسازگاری است :

۱- تعداد معادلات بیشتر از تعداد مجهولات است و معادله در واقع یک نامساوی است $AX \neq l$ و این یک نوع ناسازگاری است .

۲- طرف راست تساوی (مشاهدات) در فضای فیزیکی صورت گرفته و آلوده به انواع خطاها است ، اما طرف چپ تساوی در فضای ریاضی نوشته شده است .

بنابراین به منظور اینکه مجهولات ما در فضای ریاضی به دست بیایند، بایستی این دو فضا را هم تبدیل کنیم

فرض کنید یک طول معلوم را مشاهده کنیم. می‌دانیم $|AB|=100$ ، اما این مقدار $|AB| = 100.2$ مشاهده

شده است. (فرض می‌کنیم خطای سیستماتیک و اشتباه از مشاهدات حذف شده‌اند) چون مقدار واقعی

کمی از این طول بیشتر است، می‌دانیم 0.2 خطا وجود دارد که باید از مشاهده کم شود تا به مقدار واقعی رسیده باشیم.

این مطلب در مورد تمامی مشاهدات ما صادق است و همواره خطایی به اندازهٔ v وجود دارد، که چون به مقدار واقعی

دسترسی نداریم، اندازه‌ی آن (v) برای ما، خود نوعی مجهول است.

$$AX = l + v$$

v (خطای اتفاقی) که خود دارای ماهیتی تصادفی است. (مانند l، خود یک متغیر تصادفی است.

$v \longrightarrow$ Residual vector   مجهولات ظاهری

X مجهولات واقعی

با در نظر گرفتن v، در طرف راست تساوی، ناسازگاری لازم را رفع کردیم

$$\underset{n\times u}{A}\;\underset{u\times 1}{X} = \underset{n\times 1}{l} + \underset{n\times 1}{v} \qquad n > u$$

تعداد مجهولات جدید، با اضافه کردن مجهولات ظاهری : $(n+u)$

تعداد معادلات : n

$n < n+u$ بی‌نهایت جواب وجود دارد.

کل مجهولات را به یک طرف منتقل می‌کنیم :

$$l = AX - V$$

$$l = \begin{bmatrix} \underset{n\times u}{A} & - \underset{n\times n}{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ V \end{bmatrix}^{u\times 1}_{n\times 1}$$

$$l = \underset{n(n+u)}{A'} \; \underset{(n+u)\times 1}{X'}$$

$$D = \underset{n(n+u+1)}{\begin{bmatrix} \underset{n(n+u)}{A'} & \vdots & \underset{n\times 1}{l} \end{bmatrix}}$$

$$r(A') \leqslant \min(n, (n+u)) \longrightarrow r(A') \leqslant n$$

$$r(A') \geqslant n$$

$$\hookrightarrow r(I) \leqslant r(A') \Rightarrow n \leqslant r(A')$$

بعلت وجود I در ماتریس A'. (I ، رتبه ماتریس را کاهش نمی‌دهد، آن ممکن است رتبه آن را افزایش دهد.)

$$\Rightarrow r(A') = n$$

$$r(D) \leqslant \min(n, (n+u+1)) \Rightarrow r(D) \leqslant n$$

$$r(D) \geqslant r(A') \Rightarrow r(D) \geqslant n$$

$$\Rightarrow r(D) = n$$

دستگاه سازگار است. $\Leftarrow$ $r(A') = n \;,\; r(D) = n$

بنابراین بی‌نهایت جواب وجود دارد. $\Leftarrow$ $n < n+u$

با افزودن بردار v، دو نوع ناسازگاری را حل کردیم. سپس می‌توانیم مشاهدات را به فضای ریاضی ببریم.

حال باید از بین بی‌نهایت جواب، یکی را انتخاب کنیم. برای انتخاب یک جواب از بین بی‌نهایت جواب نیاز به یک شرط در قالب یک تابع ریاضی، برحسب مجهولات x' است. بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{cases} l = A'X' \\ f(X') \rightarrow \begin{cases} \text{Max} \\ \text{Min} \\ \text{صفر} \end{cases} \end{cases}$$

تابع f ای که در نقشه‌برداری مورد استفاده قرار می‌گیرد، تابع نُرم است که مینیمم شدن آن مدنظر باشد.

پس:

$$\begin{cases} l = A'X' \\ \|X'\| \rightarrow \min \end{cases}$$

جواب مسئله بهینه‌سازی فوق، یک جواب مینیمم نُرم برای دستگاه $l = A'X'$ است. این جواب مینیمم نُرم، جواب مناسبی برای دستگاه باید باشد. دلیل این امر به شرح زیر است:

یک قسمت از بردار x'، بردار x (مجهولات واقعی) است، که می‌تواند هر مقداری داشته باشد و مینیمم شدن آن معنا ندارد. از طرفی یک قسمت از بردار x'، بردار v (مجهولات ظاهری) هستند

هر مقداری ، برای آن قابل قبول نیست. چون ما به مشاهدات مقداری احتمالی داریم که به این میزان احتمال سبب می‌شود که بردار v بتواند آزادانه هر مقداری را بپذیرد. مینیمم ساختن بردار x ممکن است سبب شود ، v مقداری را بپذیرد که قابل قبول نباشد. بنابراین تابع هدف ما ، $\|x'\|$ نیاز به تصحیح دارد

پس مسئله بهینه سازی فوق به صورت زیر اصلاح می‌گردد:

$$\begin{cases} l = A'x' \equiv Ax \\ \|v\| \to \min \end{cases}$$

در ادامه آشنایی با توابع نرم ، مورد نیاز است.

۲-۳) انواع توابع نرم :

1) L_2 (Least square)

سرشکنی با نرم L_2

$$\|v\|_{L_2} = \sqrt{v \cdot v} = \left(\sum_{i=1}^{n} v_i^2\right)^{1/2}$$

2) L_1

روش کمترین قدر مطلق ها ، (سرشکنی با نرم L_1)

$$\|v\|_{L_1} = \sum_{i=1}^{n} |v_i|$$

3, L_∞ Tchebychev

چبیشف

(سرشکنی با نرم L_∞)

$$\|V\|_{L_\infty} = \max\{|v_i|\}$$

4, L_q

(سرشکنی با نرم L_q)

$$\|V\|_{L_q} = \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^q\right)^{1/q}$$

« در تمامی این روش‌ها هدف مینیمم کردن V می‌باشد. »

همانطور که می‌بینیم روش L_2 حالت خاصی از روش L_q است که در آن $q=2$ می‌باشد

مزایای استفاده از نرم L_1:

تاثیر خطاهای سیستماتیک و اشتباهات روی جواب حاصل از نرم L_1 مستهلک نیست. (به اندازه سرشکنی پخش خطا روی جواب حاصل از نرم L_2 نمی‌باشد.) جواب نرم L_1 میانه اعداد است.

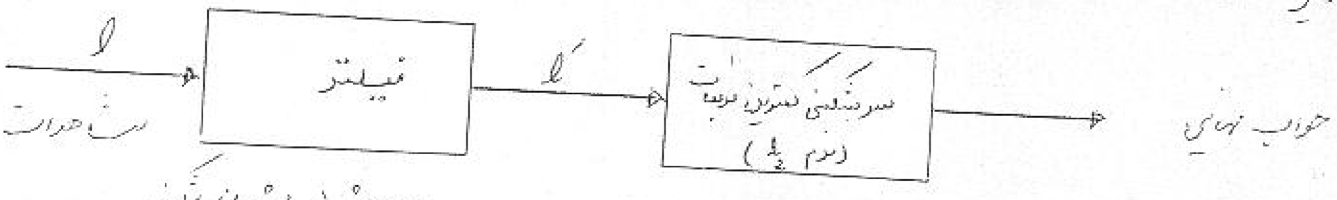
فرض کنید، یکی از مشاهدات ما اشتباه باشد. اگر مشاهدات را مرتب کنیم، مشاهده اشتباه ابتدا یا انتهای لیست مشاهدات قرار می‌گیرد. اگر مشاهدات را از کوچک به بزرگ مرتب کنیم، یعنی در واقع در صورتی که

با فشرده‌تر بپرانیم مشاهده می‌کنیم که با فشرده مربوط به مشاهده، استفاده از شبکه عمیق‌تر یا بیشتر است. اگر

به علت وجود قدر مطلق، از تعمیم بیشتر است.)

نرم L_1 به صورت موضعی عمل کرده و خطا را روی تعداد مشاهدات پخش نمی‌کند، سپس در کشف مشاهده اشتباه

موثرتر است.



• پردازش‌های پیش از سرشکنی

• نرم L_1

یعنی اگر پردازش‌های پیش از سرشکنی، بنا به دلایلی از قبیل تکراری شدن مشاهدات، قابل انجام نشود،

از نرم L_1 جهت کشف مشاهده اشتباه، بهره می‌بریم.

معایب استفاده از نرم L_1:

۱) خصوصیات آماری استفاده از نرم L_2 (یا برخی آنها) را ندارد.

۲) محاسبات این روش پیچیده است.

مزایای استفاده از نرم L_2:

۱) دارای قدرت بیشتری در سرشکنی است، چون فاصله را مینیمم می‌کند.

۲) دارای محاسبات ساده‌تری است.

۳) درصورت غیرخطی بودن مدل مورد استفاده، تغییرات کمی با استفاده از این روش روی مدل صورت می‌گیرد.

۴) جواب حاصل از این روش دارای شرایط یک برآورد بهینه است. (فصل ۶)

دیدیم که معادله ما در ابتدا جواب نداشت، در نهایت با استفاده از بردار v، به جواب بهینه رسیدیم.

$$\begin{cases} L = AX \\ \|V\|_2 \rightarrow \min \end{cases}$$

$$\|V\|_2 = (V^T \cdot V)^{1/2}$$

با توجه به اینکه نرم تابعی است که همواره مثبت می‌باشد، برای سادگی می‌توان توان دوم $\|V\|_2$ را مینیمم کرد

$$\|V\| = V^T \cdot V \rightarrow \min$$

۲-۴) بهینه‌سازی

بهینه‌سازی در ریاضیات چیزی جز تعیین اکسترمم یک تابع نیست.

(Constraint)

۲-۴-۱) بهینه سازی مقید

اگر تابع $F(x)$ شامل مشاهدات ما باشد که به دنبال یافتن اکسترمم های کلی آن هستیم، $G(x)$ بصورت یک شرط (Constrain) مطرح می شود. در صورت وجود $G(x)$ بعنوان یک قید، بهینه سازی از نوع مقید است.

۲-۴-۱-۱) بهینه سازی با قیدهای مساوی:

چنانچه تابع $G(x)$، بصورت مساوی مطرح شود، بهینه سازی با قیدهای مساوی است.

$$\begin{cases} F(x) \\ G(x) = 0 \end{cases}$$

۲-۴-۱-۲) بهینه سازی با قیدهای نامساوی:

چنانچه تابع $G(x)$ بصورت یک نامساوی مطرح شود، بهینه سازی با قیود نامساوی است.

$$\begin{cases} F(x) \\ G(x) > 0 \quad or \quad G(x) < 0 \end{cases}$$

(Un Constraint)

۲-۴-۲) بهینه سازی نامقید

اگر $G(x)$ وجود نداشته باشد، در اینصورت مسئله نامقید است.

۴-۴-۲) حل مسائل بهینه سازی مقید :

مسائل بهینه سازی مقید (با قیدهای تساوی) به ۳ روش قابل حل است :

۱- روش جایگزینی مستقیم

۲- روش تغییرات نامحدود

۳- روش ضرایب لاگرانژ

به علت استفاده از روش ضرایب لاگرانژ در فرآیند سرشکنی و اهمیت آن به توضیح روش فوق

می پردازیم :

قضیه لاگرانژ :

شرط لازم برای اینکه تابع F با قید $G(x)$ دارای اکسترمم نسبی در نقطه x باشد آن است که

مشتقات جزئی مرتبه اول تابع لاگرانژ (φ) نسبت به هر یک از متغیرها مساوی صفر باشد

روش ضرایب لاگرانژ :

$$\begin{cases} F(x) \\ G(x)=0 \end{cases}$$

در این روش ، m متغیر جدید به سیستم اضافه می شود که به عنوان ضرایب لاگرانژ معروفند و به همین علت

به این روش ، روش ضرایب لاگرانژ گفته می شود

تابع φ را بصورت مقابل تعریف می کنیم : (λ : ضریب لاگرانژ) $\varphi = f + \lambda G$

اگر فرض کنیم مسئله به صورت خطی $BV + w = 0$ باشد، بایستی V با نرم L_2 مینیمم شود:

$$G(V) = BV + w = 0$$

$$f(V) = \|V\|_{L_2}^2 = \sum_{i=1}^{n} V_i^2 = V^T \cdot V \quad \Rightarrow \varphi = V^T \cdot V + \lambda (BV + w)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial V} = 0 \Rightarrow 2V^T + \lambda^T B = 0$$

$$\Rightarrow V = -B^T (B B^T) w$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow BV + w = 0$$

۲-۴-۴) حل مسائل بهینه سازی نامقید

هدف پیدا کردن اکسترمم تابع n متغیره $f(x) = 0$ است.

شرط لازم برای اینکه $F(x)$ در نقطه‌ای $x = a$ دارای ماکزیمم یا مینیمم باشد این است که مشتق در این نقطه تعریف شده و برابر صفر باشد:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{x=a} = \left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{x=a} = \cdots \left.\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|_{x=a} = 0$$

شرط کافی:

- برای اینکه $x = a$، نقطه ماکزیمم $F(x)$ باشد، این است که ماتریس Hessian (هسین) تابع در نقطه $x = a$، یک ماتریس معین منفی باشد.

- برای اینکه $x = a$، نقطه مینیمم $F(x)$ باشد، این است که ماتریس هسین تابع در نقطه $x = a$ یک

ماتریس معین مثبت باشد.

ماتریس Hessian :

ماتریس هسین، برای هر تابع، ماتریسی است که عناصر آن مشتقات مرتبه دوم آن تابع باشند.

$$H = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_n} \end{vmatrix}$$

نکته) درصورتی که ماتریس هسین، در $x=a$ نیمه معین مثبت یا نیمه معین منفی باشد، درمورد نقطه $x=a$، چیزی نمی‌توان گفت.

فصل سوم: ارزیابی مشاهدات قبل از سرشکنی

۱-۳) همانگونه که در فصل اول گفته شد، با وجود حذف خطاهای سیستماتیک به علت باقی ماندن خطای اتفاقی در مقدار مشاهدات آن، نمی‌توان به مقدار واقعی یک کمیت دست یافت. بنابراین بایستی چگونگی توزیع خطا و میزان جابجایی آن را تعیین کرد و با بررسی های آماری محدوده‌ای را برای بهترین مقدار یک کمیت تعیین نمود.

به منظور ارزیابی مشاهدات و نحوه پراکندگی آنها و نیز برای تشخیص مشاهداتی که بایستی حذف شوند، به ترسیم نمودار (Histogram) و پلیگون (Polygon) می‌پردازیم. مراحل کار به صورت زیر است:

۱- ابتدا مشاهدات را کلاس‌بندی می‌کنیم. اگر نمونه شامل N عضو باشد:

$$\text{فاصله کلاس‌ها} = \frac{Max - min}{1 + 3.3 \log N}$$

$$\text{تعداد کلاس‌ها } (n) = \frac{Max - min}{\text{فاصله کلاس‌ها}}$$

از بین چهار حالت موجود برای فاصله (فاصله باز-باز، فاصله بسته-بسته، فاصله باز-بسته و فاصله بسته-باز)، کلاس‌بندی یک نمونه، همیشه بایستی از فاصله بسته شروع شده و به فاصله بسته نیز ختم گردد.

۲- پس از کلاس‌بندی، تعداد عناصر موجود در هر کلاس را تعیین می‌کنیم که به آن اندازه (سایز) هر کلاس گفته می‌شود.

سپس دو محور عمود برهم رسم می‌کنیم. که محور افقی نشان دهنده فاصله کلاس ها (K) و محور عمودی

نشان دهنده اندازه کلاس ها (n) است. روی هر کدام از فاصله‌ها می‌توان مستطیلی رسم کرد

مساحت زیر هر مستطیل برابر است با :

$$S = n \times K$$

که مجموع سطوح زیر هیستوگرام از رابطه زیر بدست می‌آید :

$$S = \sum_{i=1} S_i$$

بر مبنای تئوری آمار و احتمالات، در هیستوگرام، هدف همین داشتن سطوح زیر منحنی به سمت عدد یک می‌باشد

چون این مطلب، هدف ما یعنی رسیدن به بهترین مقدار برای اعضاء یک نمونه را تأمین می‌کند.

پس باید سطوح مستطیلی شکل را طوری موجب نمود که $\sum S_i = 1$ گردد. بدین منظور محور عمودی را به نام

ضریب تعداد یا شمارش نسبی فاصله‌ای (Relative count)، ($\bar{n}_i$)، را اختیار کرده و n_i ها

را چنان توجیه می‌کنیم که هدف مورد نظر تأمین گردد.

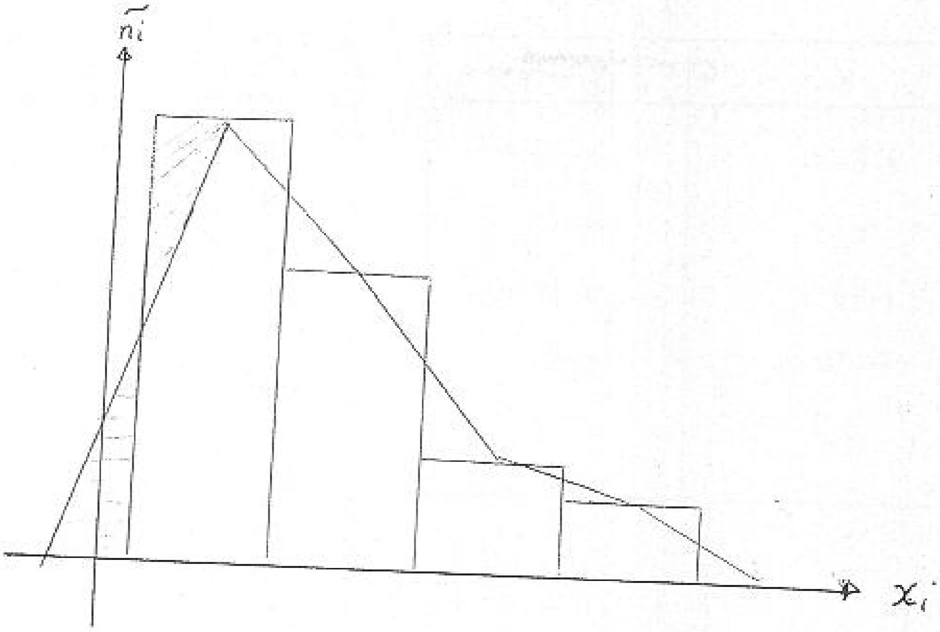
به منظور رسم پلیگون، وسط اضلاع فوقانی هر مستطیل (میانه هر کلاس) را در هیستوگرام بهم

متصل می‌کنیم. در نتیجه خط شکسته‌ای ایجاد می‌گردد که پلیگون نام دارد.

چون سطح زیر هیستوگرام برابر ۱ بوده، پس سطح زیر پلیگون نیز باید برابر ۱ باشد. به منظور حفظ

این مقدار، دو فاصله یکی به ابتدای نمودار و دیگری به انتهای نمودار اضافه می‌کنیم. پس وسط اضلاع

فوقانی این دو فاصله را نیز به پلیگون قبلی متصل نموده و یک پلیگون بسته ایجاد می‌کنیم



Confidence Interval

۳-۲) فاصله اطمینان

پس از محاسبه خطای محتمل (فصل اول)، می‌توان فاصله اطمینان را بصورت زیر بیان کرد:

فاصله اطمینان $= \bar{x} \pm K\cdot S \Rightarrow P(\bar{x} - K\cdot S < X < \bar{x} + K\cdot S)$

هر یک از اعضا نمونه تصادفی، بایستی از رابطه زیر تبعیت کنند:

$$\bar{x} - K\cdot S \leq x \leq \bar{x} + K\cdot S$$

این حد را فاصله اطمینان می‌نامند. بعنوان مثال $P(\bar{x} - S < x < \bar{x} + S)$ نشان دهنده احتمال ۶۸٪ است.

عدد K، برای درصدهای مختلف متفاوت است، به جدول زیر توجه کنید

KS	سطح اطمینان
0.675	0.50
1 S	0.68
1.98 S	0.95
2.58 S	0.99
3 S	.997

۳-۴) انواع توابع توزیع خطا

۳-۴-۱) تابع توزیع گوس Gauss Distribution Function

تابع توزیع خطا، معمولاً به شکل منحنی زنگوله‌ای (توزیع گوس) ظاهر می‌شود.

معادله ریاضی آن بصورت مقابل می‌باشد: $f(x) = a e^{-b^2x^2}$

ضرایب ثابت می‌باشند a , b :

می‌دانیم سطح زیر هر منحنی بایستی برابر با ۱ باشد، یعنی:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} a e^{-b^2x^2} = 1$$

با تغییر متغیر $bx = t$ و $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$ (انتگرال ...) داریم:

$$a = \frac{b}{\sqrt{\pi}} \Rightarrow f(x) = \frac{b}{\sqrt{\pi}} e^{-b^2x^2}$$

می‌دانیم $S^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-M)^2\, \varphi(x)\, dx$ و نیز ثابت می‌گردد در این تابع میانگین صفر است.

$$\Rightarrow S^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot q(x)\, dx$$

$$S^2 \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot \frac{b}{\sqrt{\pi}}\, e^{-b^2x^2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} b\, e^{-b^2x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-b^2x^2}\, dx = \sqrt{\pi}/b$$

از طرفین رابطه فوق نسبت به b مشتق می‌گیریم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} -2bx^2 e^{-b^2x^2}\, dx = \frac{-\sqrt{\pi}}{b^2}$$

$$2\sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b}{\sqrt{\pi}}\, x^2 e^{-b^2x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{b^2}$$

$$2\sqrt{\pi} \times S^2 = \frac{\sqrt{\pi}}{b^2} \quad \Rightarrow b = \frac{1}{\sqrt{2S^2}}$$

با جایگذاری b بدست آمده در معادله فوق خواهیم داشت:

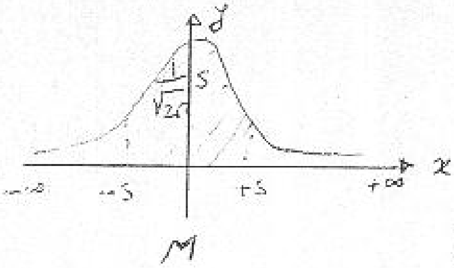
$$P(x) = \frac{b}{\sqrt{\pi}}\, e^{-b^2x^2} \Rightarrow \frac{\frac{1}{\sqrt{2}S}}{\sqrt{\pi}}\, e^{\frac{-x^2}{2S^2}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, S}\, e^{-x^2/2S^2} \quad (*)$$

همانگونه که در معادله بدست آمده مشاهده می‌کنیم این تابع به واریانس بستگی دارد.

۳-۳-۱-۱) خواص تابع توزیع گوس:

۱) کوهه‌ی منحنی مقدار ماکزیمم تابع: اگر در رابطه (*) مقدار x را برابر صفر قرار دهیم، مقدار ماکزیمم بدست خواهد آمد:

$$y_{max} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, S}$$



۲) نحوه ی محاسبه نقطه عطف تابع :

برای محاسبه نقطه عطف، بایستی مشتق دوم را مساوی صفر قرار دهیم

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, s}\, e^{-x^2/2s^2}$$

$$y' = \frac{-2x}{2s^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, s}\, e^{-x^2/2s^2} = \frac{x}{\sqrt{2\pi}\, s^3}\, e^{-x^2/2s^2}$$

$$y'' = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}\, s^3}\, e^{-x^2/2s^2} + \frac{x^2}{s^4} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, s} \cdot e^{-x^2/2s^2} = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}\, s^3}\, e^{-x^2/2s^2} + \frac{x^2}{\sqrt{2\pi}\, s^5}\, e^{-x^2/2s^2}$$

$$y'' = 0 \Rightarrow \frac{-1}{s^3} + \frac{x^2}{s^5} = 0 \Rightarrow x^2 = s^2 \Rightarrow x = \pm s$$

همانطور که ثابت شد، و با توجه به شکل، طول نقاط عطف منحنی گوس $\pm S$ (انحراف معیار) است. چنانکه می بینیم، هر اندازه فاصله نقطه عطف از میانگین بیشتر باشد، منحنی کشیده تر است. اگر این مقدار به سمت بی نهایت میل کند، منحنی به صورت خطی موازی محور x ها در می آید. بنابراین چنانچه اندازه سری ها از محدوده معینی تجاوز کنند، از محدوده خط خارج شده و به سمت گسترده میل می کنند.

منحنی گوس نسبت به محور y ها متقارن است. دو مقدار مساوی و مختلف العلامه برای طول نقطه عطف، مؤید این مطلب است. این مطلب خود نشان دهنده این است که میانگین در این تابع توزیع صفر است.

۲-۱-۳-۳) بررسی مقادیر خطا در این تابع :

خطای مطلق :

در فصل اول به تعریف این نوع خطا پرداختیم. بنابراین این خطا روی منحنی توزیع خطا به شکل نقطه عطف منحنی است.

خطای محتمل :

احتمال وجود مقادیر خطای مطلق در محدوده (+S , -S) می‌باشد. نحوه‌ی محاسبه آن با استفاده از منحنی توزیع خطا بصورت زیر است:

$P(-S \leq x \leq S)$

مقدار احتمال در بردار را محاسبه می‌کنیم:

سپس این مقدار را در خطای مطلق ضرب می‌کنیم. مقدار احتمال فوق برابر 0.683 (تقریبا معادل $\frac{2}{3}$، احتمال وجود خطاهایی از +S تا -S را پوشش می‌دهد). پس خطای محتمل برابر است با:

$$\text{خطای محتمل} = 2/3 \cdot S$$

خطای ماکزیمم :

$P(-S \leq x \leq S) = 0.6827$

$P(-2S \leq x \leq 2S) = 0.9545 \rightarrow ?$

$P(-3S \leq x \leq 3S) = 0.9973$

$$\left\{ e^{x} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots \right.$$

$$e^{\frac{-x^2}{2s^2}} = 1 - \frac{x^2}{2s^2} + \frac{x^4}{8s^4} + \frac{x^6}{48s^4} + \cdots$$

$$P(-2s \leqslant x \leqslant 2s) = \int_{-2s}^{2s} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,s} e^{-x^2/2s^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,s} \left[\int_{-2s}^{2s} dx + \int_{-2s}^{2s} + \frac{x^2}{2s^2}\,dx + \right.$$

$$\left. \int_{-2s}^{2s} -\frac{x^4}{8s^4}\,dx + \cdots \right]$$

$$\Rightarrow P(-2s \leqslant x \leqslant 2s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,s} \left[4s - \frac{1}{2s} + \frac{16s^3}{3} + \cdots \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[4 - 8/3 + \frac{32}{20} - \frac{128}{168} + \cdots \right] = 0.9545 \quad \right\}$$

خطای ماکزیمم، برابر حاصل جمع سه احتمال فوق است :

$$e_{max} = \mp(0.6827 + 0.9545 + 0.9973) \times s \simeq 2.7 \times s$$

۲-۳-۴) تابع توزیع نرمال — Normal Distribution Function

چنانچه در تابع توزیع گوسی، x را به $x-\mu$ تبدیل کنیم، تابع عمومی‌تری که دارای تمام خواص منحنی گوسی است، بدست می‌آید که به آن، تابع توزیع نرمال گویند.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,s} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2s^2}} \qquad x \sim N(\mu, s^2)$$

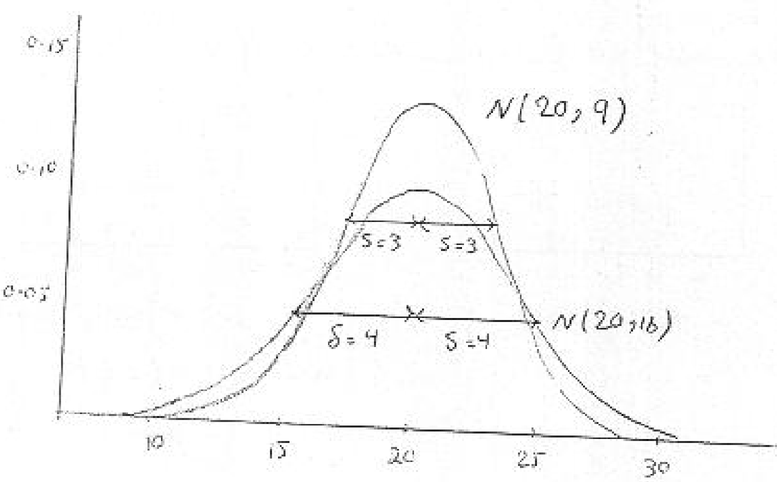
چنانچه خطاهای اندازه‌گیری، از این تابع تبعیت کنند، آن اندازه‌گیری را نرمال، و در غیر این صورت، غیر

طبیعی (نرمال) می‌نامند

دو پارامتر S^2 و M برای توصیف این توزیع به کار می‌روند

شکل زیر، دو توزیع چگالی احتمال نرمال را نشان می‌دهد که دارای امید ریاضی یکسان یعنی $M=20$ و واریانس‌های متفاوت $S^2=9$ و $S^2=16$ می‌باشند:

$N(20,9)$ $N(20,16)$



از جدولی که احتمالات را برای توزیع نرمال استاندارد بیان می‌کند، می‌توان برای بدست آوردن احتمالات توزیع نرمال، استفاده کرد.

اینجا نیز، منحنی مطلق، متمایل و ماکزیمم قابل پیوسته بوده و با ارزش ارائه شده در مورد توزیع گوسی تفاوتی ندارد.

نقاط عطف منحنی $x=M+S$ و $x=M-S$ می‌باشند

۳-۲-۳) تابع توزیع نرمال استاندارد Normal standard Distribution Function

چنانچه در تابع توزیع نرمال ، $x-M$ را به $Z = \frac{x-M}{S}$ تبدیل کنیم ، تابع توزیع نرمال فرم جدیدی پیدا خواهد کرد که

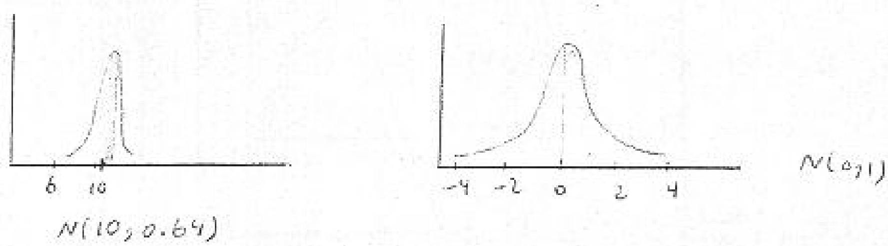
به تابع توزیع نرمال استاندارد معروف است که در آن واریانس برابر ۱ و میانگین نمونه صفر است .

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \qquad (S=1 , M=0) \qquad Z \sim N(0,1)$$

هر متغیری با توزیع نرمال $X \sim N(M, S^2)$ را می‌توان بصورت توزیع نرمال استاندارد درآورد .

مثال ۳) اگر $X \sim N(10, 0.64)$ باشد که شکل آن بصورت زیر می‌باشد . مطلوبست :

$$P(M < x < M+\sigma) = ?$$



حل) $p(10 < x < 10.8)$ مورد نظر است .

$$Z = \frac{x-10}{0.8} \sim N(0,1)$$

به نرمال استاندارد تبدیل می‌کنیم

می‌بایست نواحی هاشور خورده در دو شکل ، مورد نظر است .

$$P(0 < Z < 1) = P(-\infty < Z < 1) - P(-\infty < Z < 0)$$

با توجه به جدول نرمال استاندارد ، داریم : $0.8413 - 0.5 = 0.3913$

۳-۲-۴) تابع توزیع T-Student :

Student نام مستعاری است که توسط آمارشناس W.S. Gossett بکار برده است .

توزیع T : برای آزمایش عرضه‌های کوچک متغیر تصادفی که دارای توزیع نرمال هستند و برای کشف نشانه‌های ... استفاده می‌گردد. فرض می‌کنیم n متغیر تصادفی مستقل $X_1, X_2, \dots, X_n$ دارای توزیع نرمال با میانگین μ و انحراف معیار s باشند، متغیر تصادفی t بصورت زیر است:

$$T = \frac{(\bar{x} - \mu)^2}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \sim t(n-1)$$

تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی x که دارای تابع توزیع T باشد بصورت زیر است:

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{\frac{-n+1}{2}}}{\sqrt{n\pi}\;\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

n (درجه آزادی) هر چه بزرگتر شود بسیار، برای این توزیع می‌باشد.

$$n > 2 : t \to N(0,1)$$

تابع چگالی احتمال t، همواره متقارن است.

۵-۲-۳) تابع توزیع کای اسکوئر χ^2 :

فرض می‌کنیم n متغیر تصادفی مستقل $X_1, X_2, \dots, X_n$ دارای توزیع نرمال استاندارد باشند، آنگاه

$$\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2$$

$$E(\chi_n^2) = n$$

$$Var(\chi_n^2) = 2n$$

کاربرد این تابع توزیع آنجاست که بخواهیم مسئله‌ای را روی یک نمونه خاص ، [illegible] اصلی نمونه گرفته شده از یک

تابع چگالی احتمال را بررسی کنیم

تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی x ، که دارای توزیع χ^2 است بصورت زیر می‌باشد :

$$f(x) = \frac{x^{(n/2)-1}\, e^{-x/2}}{2^{n/2}\, \Gamma(n/2)}$$

پارامترهای توزیع مشخص شده توزیع می‌باشد :

$\mu = n$

$\sigma^2 = 2n$

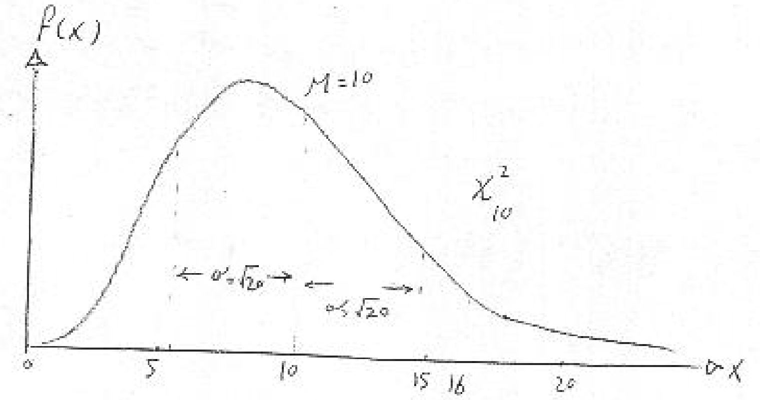
(n : درجه آزادی)

if : $n \rightarrow \infty$: $\chi^2 \rightarrow N$

متغیر تصادفی x ، دارای توزیع χ^2 است ، بصورت زیر تعریف می‌گردد :

$$\chi = \frac{(x_1-\mu)^2}{\sigma^2} + \cdots + \frac{(x_n-\mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_n$$

$$\chi = \frac{(x_1-\bar{x})^2}{\sigma^2} + \cdots + \frac{(x_n-\bar{x})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$



۳-۲-۶) تابع توزیع Fisher :

فرض کنید $x_1, x_2, \ldots, x_n$ و $y_1, y_2, \ldots, y_m$ تابعی از متغیرهای تصادفی مستقل باشند که دارای توزیع نرمال هستند.

$$\chi_n^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$

$$\chi_m^2 = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_m^2$$

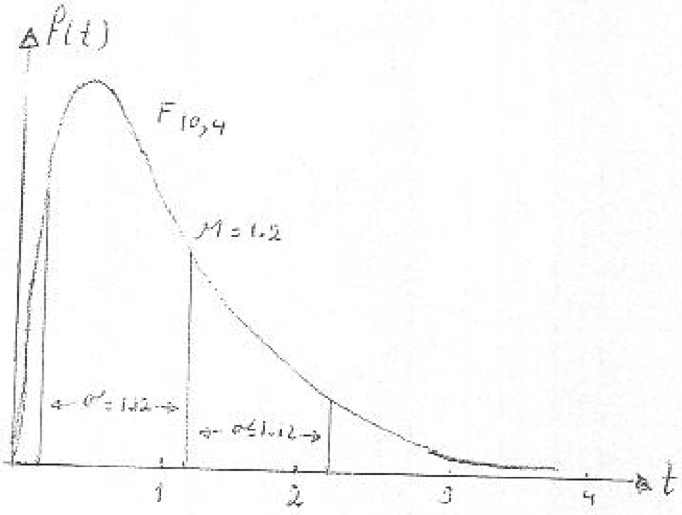
تابع چگالی احتمال آن بصورت زیر است:

$$F_{n,m} = \frac{\chi_n^2/n}{\chi_m^2/m}$$

این تابع توزیع، جهت آزمون هایی که به مقایسه دو واریانس می‌پردازند کاربرد دارد. شکل هایی جابجا شده طوری دیگر را با آن مقایسه می‌کنیم

$$\text{if } n \to \infty : F_{m,n} \to \chi_n^2$$

$$\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F_{m-1,n-1}$$



قضیه مقدار مرکزی :

اگر $x_1, x_2, \ldots, x_n$ متغیرهای تصادفی با تابع توزیع نرمال باشند (به روش تصادفی نمونه برداری شده باشند) آنگاه به طور تقریبی :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \rightarrow N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

۴-۳) آزمون آماری :

یک تصمیم آماری ، در رجوع به صحت و سقم فرض آماری می باشد.

(مثلاً آیا تابع توزیع مشاهدات نرمال هست یا نه ؟)

فرض صفر (H_0) :

چیزی که انتظار داریم صحیح باشد.

فرض اولیه (H_1) :

فرض مقابل H_0

خطای نوع اول α :

چنانچه فرض H_0 صحیح باشد و آزمون باعث رد این فرض گردد ، یک تصمیم غلط انجام گرفته است.

خطای نوع دوم β :

چنانچه فرض H_0 ، ناصحیح باشد و آزمون این فرض را بپذیرد ، یک تصمیم غلط صورت گرفته است.

خطای نوع دوم ، از خطای نوع اول خطرناک تر است.

معمولاً $\alpha = 0.01$ یا 0.05 و $\beta = 0.1$ یا 0.2 است.

توان آزمون :

$(1-\beta)$. چنانچه توان آزمون زیاد باشد ، می توان H_1 را با احتمال بالایی پذیرفت.

	رد H_0	قبول H_0
H_0 صحیح	خطای نوع اول سطح معنی‌دار α	تصمیم درست سطح اطمینان $1-\alpha$
H_0 ناصحیح	تصمیم درست توان آزمون $1-\beta$	خطای نوع دوم β

آماره :

آماره تابعی از متغیرهای نمونه است که تابع کمیت مجهولی نباشد .

تابع آماره ، بایستی تحت فرض H_0 معلوم باشد .

۳-۵) تست های مشاهدات پیش از سرشکنی :

مشاهدات پیش از سرشکنی ، در سه مرحله مورد ارزیابی قرار می‌گیرند :

۱- تست تابع توزیع جامعه (تست نرمال بودن)

۲- تست پارامترهای تابع توزیع

۳- تست کشف مشاهدات اشتباه

آزمون ۱ و ۲ ، به کل نمونه مربوط می‌شود و برای تمام اعضاء صورت می‌گیرد ، اما آزمون ۳ تست عناصر نمونه

رد تست تک مشاهده به تنهایی است.

Goodness of fit

۳-۶) تست نرمال بودن یا تست سازگاری هیستوگرام با منحنی

به دو روش صورت می‌گیرد:

۳-۶-۱) تست نرمال بودن بر اساس طول دسته مساوی:

حالت ایده‌آل آن است که $e_i = a_i$

شماره دسته	حدود دسته	a_i	e_i
1	$l_1 \to u_1$	a_1	e_1
2		a_2	e_2
⋮	⋮	⋮	⋮
m	$l_m \to u_m$	a_m	e_m

a_i : فراوانی تجربی (مربوط به هیستوگرام)

e_i : فراوانی تئوری (مربوط به منحنی)

l_i : X_{min}

u_i : X_{max}

$$Z_{l_i} = \frac{l_i - \bar{x}}{S} = \frac{l_i - M}{\sigma}$$

$$Z_{u_i} = \frac{u_i - \bar{x}}{S} = \frac{u_i - M}{\sigma}$$

$P(l_i < x < u_i)$

احتمال اینکه x درون دسته وجود داشته باشد:

آماره

$$y = \sum_{i=1}^{n} \frac{(a_i - e_i)^2}{e_i} \sim \chi^2_{df}$$

زمانی که سایز نمونه (n) کم باشد این روش مناسب است.

H_0 : تابع توزیع داده نرمال است

H_1 : تابع توزیع داده نرمال نیست

با انجام این آزمون می‌توان فهمید که منحنی نمودارهای ما با اطلاعاتی که بدست آورده‌ایم یکسان است یا خیر.

۲-۶-۳) تست نرمال بودن براساس فراوانی مساوی :

برای انجام این آزمون ابتدا بایستی تعداد دسته‌های هیستوگرام را مشخص نمود که آنچه در آمار به عنوان تعداد قابل قبول برای تعداد دسته‌ها ارائه شده به شرح زیر است.

n	200	400	600	800
m	16	20	24	27

شماره دسته	احتمال	Z از جدول نرمال	حدود دسته	a_i	e_i
1	$1/m$	z_1	$x_{min} \to \bar{x}+Sz_1$		n/m
2	$2/m$	z_2	$\bar{x}+Sz_1 \to \bar{x}+Sz_2$		⋮
⋮		⋮			
m	1	z_m	$\bar{x}+Sz_{m-1} \to \bar{x}+Sz_m$		n/m

فراوانی مساوی در نظر گرفته شده است و برای تمامی دسته‌ها مساوی است

در حالت ایده‌آل : $a_i = e_i$

آماره

$$y = \sum_{i=1}^{m} \frac{(a_i - e_i)^2}{e_i} \sim \chi^2$$

جهت انجام تست نرمال بودن، چهار حالت بوجود می‌آید : (آماره برای تمامی حالت کای مربع است.)

۱) μ و σ^2 معلوم اند. $\quad df: m-1$

۲) μ معلوم و σ^2 نامعلوم است. (s^2 معلوم است.) $\quad df: m-2$

۳) μ نامعلوم و σ^2 معلوم است. ($\bar{x}$ معلوم است.) $\quad df: m-2$

۴) μ و σ^2 هر دو نامعلوم اند ($\bar{x}$ و s^2 معلوم است.) $\quad df: m-3$

۳-۷) تست پارامترهای تابع توزیع :

۳-۷-۱) تست حدهای ستیتیکی (تست سازگاری میانگین نمونه با میانگین جامعه - تست صحت)

۳-۷-۱-۱) μ و σ^2 معلوم است :

$$\begin{cases} H_0: \mu = \bar{x} \\ H_1: \mu \neq \bar{x} \end{cases}$$

مراحل آزمون حدهای ستیتیکی به شرح زیر است :

۱) تشکیل آماره بصورت $y = \dfrac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$

۲) استخراج مقادیر $y_{1-\alpha/2}$ یا $y_{\alpha/2}$ از جدول

$$P\left(y_1 < \dfrac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < y_2\right) = (1-\alpha)\%$$

$$P\left(z_{\alpha/2} < \frac{\bar{l}-M}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{1-\alpha/2} \right) = (1-\alpha)\%$$

$$M + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2} < \bar{l} < M + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2}$$

یا

$$M - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2} < \bar{l} < M + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2}$$

ناحیه اطمینان $(1-\alpha)\%$ برای $\bar{l}$

۳) قاعده تصمیم :

فرض صفر یعنی عدم وجود خطای سیستماتیک در مشاهدات رد می‌گردد، اگر :

$$\left| \frac{\bar{l}-M}{\sigma/\sqrt{n}} \right| > z_{1-\alpha/2}$$

۲-۱-۷-۲) M معلوم و σ^2 نامعلوم است :

در عمل، این حالت اتفاق می‌افتد.

روند اجرای تست مانند حالت قبل است با این تفاوت که از تابع توزیع student استفاده می‌شود

$$M - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1, 1-\alpha/2} < \bar{l} < M + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1, 1-\alpha/2}$$

فرض صفر رد می‌گردد اگر :

$$\left| \frac{\bar{l}-M}{S/\sqrt{n}} \right| > t_{n-1, 1-\alpha/2}$$

۲-۷-۳) تست خطای اتفاقی (تست دقت دستگاه)

۲-۷-۳-۱) M و σ^2 معلوم اند:

$$\begin{cases} H_0 = \sigma^2 = S^2 \\ H_1 \begin{cases} \sigma^2 \neq S^2 \\ \sigma^2 < S^2 \\ \sigma^2 > S^2 \end{cases} \end{cases}$$

مراحل اجرای تست به شرح زیر است:

فرض کنید عناصر S دارای تابع توزیع نرمال باشند:

$$S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \rightsquigarrow N(M, \sigma^2)$$

$$S' = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\} \rightsquigarrow N(0,1) \qquad z_i = \frac{x_i - M}{\sigma}$$

$$\sum_{i=1}^{n} z_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - M)^2}{\sigma^2} \rightsquigarrow \chi_n^2$$

تذکر:

اگر عناصر نمونه ای دارای تابع توزیع نرمال استاندارد باشند، $\sum z_i^2$ دارای تابع توزیع χ^2 است.

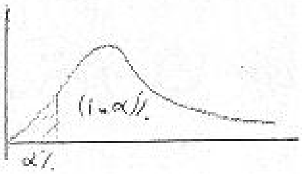
$$\Rightarrow \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - M)^2 \rightsquigarrow \chi_n^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sigma^2} (nS^2) \rightsquigarrow \chi_n^2$$

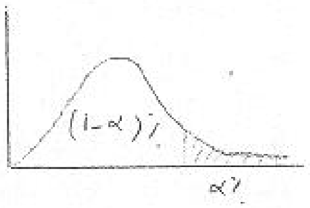
$$\frac{nS^2}{\sigma^2} \rightsquigarrow \chi_n^2$$

$$E(\chi_n^2) = n$$

در حالت ایده آل $\frac{S^2}{\sigma^2} = 1$ می باشد



$\sigma^2 < S^2$ $\qquad$ $S^2/\sigma^2 > 1$



$\sigma^2 > S^2$ $\qquad$ $S^2/\sigma^2 < 1$

۱) تشکیل آماره $\qquad \chi^2 = \frac{nS^2}{\sigma^2}$

۲) استخراج مقادیر $\chi^2_{n,\alpha/2}$ و $\chi^2_{n,1-\alpha/2}$ یا $\chi^2_{n,\alpha}$ و $\chi^2_{n,1-\alpha}$

۳) قاعده تصمیم:

فرض صفر (مساوی بودن S^2 با σ^2) پذیرفته می‌شود اگر:

1) $\chi^2_{n,\alpha/2} < \chi^2 < \chi^2_{n,1-\alpha/2}$

2) $\chi^2 > \chi^2_{n,\alpha}$

3) $\chi^2 < \chi^2_{n,1-\alpha}$

$P(l < \sigma^2 < u) = (1-\alpha)\%$

$P(l < S^2 < u) = (1-\alpha)\%$

$P(\chi^2_1 < nS^2/\sigma^2 < \chi^2_2) = (1-\alpha)\%$ $\qquad$ با دستکاری کردن S^2 ، l و u

χ^2 ساخته شده‌اند.

$$P\left(\chi^2_{\alpha/2} < \frac{ns^2}{\sigma^2} < \chi^2_{1-\alpha/2}\right) = (1-\alpha)\%$$

$$\frac{\sigma^2\chi^2_{n,\alpha/2}}{n} < S^2 < \frac{\sigma^2\chi^2_{n,1-\alpha/2}}{n}$$

۲-۲-۷-۳) μ نامعلوم و σ^2 معلوم است :

مشابه حالت قبل عمل می‌کنیم با این تفاوت که درجه آزادی در این حالت کمتر است. $(n-1)$

$$\sum_{i=1}^{n} z_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\bar{x})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}(n-1)S^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$$

$$\chi^2 : (n-1)\, S^2/\sigma^2 \sim \chi^2_{n-1}$$

فرض صفر یعنی ساره‌ی σ^2 که به σ^2 پذیرفته می‌شود اگر :

$$\chi^2_{n-1,\alpha/2} < (n-1)\, S^2/\sigma^2 < \chi^2_{n-1,1-\alpha/2}$$

$$\frac{\sigma^2\chi^2_{n-1,\alpha/2}}{n-1} < S^2 < \frac{\sigma^2\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}}{n-1}$$

outlier context

۳-۸) تست مشاهدات مشکوک

۳-۸-۱) تست نرمال یک مشاهده (M و σ^2 معلوم اند):

مراحل انجام به شرح زیر است:

۱) تشکیل آماره بصورت $Z_i = \frac{x_i - M}{\sigma^2}$

استخراج مقدار $Z_{1-\alpha/2}$ از جدول

قاعده تصمیم

مشاهده نرمال یک مشاهده درست است اگر: $|Z_i| < Z_{1-\alpha/2}$

۳-۸-۲) تست t یک مشاهده (M معلوم و σ^2 نامعلوم است.)

۱) تشکیل آماره بصورت $T_i = \frac{x_i - M}{S} \sim t_{n-1}$

۲) استخراج مقدار $t_{n-1,1-\alpha/2}$ و $t_{n-1,\alpha/2}$

$$P\left(t_1 < \frac{x_i - M}{S} < t_2\right) = (1-\alpha)\%$$

$$P\left(t_{n-1,\alpha/2} < \frac{x_i - M}{S} < t_{n-1,1-\alpha/2}\right) = (1-\alpha)\%$$

$$M + S\,t_{n-1,\alpha/2} < x_i < M + S\,t_{n-1,1-\alpha/2}$$

۳) قاعده تصمیم. یک مشاهده درست است اگر $|t_i| < t_{n-1,1-\alpha/2}$

۸-۴-۳) تست τ تک مشاهده (μ و σ^2 نامعلوم اند)

$$\tau_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s'} \rightsquigarrow \tau_{n-1}$$

$$P(\tau_1 < \tau_i < \tau_2) = (1-\alpha)\%$$

$$P\left(\tau_{n-1,\alpha/2} < \frac{x_i - \bar{x}}{s'} < \tau_{n-1,1-\alpha/2}\right) = (1-\alpha)\%$$

$$\bar{x} + s'\tau_{n-1,\alpha/2} < x_i < \bar{x} + s'\tau_{n-1,1-\alpha/2}$$

$$\tau_{n-1,\alpha} = g(t_{n-2,\alpha}) = \frac{\sqrt{n-1}\, t_{n-2,\alpha}}{(n-2+t^2_{n-2,\alpha})^{1/2}}$$

$$s' = \sqrt{\frac{n-1}{n}}\, s$$

$n-1$ درجه آزادی τ معادل $n-2$ درجه آزادی در t می‌باشد.

مراحل اجرای آزمون:

۱) تشکیل آماره بصورت $\tau_i = \dfrac{x_i - \bar{x}}{s'}$

۲) استخراج $\tau_{n-1,1-\alpha/2}$

۳) تصمیم گیری:

تک مشاهده صحیح است اگر $|\tau_i| < \tau_{n-1,1-\alpha/2}$

۳-۸-۳) تست نرمال تک مشاهده (μ نامعلوم و σ^2 معلوم است)

زمانی که μ نامعلوم است:

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

زمانی که μ معلوم است:

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2$$

$$Z_i = \frac{1}{\sqrt{\frac{n-1}{n}}} \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}} \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma} \sim N(0,1)$$

$$P(Z_1 < Z_i < Z_2) = (1-\alpha)\%$$

$$P\left(Z_{\alpha/2} < \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}} \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma} < Z_{1-\alpha/2}\right) = (1-\alpha)\%$$

$$\bar{x} + \sqrt{\frac{n-1}{n}}\,\sigma\, Z_{\alpha/2} < x_i < \bar{x} + \frac{\sqrt{n-1}}{n}\,\sigma\, Z_{1-\alpha/2}$$

مراحل اجرا به صورت زیر است:

۱) تشکیل آماره به صورت $Z_i = \sqrt{\frac{n}{n-1}} \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma}$

۲) استخراج مقدار $Z_{1-\alpha/2}$ از جدول

۳) تصمیم گیری

مشاهده x_i یک مشاهده درست است اگر $|Z_i| < Z_{1-\alpha/2}$

مثال : دقت میانگین یک خطای سیستماتیک)

فرض کنید یک طول معلوم به طول 286.921 m است، ۱۰ بار اندازه‌گیری شده باشد.

$M = 286.921$

$\bar{l} = 286.916$

$S^2 = (0.005)^2$

$$t = \frac{\bar{l} - M}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

$t = -3.162$ آماره $t_{n-1,1-\alpha/2}$

$(1-\alpha)\% = 95$ $\alpha = 5\%$ $\Rightarrow \alpha/2 = 0.025 \Rightarrow 1-\alpha/2 = 0.0975$

$t_{9,0.025} = 2.262$, $t_{9,0.975} = -2.262$

$t < t_{9,0.975}$

فرض صفر رد می‌شود.

مثال) دقت واریانس یک دقت)

برای اندازه‌گیری یک طول معلوم به انحراف معیاری معادل ± 15 mm نیاز داریم، دوربین مورد استفاده‌ای که $S^2 = 6.8^2$ باشد را استفاده کرده و ۱۰ بار طول را اندازه می‌گیریم. آیا دستگاه برای هدف مورد نظر کاربرد دارد؟

1) آماره

2) انحراج

$$y = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = 16.65$$

$$\chi^2 = 16.92$$

$$y < \chi^2_{n-1,\,1-\alpha/2}$$

در سطح اطمینان 95% تست

پذیرفته می‌شود