

۱ معرفی و ساده کردن عبارتهای گویا

تجزیه $a^2 - a - 2 = 0$

$$(a-2)(a+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ a=-1 \end{cases}$$

نکته ۳: برای ساده کردن یک عبارت گویا ابتدا صورت و مخرج آن را تجزیه می‌کنیم سپس عوامل مشترک در صورت و مخرج را با هم ساده می‌کنیم.

مثال: عبارتهای گویای زیر را تا حد امکان ساده کنید.

الف) $\frac{a^2 - 5a + 6}{a^2 - 4} = \frac{5}{3a^2}$

ب) $\frac{3x^2 - 2x - 1}{x^2 - 1} = \frac{3xy}{yx}$

ج) $\frac{a-1}{1-a} = \frac{a-1}{-(a-1)} = -1$

د) $\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{(x-y)(x+y)}{(x+y)(x^2 - xy + y^2)} = \frac{x-y}{x^2 - xy + y^2}$

هـ) $\frac{b^2 - 5b - 12}{b^2 + b - 2} = \frac{(b-7)(b+2)}{(b+2)(b-1)} = \frac{b-7}{b-1}$

و) $\frac{3a-6}{a^2-3a+2} = \frac{3(a-2)}{(a-2)(a-1)} = \frac{3}{a-1}$

نکته ۴: به کسری که صورت و مخرج آن چند جمله‌ای باشد یک عبارت گویا گفته می‌شود.

مثال: عبارتهای $\frac{\sqrt{x}}{5} + \frac{1}{x} + \frac{2}{y+\sqrt{x}} + \frac{3x-1}{x+1}$

مثالی عبارتتهای گویا هستند. $\frac{x^2-3x+1}{x^2+1}$ و $\frac{-y}{3}$

مثال: عبارتتهایی چون $\frac{1}{\sqrt{x}-3} + \frac{2x+1}{y-2} + \frac{\sqrt{x}}{x+2} + \frac{\sqrt{xy}}{2}$

و $|x-2|$ هیچ کدام عبارت گویا به شمار نمی‌روند. نکته ۵: حوزه تعریف (یا دامنه) یک عبارت گویا مجموعه مقادیری از متغیر است که به ازای آن‌ها، آن عبارت گویا تعریف شده است. برای یافتن حوزه تعریف یک عبارت گویا باید مقادیری از متغیر را که به ازای آن‌ها مخرج کسر صفر می‌شود، حذف کنیم.

مثال: در عبارت گویای $\frac{2}{x-3}$ عدد $x=3$ باعث می‌شود که مخرج این عبارت گویا صفر شود. بنابراین این عبارت گویا به ازای $x=3$ تعریف نشده است.

مثال: عبارت گویای $\frac{x^2+1}{(x-2)(x+2)}$ ، به ازای دو عدد $x=2$ و $x=-2$ تعریف نشده است.

مثال: عبارت گویا $\frac{2a}{a^2-a-2}$ به ازای چه مقادیری از a تعریف نشده است؟

باید ببینیم مخرج این کسر به ازای چه اعدادی صفر می‌شود. ابتدا آن را تجزیه می‌کنیم.

سؤال متن

عبارتهای زیر گویا نیستند. (چرا؟) چون هیچ کدام از آن‌ها از تقسیم دو چند جمله‌ای به دست نیامده‌اند.

$\frac{\sqrt{xy}}{x+y}$ و $\frac{1}{\sqrt{x-2}}$ و $|x-y|$

۱۱۵

کارد کلاس

کدام یک از عبارتهای زیر گویا است؟

$\frac{7}{x-1}$, $\frac{x+6}{3}$, $\frac{ah}{2}$, $\frac{\sqrt{3+x}}{5}$, $\frac{\sqrt{2x}}{x}$, $\frac{|x+y|}{x}$

$\frac{x\sqrt{y+1}}{x^2}$, $\frac{x-5}{\sqrt{3+1}}$, $\frac{1}{x}$, $\frac{mn+n^2}{5-n}$, 14 , $\frac{3-a}{2+x}$

مقدار عددی عبارت $\frac{x+5}{x-3}$ را به ازای عددهای داده شده در جدول زیر به دست آورید:

x	-۲	۷	$\frac{1}{2}$	۰	-۱	-۵
$\frac{x+5}{x-3}$	$\frac{3}{-5}$	۳	$-\frac{11}{5}$	$-\frac{5}{3}$	-۱	۰

هر یک از عبارت‌های زیر به ازای چه مقادیری از متغیرها تعریف نشده است؟

به ازای هر مقداری تعریف شده است

الف) $\frac{8x+5}{y} \Rightarrow$

ب) $\frac{y+x}{x} \Rightarrow x=0$

ج) $\frac{2b+1}{2b-1} \Rightarrow 2b-1=0 \Rightarrow 2b=1 \Rightarrow b=\frac{1}{2}$

د) $\frac{3x}{x^2+4} \Rightarrow$

به ازای هر مقداری تعریف شده است.

ه) $\frac{x}{x^2-1} = \frac{x}{(x-1)(x+1)} \Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1, \\ x+1=0 \Rightarrow x=-1 \end{cases}$

و) $\frac{a+5}{a^2-5a+6} = \frac{a+5}{(a-3)(a-2)} \Rightarrow \begin{cases} a-3=0 \Rightarrow a=3, \\ a-2=0 \Rightarrow a=2 \end{cases}$

توضیح دهید که هر یک از عبارت‌های گویای زیر چگونه ساده شده است؟ هر جا لازم است حل را کامل کنید (چگونگی استفاده از اتحادها و تجزیه را در هر مورد توضیح دهید).

در هر یک از عبارت‌های زیر ابتدا صورت و مخرج را تجزیه می‌کنیم و سپس عامل‌های مشترک را ساده می‌کنیم.

الف) $\frac{18y^3}{6y^5} = \frac{3}{1y^2}$

ب) $\frac{x+3}{x+1} \cdot \frac{(x+3)(x+3)}{(x+1)(x+3)} = \frac{x^2+6x+9}{x^2+4x+3} =$ از اتحاد مربع دو جمله‌ای و جمله مشترک استفاده شده است.

(از اتحاد مزدوج استفاده شده است.)

ج) $\frac{y^2-9}{3y+9} = \frac{(y-3)(y+3)}{3(y+3)} = \frac{y-3}{3}$ د) $\frac{2x^2y^2b^2}{x^2y^2b^2} = \frac{2b^2}{1}$ ه) $\frac{b-5}{5-b} = \frac{b-5}{-(b-5)} = -1$

عبارت‌های گویای زیر را ساده کنید.

الف) $\frac{m^2-16}{4-m} = \frac{(m-4)(m+4)}{4-m} = \frac{(m-4)(m+4)}{-(m-4)} = -(m+4)$

ب) $\frac{6m+18}{5m+21} = \frac{6(m+3)}{7(m+3)} = \frac{6}{7}$

ج) $\frac{a^2-5a-14}{a^2+a-2} = \frac{(a-7)(a+2)}{(a+2)(a-1)} = \frac{a-7}{a-1}$

د) $\frac{x^2-y^2}{y-x} = \frac{(x^2+y^2)(x-y)(x+y)}{-(x-y)} = -(x^2+y^2)(x+y)$

۲- عبارت $\frac{a+ax}{a}$ به دو شکل ساده شده؛ کدام درست و کدام نادرست است؟

الف) $\frac{a+ax}{a} = a+x$ نادرست

(بدون تجزیه کردن نمی توان ساده کرد)

ب) $\frac{a+ax}{a} = \frac{a(1+x)}{a} = 1+x$ درست

۱۱۷

تمرین

۱- برای هر عبارت گویا، مقادیری را به دست آورید که عبارت به ازای آنها تعریف نشده است.

الف) $\frac{\Delta x}{x^2 - 5x + 6} \Rightarrow a=0 \text{ یا } b=0$

ب) $\frac{2y}{y(2y-6)} \Rightarrow y=0 \text{ یا } 2y-6=0 \quad 2y=6 \Rightarrow y=\frac{6}{2}=3$

ج) $\frac{2P}{P^2 - P - 12} = \frac{2P}{(P-4)(P+3)} \Rightarrow P=4 \text{ یا } P=-3$

د) $\frac{2x+5}{x} \Rightarrow x=0$

ه) $\frac{x^2-1}{x+5} \Rightarrow x=-5$

و) $\frac{a+3}{2a+1} \Rightarrow a=-\frac{1}{2}$

۲- حاصل هر عبارت را به ساده ترین صورت بنویسید:

الف) $\frac{3-x}{x^2-5x+6} = \frac{3-x}{(x-2)(x-3)} = \frac{-(x-3)}{(x-2)(x-3)} = \frac{-1}{x-2}$

ب) $\frac{4x^2+8x}{12x+24} = \frac{4x(x+2)}{12(x+2)} = \frac{x}{3}$

ج) $\frac{24x^2}{12x^2-6x} = \frac{24x^2}{6x(2x-1)} = \frac{4x}{2x-1}$

د) $\frac{y^3-2y^2-3y}{y^2+y} = \frac{y(y^2-2y-3)}{y(y+1)} = \frac{y(y-3)(y+1)}{y(y+1)} = y-3$

ه) $\frac{1-t^2}{t^2+1} = \frac{(1-t)(1+t)(1+t^2)}{t^2+1} = (1-t)(1+t)$

و) $\frac{16x^2-9y^2}{8x-6y} = \frac{(4x-3y)(4x+3y)}{2(4x-3y)} = \frac{4x+3y}{2}$

ز) $\frac{6a^2b^2}{2ab^2} = \frac{3a^2}{b^2}$

ح) $\frac{-2a-8}{a^2+2a-8} = \frac{-2(a+4)}{(a+4)(a-2)} = \frac{-2}{a-2}$

۳- عبارت هایی را که حاصل آنها ۱ و یا -۱ است معلوم کنید.

ب) $\frac{2y-3}{3-2y} = \frac{2y-3}{-(2y-3)} = -1$

د) $\frac{2y+3}{-2y-3} = \frac{2y+3}{-(2y+3)} = -1$

الف) $\frac{2y+3}{2y-3}$

ج) $\frac{2y+3}{3+2y} = \frac{2y+3}{2y+3} = 1$

۴- هریک از عبارت های داده شده در سطر اول را به عبارت مساوی آن در سطر دوم وصل کنید.

۱) $\frac{a-2}{a+5}$	۲) $\frac{a+2}{a-5}$	۳) $\frac{a-2}{a-5}$	۴) $\frac{a+2}{a+5}$	۵) $\frac{2-a}{a+5}$
۶) $\frac{-a-2}{-a-5}$	۷) $\frac{-a-2}{5-a}$	۸) $\frac{a-2}{-a-5}$	۹) $\frac{2-a}{-a-5}$	۱۰) $\frac{-a+2}{-a+5}$

۵- در جای خالی چه عبارتی را باید نوشت؟

الف) $\frac{1-Z}{Z} = \frac{(1-Z)(Z^2+1)}{Z^2+Z}$

ب) $\frac{3x}{x-3} = \frac{3x(x+2)}{x^2-x-6}$

ج) $\frac{3y+2}{5} = \frac{1}{5} (3y+2)$

د) $\frac{(x-5)(x-2)(x+1)}{(x-2)(x-5)} = x+1$

۶- از عبارت های زیر، هر کدام را که با عبارت $\frac{z(x+y)}{t}$ برابر است، مشخص کنید.

الف) $\frac{z}{t}(x+y)$ ✓

ب) $\frac{zx+y}{t} \times$

ج) $\frac{1}{t} \times z(x+y)$ ✓

د) $z \times \frac{x+y}{t}$ ✓

ه) $\frac{zx}{t} + \frac{zy}{t}$ ✓

و) $\frac{zx}{t} + y$ ✗

ارزشیابی مستمر

کدام عبارت گویا و کدام گویا نیست؟ (۱ نمره)

الف) $\frac{2x-1}{x-1}$ (د)

ب) $\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ (ج)

ج) $\frac{2x-\sqrt{2}}{\sqrt{3x}}$ (ب)

۲- مقادیری را تعیین کنید که به ازای آن ها عبارت های گویای زیر تعریف نشده اند؟ (۱)

الف) $\frac{2x-1}{4x-8}$ (ب)

ب) $\frac{6x^2+1}{x^2+3x+2}$ (د)

ج) $\frac{x-3x^2}{9x^2-1}$ (ب)

د) $\frac{x^2-3}{x^2-5x+6}$ (ب)

۳- عبارت های گویای زیر را ساده کنید. (۴)

الف) $\frac{18y^2x}{24x^2y}$ (ب)

ب) $\frac{x^2+1}{1+x^2}$ (ب)

۴- حاصل عبارت های زیر را تعیین کنید. (۱)

الف) $\frac{2y+3}{-3-2y}$ (ب)

۵- جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. (۲)

الف) $\frac{x^2-9}{x^2-x-6} = \frac{\boxed{}}{x+2}$ (ب)

ب) $\frac{x^2+x}{\boxed{}} = \frac{x^2+1}{y+1}$ (ب)

پایان ارزشیابی مستمر

۱ الف) گویا است (ب) گویا نیست (ج) گویا است (د) گویا نیست (هر قسمت ۰/۲۵)

۲ این عبارت به ازای $x=2$ تعریف شده نیست. (۰/۵) $\frac{2x-1}{4x-8} \Rightarrow 4x-8=0 \Rightarrow 4x=8 \Rightarrow \boxed{x=2}$ (الف)

۳ این عبارت به ازای $x=-1$ و $x=-2$ تعریف شده نیست. (۰/۵) $\frac{6x^2+1}{x^2+3x+2} \Rightarrow x^2+3x+2=0 \Rightarrow (x+2)(x+1)=0$ (ب)

$\Rightarrow \begin{cases} x+2=0 \Rightarrow \boxed{x=-2} \\ x+1=0 \Rightarrow \boxed{x=-1} \end{cases}$

$$\text{الف)} \frac{\frac{3y^2}{\cancel{3} \cancel{y} \cancel{y} \cancel{x} \cancel{x} \cancel{x}}}{\frac{\cancel{3} \cancel{y} \cancel{y} \cancel{x} \cancel{x} \cancel{x}}{\cancel{3} \cancel{x} \cancel{x} \cancel{x}}} = \frac{3y^2}{3x} \quad (1)$$

$$\text{ب)} \frac{x^2 - 3}{x^2 - 5x + 6} = \frac{(\cancel{x-3})(x+3)}{(\cancel{x-3})(x-2)} = \frac{x+3}{x-2} \quad (1)$$

$$\text{ج)} \frac{x - 3x^2}{9x^2 - 1} = \frac{x(1 - 3x)}{(3x-1)(3x+1)} = \frac{-x(\cancel{3x-1})}{(\cancel{3x-1})(3x+1)} = \frac{-x}{3x+1} \quad (1)$$

$$\text{د)} \frac{a^2 - b^2}{b - a} = \frac{(a^2 - b^2)(a^2 + b^2)}{-(a-b)} = \frac{(\cancel{a-b})(a+b)(a^2 + b^2)}{-(\cancel{a-b})} \quad (o/\Delta)$$

$$= -(a+b)(a^2 + b^2) \quad o/\Delta$$

$$\text{الف)} \frac{2y+3}{-3-2y} = \frac{2y+3}{-(2y+3)} = -1 \quad (o/\Delta)$$

$$\text{ب)} \frac{x^2+1}{1+x^2} = \frac{x^2+1}{x^2+1} = 1 \quad (o/\Delta)$$

$$\text{الف)} \frac{x^2+x}{\boxed{}} = \frac{x^2+1}{y+1} \Rightarrow \frac{x(x^2+1)}{\boxed{xy+x}} = \frac{x^2+1}{y+1} \quad (1)$$

$$\text{ب)} \frac{x^2-9}{x^2-x-6} = \frac{\boxed{}}{x+2} \Rightarrow \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+2)} = \frac{\boxed{x+3}}{x+2} \quad (1)$$

محاسبات عبارتهای گویا

$$3) \frac{a^2 - b^2}{b} + \frac{(a-b)^2}{2ab} = \frac{a^2 - b^2}{b} \times \frac{2ab}{(a-b)^2} =$$

$$\frac{(\cancel{a-b})(a^2 + ab + b^2)}{\cancel{b}} \times \frac{2a\cancel{b}}{(\cancel{a-b})^2} =$$

$$= \frac{2a(a^2 + ab + b^2)}{a-b}$$

نکته ۵: برای جمع و تفریق عبارتهای گویا دقیقاً همانند جمع و تفریق اعداد کسری عمل می‌کنیم. یعنی ابتدا برای عبارتهایی که قرار است جمع یا تفریق شوند مخرج مشترک می‌گیریم سپس با نوشتن کسری مساوی با کسرهایی داده شده آن‌ها را جمع و تفریق می‌کنیم.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{cb}{bd} = \frac{ad+cb}{bd} \quad (b, d \neq 0)$$

مثال: حاصل عبارتهای زیر را بیابید.

$$\text{الف)} \frac{2x-1}{x+2} - \frac{3x}{x+2} = \frac{(2x-1)-(3x)}{x+2} = \frac{-x-1}{x+2}$$

نکته ۴: برای ضرب و تقسیم دو عبارت گویا دقیقاً مانند ضرب و تقسیم دو عدد کسری رفتار می‌کنیم. البته باید صورت و مخرج عبارت‌ها را تجزیه کنیم تا در صورت ساده شدن بتوانیم آن‌ها را با هم ساده کنیم.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \quad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc} \quad (d, b, c \neq 0)$$

مثال: حاصل عبارتهای زیر را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

$$1) \frac{\cancel{3} \cancel{1} \cancel{1}}{\cancel{3} \cancel{1} \cancel{1}} \times \frac{\cancel{1} \cancel{a}}{\cancel{1} \cancel{y}} = \frac{a}{y} = a$$

$$2) \frac{x+2}{x^2-3x} \times \frac{x^2-x-6}{x^2+4x+4} =$$

$$\frac{x+\cancel{2}}{x(\cancel{x-2})} \times \frac{(\cancel{x-2})(x+2)}{(\cancel{x+2})(x+2)} = \frac{1}{x}$$

$$\text{الف)} \frac{\frac{a-a^2}{a}-1}{a+1} = \frac{\frac{a-a^2}{a}-1}{a-a^2-a} = \frac{a-a^2}{a^2-1} + \frac{-a^2}{a+1} =$$

$$\frac{\cancel{a}(\cancel{1}-a)}{(a-1)(a+1)} \times \frac{\cancel{a}(\cancel{a}+1)}{\cancel{a}} = \frac{1}{a}$$

$$\text{ب)} \frac{\frac{y}{x+y} - \frac{x}{x-y}}{\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x-y}}$$

صورت و مخرج را در $(x^2 - y^2)$ ضرب می‌کنیم

$$(x^2 - y^2) \times \left(\frac{y}{x+y} - \frac{x}{x-y} \right) =$$

$$(x^2 - y^2) \times \left(\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x-y} \right) =$$

$$\frac{y(x-y) - x(x+y)}{x(x-y) + y(x+y)} = \frac{yx - y^2 - x^2 - xy}{x^2 - xy + yx + y^2} =$$

$$\frac{-x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{-(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = -1$$

$$\text{ب)} \frac{\frac{2x-1}{x+2} + \frac{-2x^2}{x^2-4}}{\frac{2x^2-4x-x+2-2x^2}{x^2-4}} = \frac{(2x-1)(x-2) + (-2x^2)}{x^2-4} = \frac{-5x+2}{x^2-4}$$

$$\text{ج)} \frac{\frac{x-1}{2x^2-4x} + \frac{3}{2x(x-2)}}{\frac{2x(x-2)}{2x(x-2)}} = \frac{x-1}{2x(x-2)} + \frac{3}{2x(x-2)} = \frac{x-1+3}{2x(x-2)} = \frac{x+2}{2x(x-2)}$$

$$\frac{(x-1) \times 2(x+2) + 2(2x(x-2))}{6x(x-2)(x+2)}$$

$$\frac{2x^2 + 6x - 9 + 6x^2 - 12x}{6x(x-2)(x+2)} = \frac{8x^2 - 6x - 9}{6x(x-2)(x+2)}$$

$$\frac{8x^2 - 6x - 9}{6x(x-2)(x+2)} = \frac{8x^2 - 6x - 9}{6x(x-2)(x+2)}$$

نکته: هرگاه صورت و مخرج یک عبارت گویا خود شامل عبارت‌های گویا باشد، می‌گوییم این عبارت گویا، یک عبارت گویای مرکب است. برای ساده کردن این عبارت‌ها صورت و مخرج را جداگانه حساب کرده سپس صورت و مخرج را بر هم تقسیم می‌کنیم یا اینکه می‌توانیم صورت و مخرج را در یک عبارت مناسب ضرب کنیم تا مخرج‌ها حذف شوند و سپس محاسبه را انجام دهیم.
مثال: حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

فعالیت

توضیح دهید که هریک از ضرب‌ها و یا تقسیم‌های زیر چگونه انجام شده است. هر جا لازم است حل را کامل و حاصل عبارت را ساده کنید. برای انجام ضرب‌ها صورت و مخرج عبارت‌های گویا را تجزیه می‌کنیم و سپس ساده می‌کنیم و برای انجام تقسیم‌ها نیز با معکوس کردن کسر دوم آن‌ها را به ضرب تبدیل کرده و ضرب را انجام می‌دهیم.

$$\text{الف)} \frac{\frac{xy^2}{x^2z^2} \times \frac{yz^2}{y^2z^2}}{\frac{yz^2}{y^2z^2}} = \frac{xyz}{x^2z^2}$$

$$\text{ب)} \frac{\frac{x+3}{x} \times \frac{x^2}{x^2-2x-15}}{\frac{x+3}{x} \times \frac{x^2}{(x+3)(x-5)}} = \frac{x}{(x-5)}$$

$$\text{ج)} \frac{\frac{x-6}{x^2-12x+36} \times \frac{x^2-3x-18}{x^2+7x+12}}{\frac{x-6}{(x-6)(x-6)} \times \frac{(x-6)(x+3)}{(x+3)(x+4)}} = \frac{1}{x+4}$$

$$\text{د)} \frac{\frac{fx^2}{3xy} + \frac{8x}{y^2}}{\frac{fx^2}{3xy} + \frac{8x}{y^2}} = \frac{\frac{fx^2}{3xy} + \frac{8x}{y^2}}{\frac{fx^2}{3xy} + \frac{8x}{y^2}} = \frac{y^2}{6}$$

$$\text{ه)} \frac{\frac{a^2-fa-5}{a^2-fa} + \frac{a^2+3a+2}{a-f}}{\frac{a^2-fa-5}{a^2-fa} + \frac{a^2+3a+2}{a-f}} = \frac{a^2-fa-5}{a^2-fa} \times \frac{a-f}{a^2+3a+2} = \frac{(a-5)(a+1)}{a(a-4)} \times \frac{a-f}{(a+1)(a+2)} = \frac{a-5}{a(a+2)}$$

کاردر کلاس

حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$\text{الف)} \frac{\frac{a^2-a-6}{a+3} \times \frac{a+3}{a^2-4}}{\frac{a^2-a-6}{a+3} \times \frac{a+3}{a^2-4}} = \frac{(a-2)(a+2)}{a+3} \times \frac{a+3}{(a+3)(a-2)} = \frac{a-2}{a-2}$$

$$\text{ب)} \frac{a^2b + ab^2}{a} \times \frac{3ab}{(a+b)^2} = \frac{ab(a+b)}{a} \times \frac{3ab}{(a+b)^2} = \frac{3ab^2}{(a+b)}$$

$$\text{ج)} \frac{x^2 + 3x + 2}{x+2} + \frac{x+1}{x+5} = \frac{(x+1)(x+2)}{(x+2)} \times \frac{x+5}{x+1} = x+5$$

$$\text{د)} \frac{2x^2}{3xy^2} + \frac{8x}{9y^5} = \frac{2x^2}{3xy^2} \times \frac{3xy^5}{3xy^5} = \frac{2x^2y^3}{3}$$

۱۳۰

فعالیت

توضیح دهید که هر یک از محاسبات زیر چگونه انجام شده است. هر جا لازم است حل را کامل و مانند نمونه یک جمع و تفریق عددی مشابه آن را ارائه کنید.

$$\text{الف)} \frac{3x+7}{x+2} + \frac{2x-3}{x+2} = \frac{3x+7+2x-3}{x+2} = \frac{5x+4}{x+2}$$

$$\text{ب)} \frac{3x+7}{x+2} - \frac{2x-3}{x+2} = \frac{3x+7-(2x-3)}{x+2} = \frac{3x+7-2x+3}{x+2} = \frac{x+10}{x+2}$$

$$\text{ج)} \frac{a^2-2a}{a^2-4} + \frac{a-2}{a+2} = \frac{a^2-2a+(a-2)(a+2)}{a^2-4} = \frac{a^2-2a+a^2+2a-2a-4}{a^2-4} = \frac{a^2-4}{a^2-4} = 1$$

$$\frac{3}{5} + \frac{2}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

$$\frac{7}{10} + \frac{9}{10} = \frac{16}{10} = \frac{8}{5}$$

$$\frac{7}{30} + \frac{2}{28} = \frac{98+45}{420} = \frac{143}{420}$$

$$= \frac{a^2-2a+a^2+2a-2a-4}{a^2-4} = \frac{2a^2-2a-4}{a^2-4} = \frac{2(a^2-a-2)}{a^2-4} = \frac{2(a-2)(a+1)}{(a-2)(a+2)} = \frac{2(a+1)}{a+2}$$

$$\text{د)} \frac{a+1}{a} - \frac{2a+2}{a(a+2)} = \frac{(a+1)(a+2)-(2a+2)}{a(a+2)} = \frac{a^2+3a+2-2a-2}{a(a+2)} = \frac{a^2+a}{a(a+2)} = \frac{a}{a+2}$$

۱۳۱

کاردرکلاس

○ حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

$$\text{الف)} \frac{x^2}{x-y} + \frac{y^2}{y-x} = \frac{x^2-y^2}{x-y} = \frac{(x-y)(x+y)}{x-y} = x+y$$

$$\text{ب)} \frac{6}{x-x} - \frac{6}{x} = \frac{6-6}{x} = 0$$

$$\text{ج)} \frac{2x^2-16}{x^2-4} - \frac{x+4}{x+2} = \frac{2x^2-16-(x+4)(x-2)}{x^2-4} = \frac{2x^2-16-x^2-2x+8}{x^2-4} = \frac{x^2-2x-8}{x^2-4} = \frac{(x-4)(x+2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x-4}{x-2}$$

$$\text{د)} \frac{7}{(x-2)(x+1)} + \frac{x}{(x+3)(x+1)} = \frac{7(x+3)+x(x-2)}{(x-2)(x+3)(x+1)} = \frac{7x+21+x^2-2x}{(x-2)(x+3)(x+1)} = \frac{x^2+5x+21}{(x-2)(x+3)(x+1)}$$

$$\text{ه)} \frac{2}{3y(x-y)} + \frac{x+1}{x(x-y)^2} = \frac{2x(x-y)+3y(x+1)}{3xy(x-y)^2} = \frac{2x^2-2xy+3xy+3y}{3xy(x-y)^2} = \frac{2x^2+xy+3y}{3xy(x-y)^2}$$

توضیح دهید که هریک از روش‌های ارائه شده برای ساده کردن کسر مرکب با روش دیگر چه تفاوتی دارد؛ هر جا لازم است حل را کامل کنید. ($x \neq 0$)

در حل قسمت «الف» صورت و مخرج در x^2 ضرب شده‌اند تا عبارت صورت و مخرج ساده‌تر شود سپس صورت و مخرج را تجزیه و ساده کرده‌ایم.

$$\text{الف) } \frac{1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}}{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} = \frac{x^2(1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2})}{x^2(1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2})} = \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 4x + 3} = \frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(x-1)} = \frac{x+2}{x-1}$$

$$\begin{aligned} \text{ب) } \frac{1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}}{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} &= \frac{\frac{x^2 - x - 6}{x^2}}{\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2}} = \frac{x^2 - x - 6}{x^2} \times \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3} = \frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(x-1)} = \frac{x+2}{x-1} \\ \frac{x^2 - x - 6}{x^2} \times \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3} &= \frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(x-1)} = \frac{x+2}{x-1} \end{aligned}$$

در حل قسمت (ب) ابتدا برای صورت و مخرج، مخرج مشترک x^2 گرفته شده است سپس عبارت صورت بر عبارت مخرج تقسیم شده است.

$$\text{الف) } \frac{\frac{y}{a+1} - \frac{3}{a}}{\frac{y}{a+1} - \frac{y}{a}} = \frac{\frac{a(a+1)(\frac{y}{a+1} - \frac{3}{a})}{a(a+1)(\frac{y}{a+1} - \frac{y}{a})}}{\frac{a(a+1)(\frac{y}{a+1} - \frac{y}{a})}{a(a+1)(\frac{y}{a+1} - \frac{y}{a})}} = \frac{y(a+1) - 3a}{ya - y(a+1)} = \frac{ya + y - 3a}{ya - ya - y} = \frac{y-a}{-a-y}$$

$$\begin{aligned} \text{ب) } \frac{\frac{y}{a+1} - \frac{3}{a}}{\frac{y}{a+1} - \frac{y}{a}} &= \frac{\frac{y(a+1) - 3a}{a(a+1)}}{\frac{y(a+1) - ya}{a(a+1)}} = \frac{y(a+1) - 3a}{y(a+1) - ya} = \frac{y-a}{-a-y} \\ \frac{y-a}{a(a+1)} + \frac{-a-y}{a(a+1)} &= \frac{y-a}{a(a+1)} \times \frac{a(a+1)}{-a-y} = \frac{y-a}{-a-y} \end{aligned}$$

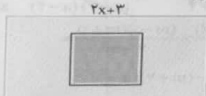
$$a \neq 0, a \neq -1$$

حاصل هر عبارت را به ساده‌ترین صورت بنویسید. (مخرج همه کسرها مخالف صفر فرض شده است.)

$$\begin{aligned} \text{الف) } \frac{n - \frac{n^2}{m^2}}{1 + \frac{m^2}{n^2 - m^2}} &= \frac{\frac{n^2 - nm - n^2}{m^2}}{\frac{n^2 - m^2 + m^2}{n^2 - m^2}} = \frac{-nm}{n-m} + \frac{n^2}{n^2 - m^2} \\ &= \frac{-nm}{n-m} \times \frac{n^2 - m^2}{n^2 - m^2} = \frac{-nm}{n-m} \times \frac{(n-m)(n+m)}{n^2 - m^2} = \frac{-m(n+m)}{n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ب) } \frac{\frac{y}{x+y} - \frac{x}{x-y}}{\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x-y}} &= \frac{\frac{y(x-y) - x(x+y)}{(x+y)(x-y)}}{\frac{x(x-y) + y(x+y)}{(x+y)(x-y)}} = \frac{-y^2 - x^2}{x^2 + y^2} = \frac{-(y^2 + x^2)}{(x+y)(x-y)} \times \frac{(x+y)(x-y)}{x^2 + y^2} = -1 \end{aligned}$$

طول ضلع مربع در داخل مستطیل، نصف عرض مستطیل است. اگر نسبت مساحت مربع به مساحت مستطیل $\frac{5}{۲۶}$ باشد، طول و عرض مستطیل را به دست آورید.



حل را کامل کنید و توضیح دهید که چگونه به کمک ساده کردن عبارت گویای به دست آمده و حل معادله، پاسخ به دست می‌آید.

$$\text{مساحت مستطیل} = (2x+3)(x+5) \quad \text{مساحت مربع} = \frac{(x+5)^2}{۲} \quad \text{طول ضلع مربع} = \frac{x+5}{۲}$$

$$\frac{\text{مساحت مربع}}{\text{مساحت مستطیل}} = \frac{\frac{(x+5)^2}{۲}}{(2x+3)(x+5)} = \frac{5}{۲۶}$$

$$\Rightarrow \frac{(x+5)^2}{۲(2x+3)(x+5)} = \frac{5}{۲۶} \Rightarrow \frac{x+5}{۲(2x+3)} = \frac{5}{۲۶} \Rightarrow ۷x = ۳۵ \Rightarrow x = ۵$$

$$\Rightarrow \text{طول} = 2x+3 = 2 \times ۵+3 = ۱۳$$

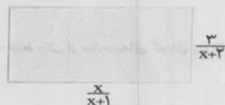
$$\text{عرض} = x+5 = ۵+5 = ۱۰$$

با توجه به این که نسبت مساحت مربع به مساحت مستطیل یک عبارت گویا شده است، ابتدا این عبارت گویا تا حد امکان ساده شده، سپس یک معادله تشکیل شده است، که با حل آن مقدار x و در نتیجه طول و عرض مستطیل به دست می‌آید.

۱- محیط هر شکل را برحسب x به دست آورید و آن را ساده کنید. ($x > ۰$)

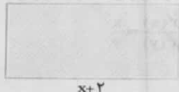


$$\begin{aligned} \text{محیط} &= \frac{2}{x} + \frac{6}{2x} + \frac{x+1}{x} = \frac{4+18+6x+6}{6x} \\ &= \frac{28+6x}{6x} = \frac{14+3x}{3x} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{محیط} &= 2 \times \left(\frac{x}{x+2} + \frac{3}{x+1} \right) = \\ 2 \times \left(\frac{2(x+1)+3(x+2)}{(x+2)(x+1)} \right) &= 2 \times \left(\frac{x^2+5x+3}{(x+2)(x+1)} \right) \\ &= \frac{2x^2+10x+6}{(x+2)(x+1)} \end{aligned}$$

۲- مساحت مستطیل زیر را برحسب x به دست آورید. ($x > ۲$)



$$\begin{aligned} \text{مساحت} &= (x+2) \times \frac{x^2-x-2}{x+1} \\ &= (x+2) \times \frac{(x-2)(x+1)}{x+1} = (x+2)(x-2) = x^2-4 \end{aligned}$$

۱- ضرب و تقسیم‌های زیر را انجام دهید. (در همه تمرین‌ها مخرج کسرها مخالف صفر فرض شده است)

الف) $\frac{a^2 - 16}{a + 4} \times \frac{a + 2}{a^2 - 8a + 16} = \frac{(a-4)(a+4)}{a+4} \times \frac{a+2}{(a-4)(a-4)} = \frac{a+2}{a-4}$

ب) $\frac{m^2 - 49}{m+1} + \frac{4-m}{m^2-1} = \frac{(m-7)(m+7)}{m+1} \times \frac{(m-1)(m+1)}{4-m} = \frac{(m-7)(m+7)}{4-m} \times \frac{(m-1)(m+1)}{-(m-4)} = -(m+7)(m-1)$

ج) $\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2y - 8xy} + \frac{x^2 + x - 6}{x^2y + 18} = \frac{(x-2)(x-2)}{xy(x-4)} \times \frac{x^2(x^2+3)}{(x-2)(x+3)} = \frac{3(x^2+3)}{xy(x+3)}$

د) $\frac{1-c^2}{b^2} \times \frac{b^2}{1-2c+c^2} = \frac{(1-c)(1+c)}{b^2} \times \frac{b^2}{(c-1)(c-1)} = \frac{(c+1)}{-b(c-1)}$

۲- جمع و تفریق‌های زیر را انجام دهید.

الف) $\frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y(x-y)^2}{x^2-y^2} = \frac{x(x^2-y^2) - y(x-y)^2}{x^2-y^2} = \frac{x^3 - xy^2 - yx^2 + yxy^2 - y^3}{x^2-y^2} = \frac{x^3 - yx^2 + xy^2 - y^3}{x^2-y^2}$

$= \frac{x^2(x-y) + y^2(x-y)}{(x^2-y^2)(x^2+y^2)} = \frac{(x-y)(x^2+y^2)}{(x-y)(x+y)(x^2+y^2)} = \frac{1}{x+y}$

ب) $\frac{x+4}{ax-bx} + \frac{y+9}{by-ay} = \frac{y(x+4) - x(y+9)}{xy(a-b)} = \frac{yx + 4y - xy - 9x}{xy(a-b)} = \frac{4y - 9x}{xy(a-b)}$

ج) $\frac{a^2-b^2}{a-b} - \frac{a^2-b^2}{a^2-b^2} = \frac{(a+b)(a^2-b^2) - a^2 + b^2}{a^2-b^2} = \frac{a^3 - ab^2 + a^2b - b^3 - a^2 + b^2}{a^2-b^2} = \frac{ab(a-b)}{(a-b)(a+b)} = \frac{ab}{a+b}$

د) $\frac{4+x^2-2x}{y+x} - \frac{y-x}{y+x} = \frac{4+x^2-2x-y+x}{y+x} = \frac{4+x^2-2x-x+y}{y+x} = \frac{4+x^2-3x+y}{y+x}$

۳- فقط یکی از عبارت‌های زیر قابل ساده شدن است؛ آن را مشخص و ساده کنید.

$\frac{a^2+5}{x}, \frac{a^2+3}{x}, \frac{a^2+b^2}{x}, \frac{a^2-5a}{a} = \frac{a(a-5)}{a} = (a-5)$

۴- از میان عبارت‌های زیر، هر کدام را که مساوی عبارت $\frac{x}{y}$ است، معلوم کنید.

الف) $\frac{x+3}{y+3}$

ب) $\frac{3-x}{3-y}$

ج) $\frac{3x}{3y} = \frac{3(x)}{3(y)} = \frac{x}{y}$

د) $\frac{x^2}{y^2}$

هـ) $\frac{a^2x}{a^2y} = \frac{a^2(x)}{a^2(y)} = \frac{x}{y}$

۵- عبارت $\frac{-x+3}{x+5}$ با کدام یک از عبارت های زیر برابر است؟

- الف) $\frac{x+3}{x+5}$ ب) $\frac{x-3}{x+5}$ ج) $\frac{x-3}{x+5}$ د) $\frac{3-x}{x+5}$ با عبارت (ب) برابر است.

۶- کدام یک از عبارت های زیر به درستی ساده شده است؟

الف) $\frac{a+5}{a^2-25} = \frac{a+5}{(a+5)(a-5)} = a-5$ غلط

ب) $\frac{a+5}{a^2-25} = \frac{a+5}{(a+5)(a-5)} = \frac{1}{a-5}$ درست

۷- اگر $A = a^2 - b^2$ و $B = a^2 + b^2$ و $C = 2ab$ ، حاصل عبارت $\frac{A^2 - B^2}{C^2}$ را به دست آورید.

روش اول: $\frac{A^2 - B^2}{C^2} = \frac{(A-B)(A+B)}{C^2} = \frac{(a^2 - b^2 - a^2 - b^2)(a^2 - b^2 + a^2 + b^2)}{(2ab)^2} = \frac{(-2b^2)(2a^2)}{4a^2b^2} = -1$

روش دوم: $\frac{A^2 - B^2}{C^2} = \frac{(a^2 - b^2)^2 - (a^2 + b^2)^2}{(2ab)^2} = \frac{a^4 - 2a^2b^2 + b^4 - a^4 - 2a^2b^2 - b^4}{4a^2b^2} = \frac{-4a^2b^2}{4a^2b^2} = -1$

کدام یک از تساوی های زیر، درست و کدام یک نادرست است. موارد نادرست را اصلاح کنید. (همه عبارت های جبری تعریف شده فرض می شود.)

الف) $\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = \frac{a-b}{ab}$ (نادرست) $\Rightarrow \frac{a}{b} - \frac{b}{a} = \frac{a^2 - b^2}{ab}$

ب) $\frac{x^2}{x^2-1} = x^2$ (نادرست) $\frac{x^2}{x^2-1} = \frac{1}{x^2-1}$

ج) $\frac{a-y-b}{a-b} = \frac{a-y-b}{a}$ (نادرست) $\Rightarrow \frac{a-y-b}{a-b} = \frac{a-y+b}{a-b}$

د) $\frac{a-b}{b-a} = 1$ (اگر $a \neq b$) (نادرست) $\Rightarrow \frac{a-b}{b-a} = -1$

ه) $\frac{1}{a-b} = \frac{-1}{a+b}$ (نادرست) $\Rightarrow \frac{1}{a-b} = \frac{-1}{b-a}$

و) $\frac{a^2 - b^2}{a-b} = a+b$ (نادرست) $\frac{a^2 - b^2}{a-b} = \frac{(a-b)(a+b)}{a-b} = a+b$

ز) $\frac{ca+cb}{c+cd} = \frac{a+b}{1+d}$ (نادرست) $\Rightarrow \frac{ca+cb}{c+cd} = \frac{c(a+b)}{c(1+d)} = \frac{a+b}{1+d}$

ح) $\frac{b}{\frac{a}{c}} = \frac{c}{b}$ (درست) $\frac{b}{\frac{a}{c}} = \frac{a}{b} + \frac{a}{c} = \frac{a}{b} \times \frac{c}{a} = \frac{c}{b}$

طول مستطیلی از دو برابر عرض آن یک واحد کمتر است. نسبت محیط به مساحت این مستطیل را به صورت یک کسر گویا (عبارت گویا) بنویسید.

عرض = x و طول = $2x-1$ $\frac{\text{محیط مستطیل}}{\text{مساحت مستطیل}} = \frac{2(2x-1+x)}{x(2x-1)} = \frac{6x-2}{x(2x-1)}$

۱۰- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید و نتیجه را ساده کنید.

$$\text{الف) } \frac{\frac{a-a^7}{a}-1}{\frac{a}{a+1}-a} = \frac{\frac{a-a^7}{a}-1}{\frac{a-a^7-a}{a+1}} = \frac{a-a^7}{a^7-1} + \frac{-a^7}{a+1} \Rightarrow \frac{\cancel{a}(1-\cancel{a})}{\cancel{a}^7-1} \times \frac{\cancel{a}+1}{-\cancel{a}^7} = \frac{1}{a}$$

$$\text{ب) } \frac{\frac{1}{x-y} - \frac{y}{x+y}}{\frac{x^7-9y^7}{(x-y)^7}} = \frac{\frac{x+y-2xy}{(x-y)(x+y)}}{\frac{x^7-9y^7}{(x-y)^7}} = \frac{xy-x}{x^7-9y^7} \cdot \frac{(x-y)^7}{(x-y)^7} = \frac{xy-x}{x^7-9y^7}$$

$$= \frac{xy-x}{x^7-9y^7} + \frac{x^7-9y^7}{(x-y)^7} = \frac{xy-x}{(x-y)(x+y)} \times \frac{(x-y)^7}{(x-3y)(x+y)-1(x+3y)} = \frac{-(x-y)}{(x+y)(x+3y)}$$

$$\text{ج) } \frac{\frac{yx}{x^7+yx+1} + \frac{1}{x^7-1}}{x+1} = \frac{yx(x-1) + (x+1) - 2(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)^7}$$

$$= \frac{yx^7 - yx + x + 1 - 2x^2 + 2}{(x-1)(x+1)^7} = \frac{yx^7 - yx - x + 1}{(x-1)(x+1)^7}$$

۱۱- دو عبارت گویا بنویسید که:

الف) حاصل ضرب آنها $\frac{a-y}{a+y}$ شود.

ب) حاصل جمع آنها $\frac{a-y}{a+y}$ شود.

$$(a-y) \times \frac{1}{a+y} \Rightarrow (a-y) \times \frac{1}{a+y} = \frac{a-y}{a+y}$$

$$\frac{-y}{a+y} + \frac{a}{a+y} \Rightarrow \frac{a}{a+y} + \frac{-y}{a+y} = \frac{a-y}{a+y}$$

۱۲- عرض مستطیل مقابل را بر حسب x به دست آورید. مساحت مستطیل x^2-9 است.

$$\frac{x^2-x-12}{x-3}$$

(مساحت) + (طول مستطیل) = عرض مستطیل

$$A = x^2 - 9$$

$$\text{مستطیل} \quad \frac{x^2-x-12}{x-3} = (x^2-9) + \frac{x^2-x-12}{x-3} = x^2-9 \times \frac{x-3}{x^2-x-12}$$

$$= (x-3)(x+3) \times \frac{(x-3)}{(x+3)(x-3)} = (x-3)$$

۱- ضرب ها و تقسیم های زیر را انجام دهید. (۴ نمره)

الف) $\frac{18xy^2}{35x^2} \times \frac{21x^3}{2y} =$

ب) $\frac{4y^3}{3ab} + \frac{2yx}{9a^2b} =$

ج) $\frac{a^2-4a-5}{a^2+3a+2} \times \frac{a-4}{a^2-4a} =$

د) $\frac{x^2y+y^2x}{y} + \frac{(x+y)^2}{xy} =$

۲- حاصل جمع ها و تفریق های زیر را به دست آورید. (۳)

الف) $\frac{x^2-2}{x^2-1} - \frac{x}{x-1} =$

ب) $\frac{4}{a^2+a-20} + \frac{2}{a^2+6a+5} =$

۳- حاصل عبارت $\frac{\frac{3}{x-y} + \frac{1}{x+y}}{\frac{3}{x-y} - \frac{1}{x+y}}$ را بیابید. (۱/۵)

۴- عرض مستطیلی را به دست آورید که طول آن $\frac{1}{x-2}$ و مساحت آن $\frac{x}{x^2-2x}$ باشد. (۱/۵)

پاسخ ارزشیابی مستمر

الف) $\frac{\frac{18}{\cancel{3}5} \cancel{x}^1 \cancel{y}^2}{\cancel{3}5 \cancel{x}^2} \times \frac{\cancel{2}1^1 \cancel{x}^3}{\cancel{2}y} = \frac{27x^2y}{5}$ (۱)

ب) $\frac{4y^3}{3ab} + \frac{2yx}{9a^2b} = \frac{\frac{4y^3}{\cancel{3}ab} + \frac{2yx}{\cancel{9}a^2b}}{\frac{\cancel{3}ab}{\cancel{3}ab} + \frac{\cancel{9}a^2b}{\cancel{9}a^2b}} = \frac{4ay^2}{x}$ (۱)

ج) $\frac{a^2-4a-5}{a^2+3a+2} \times \frac{a-4}{a^2-4a} = \frac{(a-5)(a+1)}{(a+1)(a+2)} \times \frac{\cancel{a-4}}{a(\cancel{a-4})} = \frac{a-5}{a(a+2)}$ (۱)

د) $\frac{x^2y+y^2x}{y} + \frac{(x+y)^2}{xy} = \frac{\frac{x^2y}{\cancel{y}} + \frac{(x+y)^2}{\cancel{xy}}}{\frac{\cancel{y}}{\cancel{y}} + \frac{\cancel{xy}}{\cancel{xy}}} = \frac{x^2}{x+y}$ (۱)

الف) $\frac{x^2-2}{x^2-1} - \frac{x}{x-1} = \frac{x^2-2-x(x+1)}{x^2-1} = \frac{-2-x}{x^2-1}$ (۱/۵)

ب) $\frac{4}{(a+5)(a-2)} + \frac{2}{(a+1)(a+5)} = \frac{2(a+1)+2(a-2)}{(a+5)(a-2)(a+1)} = \frac{2a+4+2a-4}{(a+5)(a-2)(a+1)} = \frac{4a}{(a+5)(a-2)(a+1)}$ (۱/۵)

۳ $\frac{\frac{3}{x-y} + \frac{1}{x+y}}{\frac{3}{x-y} - \frac{1}{x+y}} = \frac{\frac{3(x+y)+(x-y)}{(x-y)(x+y)}}{\frac{3(x+y)-(x-y)}{(x-y)(x+y)}} = \frac{4x+2y}{2x+2y} = \frac{\cancel{2}(2x+y)}{\cancel{2}(x+y)} = \frac{2x+y}{x+y}$ (۱/۵)

طول + مساحت = عرض $\Rightarrow$ عرض $\times$ طول = مساحت مستطیل

۴ عرض $= \frac{x}{x^2-2x} + \frac{1}{x-2} = \frac{\frac{x}{\cancel{x}(x-2)} + \frac{x-2}{\cancel{x}(x-2)}}{\frac{\cancel{x}(x-2)}{\cancel{x}(x-2)}} = 1$

تقسیم چند جمله‌ای‌ها

۲

گام ۳) خارج قسمت مرحله قبل را در مقسوم علیه ضرب کرده و زیر مقسوم می‌نویسیم و آن را از مقسوم کم می‌کنیم. (منها می‌کنیم).
گام ۴) اگر درجه باقی مانده از درجه مقسوم علیه کمتر نبود، مراحل ۱ تا ۳ را بار دیگر تکرار می‌کنیم. تا جایی پیش می‌رویم که درجه باقیمانده از مقسوم علیه کمتر شود.
مثال: تقسیم زیر را انجام دهید و باقیمانده را مشخص کنید.

استاندارد $(2 - 3x^2 + x^3) : (1 + x)$

$$(x^3 - 3x^2 + 2) : (x + 1)$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 3x^2 + 2 \quad | \quad x + 1 \\ -(x^3 + x^2) \\ \hline -4x^2 + 2 \\ -(-4x^2 - 4x) \\ \hline 6x + 2 \\ -(6x + 6) \\ \hline -4 \end{array}$$

$$\left(\frac{x^3}{x} = x^2\right)$$

$$\left(\frac{-4x^2}{x} = -4x\right)$$

$$\left(\frac{6x}{x} = 6\right)$$

نکته ۱: اگر باقیمانده تقسیم چندجمله‌ای P بر چندجمله‌ای Q صفر باشد، می‌گوییم چندجمله‌ای P بر چندجمله‌ای Q بخش‌پذیر است.

مثال: آیا چندجمله‌ای $3x^2 - 2x - 1$ بر چندجمله‌ای $3x + 1$ بخش‌پذیر است؟ چرا؟

بله، زیرا طبق تقسیم مقابل معلوم می‌شود که باقیمانده تقسیم برابر صفر است.

$$\begin{array}{r} 3x^2 - 2x - 1 \quad | \quad 3x + 1 \\ -(3x^2 + x) \\ \hline -3x - 1 \\ -(-3x - 1) \\ \hline 0 \end{array}$$

نکته ۷: برای تقسیم یک جمله‌ای بر یک جمله‌ای، آن‌ها را مانند یک کسر نوشته و سپس به کمک قوانین ساده کردن کسرها و نیز قوانین مربوط به ساده کردن آن‌ها، این کسر را ساده می‌کنیم.

مثال: تقسیم مقابل را انجام دهید.

$$3x^2yz + 9xy^2z = \frac{3x^2yz}{3 \cdot 1 \cdot y} = \frac{xz}{1 \cdot y} = \frac{xz}{y}$$

نکته ۸: برای تقسیم یک چندجمله‌ای بر یک یکجمله‌ای باید تک تک جملات چندجمله‌ای را مانند نکته قبل بر آن یکجمله‌ای تقسیم کنیم.

$$\frac{a+b+c}{d} = \frac{a}{d} + \frac{b}{d} + \frac{c}{d} \quad (d \neq 0)$$

مثال: تقسیم مقابل را انجام دهید.

$$(14x^2yz - 6xy + 3x^2y^2z^2) : (2x^2y^2z)$$

$$\frac{14x^2yz - 6xy + 3x^2y^2z^2}{2x^2y^2z} =$$

$$\frac{14x^2yz}{2x^2y^2z} - \frac{6xy}{2x^2y^2z} + \frac{3x^2y^2z^2}{2x^2y^2z} = \frac{7x}{y} - \frac{3}{xyz} + \frac{3z}{2}$$

نکته ۹: برای تقسیم چندجمله‌ای بر چندجمله‌ای گام‌های زیر را برمی‌داریم:

گام ۱) مقسوم و مقسوم علیه را به صورت استاندارد (بر اساس توان بیشتر به کمتر متغیر) مرتب می‌کنیم.

گام ۲) جمله اول مقسوم را بر جمله اول مقسوم علیه تقسیم کرده و در خارج قسمت می‌نویسیم.

فعالیت

وضیح دهید که هر یک از تقسیم‌های زیر چگونه انجام شده است؛ جاهای خالی را پر و حل را کامل کنید.

الف) $\frac{2a^3 + 5a^2 - 8a}{3a^2} = \frac{2a^3}{3a^2} + \frac{5a^2}{3a^2} - \frac{8a}{3a^2} = \frac{2}{3}a + \frac{5}{3} - \frac{8}{3a}$

ب) $\frac{14x^2yz - 6xy + 3x^2y^2z^2}{2x^2y^2z} = \frac{14x^2yz}{2x^2y^2z} - \frac{6xy}{2x^2y^2z} + \frac{3x^2y^2z^2}{2x^2y^2z} = \frac{7x}{y} - \frac{3}{xyz} + \frac{3z}{2}$

ج) $\frac{(8y^3 - 4y^2 + 12y) + (-4y^2)}{-4y^2} = \frac{8y^3 - 4y^2 + 12y}{-4y^2} = \frac{8y^3}{-4y^2} - \frac{4y^2}{-4y^2} + \frac{12y}{-4y^2} = -2y + 1 - \frac{3}{y}$

ی انجام هر یک از این تقسیم‌ها ابتدا تک تک جمله‌های صورت را بر مخرج تقسیم می‌کنیم، سپس کسرها را ساده می‌کنیم.

تقسیم‌های زیر را انجام دهید.

$$\text{الف) } \frac{-\cancel{r}^r \cancel{a}^a \cancel{b}^b c}{\cancel{r}^r \cancel{a}^a \cancel{b}^b} = \frac{-ra^b c}{rb^r}$$

$$c) \frac{r r x^r y - r z + r x y z}{x^r z} = \frac{r r x^r y}{x^r z} - \frac{r z}{x^r z} + \frac{r x y z}{x^r z} = \frac{r r x^r y}{z} - \frac{r}{x^r} + \frac{r y}{x}$$

فعاليات

۱- تقسیم‌های زیر را انجام دهید و مراحل کار را توضیح دهید. جاهای خالی را پر و حل را کامل کنید.

باقیمانده این تقسیم چیست؟ $9x + 1$

$$\begin{aligned} & \frac{\pm 4x^2}{\pm 8x} \pm \frac{16x}{16x} - 2 \\ & -3x^2 + 9x + 7 \\ & -3x^2 + \quad + \quad + 6 \\ & \quad \quad \quad \boxed{9x} + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} \text{ب) } x^2 - 5x - 24 \mid x - 8 \\ \underline{+ x^2 + 8x} \quad \boxed{x} + \boxed{3} \\ 13x - 24 \\ \underline{+ 13x + 24} \\ 0 \end{array}$$

۲- تقسیم زیر را انجام دهید و رابطه تقسیم را بنویسید. حل را کامل کنید.
رابطه های تقسیم:

$$\begin{aligned} & (\Delta x^T + \boxed{6})(Yx^T - 3) + Yx - \boxed{1} \\ &= 10x^T - 1\Delta x^T + 1Yx^T - 1A + Yx - 1 \\ &= 10x^T - 3x^T + Yx - 19 \end{aligned}$$

و درجه چند جمله‌ای $2x - 1$ از درجه $2x^2 - 3$ کمتر است.

$$\begin{array}{r} 1 \cdot x^F - yx^Y + yx - 1q \quad | -y + yx^Y \\ 1 \cdot x^F - yx^Y + yx - 1q \quad | yx^Y - y \\ \hline \pm 1 \cdot x^F \mp 1 \Delta x^Y \qquad \qquad \Delta x^Y + [y] \\ 1yx^Y + yx - 1q \\ \hline \pm 1yx^Y \mp 1A \\ \hline yx - [1] \end{array}$$

کاردر کلاس

۱- تقسیم‌های زیر را انجام دهید.

$$\begin{array}{r} 6x^2 - 19x^2 + 16x - 4 \mid y - x \\ 6x^2 - 19x^2 + 16x - 4 \mid \underline{-x + y} \\ \hline 16x^2 + 17x^2 \\ \hline -17x^2 + 16x - 4 \\ \hline 17x^2 + 17x \\ \hline 17x - 4 \\ \hline 17x + 4 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{b)} \quad -x^7 - 12x + 18x \mid x + 6 \\ \quad -x^7 + 18x - 12 \quad \mid \quad x + 6 \\ \hline \quad 28x - 12 \quad \mid \quad -x^7 + 6x - 28 \\ \quad +6x^7 + 18x - 12 \quad \mid \\ \hline \quad 28x^7 + 28x - 24 \quad \mid \\ \quad -28x - 12 \quad \mid \\ \hline \quad 28x^7 + 16 \quad \mid \\ \hline \quad \quad \quad 16 \end{array}$$

تقسیم‌های زیر را انجام دهید.

$$\text{الف) } \frac{-\cancel{x^1} \cancel{x^1} y^3 \cancel{z^1} \cancel{z^1}}{\cancel{9} \cancel{1} \cancel{1}} = \frac{-1}{9} xy^3 z^2$$

$$\text{ب) } \frac{2a^3y - a^2y^2 + 15xy}{-5y^2} = \frac{2a^3y}{-5y^2} - \frac{a^2y^2}{-5y^2} + \frac{15xy}{-5y^2} = \frac{-2a^3}{5y} + \frac{a^2}{5} - \frac{3x}{y}$$

$$\text{ج) } (x^3 - 27) \div (x - 3)$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 27 \quad |x - 3| \\ \underline{\pm x^3 \mp 3x^2} \quad x^2 + 2x + 3 \\ 2x^2 - 27 \\ \underline{\pm 2x^2 \mp 6x} \quad 8x + 3 \\ 8x - 27 \\ \underline{\pm 8x \mp 24} \quad -3 \\ -19 \end{array}$$

$$\text{د) } (3y^2 - 10y - 24) \div (3y - 4)$$

$$\begin{array}{r} 3y^2 - 10y - 24 \quad |3y - 4| \\ \underline{\pm 3y^2 \mp 4y} \quad y - 24 \\ -6y - 24 \\ \underline{\mp 6y \pm 24} \quad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2x^5 + 5x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 3 \quad |x + 3| \\ \underline{\pm 2x^5 \pm 6x^4} \quad -x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 3 \\ -x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 3 \\ \underline{\mp x^4 \mp 3x^3} \quad x^2 + 5x^2 - 2x + 3 \\ \pm x^2 \pm 3x^2 \quad 4x^2 - 2x + 3 \\ -4x^2 - 2x + 3 \\ \underline{\mp 4x^2 \mp 12x} \quad 14x + 3 \\ 14x + 3 \\ \underline{\pm 14x \pm 42} \quad 39 \end{array}$$

۲- خارج قسمت و باقیمانده تقسیم زیر را مشخص کنید و درستی عمل تقسیم را با نوشتن روابط تقسیم نشان دهید.

$$\begin{array}{r} -3x^6 + 4x^5 + x^2 + 5 \quad |1 - x^3| \\ \underline{\pm 3x^6 \mp 3x^3} \quad 7x^5 + x^2 + 5 \\ -7x^5 + 7x^3 + x^2 + 5 \\ \underline{\pm 7x^5 \mp 7x^3} \quad 8x^2 + 5 \\ 8x^2 + x^2 - 7x + 5 \\ \underline{\pm 8x^2 \mp 8x} \quad 9x + 5 \\ 9x^2 - 7x + 9 \end{array}$$

رابطه‌های تقسیم به صورت زیر می‌باشند:

۱- درجه عبارت باقی‌مانده از درجه مقسوم علیه $(-x^3 + 1)$ کمتر است.

$$(-x^3 + 1)(-4x^3 + 3x + 4) + (-x^2 - 7x + 9) = -4x^6 - 3x^5 + x^2 + 5 - 2$$

۲- حجم یک جعبه به شکل مکعب مستطیل برابر $2x^3 + 15x^2 + 28x$ است. اگر ارتفاع این جعبه x و طول آن $x + 4$ باشد. عرض آن را به دست آورید.

ارتفاع $\times$ عرض $\times$ طول = حجم مکعب مستطیل
 $\Rightarrow (x(x+4)) + (\text{حجم مکعب مستطیل}) = \text{عرض} \times x^2 + 4x$

$$\begin{array}{r} 2x^3 + 15x^2 + 28x \quad | \quad x^2 + 4x \\ \hline 2x^3 + 8x^2 \\ \hline 7x^2 + 28x \\ \hline 7x^2 + 28x \\ \hline 0 \end{array} \Rightarrow \text{عرض} = 2x + 7$$

۳- اگر چند جمله ای $10x + a - 10x^3 + 23x^2 - 4x + 3$ بخش پذیر باشد، a را به دست آورید.

باید باقی مانده تقسیم $10x + a - 10x^3 + 23x^2 - 4x + 3$ بر $3x + 3$ برابر با صفر باشد.

$$\begin{array}{r} 10x^3 + 23x^2 - 10x + a \quad | \quad 3x + 3 \\ \hline 10x^3 + 15x^2 \\ \hline 8x^2 - 10x + a \\ \hline 8x^2 + 6x \\ \hline -16x + a \\ \hline -16x + 12 \\ \hline 12 + a \end{array} \Rightarrow 12 + a = 0 \Rightarrow a = -12$$

۵- خارج قسمت و باقیمانده تقسیم عبارت $2x^2 - 9x + 9$ را بر هر یک از عبارت های زیر به دست آورید.

$$x + 3, x - 3, 2x - 3, 2x + 3$$

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 9x + 9 \quad | \quad x + 3 \\ \hline 2x^2 + 6x \\ \hline -15x + 9 \\ \hline -15x + 45 \\ \hline -36 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 9x + 9 \quad | \quad x - 3 \\ \hline 2x^2 - 6x \\ \hline -3x + 9 \\ \hline -3x + 9 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 9x + 9 \quad | \quad 2x - 3 \\ \hline 2x^2 - 6x \\ \hline -3x + 9 \\ \hline -3x + 9 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 9x + 9 \quad | \quad 2x + 3 \\ \hline 2x^2 + 6x \\ \hline -15x + 9 \\ \hline -15x + 18 \\ \hline -9 \end{array}$$

طبق باقیمانده های به دست آمده، چند جمله ای $2x^2 - 9x + 9$ بر $(x - 3)$ و $(2x - 3)$ بخش پذیر است:

$$2x^2 - 9x + 9 = (2x - 3)(x - 3)$$



آرزشیابی مستمر

۱- تقسیم‌های زیر را انجام دهید. (۲ نمره)

الف) $\frac{21x^2y - 14xy^2 + 28x^2y^2}{42xy}$

ب) $\frac{4x^3 + 3x}{2x^2}$

۲- تقسیم‌های زیر را انجام دهید و برای هریک رابطه تقسیم را بنویسید. (۳)

الف) $(3x - 4x^2 + 1) + (x - 2)$

ب) $2x^3 - 4x + 1 \div 3 + x$

۳- آیا چندجمله‌ای $x^3 - 1$ بر چندجمله‌ای $x^2 + x + 1$ بخش پذیر است؟ (۱)

۴- مقدار m را طوری تعیین کنید که چندجمله‌ای $2x^3 + x^2 - 4x + m$ بر $x - 1$ بخش پذیر باشد. (۲)

۵- مساحت یک متوازی‌الاضلاع $5 - 2x - 3x^2$ و ارتفاع آن $5 - 3x$ می‌باشد. قاعده این متوازی‌الاضلاع را تعیین کنید. (۲)

پاسخ ارزشیابی مستمر

الف) $\frac{21x^2y - 14xy^2 + 28x^2y^2}{42xy} = \frac{21x^2y}{42xy} - \frac{14xy^2}{42xy} + \frac{28x^2y^2}{42xy}$ (۵/۵)

$$= \frac{x}{y} - \frac{y}{3} + \frac{2xy}{3}$$
 (۵/۵)

ب) $\frac{4x^3 + 3x}{2x^2} = \frac{4x^3}{2x^2} + \frac{3x}{2x^2} = 2x + \frac{3}{2x}$ (۱)

۲ الف

$$\begin{array}{r} -4x^2 + 3x + 1 \quad | \quad x - 2 \\ -(-4x^2 + 8x) \quad -4x - 5 \\ \hline -5x + 1 \\ -(-5x + 10) \\ \hline -9 \end{array}$$

رابطه تقسیم $\left\{ \begin{array}{l} \text{درجه } (x-2) < \text{درجه } (-9) \quad (۵/۲۵) \\ -4x^2 + 3x + 1 = (x-2)(-4x-5) + (-9) \quad (۵/۲۵) \end{array} \right.$

ب)

$$\begin{array}{r} 2x^3 - 4x + 1 \quad | \quad x + 3 \\ -(2x^3 + 6x^2) \quad 2x^2 - 6x + 14 \\ \hline -6x^2 - 4x + 1 \\ -(-6x^2 - 18x) \quad 14x + 1 \\ \hline -14x + 1 \\ -(-14x + 42) \\ \hline -41 \end{array}$$

(۱)

رابطه تقسیم $\left\{ \begin{array}{l} \text{درجه } (x+3) < \text{درجه } (-41) \quad (۵/۲۵) \\ 2x^3 - 4x + 1 = (x+3)(2x^2 - 6x + 14) + (-41) \quad (۵/۲۵) \end{array} \right.$



۳ اگر باقیمانده تقسیم $(x^3 - 1)$ بر $(x^2 + x + 1)$ برابر صفر باشد، بخش پذیر است.

$$\begin{array}{r} x^3 - 1 \\ -(x^3 + x^2 + x) \\ \hline -x^2 - x - 1 \\ -(-x^2 - x - 1) \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} | x^2 + x + 1 \\ x - 1 \end{array} \quad (0/5)$$

چند جمله ای $x^3 - 1$ بر چند جمله ای $x^2 + x + 1$ بخش پذیر است. (0/5)
۴ باید باقی مانده تقسیم $2x^3 + x^2 - 3x + m$ بر $x - 1$ را برابر صفر قرار دهیم. (0/5)

$$\begin{array}{r} 2x^3 + x^2 - 3x + m \\ -(2x^3 - 2x^2) \\ \hline 3x^2 - 3x + m \\ -(3x^2 - 3x) \\ \hline -x + m \\ -(-x + 1) \\ \hline m - 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} | x - 1 \\ 2x^2 + 3x - 1 \end{array} \quad (1)$$

$$\Rightarrow m - 1 = 0 \Rightarrow m = 1 \quad (0/5)$$

۵ باید مساحت را بر ارتفاع تقسیم کنیم تا قاعده پدست آید.

$$\begin{array}{r} 3x^2 - 2x - 5 \\ -(3x^2 - 5x) \\ \hline 3x - 5 \\ -(3x - 5) \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} | 3x - 5 \\ x + 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \text{قاعده} = x + 1 \quad (1)$$

آزمون تئوری
بازت

بش فصل ۷

0/5

در عبارت های زیر دور عبارت های گویا خط بکشید.

(د) $\frac{\sqrt{3}x}{2y-1}$

(ج) $\frac{x^2-1}{3}$

(ب) $\frac{4x^2-3}{\sqrt{x}}$

(الف) $\frac{3x^2-1}{x+5}$

عبارت های گویای زیر را ساده کنید.

(ب) $\frac{x^2-2x-8}{x^2+4x+4}$

(الف) $\frac{3x-x^2}{x^2-9}$

0/5

۲ مشخص کنید عبارت گویای $\frac{2}{x^2-3x+2}$ به ازای چه مقادیری برای x تعریف نشده است؟

۴ حاصل عبارت های زیر را بنویسید.

(ب) $\frac{2x^2-16}{x^2-4} - \frac{x+4}{x+2}$

(الف) $\frac{a^2-4a-5}{a^2-4a} + \frac{a^2+3a+2}{a-4}$

۵ عبارت گویای زیر را تا حد امکان ساده کنید.

$$1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2} \\ 1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}$$