

----- آنالیز ریاضی -----

۱- اگر $a_n = (-1)^n(2 + \sin(\frac{\pi}{n})) - \cos(n\pi)$ ، آنگاه مقدار $\limsup(a_n)$ کدام است؟

- (۱) وجود ندارد (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۲- دنباله‌ی اعداد حقیقی $a_n = n$ با متریک $d(x, y) = |\tan^{-1}(x) - \tan^{-1}(y)|$

(۱) هم همگراست و هم کوشی است.

(۲) همگراست ولی کوشی نیست.

(۳) همگرا نیست ولی کوشی است.

(۴) نه همگراست و نه کوشی است.

۳- کدام گزینه در فضای متریک $Y = [-1, 1) \cup \{3\}$ با متریک اقلیدسی، هم باز و هم بسته است؟

- (۱) $\{3\}$ (۲) $(-1, 1)$ (۳) $[-1, 0)$ (۴) $[-1, 0]$

۴- بستر مجموعه‌ی $A = \{\sin(\frac{m\pi}{2^{n+1}}) \mid m, n \in \mathbb{Z}^{\geq 0}, 0 \leq m \leq 2^n\}$ کدام است؟

(۱) $[0, 1]$

(۲) $[0, \sin 1]$

(۳) $[-1, 1]$

(۴) $A \cup \{0\}$

۵- کدام گزینه در مورد زیرمجموعه‌ی A از فضای متریک دلخواه X صحیح است؟

- (۱) $(A^\circ)^c = (\overline{A})^c$ (۲) $(\overline{A})^c = \overline{A^\circ}$ (۳) $(A^c)^\circ = \overline{A^c}$ (۴) $(A^\circ)^c = \overline{A^c}$

۶- کدام یک از سری‌های زیر همگراست؟

$$a: \sum \frac{\cos n}{\sqrt{n}} \quad b: \sum \sin(1/3^n) \cos(2/3^n) \quad c: \sum n^{\frac{1}{n}} - 1$$

- (۱) a, c (۲) a, b, c (۳) a, b (۴) b

۷- فرض کنید $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله از اعداد حقیقی و همه‌ی a_n ها نامنفی باشند. اگر $\sum a_n$ همگرا باشد، آنگاه کدام گزینه در مورد تابع $f(x) = \sum_{\{n|b_n < x\}} a_n$ صحیح است؟

(۱) f همه جا پیوسته است.

(۲) f همه جا پیوسته است به جز در نقاط $\{b_n | n \in \mathbb{N}\}$

(۳) f همه جا پیوسته است به جز در نقاط $\overline{\{b_n | n \in \mathbb{N}\}}$

(۴) f همه جا پیوسته است به جز در نقاط $\{b_n | n \in \mathbb{N}, a_n \neq 0\}$

۸- فرض کنید f تابع مشتق‌پذیری باشد که $f(0) = 0$ و به‌ازای هر x ، $f(x) + f'(x) \leq 1$. بیشترین مقدار ممکن برای $f(1)$ کدام است؟

(۱) $1 + e^{-1}$ (۲) $1 - e^{-1}$ (۳) $1 + e$ (۴) 1

۹- فرض کنید $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی دوبار مشتق‌پذیر باشد به‌طوری که به‌ازای هر $x \in [0, 1]$ داریم

$$f''(x) = e^x f(x)$$

در این صورت:

(۱) f نمی‌تواند در هیچ نقطه از $(0, 1)$ ماکزیمم نسبی با مقدار مثبت داشته باشد.

(۲) f نمی‌تواند در هیچ نقطه از $(0, 1)$ مینیمم نسبی با مقدار منفی داشته باشد.

(۳) اگر $f(0) = f(1) = 0$ در این صورت f همه جا صفر است.

(۴) هر سه گزینه صحیح است.

۱۰- به‌ازای کدام مقادیر y تابع زیر روی $[0, 2]$ نسبت به x انتگرال‌پذیر است؟

$$f_y(x) = \begin{cases} xy + 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{Q}^c \end{cases}$$

(۱) $y = 0$

(۲) $y = -1$

(۳) $y = -\frac{1}{4}$

(۴) به‌ازای هیچ مقدار y انتگرال‌پذیر نیست.

۱۱- اگر $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تابع پیوسته‌ای باشد که به‌ازای هر $x \in \mathbb{R}$ ، $\int_0^1 f(xt) dt = x$ ، آنگاه:

(۱) f تابع ثابت است.

(۲) $f(x) = x^2$

(۳) $f(x) = 2x$

(۴) $f(x) = ax$ به‌ازای هر عدد ثابت a

۱۲- کدام گزینه در مورد دنباله‌ی $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$ و $g_n(x) = \frac{x}{1+nx}$ روی بازه‌ی $(0, 1)$ صحیح است؟

- (۱) $f_n(x)$ و $g_n(x)$ هر دو همگرای یکنواخت هستند.
- (۲) $f_n(x)$ و $g_n(x)$ هیچ یک همگرای یکنواخت نیستند.
- (۳) $f_n(x)$ همگرای یکنواخت است ولی $g_n(x)$ همگرای یکنواخت نیست.
- (۴) $f_n(x)$ همگرای یکنواخت نیست ولی $g_n(x)$ همگرای یکنواخت هست.

۱۳- کدام گزینه در مورد دنباله توابع $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ روی بازه‌ی $[0, 1]$ صحیح است؟

- (۱) $f_n(x)$ همگرای یکنواخت است و $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$
- (۲) $f_n(x)$ همگرای یکنواخت است ولی $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx \neq \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$
- (۳) $f_n(x)$ همگرای یکنواخت نیست و $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx \neq \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$
- (۴) $f_n(x)$ همگرای یکنواخت نیست ولی $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$

۱۴- سری $\sum_{n=1}^{\infty} (-\frac{1}{4})^n \frac{x^n}{n}$ در کدام بازه همگرای یکنواخت است؟

- (۱) $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$
- (۲) $(-2, 2]$
- (۳) $(-2, 2)$
- (۴) $(-4, 4)$

۱۵- کدام گزینه در مورد دنباله‌ی توابع $f_n(x) = \sin(nx)$ روی بازه $[0, 2\pi]$ صحیح است؟

- (۱) به‌طور یکنواخت کراندار و خانواده‌ی هم‌پیوسته‌ای است.
- (۲) به‌طور یکنواخت کراندار است ولی خانواده‌ی هم‌پیوسته‌ای نیست.
- (۳) به‌طور یکنواخت کراندار نیست ولی خانواده‌ی هم‌پیوسته‌ای است.
- (۴) نه به‌طور یکنواخت کراندار است و نه خانواده‌ی هم‌پیوسته‌ای است.

جبر خطی

۱۶- فرض کنید $A_{k \times k}$ ، ماتریسی مربعی با درایه‌های صحیح باشد و عدد صحیح n یک مقدار ویژه‌ی ماتریس A باشد. آنگاه کدام گزینه صحیح است؟

- (۱) $\det A^n = n \det A$
- (۲) $\text{rank } A = n$
- (۳) $n | \det A$
- (۴) $\det A^n = (\det A)^n$

۱۷- اگر A به صورت زیر تعریف شود، A^n برابر با کدام گزینه است؟

$$A = \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} (1) & \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix} \\ (2) & \begin{bmatrix} \sin nx & \cos nx \\ -\cos nx & \sin nx \end{bmatrix} \\ (3) & \begin{bmatrix} \cos nx & \sin nx \\ \sin nx & \cos nx \end{bmatrix} \\ (4) & \begin{bmatrix} \cos nx & \sin nx \\ -\sin nx & \cos nx \end{bmatrix} \end{aligned}$$

۱۸- فرض کنید V فضای برداری ماتریس‌های 2×2 روی میدان F و W_1 و W_2 زیرفضاهایی از V متشکل از ماتریس‌هایی به ترتیب به شکل $\begin{bmatrix} a & -a \\ b & c \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} x & y \\ -x & z \end{bmatrix}$ باشند. در این صورت بعد فضاهای برداری $W_1 + W_2$ و $W_1 \cap W_2$ به ترتیب کدام است؟

$$(1) 3 \text{ و } 3 \quad (2) 4 \text{ و } 2 \quad (3) 1 \text{ و } 5 \quad (4) 2 \text{ و } 4$$

۱۹- فرض کنید V فضای برداری همه‌ی توابع پیوسته از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ باشد و T عملگر خطی روی V با ضابطه‌ی $(Tf)(x) = \int_0^x f(t) dt$ باشد. در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

- (۱) عملگر T دقیقاً دارای یک مقدار ویژه است.
- (۲) عملگر T دقیقاً دو مقدار ویژه دارد.
- (۳) عملگر T فاقد مقدار ویژه است.
- (۴) عملگر T بی شمار ویژه دارد.

۲۰- فرض کنید V فضای برداری با بعد متناهی n روی میدان F باشد و V_1 و V_2 زیرفضاهای V باشند به طوری که $\dim V_1 > \frac{n}{2}$ و $\dim V_2 > \frac{n}{2}$. در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

- (۱) $V_1 \cap V_2 \neq \{0\}$
- (۲) $\dim(V_1 + V_2) > n$
- (۳) $\dim(V_1 \cap V_2) < \frac{n}{2}$
- (۴) هیچ کدام

۲۱- فرض کنید $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ ماتریس‌هایی متقارن باشند و $A^2 + B^2 = 0$. آنگاه:

- (۱) $\text{tr}(BB^t) = \text{tr}(AA^t) = 0$
- (۲) $A = B = 0$
- (۳) $\text{tr}(AA^t) < 0$ یا $\text{tr}(BB^t) < 0$
- (۴) گزینه‌های ۱ و ۲

۲۲- اگر A ماتریسی باشد که هر بردار دلخواه بردار ویژه‌ی آن است، کدام عبارت در مورد ماتریس A صحیح است؟

- (۱) A مضربی از ماتریس همانی است.
 (۲) A ماتریسی ناصفر است.
 (۳) A ماتریس همانی است.
 (۴) A می‌تواند هر ماتریس مثلثی باشد.

۲۳- اگر A و B دو ماتریس متعامد باشند به‌طوری که $\det(A) = -\det(B)$ آنگاه کدام گزینه در مورد ماتریس $A + B$ درست است؟

- (۱) ماتریسی منفرد است. $\det(A + B) = 1$ (۲)
 (۳) $\det(A + B) = -1$ (۴) $|\det(A + B)| = 1$ (۴)

۲۴- دستگاه معادلات خطی زیر به ازای کدام مقدار a جواب ناصفر دارد؟

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ ax - y - 2z = 0 \\ 2x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

- (۱) ۳
 (۲) ۱
 (۳) -۳
 (۴) -۱

۲۵- اگر N یک ماتریس $n \times n$ غیرصفر پوچ توان باشد، چندجمله‌ای مشخصه‌ی $I + N$ کدام گزینه است؟

- (۱) $x^n - 1$ (۲) $(x - 1)^n$ (۳) $x - x^n$ (۴) $x + x^n$

۲۶- فرض کنید $A \in M_n(F)$ و $A^2 + 2A - 2I = 0$ در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

- (۱) $\text{tr } A = 2$
 (۲) A نامنفرد است.
 (۳) $\det A = 2$
 (۴) A خودتوان است.

۲۷- اگر A ماتریسی مثلثی و متعامد باشد، در مورد ماتریس A چه می‌توان گفت؟

- (۱) ماتریس A خودتوان است.
- (۲) ماتریس A پوچ‌توان است.
- (۳) ماتریس A قطری است.
- (۴) دترمینان ماتریس A برابر با صفر است.

۲۸- فرض کنید A و B دو ماتریس $n \times n$ وارون‌پذیر روی اعداد حقیقی باشند و مجموعه‌ی

$$H = \{c | c \in \mathbb{R}, \det(A + cB) = 0\}$$

را در نظر بگیرید. در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

- (۱) H مجموعه‌ای متناهی است.
- (۲) H تهی است.
- (۳) H همواره تک عضوی است.
- (۴) H نامتناهی است.

۲۹- اگر A یک ماتریس 2×2 روی میدان F با چندجمله‌ای مشخصه‌ی $(x - \lambda)^2$ باشد، آنگاه:

- (۱) $A^3 = 3\lambda^2 A - 2\lambda^3 I$
- (۲) $A^3 = 3\lambda^2 A + 2\lambda^3 I$
- (۳) $A^3 = -2\lambda^3 A + 3\lambda^3 I$
- (۴) $A^3 = -3\lambda^2 A + 2\lambda^3 I$

۳۰- فرض کنید V فضای همه‌ی چندجمله‌ایهای حداکثر از درجه n با ضرایب حقیقی باشد. مجموعه مقادیر ویژه‌ی عملگر خطی T روی V با ضابطه‌ی $T(f(x)) = x^n f(\frac{1}{x})$ کدام است؟

- (۱) $\{1, -1\}$
- (۲) $\{0, 1\}$
- (۳) $\{-1, 0\}$
- (۴) $\{-1, 0, 1\}$

----- آنالیز عددی -----

۳۱- اگر $y = e^{\frac{ab}{c}}$ و $\delta_a, \delta_b, \delta_c$ و δ_y به ترتیب خطاهای نسبی a, b, c و y باشند، کدام رابطه درست است؟

- (۱) $\delta_y \leq \delta_a + \delta_b + \delta_c$
- (۲) $\delta_y \leq y(\delta_a + \delta_b + \delta_c)$
- (۳) $\delta_y \leq |\frac{ab}{c}|(\delta_a + \delta_b + \delta_c)$
- (۴) $\delta_y \leq |\frac{ab}{c}|(\delta_a + \delta_b - \delta_c)$

۳۲- برای تابع $f(x) = \sin x - x$ داریم $f(0) = 0$. اگر $\{x_n\}$ دنباله‌ای حاصل از روش نیوتن بوده و به عدد صفر همگرا باشد، آنگاه:

$$\begin{aligned} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| &\rightarrow \frac{1}{3} \quad (1) \\ \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| &\rightarrow \frac{2}{3} \quad (2) \\ \left| \frac{x_{n+1}}{x_n^2} \right| &\rightarrow \frac{1}{3} \quad (3) \\ \left| \frac{x_{n+1}}{x_n^2} \right| &\rightarrow \frac{2}{3} \quad (4) \end{aligned}$$

۳۳- تابع جدولی زیر داده شده است. تقریبی از ریشه‌ی $f(x) = 0$ کدام است؟

x_i	-۱	۰	۲
$f(x_i)$	-۲	-۱	۷

- (۱) ۱
(۲) $\frac{5}{6}$
(۳) $\frac{3}{4}$
(۴) $\frac{1}{2}$

۳۴- برای یافتن مقدار تقریبی ریشه‌های $0 = 1 - 4x + 2x^2$ از دنباله‌ی $x_{n+1} = \frac{2x_n^2 - 1}{4(x_n - 1)}$ استفاده می‌کنیم. مرتبه‌ی همگرایی دنباله کدام است؟

- (۱) یک
(۲) دو
(۳) حداقل ۲
(۴) عددی بین یک و ۲

۳۵- کدام یک از معادلات زیر در بازه‌ی $[0, 4]$ تنها یک ریشه دارد؟

(۱) $3x^2 - e^x = 0$ (۲) $x \cos x - 1 = 0$ (۳) $\cos x + 2x = 0$ (۴) $\cos x - 2x = 0$

۳۶- برای محاسبه‌ی تقریبی از انتگرال تابع f در بازه‌ی $[0, 6h]$ از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$\int_0^{6h} f(x) dx \approx w_1 f(h) + w_2 f(3h) + w_3 f(5h)$$

ضرایب w_1 و w_3 چقدر باشند تا این فرمول برای چندجمله‌ایهای از درجه حداکثر ۲ دقیق باشد؟

$$\begin{aligned} w_1 &= w_3 = \frac{9h}{4} \quad (1) \\ w_1 &= \frac{3h}{2}, w_3 = \frac{9h}{4} \quad (2) \\ w_1 &= \frac{9h}{4}, w_3 = \frac{3h}{2} \quad (3) \\ w_1 &= w_3 = \frac{3h}{2} \quad (4) \end{aligned}$$

۳۷- برای محاسبه‌ی تقریبی $\sqrt[3]{2}$ از درونیاب تابع $f(x) = \cos \frac{\pi x}{4}$ در نقاط $x_0 = 0$ و $x_1 = 1$ استفاده کرده‌ایم. حداکثر خطای محاسبات کدام است؟

(۱) $\frac{\pi^2}{32}$

(۲) $\frac{\pi}{16}$

(۳) $\frac{\pi}{32}$

(۴) $\frac{\pi^2}{16}$

۳۸- تقریب $\int_0^1 (1 + x + x^2) dx$ به روش گاوس سه نقطه‌ای کدام است؟

(۲) $3/5$

(۱) $3/15$

(۴) $3/51$

(۳) 0

۳۹- با فرض $w(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$ کدام گزینه درست است؟

(۱) $f[x_0, \dots, x_n] = \sum_{i=0}^n \frac{f(x_i)}{w'(x_i)}$

(۲) $f[x_0, \dots, x_n] = \sum_{i=0}^n \frac{f(x_i)}{w(x_i)}$

(۳) $f[x_0, \dots, x_n] = \sum_{i=0}^n \frac{f'(x_i)}{w'(x_i)}$

(۴) $f[x_0, \dots, x_n] = \sum_{i=0}^n \frac{f(x_i)}{w''(x_i)}$

۴۰- تعداد ریشه‌های معادله‌ی $3x^2 - e^x = 0$ چقدر است؟

(۴) بی‌نهایت

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

۴۱- نقاط غیرصفر و دو به دو متمایز $x_0, \dots, x_n$ مفروضند. اگر $L_i(x)$ چندجمله‌ای لاگرانژ و

$c_i = L_i(0)$ آنگاه برای هر $1 \leq j \leq n$ $\sum_{i=0}^n c_i x_i^j$ کدام است؟

(۴) $x_0 \dots x_n$

(۳) $(-1)^n x_0 \dots x_n$

(۲) صفر

(۱) ۱

۴۲- در تجزیه‌ی LU ی ماتریس A ، ماتریس U کدام گزینه است؟

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

(۲) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

(۱) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(۴) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(۳) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

۴۳- در مورد ماتریس‌های معین مثبت کدام گزینه صحیح نیست؟

- (۱) تمام اعضای روی قطر اصلی مثبت هستند.
- (۲) در بین تمام درایه‌ها، بزرگترین درایه از لحاظ قدرمطلق بر روی قطر اصلی قرار دارد.
- (۳) تمام مقدار ویژه‌های آن مثبت اند.
- (۴) قطر غالب سطری است.

۴۴- چنانچه روش تکراری $X^{(k+1)} = BX^{(k)} + C$ معرف روش گاوس-سایدل باشد، B کدام است؟

(۱) $B = -D^{-1}(L + U)$

(۲) $B = D(L + U)$

(۳) $B = -(L + D)^{-1}U$

(۴) $B = -D(L + U)^{-1}$

۴۵- معادله‌ی خط کمترین مربعات داده‌های زیر کدام است؟

x_i	-۲	-۱	۰	۱	۲
$f(x_i)$	۰	۱	۲	۲	۳

(۱) $y = \frac{1}{5}x + \frac{2}{1}$

(۲) $y = \frac{2}{1}x + \frac{1}{5}$

(۳) $y = \frac{1}{5}x + \frac{2}{1}$

(۴) $y = \frac{2}{1}x + \frac{1}{5}$

----- پایان -----