

بسم الله الرحمن الرحيم

درس اول: عبارت‌های جبری و مفهوم اتحاد

یک جمله‌ای

به عبارت‌های جبری xy^2 ، $\frac{1}{3}xy$ و $\frac{\sqrt{3}}{2}xy^2z^4$ یک جمله‌ای می‌گویند. هر یک جمله‌ای، از حاصل ضرب اعداد حقیقی در متغیرها به دست می‌آید. در یک جمله‌ای، توان متغیرها باید عدد صحیح نامنفی (غیرمنفی) باشد. هر یک جمله‌ای از دو قسمت ضریب عددی و عبارت حرفی تشکیل شده است.

عبارت حرفی	ضریب عددی	یک جمله‌ای	عبارت حرفی	ضریب عددی	یک جمله‌ای
a^2bc^3	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}a^2bc^3$	x^2y	$-\sqrt{5}$	$-\sqrt{5}x^2y$
$a^x b^y$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}a^x b^y$	x	$\frac{1}{5}$	$\frac{x}{5}$

دقت کنید که یک عدد نیز به تنهایی، یک جمله‌ای محسوب می‌شود. مانند: $\frac{1}{3}$ ، 5 و $\sqrt{2}$.

عبارت‌هایی مانند $\frac{2}{a}$ ، $\frac{3x}{y}$ ، $\sqrt{x}$ و $\sqrt[3]{x^2}$ یک جمله‌ای نیستند، چون توان متغیرها در آن‌ها عدد صحیح نامنفی نیست. برای مثال:

توان a منفی است، پس عبارت یک جمله‌ای نیست. $-\frac{2}{a} = -2a^{-1} \rightarrow$

توان y منفی است، پس عبارت یک جمله‌ای نیست. $\frac{3x}{y} = 3xy^{-1} \rightarrow$

در عبارت‌های $\sqrt{x}$ و $\sqrt[3]{x^2}$ ، توان x کسری می‌شود، بنابراین عبارت‌های یک جمله‌ای نیستند (بعداً در مورد توان این عبارت‌ها توضیح کامل‌تری می‌دهیم).

در یک جمله‌ای $\frac{2}{3}ab^2x^3$ ، توان متغیر a ، مساوی ۱ است، بنابراین می‌گوییم درجه‌ی این یک جمله‌ای نسبت به متغیر a ، برابر ۱ است. توان x در

این یک جمله‌ای برابر ۳ است، پس می‌گوییم درجه‌ی این یک جمله‌ای نسبت به متغیر x ، ۳ است یا این یک جمله‌ای نسبت به x از درجه‌ی سوم

است. درجه‌ی این یک جمله‌ای نسبت به دو متغیر x و b برابر ۵ است ($2 + 3 = 5$). درجه‌ی این یک جمله‌ای نسبت به تمامی متغیرهایش

توان x توان b

۶ است ($1 + 2 + 3 = 6$). یک جمله‌ای $\frac{2}{3}ab^2x^3$ را می‌توان به صورت $\frac{2}{3}ab^2x^3y^0z^0$ نوشت، بنابراین درجه‌ی این یک جمله‌ای برای مثال

توان x توان b توان a

نسبت به y و z ، صفر است.

همان‌طور که گفتیم، عددهای ثابت مانند ۲، $\frac{1}{5}$ ، $\sqrt{2}$ و $-\frac{\sqrt{3}}{5}$ و π یک جمله‌ای هستند. برای مثال یک جمله‌ای ۲ را می‌توان به صورت

$2x^0a^0b^0y^0$ نوشت که درجه‌ی این یک جمله‌ای صفر است.

عدد صفر هم یک جمله‌ای است، اما برای عدد صفر (یک جمله‌ای ثابت صفر) درجه تعریف نمی‌شود.

یک جمله‌ای‌های متشابه

دو یا چند یک جمله‌ای را متشابه می‌گوییم که متغیرها و توان‌های مربوط به هر متغیر در آن‌ها یکسان باشد. (متشابه بودن یک جمله‌ای‌ها به ضریب عددی آن‌ها بستگی ندارد.)

یک جمله‌ای‌های روبه‌رو متشابه‌اند. 

$$-x^2yz, \frac{y}{9}yzx^2, \sqrt{5}x^2zy, -\frac{y}{9}x^2yz$$

● یک جمله‌ای‌های $2a^3$ و $2a^2$ متشابه نیستند.

● یک جمله‌ای‌های $-3ab^2$ و $-3a^2b$ متشابه نیستند.

● واضح است که یک جمله‌ای‌های $-3a^2b$ و $-3ab^2$ با هم متشابه نیستند، بنابراین یک جمله‌ای‌های غیرمتشابه نامیده می‌شوند.

● دو یا چند یک جمله‌ای متشابه را می‌توان با هم جمع و یا از هم کم کرد.

● برای جمع یا تفریق یک جمله‌ای‌های متشابه، کافی است که ضرایب عددی آن‌ها را با هم جمع و یا از هم کم کنیم و در کنار حاصل، قسمت حرفی یک جمله‌ای‌ها را قرار دهیم.

$$3x^2yz + 4x^2yz = (3+4)x^2yz = 7x^2yz$$



یک جمله‌ای‌های غیرمتشابه را نمی‌توان با هم جمع یا از هم تفریق کرد.

$$2x + 3x^2 \neq 5x^3 \quad \text{یا} \quad 5x + 3y \neq 8xy$$

دقت کنید!

$$x + x \neq x^2, 4a + 3a \neq 7a^2 \quad \text{یا} \quad x^2 + x^2 \neq x^4$$

دقت کنید!

چندجمله‌ای

از جمع دو یا چند یک جمله‌ای غیرمتشابه یک چندجمله‌ای حاصل می‌شود. برای مثال: عبارت‌های $2x+1$ ، $3x^2+4y$ و x^2+y دوجمله‌ای هستند.

عبارت $3x+4y-2y^2$ سه جمله‌ای و عبارت a^2+a^2+a+7 یک چهارجمله‌ای است.

توجه داشته باشید که یک جمله‌ای‌ها نیز چندجمله‌ای محسوب می‌شوند.

اگر متغیری مانند x در یک چندجمله‌ای وجود داشته باشد، بزرگ‌ترین توانی از x را که در آن چندجمله‌ای وجود دارد، درجه‌ی آن چندجمله‌ای نسبت به x می‌نامند.

برای مثال چندجمله‌ای‌های $x+7$ ، $2xy+y-z$ و $1+\frac{\sqrt{2}}{5}z^2-\frac{x}{4}y^2$ نسبت به x از درجه‌ی ۱ هستند.

چندجمله‌ای‌های $2+xy-x^2+11$ ، $x^2+xy^3+z^4$ و x^2-7y^2+19 نسبت به x از درجه‌ی ۲ هستند.

چندجمله‌ای‌های $2-xyz$ و $-7x^2yz+yx^3-xy^2z-\frac{x}{5}+\frac{yx^2}{y}$ نسبت به x از درجه‌ی ۳ هستند.

چندجمله‌ای استاندارد

هرگاه همه‌ی جمله‌های یک چندجمله‌ای را برحسب توان‌های نزولی (از بزرگ به کوچک) یک متغیر، مرتب کنیم؛ آن چندجمله‌ای را استاندارد می‌گوییم.

چندجمله‌ای

نمایش استاندارد چندجمله‌ای

$$-5x+10+3x^2$$

$$3x^2-5x+10$$

$$4y^2-3-y^5+y$$

$$-y^5+4y^2+y-3$$

$$v-b^3+2b^2-4b^6-b^9$$

$$-b^9-4b^6-b^3+2b^2+v$$

ضرب یک جمله‌ای‌ها

به تساوی‌های مقابل دقت کنید.

الف) $3a^2b^3 \times 7ab^4 = (3 \times 7)a^2ab^3b^4 = 21a^{2+1}b^{3+4} = 21a^3b^7$

ب) $-\frac{1}{4}x^2y^3z \times 8xy^2z^2 = (-\frac{1}{4} \times 8)x^2xy^3y^2zz^2 = -2x^3y^5z^3$

ضرب چندجمله‌ای‌ها

به تساوی‌های روبه‌رو دقت کنید.

الف) $(x+2)(x+7) = x(x+7) + 2(x+7) = x^2 + 7x + 2x + 14 = x^2 + 9x + 14$

برای ضرب دو چندجمله‌ای در یکدیگر، تک‌تک جمله‌های یکی از چندجمله‌ای‌ها را در چندجمله‌ای دیگر ضرب می‌کنیم و سپس عبارت حاصل را به ساده‌ترین صورت ممکن می‌نویسیم.

حاصل ضرب چندجمله‌ای $x^2y + yz - 3$ را در چندجمله‌ای $x^3 - y^2 + 4$ به دست آورید.

$(x^3 - y^2 + 4)(x^2y + yz - 3) = x^3(x^2y + yz - 3) - y^2(x^2y + yz - 3) + 4(x^2y + yz - 3)$

$= x^5y + x^3yz - 3x^3 - x^2y^3 - y^3z + 3y^2 + 4x^2y + 4yz - 12$

اتحاد

به جدول زیر دقت کنید.

x	$(x+5)^2$	$x^2 + 10x + 25$	x	$(x+5)^2$	$x^2 + 10x + 25$
-2	$(-2+5)^2 = 3^2 = 9$	$(-2)^2 + 10(-2) + 25 = 9$	0	$(0+5)^2 = 25$	$0^2 + 10 \times 0 + 25 = 25$
7	$(7+5)^2 = 12^2 = 144$	$7^2 + 10 \times 7 + 25 = 144$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2}+5)^2 = (\frac{11}{2})^2 = \frac{121}{4}$	$(\frac{1}{2})^2 + 10 \times \frac{1}{2} + 25 = \frac{121}{4}$

همان‌طور که مشاهده می‌کنیم، تساوی $(x+5)^2 = x^2 + 10x + 25$ به ازای هر مقدار دلخواه x همواره درست است. این‌گونه تساوی‌ها را اتحاد می‌گوییم.

به طور کلی اگر دو عبارت جبری به گونه‌ای باشند که به ازای هر مقداری برای متغیرهایشان، مقدار یکسانی داشته باشند، در این صورت برابری جبری حاصل از آن‌ها را یک اتحاد جبری می‌نامیم.

آیا $x^2 + 9 = (x+3)^2$ یک اتحاد است؟

$(x+3)^2 = (x+3)(x+3) = x^2 + 3x + 3x + 9 = x^2 + 6x + 9 \neq x^2 + 9$

خیر. زیرا:

اتحاد مربع دوجمله‌ای

برای هر دو عدد حقیقی a و b همواره داریم:

الف) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

ب) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

به هر یک از تساوی‌های بالا، اتحاد مربع دوجمله‌ای می‌گویند. تساوی قسمت «ب» را اثبات می‌کنیم.

$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

پس همواره داریم:

تجزیه

$x(y+z) = x(y+z) = xy + xz$

اگر ضرب مقابل را انجام دهیم، داریم:

این ضرب را توزیع‌پذیری یا خاصیت پخش عمل ضرب نسبت به جمع می‌گوییم، اکنون اگر عبارت $xy + xz$ را به صورت ضرب دو عبارت جبری

$xy + xz = x(y+z)$

بنویسیم، داریم:

این عمل، یعنی تبدیل جمع یا تفریق یک عبارت جبری به صورت ضرب را، تجزیه می‌گویند.

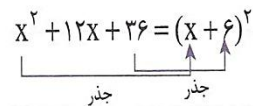
سه جمله‌ای $x^2 + 12x + 36$ را تجزیه کنید. 

روش اول:  $x^2 + 12x + 36 = \underline{x^2 + 6x} + \underline{6x + 36} = x(x+6) + 6(x+6) = (x+6)(x+6) = (x+6)^2$

روش دوم: در این عبارت دو جمله‌ی x^2 و ۳۶ مربع کامل هستند و جمله‌ی $12x$ ، مساوی دو برابر جذر جملات مربع کامل است. پس می‌توان

عبارت را با اتحاد مربع کامل تجزیه کرد. یعنی:

$$x^2 + 12x + 36 = (x+6)^2$$



این اتحاد به صورت مقابل است:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$(x+2)(x-2) = x^2 - 2^2 = x^2 - 4$$

$$(2a-3b)(2a+3b) = (2a)^2 - (3b)^2 = 4a^2 - 9b^2$$



این اتحاد در عین سادگی، کاربردهای زیادی در محاسبات عددی، سهولت در ساده کردن عبارت‌های جبری و تجزیه‌ی عبارت‌های جبری دارد.

حاصل عبارت‌های زیر را حساب کنید.



الف) $202 \times 198 = (200+2)(200-2) = 40000 - 4 = 39996$

ب) $\frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)}{(x^2-1)} = \frac{(x^2-1)(x^2+1)(x^4+1)}{(x^2-1)} = (x^2+1)(x^4+1) = x^6 - 1$

استفاده از اتحاد مزدوج برای تجزیه‌ی عبارت‌های جبری

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$$

به این مثال‌ها دقت کنید:

$$a^2 - 4 = (a+2)(a-2)$$

$$t^2 - \frac{1}{4} = (t - \frac{1}{2})(t + \frac{1}{2})$$

اتحاد جمله مشترک

در این اتحاد یک جمله‌ی مشترک و دو جمله‌ی غیرمشترک داریم:

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

جمله‌ی مشترک: x^2
جمله‌های غیرمشترک: $(a+b)x$ و ab
مجموع دو جمله‌ی غیرمشترک: $(a+b)x + ab$
حاصل ضرب دو جمله‌ی غیرمشترک: ab

حاصل عبارت‌های زیر را با استفاده از اتحاد جمله مشترک حساب کنید.



الف) $(x+2)(x+3) =$

ب) $(x-8)(x+5) =$

الف) $(x+2)(x+3) = x^2 + (2+3)x + 2 \times 3 = x^2 + 5x + 6$

ب) $(x-8)(x+5) = x^2 + (-8+5)x + (-8)(5) = x^2 - 3x - 40$



استفاده از اتحاد جمله مشترک برای تجزیه‌ی عبارت‌های جبری

با چند مثال، کاربرد این اتحاد را در تجزیه‌ی عبارت‌های جبری نشان می‌دهیم.

الف) $x^2 + 8x + 12 =$

ب) $x^2 - 8x + 15 =$

عبارت‌های روبه‌رو را تجزیه کنید.



الف) باید دو عدد بیابیم که حاصل ضرب آن‌ها ۱۲+ و مجموع آن‌ها ۸+ باشد. چون حاصل ضرب دو عدد مثبت است (۱۲+)، پس دو عدد



هم‌علامت هستند و چون حاصل جمع نیز مثبت است (۸+)، بنابراین دو عدد مثبت هستند، از روی حاصل ضرب، دو عدد را می‌یابیم.

$$x^2 + 8x + 12 =$$

$$1 \times 12 = 12$$

$$2 \times 6 = 12$$

حاصل ضرب دو عدد مجموع دو عدد

دو عدد موردنظر چون مجموع آن‌ها ۸+ است.

درس سوم: نابرابری‌ها و نامعادله‌ها

هرگاه a و b دو عدد حقیقی باشند، یکی از سه حالت زیر برای دو عدد وجود دارد:

$$a > b$$

الف) a بزرگ‌تر از b است که به صورت ریاضی می‌نویسیم:

$$a = b$$

ب) a مساوی b است که به صورت ریاضی می‌نویسیم:

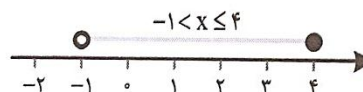
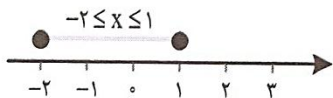
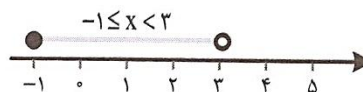
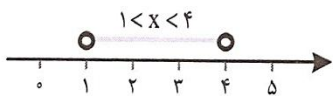
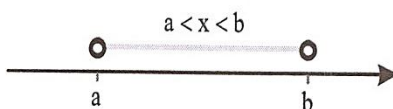
$$a < b$$

ج) a کوچک‌تر از b است که به صورت ریاضی می‌نویسیم:

● اگر عدد حقیقی a منفی نباشد، یعنی a مثبت است یا صفر، که می‌نویسیم: $a \geq 0$ (می‌خوانیم: a بزرگ‌تر یا مساوی صفر است).

● اگر عدد حقیقی a مثبت نباشد، یعنی a منفی است یا صفر که می‌نویسیم: $a \leq 0$

● برای سه عدد حقیقی a ، b و x : اگر x بین a و b باشد ($a < b$)، آن‌گاه می‌نویسیم: $a < x < b$ (به محور زیر توجه کنید).



خواص نابرابری‌ها (نامساوی‌ها)

۱- اگر دو طرف یک نابرابری (نامساوی) را با عددی مانند m جمع کنیم، جهت نابرابری (نامساوی) تغییر نمی‌کند.

$$a < b \Rightarrow a + m < b + m \xrightarrow{\text{مثال}} -4 < -1 \Rightarrow \overbrace{-4+5} < \overbrace{-1+5}$$

۲- اگر دو طرف یک نابرابری را در عددی مثبت ضرب و یا بر عددی مثبت تقسیم کنیم، جهت نابرابری تغییر نمی‌کند.

$$a < b, m > 0 \Rightarrow \begin{cases} am < bm \\ a \div m < b \div m \end{cases}$$

$$4 < 6 \Rightarrow \begin{cases} 4 \times 2 < 6 \times 2 \Rightarrow 8 < 12 \\ 4 \div 2 < 6 \div 2 \Rightarrow 2 < 3 \end{cases}$$



۳- اگر دو طرف یک نابرابری را در عددی منفی ضرب و یا بر عددی منفی تقسیم کنیم، جهت نابرابری تغییر می‌کند.

$$a < b, m < 0 \Rightarrow \begin{cases} am > bm \\ \frac{a}{m} > \frac{b}{m} \end{cases}$$

$$12 < 18 \Rightarrow \begin{cases} \frac{12 \times (-2)}{-24} > \frac{18 \times (-2)}{-36} \\ \frac{12 \div (-3)}{-4} > \frac{18 \div (-3)}{-6} \end{cases}$$



نامعادله

اگر یک نابرابری شامل متغیر (مجهول) باشد، به آن نامعادله می‌گوییم، مانند نابرابری‌های مقابل:

$$2x > 3, 4x - 1 < 7$$

● به مجموعه‌ی مقادیر (عددهایی) که به ازای آن‌ها نامعادله به یک نابرابری درست، تبدیل شود، مجموعه‌جواب نامعادله می‌گوییم و این مجموعه‌جواب را با حرف D نمایش می‌دهیم. مجموعه‌جواب یک نامعادله را روی محور اعداد حقیقی می‌توان نشان داد. به مثال‌های زیر دقت کنید.

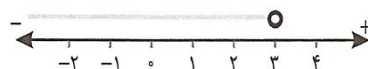
نامعادلات زیر را حل کنید و مجموعه‌جواب آن‌ها را مشخص کنید و مجموعه‌جواب هر نامعادله را روی محور نیز نمایش دهید.

الف) $2x < 6$

ب) $3x \leq 12$

ج) $x + 2 \geq 3$

الف) $2x < 6 \Rightarrow x < \frac{6}{2} \Rightarrow x < 3 \Rightarrow D = \{x \in \mathbb{R} | x < 3\}$



ب) $3x \leq 12 \Rightarrow x \leq \frac{12}{3} \Rightarrow x \leq 4 \Rightarrow D = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 4\}$



ج) $x + 2 \geq 3 \Rightarrow x \geq 3 - 2 \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow D = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 1\}$



همان‌طور که در سه مثال بالا مشاهده کردید، روش حل نامعادله دقیقاً مانند روش‌های حل معادله است، فقط به جای علامت مساوی، علامت نامساوی داریم و این نکته را فراموش نکنید که اگر ضریب متغیر عدد منفی باشد و طرفین نامساوی را بر عدد منفی تقسیم کنیم، جهت نامساوی تغییر می‌کند. به مثال‌های زیر دقت کنید.

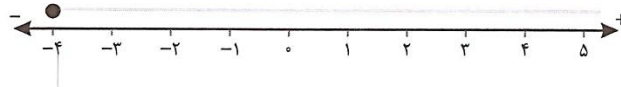
نامعادلات زیر را حل کنید و مجموعه‌جواب را بنویسید و روی محور نیز مشخص کنید.

الف) $-2x \leq 8$

ب) $-\frac{2}{3}x \geq 6$

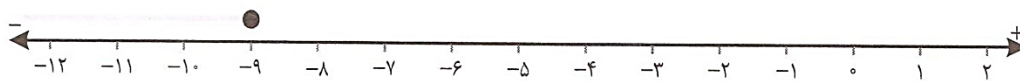
الف) $-2x \leq 8 \Rightarrow x \geq \frac{8}{-2} \Rightarrow x \geq -4 \Rightarrow D = \{x \in \mathbb{R} | x \geq -4\}$

توجه



ب) $-\frac{2}{3}x \geq 6 \Rightarrow x \leq 6 \div (-\frac{2}{3}) \Rightarrow x \leq 6 \times (-\frac{3}{2}) \Rightarrow x \leq -9 \Rightarrow D = \{x \in \mathbb{R} | x \leq -9\}$

توجه



$-2x + 1 \geq -3$

نامعادله‌ی مقابل را حل کنید و مجموعه جواب را روی محور نمایش دهید.

$-2x + 1 \geq -3 \Rightarrow -2x \geq \underbrace{-3 - 1}_{-4} \Rightarrow -2x \geq -4 \Rightarrow x \leq \underbrace{\frac{-4}{-2}}_{-2} \Rightarrow x \leq 2 \Rightarrow D = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 2\}$

توجه



WWW.DAKTSHOP.IR

داکت‌شاپ