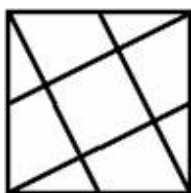


مرحله ی اول چهاردهمین المپیاد ریاضی دانش آموزان ایران

اردیبهشت ماه ۱۳۷۴

۱) در شکل مقابل فرض کنید مساحت مربع بزرگ برابر ۱ باشد. هر رأس مربع را به وسط ضلع مقابلش وصل می کنیم. مساحت مربع کوچک چقدر است؟



- الف) $\frac{1}{4}$ ب) $\frac{1}{5}$ ج) $\frac{1}{6}$ د) $\frac{1}{7}$ ه) $\frac{1}{8}$

۲) معادله ی $(\sqrt{4-\sqrt{15}})^x + (\sqrt{4+\sqrt{15}})^x = 8$ دارای چند جواب است؟

- الف) جواب ندارد ب) یک جواب ج) دو جواب

د) تعداد متناهی جواب ه) تعداد نامتناهی جواب

۳) رقم راست عدد $23^{23} - 17^{17}$ برابر است با:

- الف) ۰ ب) ۲ ج) ۴ د) ۶ ه) ۸

۴) فرض کنید در مثلث ABC ، CH ارتفاع بوده و $CH \geq AB$ ، در این صورت بزرگترین مقدار زاویه ی C برابر است با:

- الف) 30° ب) 45° ج) 60° د) 90° ه) 120°

۵) حداقل چند عضو از مجموعه ی $\{2, 3, \dots, 1375\}$ را حذف کنیم به طوری که مجموعه ی باقیمانده دارای این خاصیت باشد که حاصل ضرب هیچ یک از دو عضوش در خودش نباشد.

- الف) ۱۶ ب) ۳۶ ج) ۵۶ د) ۷۶ ه) ۹۶

۶) فرض کنید مجموع $1+2+\dots+n$ یک عدد سه رقمی باشد که رقم‌های آن مساویند. در این صورت n بر کدام یک از اعداد زیر بخش پذیر است؟

- الف) ۵ ب) ۶ ج) ۷ د) ۸ ه) ۱۱

۷) اگر x و y دو عدد حقیقی باشند به طوری که

$$\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right) = 1$$

در این صورت دقیق ترین نتیجه ای که می توان گرفت چیست؟

- الف) $x=y=0$ ب) $x+y=0$ ج) $x+y \geq 0$

- د) $x+y \leq 0$ ه) x و y هم علامت اند.

۸) تعدادی متناهی وزنه داریم که وزن هر یک حداکثر ۱۰ کیلوگرم است. می دانیم که اگر این وزنه ها را به دلخواه به دو دسته تقسیم کنیم مجموع وزن های یکی از دسته ها حداکثر ۱۰ کیلوگرم می شود. بیشترین وزن مجموعه ی وزنه ها چند کیلوگرم می تواند باشد؟

- الف) ۲۰ ب) ۲۵ ج) ۳۰ د) ۳۵ ه) ۴۰

۹) فرض کنید هر حرف لاتین نماینده ی یک رقم باشد و اگر دو حرف لاتین متفاوت باشند حتما رقم های آن

$$\frac{SIX}{NINE} = \frac{2}{3}$$

ها نیز متفاوت است. اگر داشته باشیم $\frac{SIX}{NINE} = \frac{2}{3}$ در این صورت مقدار I برابر است با:

- الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ ه) ۵

۱۰) نقاط A ، B و C روی یک خط واقع اند و B نقطه ای میان A و C است. تمام دوائر گذرا از نقاط A و B را در نظر گرفته و از C مماس هایی بر آن ها رسم می کنیم. در این صورت مکان هندسی نقاط تماس برابر است با:

- الف) یک خط راست ب) یک دایره ج) یک نیم دایره

- د) یک بیضی ه) هیچ کدام

۱۱) اگر $a > 0$ ، $b > 0$ و $0 < a < 1$ ، در این صورت داریم:

الف) $a^a b^b \geq a^b b^a$

ب) $a^a b^{1-a} < a+b$

ج) $a^a b^b \geq (ab)^{\frac{a+b+1}{2}}$

د) $(\alpha a + (1-\alpha)b)^2 \geq \alpha a^2 + (1-\alpha)b^2$

ه) الف، ب و ج هر سه صحیح است.

۱۲) از نقطه O واقع در درون مثلث ABC، عمودهای OM، ON و OP را به ترتیب به اضلاع AB، BC و AC رسم می‌کنیم. اگر AM=۳، MB=۵، BN=۴، NC=۲ و CP=۴، در این صورت مقدار AP برابر است با؟

- الف) ۳ ب) $2\sqrt{2}$ ج) ۴ د) $2\sqrt{2}$ ه) $2\sqrt{2}$

۱۳) فرض کنید a و b دو عدد طبیعی بوده به طوری که $\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a}$ عددی طبیعی باشد. در این صورت بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک a و b از کدام یک از اعداد زیر بزرگ‌تر نیست (بهترین جواب ممکن مورد نظر است).

- الف) $\sqrt{a+b}$ ب) $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a+b}}$ ج) $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a+b}}$

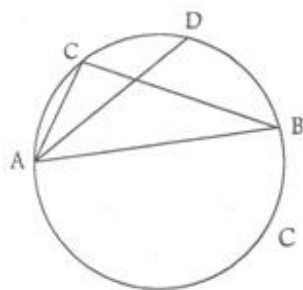
- د) $\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2}$ ه) $\sqrt{a+b} - 1$

۱۴) معادله $2^x + 1 = 3^y$ در اعداد طبیعی چند دسته جواب دارد؟

- الف) ۱ جواب ب) ۲ جواب ج) ۳ جواب د) ۴ جواب ه) نامتناهی جواب

۱۵) مثلث ABC محاط در داخل دایره C را در نظر بگیرید. فرض کنید AD نیمساز زاویه A باشد. اگر

$AB = \sqrt{2}BC = \sqrt{2}AD$ در این صورت زوایای مثلث ABC برابر اند با:



الف) $15^\circ, 30^\circ, 135^\circ$ (ب) $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$

ج) $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ (د) $20^\circ, 40^\circ, 120^\circ$

ه) $15^\circ, 60^\circ, 105^\circ$

۱۶) در مثلث ABC، نقطه M را روی BC در نظر می‌گیریم و از M خطوطی موازی اضلاع AB و AC رسم

۱۸

می‌کنیم. فرض کنید مساحت متوازی الاضلاع حاصل مساحت مثلث شود. در این صورت نقطه M ضلع BC را به چه نسبتی تقسیم می‌کند؟

الف) ۱ به ۶ (ب) ۱ به ۴ (ج) ۱ به ۵ (د) ۲ به ۹ (ه) ۱ به ۳

۱۷) فرض کنید α و β دو عدد باشند به طوری که $\alpha^3 - 6\alpha^2 + 13\alpha = 1$ و $\beta^3 - 6\beta^2 + 13\beta = 19$ ، در این صورت مقدار $\alpha + \beta$ برابر کدام یک از مقادیر زیر است؟

الف) ۳ (ب) ۴ (ج) ۵ (د) ۶ (ه) ۷

۱۸) عدد a را متعادل می‌گوییم هر گاه بتوان رقم‌های آن را به دو دسته تقسیم کرد به طوری که مجموع رقم‌های دو دسته مساوی باشد. کوچک‌ترین عدد a، به طوری که $a+1$ متعادل باشند در کدام یک از فاصله‌های زیر قرار می‌گیرد؟

الف) $[100, 200]$ (ب) $[200, 300]$ (ج) $[300, 400]$

د) $[400, 500]$ (ه) $[500, 600]$

۱۹) فرض کنید $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، و به ازای $0 \leq x < 1$ داشته باشیم، $|f(x)| \leq 1$ در این صورت ماکزیمم مقدار $2a+b$ چه می‌تواند باشد؟

الف) ۶ (ب) ۷ (ج) ۸ (د) ۹ (ه) ۱۰

۲۰) یک کره به وسیله ی ۹ صفحه که از مرکز آن می‌گذرند تقسیم شده است. اگر هیچ سه صفحه ای در یک قطر مشترک نباشند، کره به چند قسمت تقسیم می‌شود؟

الف) ۲^۸ (ب) ۲^۹ (ج) ۷۶ (د) ۸۱ (ه) ۷۴

(۲۱) در مثلث قائم الزاویه ی ABC ($\angle A = 90^\circ$)، ارتفاع AH را رسم می کنیم. اگر شعاع دوایر محاطی مثلث های ABH و ACH به ترتیب ۱ و ۳ باشند، آن گاه شعاع دایره ی محاطی مثلث ABC برابر است با:

الف) ۵ (ب) $\sqrt{10}$ (ج) $2\sqrt{2}$ (د) $\frac{2}{5}$ (ه) ۳

(۲۲) فرض کنید $f(x) = \frac{3^x}{3^x + 2}$ ، در این صورت مقدار عبارت زیر را به دست آورید:

$$S = f\left(\frac{1}{14}\right) + f\left(\frac{2}{14}\right) + \dots + f\left(\frac{13}{14}\right)$$

الف) ۷ (ب) $\frac{8}{5}$ (ج) $\frac{6}{5}$ (د) $\frac{2}{5}$ (ه) $\frac{5}{5}$

(۲۳) مجموع تمام اعداد مثبت x را بیابید به طوری که عبارت $\sqrt[3]{2+x} + \sqrt[3]{2-x}$ به ازای آن ها عدد صحیح شود.

الف) $\sqrt{2}$ (ب) $\sqrt[3]{4}$ (ج) $\sqrt{5}$ (د) $\sqrt{5}\left(1 + \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\right)$ (ه) $\frac{\sqrt{5}(\sqrt{2} + \sqrt{2} + 1)}{\sqrt{2}}$

(۲۴) تعداد تمام اعداد بین ۱ تا ۱۰۰ را بیابید به طوری که مجموع اعدادی طبیعی باشند که در رقم های آن ها هر یک از اعداد ۰ تا ۹ دقیقا یک بار آمده است. (مثال: $90 = 0 + 1 + 5 + 2 + 3 + 4 + 6 + 7 + 8 + 9$)

الف) ۷ (ب) ۱۱ (ج) ۱۵ (د) ۱۹ (ه) ۲۳

(۲۵) حداقل چند نقطه بایستی در صفحه در نظر گرفت به طوری که هر نقطه ی صفحه لااقل از یکی از این نقاط فاصله اش گنگ باشد.

الف) ۲ نقطه (ب) ۳ نقطه (ج) ۴ نقطه (د) ۵ نقطه

(ه) با تعدادی متناهی نقطه نمی توان این کار را انجام داد.