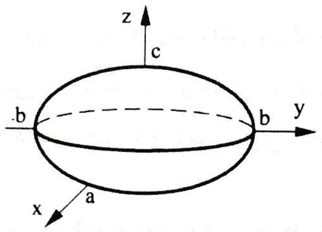
فصل هفتم

رویه‌های فضایی

بیضی گون
هذلولی‌گون یکپارچه
هذلولی‌گون دوپارچه
سهموی بیضوی
سهموی هذلولوی
سطوح استوانه‌ای
مخروط
معادله کلی سطوح درجه دوم
تبدیل یک معادله درجه دوم به فرم استاندارد
مجموعه تست رویه‌های فضایی

یادداشت:

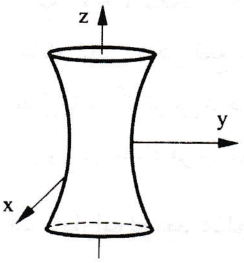
الف ـ الیپسویید یا بیضی گون $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$



حجمی شبیه به یک تخم‌مرغ کاملاً متقارن است. صفحات مختصات، صفحات تقارن رویه بوده و محورهای مختصات، محورهای تقارن آن می‌باشند؛ لذا، مبدأ مختصات، مرکز تقارن رویه است.

این رویه در امتداد محور x بین $-a$ و a ، در امتداد محور y بین $-b$ و b و در امتداد محور z بین $-c$ و c محدود است و مقطع آن با هر سه صفحه مختصات، بیضی می‌باشد. (در حالت خاص $a=b=c$ سطح مذکور یک کره خواهد بود).

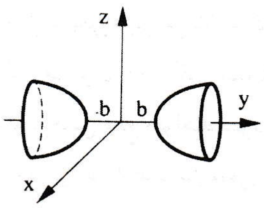
ب ـ هیپربولویید یک‌پارچه یا هذلولی‌گون یک‌پارچه $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$



می‌توان ملاحظه نمود که مقطع این رویه با صفحات موازی yoz و xoz دو هذلولی بوده و مقطع آن با صفحات موازی xoy یک بیضی می‌باشد؛ به‌طوری که، هرچه این صفحات از مبدأ دورتر می‌شوند، سطح این بیضی‌ها بزرگ‌تر می‌شود و نرخ این افزایش نیز رو به تزاید دارد.

بنا به تقارن کامل شکل رویه نسبت به صفحات مختصات و محورهای مختصات، مبدأ مختصات مرکز تقارن رویه می‌باشد. رویه مذکور در امتداد هر سه محور هیچ محدودیتی ندارد.

ج ـ هیپربولویید دوپارچه یا هذلولی‌گون دوپارچه $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

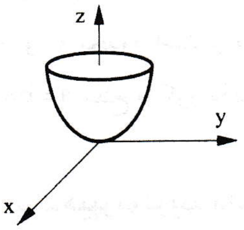


می‌توان نشان داد تقاطع رویه مزبور با صفحات yoz و xoy دو هذلولی و با صفحه xoz یک بیضی مجازی می‌باشد. (مجازی بودن بیضی بدین معنا است که، مقطع رویه مزبور با برخی صفحات موازی xoz یک بیضی است، لیکن صفحه xoz هرگز رویه مزبور را قطع نمی‌کند).

صفحات مختصات و محورهای مختصات به ترتیب صفحات تقارن و محورهای تقارن رویه بوده و مبدأ مختصات مرکز تقارن رویه است.

رویه مزبور به ازاء yهای بزرگ‌تر از b و کوچک‌تر از b- موجود است و در فاصله $(-b,b)$ شکلی وجود ندارد (از همین جا است که دو پارچه بودن رویه مشخص می گردد)؛ ولی، رویه در امتداد محورهای x و z محدودیتی ندارد.

د- پارابولویید بیضی شکل یا سهموی بیضوی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}\ ;\ c>0$



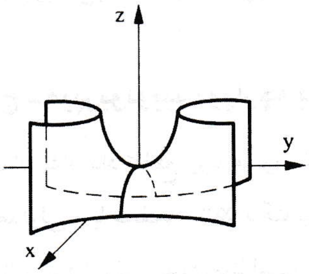
صفحات yoz و xoz صفحات تقارن رویه هستند و لذا، محل تقاطع این دو صفحه، یعنی محور z، محور تقارن رویه است. با فرض $c>0$، مقادیر z نیز باید حتماً مثبت باشند و لذا رویه مزبور فقط در بالای صفحه xoy موجود است.

تقاطع رویه با صفحات yoz و xoz دو سهمی بوده و صفحات به‌موازات صفحه xoy رویه را در یک مقطع بیضی شکل قطع می کنند؛ به‌طوری که، هر چه این صفحات از مبدأ دورتر می‌شوند، سطح این بیضی‌ها بزرگ‌تر می‌شود؛ ولی، نرخ این افزایش رو به کاهش دارد.

رویه مزبور در امتداد هر سه محور، هیچ محدودیتی به جز $z\geq 0$ ندارد.

هـ- پارابولویید هذلولی شکل یا سهموی هذلولوی (رویه زین اسبی)

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}\ ;\ c>0$$

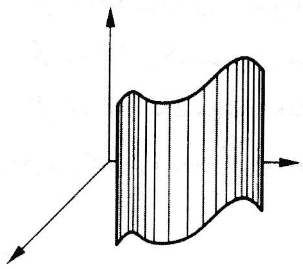


صفحات yoz و xoz صفحات تقارن و محور z محور تقارن رویه است. تقاطع رویه با صفحات yoz و xoz سهمی و با صفحه xoy دو منحنی می‌باشد. اگر رویه را با صفحاتی به موازات صفحه xoz قطع کنیم، ملاحظه می کنیم مقاطع حاصل سهمی‌هایی می‌باشند که تقعر آنها به سمت پایین است و نیز می‌توان دید که صفحات موازی xoy رویه را در هذلولی‌هایی قطع خواهند نمود.

رویه مزبور در امتداد سه محور مختصات هیچ‌گونه محدودیتی ندارد.

توجه کنید، مبدأ مختصات در این رویه یک نقطه زینی یا مینیماکس نامیده می‌شود که از دید رو به صفحه yoz کمترین z را دارد و از دید رو به صفحه xoz بیشترین z را دارد.

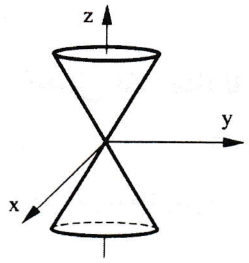
و ـ سطوح استوانه‌ای



اگر معادله سطحی به‌صورت $F(x,y)=0$ بیان شود، منظور آن است که منحنی $F(x,y)=0$ موجود در صفحه xoy را به‌موازات خود در راستای محور zها امتداد دهیم (در چنین شرایطی محور zها را مولد استوانه و منحنی $F(x,y)=0$ را هادی استوانه و خطوطی را که موازی مولد بود و سطح استوانه‌ای را تشکیل می‌دهد خطوط جاری می‌نامند).

به عنوان مثال، استوانه با مقطع بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ را می‌توان از امتداد دادن بیضی مذکور در راستای محور zها به‌دست آورد.

ز ـ مخروط $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$



صفحات مختصات، صفحات تقارن و محورهای مختصات محورهای تقارن و مبدأ مختصات مرکز تقارن رویه هستند. مقطع رویه با xoz و yoz دو خط متقاطع رویه با صفحه xoy یک نقطه است که این نقطه همان راس مخروط می‌باشد.

صفحات موازی صفحه xoy رویه را در مقاطع بیضی شکل قطع می‌کنند، به نحوی که هرچه این صفحات از مبدأ دورتر می‌شوند، سطح این بیضی‌ها به تناسب فاصله این صفحات تا مبدأ، بزرگ‌تر می‌شوند.

شکل رویه از دو مخروط که در مبدأ به هم متصل شده‌اند، تشکیل می‌گردد که هیچ محدودیتی در امتداد هر سه محور وجود ندارد.

❖ معادله کلی سطوح درجه دوم

نوع رویه‌های درجه دوم با معادله کلی $Ax^2+By^2+Cz^2+Dx+Ey+Fz=G$ را می‌توان به‌صورت زیر مشخص نمود.

الف) فرض کنید فرم معادله رویه به‌صورت زیر نوشته شود:

$$A(x-\alpha)^2+B(y-\beta)^2=C(z-\gamma)$$

$$A(x-\alpha)^2+B(y-\beta)^2=C(z-\gamma)$$

آنگاه:

اگر $AB=0$، یک رویه استوانه‌ای شکل خواهیم داشت.

اگر $AB>0$، یک سهموی بیضوی شکل خواهیم داشت.

اگر $AB<0$، یک سهموی هذلولوی (رویه زین اسبی) خواهیم داشت.

ب) فرض کنید فرم معادله رویه به‌صورت زیر نوشته شود:

$$A(x-\alpha)^2+B(y-\beta)^2+C(z-\gamma)^2=H$$

آنگاه:

اگر $ABC=0$، یک رویه استوانه‌ای شکل خواهیم داشت.

اگر $ABC\neq 0$ و A، B و C هم علامت باشند، یک بیضی گون (و در حالت خاص یک کره) خواهیم داشت.

اگر $ABC\neq 0$ و A، B و C هم علامت نباشند، بسته به حالت‌های مختلف یک هذلولی‌گون یک‌پارچه، هذلولی‌گون دو پارچه و یا یک مخروط خواهیم داشت.

❖ تبدیل یک معادله درجه دوم به فرم استاندارد

فرض کنید، ماتریس $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ متقارن بوده $(a_{ij}=a_{ji})$ و بردار $X=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ مورد نظر باشد، معادله درجه دوم $X^TAX=a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz$ را در نظر می گیریم. می توان ثابت کرد، جملات شامل ضرب دو متغیر غیرهمنام را در رابطه فوق می‌توان با نوشتن $X=BU$ حذف نمود، که در آن $U=\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$ و B ماتریس متعامد ساخته شده از بردارهای ویژه ماتریس A می‌باشد.

معادله درجه دوم جدید بر حسب u، v و w را که شامل هیچ جمله به شکل حاصل‌ضرب دو متغیر غیرهمنام نمی‌باشد، شکل استاندارد می‌گوییم و فرم آن به صورت $\lambda_1u^2+\lambda_2v^2+\lambda_3w^2$ خواهد بود که در آن λ_1 و λ_2 و λ_3 مقادیر ویژه ماتریس A هستند.

مجموعه تست رویه‌های فضایی

۱ـ متحرکی روی مسیر $\vec{r}(t)=t\cos t\,i+t\sin t\,j+2t\,k$ حرکت می‌کند، مسیر حرکت نقاط:

۱) یک مخروط است. ۲) یک کره است.

۳) یک سهمی‌گون است. ۴) یک هذلولی‌گون یک‌پارچه است.

حل :

$$\begin{cases} x=t\cos t \\ y=t\sin t \\ z=2t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=t^2\cos^2 t+t^2\sin^2 t=t^2 \\ z^2=4t^2 \end{cases}$$

ملاحظه می‌شود با حذف t به‌دست می‌آید:

$$4\left(x^2+y^2\right)=z^2$$

که بیانگر یک مخروط است.

۲ـ ناحیه همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{2x^2+y^2}{n}\right)^{n^2} e^{-nz}$ در فضا کدام است؟

۱) داخل یک سهمی‌گون ۲) خارج یک سهمی‌گون

۳) داخل یک بیضی‌گون ۴) خارج یک بیضی‌گون

حل :

شرط همگرایی می‌طلبد که:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left(1+\frac{2x^2+y^2}{n}\right)^{n^2} e^{-nz}\right|}<1 \rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2x^2+y^2}{n}\right)^{n}\left|e^{-z}\right|<1$$

$$\rightarrow e^{2x^2+y^2}e^{-z}<1 \rightarrow e^{2x^2+y^2-z}<e^0 \rightarrow 2x^2+y^2-z<0 \rightarrow z>2x^2+y^2$$

که داخل سهمی‌گون بیضوی $z=2x^2+y^2$ می‌باشد؛ لذا گزینه ۱ صحیح است.

یادداشت:

فصل هشتم

انتگرال‌های سه‌گانه

یادداشت:

انتگرال‌های سه‌گانه

الف) مسایل در دستگاه مختصات دکارتی

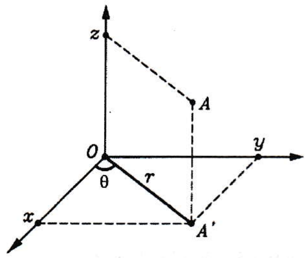
برای محاسبه $I=\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ با این فرض که ناحیه V نسبت به محور zها منظم است (یعنی، اگر المانی مکعب مستطیل شکل را به موازات محور zها عمود بر صفحه xoy حرکت دهیم تا حجم V را جارو کند، ابتدای المان روی یک رویه مشخص؛ مانند، $z=P(x,y)$ و انتهای آن نیز روی یک رویه مشخص دیگر؛ مانند، $z=Q(x,y)$ جابجا شود) و تصویر V روی صفحه xoy ناحیه‌ای مانند D باشد، می‌نویسیم:

$$I=\iint_D\left(\int_{z=P(x,y)}^{z=Q(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right)dx\,dy$$

و طبیعی است نوشتن حدود انتگرال دوگانه $\iint_D$ بر مبنای بحث‌های صورت گرفته انجام می‌شود.

ب) مسایل در دستگاه مختصات استوانه‌ای

دیدیم دستگاه مختصات استوانه‌ای و دکارتی دارای یک مختصه مشترک بوده و دو مختصه دیگر با تصویر نقطه روی صفحه عمود بر متغیر مشترک و سپس بیان «طول شعاع حامل نقطه تصویر» و «زاویه شعاع حامل نقطه تصویر با جهت مثبت یکی از محورها» توصیف می‌شود.



$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \\ z=z \end{cases} \qquad \begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2} \\ \theta=\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{y}{x}\right) \\ z=z \end{cases}$$

در این شرایط داریم:

$$dx\,dy\,dz=r\,dr\,d\theta\,dz$$

مرسوم است المان انتگرال‌گیری به‌موازات محور zها (متغیر مشترک) قرار داده شود و پس از تعیین حدود z بر حسب θ و r (نه y و x)، تصویر ناحیه انتگرال‌گیری را روی صفحه xoy را مشخص نموده و حدود انتگرال دوگانه باقی‌مانده را مشابه مختصات قطبی قرار دهیم. (تعیین حدود z، مانند دستگاه مختصات دکارتی است).

برخی مواقع به‌جای المان استوانه‌ای گفته شده در فوق، از المان پوسته استوانه‌ای (با ارتفاع dz) استفاده می‌شود. در این حالت که برای نواحی منظم نسبت به r مناسب است، شعاع داخلی و خارجی این پوسته روی دو رویه $r=Q(z,\theta)$ و $r=P(z,\theta)$ قرار گرفته و محدوده θ و z با توجه به شرایط ناحیه تعیین می‌گردد (طبیعی است وقتی ناحیه انتگرال‌گیری از بالا و پایین به دو صفحه $z=k$ و $z=c$ محدود شده این طریق نوشتن حدود در فرم استوانه‌ای جذاب خواهد بود).

نکته: در مختصات استوانه‌ای گفته شده:

$r=a$ بیانگر یک استوانه مستدیر به مرکز مبدأ و شعاع a است که محور تقارن آن محور z می‌باشد.

$r^2+z^2=a^2$ بیانگر یک کره به مرکز مبدأ و شعاع a است.

$z=kr$ بیانگر یک مخروط مستدیر به راس مبدأ است که محور تقارن آن محور z ها و نصف زاویه رأس آن $\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{k}\right)$ است.

$z=kr^2$ بیانگر یک سهمی‌گون مستدیر با راس مبدأ است که محور تقارن آن محور z ها می‌باشد.

$\theta=\theta_0$ بیانگر نیم صفحه گذرنده از محور z هاست که از یک طرف به محور oz محدود شده و با صفحه xoz زاویه θ_0 را می‌سازد.

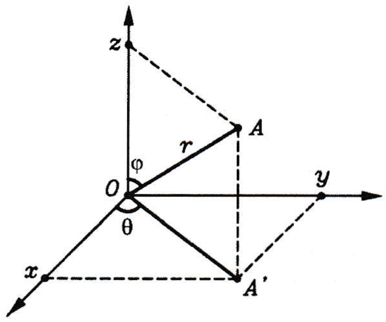
نکته: اگر تصویر ناحیه V روی صفحه xoy یک بیضی؛ مانند، $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=k^2$ باشد، استفاده از تغییر متغیرهای شبه استوانه‌ای زیر می‌تواند برای حل مناسب باشد:

$$\begin{cases} r=\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}} \\ \theta=\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{a}{b}\dfrac{y}{x}\right) \\ z=z \end{cases} \qquad \begin{cases} x=ar\cos\theta \\ y=br\sin\theta \\ z=z \end{cases}$$

در این شرایط $dx\,dy\,dz=ab\,r\,dr\,d\theta\,dz$ بوده و البته نحوه قرار دادن حدود دقیقاً، مانند دستگاه مختصات استوانه‌ای معمولی می‌باشد.

ج) مسایل در دستگاه مختصات کروی

دیدیم در دستگاه مختصات کروی شعاع حامل نقطه و زاویه این شعاع حامل با محور zها توصیف‌کننده دو تا از مختصه‌ها و «زاویه شعاع حامل نقطه تصویر شده روی صفحه xoy با محور xها» به عنوان مختصه سوم در نظر گرفته می‌شوند.



$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta = \mathrm{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right) \\ \varphi = \mathrm{Arccos}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \end{cases}$$

در این شرایط داریم:

$$dx\,dy\,dz = r^2 \sin\varphi\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

مرسوم است، المان انتگرال‌گیری یک المان حجمی شعاعی باشد. با فرض آنکه ابتدا و انتهای این المان روی دو رویه $r = Q(\theta,\varphi)$ و $r = P(\theta,\varphi)$ حرکت می‌کند، حدود متغیر r قرار داده می‌شود.

حدود تغییرات φ و θ با توجه به نحوه چرخش این المان شعاعی به منظور جارو کردن ناحیه انتگرال‌گیری تعیین می‌شود (که معمولاً اعدادی ثابت می‌باشند).

نکته: در مختصات کروی گفته شده:

$r = a$ بیانگر کره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع a است.

$r^2 \sin^2\varphi = a^2$ بیانگر استوانه‌ای مستدیر به مرکز مبدأ و شعاع a است که محور تقارن آن محور z می‌باشد.

$r = \frac{a}{\cos\varphi}$ بیانگر صفحه‌ای به‌موازات صفحه xoy و با فاصله a از آن است.

$\theta = \theta_0$ بیانگر نیم‌صفحه گذرنده از محور z هاست که از یک طرف به محور oz محدود شده و با صفحه xoz زاویه θ_0 می‌سازد.

$\varphi = \varphi_0$ بیانگر یک مخروط مستدیر به رأس مبدأ است که محور تقارن آن محور z ها و زاویه نیم رأس آن φ_0 می‌باشد.

$r = 2a\cos\varphi$ بیانگر کره‌ای به مرکز $(0, 0, a)$ و شعاع a است.

نکته: وجود مرزهای بیضی‌گون و به‌خصوص، جمله $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ در معادله مرزهای ناحیه یک انتگرال سه‌گانه استفاده از تغییر متغیرهای شبه‌کروی زیر را می‌تواند برای حل مناسب کند:

$$\begin{cases} x = a\,r\sin\varphi\cos\theta \\ y = b\,r\sin\varphi\sin\theta \\ z = c\,r\cos\varphi \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}} \\ \theta = \mathrm{Arctg}\left(\dfrac{a}{b}\dfrac{y}{x}\right) \\ \varphi = \mathrm{Arc}\cos\left(\dfrac{z}{c\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \end{cases}$$

در این شرایط $dx\,dy\,dz = a\,b\,c\,r^2 \sin\varphi\, dr\, d\theta\, d\varphi$ بوده و البته نحوه قرار دادن حدود دقیقاً مشابه دستگاه مختصات کروی معمولی است.

بحث کلی تغییر متغیر در انتگرال‌های سه گانه

چنانچه بخواهیم در محاسبه یک انتگرال سه گانه از تغییر متغیرهای

$$\begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} u = u(x,y,z) \\ v = v(x,y,z) \\ w = w(x,y,z) \end{cases}$$

استفاده کنیم، ژاکوبین تغییر دستگاه مختصات از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$J = \frac{1}{\begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}} \quad \text{یا} \quad J = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix}$$

و داریم:

$$I = \iiint_D f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_{D'} h(u,v,w)|J|\, du\, dv\, dw$$

که در آن تبدیل یافته ناحیه D تعریف شده در فضای xyz را در فضای uvw، D' نامیده‌ایم و $h(u,v,w)$ بازنویسی شده تابع $f(x,y,z)$ برحسب متغیرهای u,v,w بوده و البته $|J|$ نیز با توجه به روابط گفته شده، برحسب u,v,w خواهد بود.

برخی کاربردهای انتگرال سه‌گانه

۱) برای محاسبه حجم محصور به ناحیه V داریم:

$$V = \iiint_V dx\,dy\,dz$$

۲) مختصات مرکز ثقل ناحیه محصور شده به حجم V با توزیع چگالی $\rho = \rho(x, y, z)$ از روابط زیر به‌دست می‌آید:

$$x_G = \frac{\iiint_V \rho x\,dV}{\iiint_V \rho\,dV} \qquad y_G = \frac{\iiint_V \rho y\,dV}{\iiint_V \rho\,dV} \qquad z_G = \frac{\iiint_V \rho z\,dV}{\iiint_V \rho\,dV}$$

که در سه مورد فوق، حاصل عبارت‌های مخرج جرم ناحیه V را نشان می‌دهد.

۳) گشتاور ماند این ناحیه نسبت به صفحات مختصات از روابط زیر محاسبه می‌شود:

$$I_{xy} = \iiint_V \rho z^2\,dV \qquad I_{xz} = \iiint_V \rho y^2\,dV \qquad I_{yz} = \iiint_V \rho x^2\,dV$$

و گشتاور ماند ناحیه مزبور نسبت به محورهای مختصات و مبدأ مختصات به‌صورت زیر خواهد بود:

$$I_{xx} = \iiint_V \rho(y^2 + z^2)\,dV$$

$$I_{zz} = \iiint_V \rho(x^2 + y^2)\,dV \qquad I_o = \iiint_V \rho(x^2 + y^2 + z^2)\,dV$$

$$I_{yy} = \iiint_V \rho(x^2 + z^2)\,dV$$

مجموعه تست انتگرال‌های سه‌گانه

۱ـ حجم محدود به استوانه‌های $x^2+y^2=9$ **و** $x^2+z^2=9$ **کدام است؟**

۱) 81 ۲) 100 ۳) 121 ۴) 144

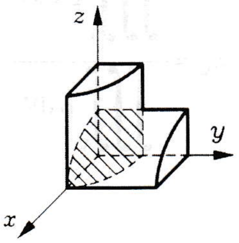
حل:

با توجه به تقارن $\frac{1}{8}$ حجم موردنظر را محاسبه کرده و آن را هشت برابر می‌کنیم:

$$\frac{V}{8}=\int_{x=0}^{3}\int_{y=0}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{z=0}^{\sqrt{9-x^2}}dz\,dy\,dx$$

$$=\int_0^3 dx\int_0^{\sqrt{9-x^2}}dy.z\Big|_0^{\sqrt{9-x^2}}=\int_0^3 dx\sqrt{9-x^2}.y\Big|_0^{\sqrt{9-x^2}}$$

$$=\int_0^3 dx\left(9-x^2\right)=\left(9x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^3=27-9=18$$



لذا، داریم:

$$\Rightarrow\quad V=(18)(8)=144$$

۲ـ حجم محصور شده به استوانه‌های $z=y^2+2$, $z=4-y^2$ **و صفحات** $x=-1$ **و** $x=2$ **کدام است؟**

۱) 8 ۲) 16 ۳) 32 ۴) 64

حل:

$$\begin{cases}z=4-y^2\\ z=y^2+2\end{cases}\rightarrow\ 4-y^2=y^2+2\ \rightarrow\ y^2=1\ \rightarrow\ y=\pm1$$

$$V=\int_{x=-1}^{2}\int_{y=-1}^{+1}\int_{z=y^2+2}^{4-y^2}dz\,dy\,dx=\int_{-1}^{2}dx\int_{-1}^{1}dy\ z\Big|_{y^2+2}^{4-y^2}$$

$$=\int_{-1}^{2}dx\int_{-1}^{1}\left(4-y^2-y^2-2\right)dy=\int_{-1}^{2}\left(2y-\frac{2}{3}y^3\right)\Big|_{-1}^{1}dx$$

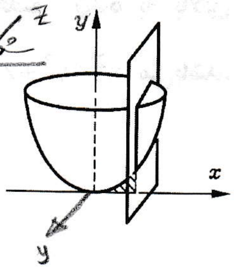
$$=\int_{-1}^{2}\frac{8}{3}dx=\frac{8}{3}(2+1)=8$$

۳ـ حجم محدود شده به سهموی $z=x^2+y^2$ **و صفحات مختصات و صفحه** $x+y=1$ **کدام است؟**

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{7}$ ۳) $\frac{1}{8}$ ۴) $\frac{1}{9}$

حل:

شکل غلط است



$$V=\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1-x}\int_{z=0}^{x^2+y^2} dz\,dy\,dx$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\, z\Big|_0^{x^2+y^2}=\int_0^1\int_0^{1-x}\left(x^2+y^2\right)dy$$

$$=\int_0^1\left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^{1-x}dx=\int_0^1\left(x^2(1-x)+\frac{(1-x)^3}{3}\right)dx$$

$$=\int_0^1\left(x^2-x^3+\frac{(1-x)^3}{3}\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\frac{(1-x)^4}{12}\right)\Bigg|_0^1$$

$$=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-0\right)-\left(0-0-\frac{1}{12}\right)=\frac{1}{6}$$

۴ـ حجم محصور شده به $2\le x+2y+z\le 3$ **و** $1\le 2x+y+z\le 2$ **و** $1\le x+y+2z\le 3$ **کدام است؟**

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) 2 ۳) 8 ۴) 32

حل:

با تغییر متغیرهای
$$\begin{cases}x+2y+z=u\\ 2x+y+z=v\\ x+y+2z=w\end{cases}$$
داریم:

$$J=\frac{1}{\begin{vmatrix}u_x & u_y & u_z\\ v_x & v_y & v_z\\ w_x & w_y & w_z\end{vmatrix}}=\frac{1}{\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}}=\frac{1}{1(2-1)-2(4-1)+1(2-1)}=\frac{1}{1-6+1}=-\frac{1}{4}$$

لذا، می‌توان گفت:

$$V = \iiint_D dx\,dy\,dz = \iiint_{D'} |J|\,du\,dv\,dw = \int_{w=1}^{3}\int_{v=1}^{2}\int_{u=2}^{3} \frac{1}{4}\,du\,dv\,dw$$

$$= \frac{1}{4}(3-2)(2-1)(3-1) = \frac{1}{2}$$

۵ـ حاصل $I = \iiint_V \left(x^2+y^2+z^2\right)dV$ که در آن V حجم محصور شده به بالای صفحه $z=0$، خارج استوانه $x^2+y^2=9$ و داخل کره $x^2+y^2+z^2=25$ می‌باشد، کدام است؟

۱) $\int_0^{2\pi}\int_0^{3}\int_0^{\sqrt{25-r^2}} \left(r^2+z^2\right) r\,dz\,dr\,d\theta$

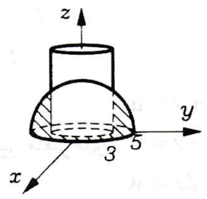
۲) $\int_0^{2\pi}\int_0^{3}\int_0^{r^2} \left(r^2+z^2\right) r\,dz\,dr\,d\theta$

۳) $\int_0^{2\pi}\int_3^{5}\int_0^{\sqrt{25-r^2}} \left(r^2+z^2\right) r\,dz\,dr\,d\theta$

۴) $\int_0^{2\pi}\int_3^{5}\int_0^{r^2} \left(r^2+z^2\right) r\,dz\,dr\,d\theta$

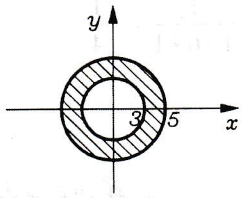
حل :

در مختصات استوانه‌ای داریم:



$$x^2+y^2+z^2=25 \rightarrow r^2+z^2=25 \rightarrow z=\pm\sqrt{25-r^2}$$

$$x^2+y^2=9 \rightarrow r^2=9 \rightarrow r=3$$



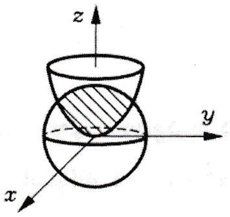
$$I = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=3}^{5}\int_{z=0}^{\sqrt{25-r^2}} \left(r^2+z^2\right) r\,dz\,dr\,d\theta$$

۶ـ حاصل $\iiint_V zdV$ که در آن V حجم محدود شده به بالای سهموی $z=x^2+y^2$ و داخل کره $x^2+y^2+z^2=6$ می‌باشد، کدام است؟

۱) $\frac{11\pi}{3}$ ۲) $\frac{22\pi}{3}$ ۳) $\frac{44\pi}{3}$ ۴) $\frac{88\pi}{3}$

حل :

در مختصات استوانه‌ای داریم:



$$x^2+y^2+z^2=6 \rightarrow r^2+z^2=6$$
$$z=x^2+y^2 \rightarrow z=r^2$$

محل تقاطع دو رویه داده شده را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} r^2+z^2=6 \\ z=r^2 \end{cases} \rightarrow z^2+z=6 \rightarrow z=2 \ , \ z=-3 \ \text{غ ق ق}$$

لذا، دو رویه در $z=2$ و در مقطع دایره‌ای $r^2=2 \rightarrow r=\sqrt{2}$ همدیگر را قطع می‌کنند، پس:

$$I=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{\sqrt{2}}\int_{z=r^2}^{\sqrt{6-r^2}} zr\,dz\,dr\,d\theta=\left(\int_0^{2\pi}d\theta\right)\left(\int_0^{\sqrt{2}} r\,dr\cdot\frac{1}{2}z^2\Big|_{r^2}^{\sqrt{6-r^2}}\right)$$

$$=\frac{2\pi}{2}\int_0^{\sqrt{2}} r\left(6-r^2-r^4\right)dr=\pi\left(3r^2-\frac{r^4}{4}-\frac{r^6}{6}\right)\Big|_0^{\sqrt{2}}=\pi\left(6-1-\frac{8}{6}\right)=\frac{11\pi}{3}$$

۷ـ حجم محدود به صفحه $z=8$ و رویه $x^2+y^2=z^{\frac{2}{3}}$ کدام است؟

۱) $\frac{96\pi}{5}$ ۲) $\frac{48\pi}{5}$ ۳) $\frac{24\pi}{5}$ ۴) $\frac{12\pi}{5}$

حل :

در مختصات استوانه‌ای داریم:

$$x^2+y^2=z^{\frac{2}{3}} \rightarrow r^2=z^{\frac{2}{3}} \rightarrow z=r^3$$

$$\begin{cases} z=r^3 \\ z=8 \end{cases} \rightarrow r^3=8 \rightarrow r=2$$

لذا:

$$V=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{2}\int_{z=r^3}^{8} r\,dz\,dr\,d\theta = 2\pi\int_{r=0}^{2} r\,dr\cdot z\Big|_{r^3}^{8} = 2\pi\int_0^2 \left(8-r^3\right)r\,dr$$

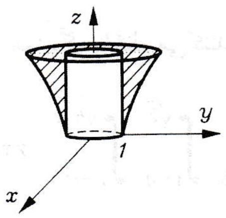
$$=2\pi\int_0^2\left(8r-r^4\right)dr = 2\pi\left(4r^2-\frac{r^5}{5}\right)\Bigg|_0^2 = 2\pi\left(16-\frac{32}{5}\right)=\frac{96\pi}{5}$$

۸ـ حجم محدود به داخل هذلولی‌گون $x^2+y^2-z^2=1$ که به صفحات $z=2$ و $z=0$ و استوانه $x^2+y^2=1$ محدود شده، کدام است؟

۱) $\frac{8\pi}{3}$ ۲) $\frac{\pi\sqrt{2}}{5}$ ۳) 3π ۴) $\frac{\pi\sqrt{3}}{5}$

حل :

در مختصات استوانه‌ای داریم:



$$x^2+y^2=1 \rightarrow r^2=1$$
$$x^2+y^2-z^2=1 \rightarrow r^2-z^2=1$$
$$\begin{cases} r^2-z^2=1 \\ z=2 \end{cases} \rightarrow r=\sqrt{5}$$

با استفاده از مختصات استوانه‌ای و با شروع انتگرال گیری نسبت به z داریم:

$$V=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=1}^{\sqrt{5}}\int_{z=\sqrt{r^2-1}}^{2} r\,dz\,dr\,d\theta = 2\pi\int_1^{\sqrt{5}}\left(2-\sqrt{r^2-1}\right)r\,dr$$

$$=2\pi\left\{r^2-\frac{1}{3}\left(r^2-1\right)^{\frac{3}{2}}\right\}\Bigg|_1^{\sqrt{5}} = \frac{8\pi}{3}$$

راه دوم: با استفاده از مختصات استوانه‌ای و با شروع انتگرال گیری نسبت به r داریم:

$$V=\int_{z=0}^{2}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=1}^{\sqrt{1+z^2}} r\,dr\,d\theta\,dz = 2\pi\int_0^2 \frac{1}{2}r^2\Big|_1^{\sqrt{1+z^2}}\,dz$$

$$=\pi\int_0^2\left(\left(1+z^2\right)-(1)\right)dz = \pi\frac{z^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{8\pi}{3}$$

۹ ـ حجم محدود به رویه‌های $z=e^{-\left(x^2+y^2\right)}$ **و** $z=0$ **کدام است؟**

۱) π ۲) 2π ۳) π^3 ۴) $2\pi^3$

حل :

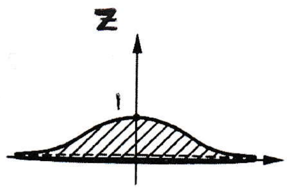
برای شناسایی رویه $z=e^{-\left(x^2+y^2\right)}$ می‌نویسیم:

$$\ln z=-\left(x^2+y^2\right) \rightarrow x^2+y^2=-\ln z$$

این مطلب تأکید می‌کند که باید $\ln z\le 0$ باشد؛ یعنی، $1\ge z>0$ ؛ ضمناً، مقطع رویه با صفحات موازی صفحه xoy ؛ یعنی، $z=k$ دایره است؛ به طوری که:

$$z=1 \rightarrow x^2+y^2=-\ln(1)=0 \rightarrow x=y=0$$
$$z=0^+ \rightarrow x^2+y^2=-\ln\left(0^+\right)=+\infty$$

در مختصات استوانه‌ای داریم:



$$V=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{\infty}\int_{z=0}^{e^{-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} re^{-r^2}\,dr\,d\theta$$
$$=\theta\Big|_0^{2\pi}\frac{-1}{2}e^{-r^2}\Big|_0^{\infty}=2\pi\left(\frac{-1}{2}\left(e^{-\infty}-e^0\right)\right)=\pi$$

۱۰ ـ حجم محدود به استوانه $x^2+y^2=1$ **و صفحات** $x+y+z=7$ **و** $x-y+z=2$ **کدام است؟**

۱) 5π ۲) 6π ۳) 4π ۴) 7π

حل :

در مختصات استوانه‌ای داریم:

$$\begin{cases} x-y+z=2 \rightarrow z=2-r\cos\theta+r\sin\theta \\ x+y+z=7 \rightarrow z=7-r\cos\theta-r\sin\theta \\ x^2+y^2=1 \rightarrow r^2=1 \rightarrow r=1 \end{cases}$$

$$V=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1}\int_{2-r\cos\theta+r\sin\theta}^{7-r\cos\theta-r\sin\theta} r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (7 - r\cos\theta - r\sin\theta - 2 + r\cos\theta - r\sin\theta)\, r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (5 - 2r\sin\theta)\, r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\frac{5}{2}r^2 - \frac{2r^3}{3}\sin\theta\right)\Bigg|_{r=0}^{1} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\frac{5}{2} - \frac{2}{3}\sin\theta\right)d\theta = \left(\frac{5}{2}\theta + \frac{2}{3}\cos\theta\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{5}{2}(2\pi) = 5\pi$$

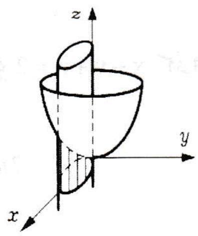
۱۱ـ حجم محدود به بیرون سهمی‌گون $4z = x^2 + y^2$ و داخل استوانه $x^2 + y^2 = 2x$ و بالای صفحه $z = 0$ کدام است؟

۱) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\, d\theta$ ۲) $2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\, d\theta$

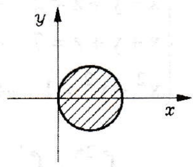
۳) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta\, d\theta$ ۴) $2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta\, d\theta$

حل :

در مختصات استوانه‌ای داریم:



$$\begin{cases} 4z = x^2 + y^2 \to 4z = r^2 \\ x^2 + y^2 = 2x \to r^2 = 2r\cos\theta \to r = 2\cos\theta \end{cases}$$



$$V = \int_{\theta=\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{2\cos\theta}\int_{z=0}^{\frac{r^2}{4}} r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\theta} r\, z\Big|_0^{\frac{r^2}{4}} dr\, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\theta} \frac{r^3}{4}\, dr\, d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^4}{16}\Bigg|_0^{2\cos\theta} d\theta = \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\, d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\, d\theta$$

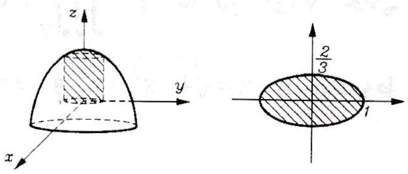
۱۲ـ حجم محدود شده به پایین سهموی $10-z=4x^2+9y^2$ و داخل استوانه $4x^2+9y^2=4$ و صفحه $z=0$ کدام است؟

۱) $\frac{16\pi}{3}$ ۲) $\frac{76\pi}{3}$ ۳) $\frac{76\pi}{12}$ ۴) $\frac{76\pi}{15}$

حل :

با استفاده از تغییر متغیرهای $\begin{cases} x=\frac{1}{2}r\cos\theta \\ y=\frac{1}{3}r\sin\theta \\ z=z \end{cases}$ داریم:

$$\begin{cases} 4x^2+9y^2=r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta=r^2 \\ 4x^2+9y^2=4 \Rightarrow r^2=4 \Rightarrow r=2 \\ dx\,dy\,dz=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)r\,dz\,dr\,d\theta \end{cases}$$



لذا می‌توان نوشت:

$$V=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{2}\int_{z=0}^{10-r^2}\frac{1}{6}r\,dz\,dr\,d\theta=\frac{1}{6}(2\pi)\int_0^2 r\,.\,z\Big|_0^{10-r^2}dr$$

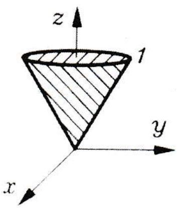
$$=\frac{\pi}{3}\int_0^2\left(10r-r^3\right)dr=\frac{\pi}{3}\left(5r^2-\frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^2=\frac{\pi}{3}(20-4)=\frac{16\pi}{3}$$

۱۳ـ حاصل $I=\iiint_V\left(x^2+y^2\right)dV$ که در آن V حجم محدود به مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ و صفحه $z=1$ می‌باشد، کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{10}$ ۲) $\frac{\pi}{20}$ ۳) $\frac{\pi}{5}$ ۴) $\frac{2\pi}{5}$

حل :

در مختصات کروی داریم:



$$z=\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow \varphi=\frac{\pi}{4}$$

$$z=1 \rightarrow r\cos\varphi=1 \rightarrow r=\frac{1}{\cos\varphi}$$

$$x^2+y^2=r^2\sin^2\varphi$$

لذا، می‌توان نوشت:

$$I=\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{4}}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{\frac{1}{\cos\varphi}}\left(r^2\sin^2\varphi\right)\left(r^2\sin\varphi\,dr\,d\theta\,d\varphi\right)$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^3\varphi\,d\varphi\left(\int_0^{2\pi}d\theta\right)\int_0^{\frac{1}{\cos\varphi}}r^4\,dr=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^3\varphi\,\frac{1}{5}r^5\Big|_0^{\frac{1}{\cos\varphi}}d\varphi$$

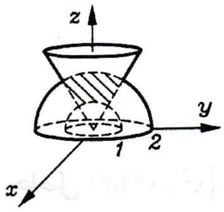
$$=\frac{2\pi}{5}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^3\varphi}{\cos^5\varphi}d\varphi=\frac{2\pi}{5}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^3\varphi\left(\frac{1}{\cos^2\varphi}d\varphi\right)=\frac{2\pi}{5}\,\frac{1}{4}\tan^4\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{10}$$

۱۴- مطلوب است محاسبه انتگرال سه‌گانه $I=\iiint_V z.dV$ که در آن V حجم محصور شده به نیم‌کره‌های $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ و $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ و مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ می‌باشد؟

۱) $\frac{15\pi}{8}$ ۲) $\frac{7\pi\sqrt{2}}{3}$ ۳) 3π ۴) $\frac{15\pi}{4}$

حل:

در مختصات کروی داریم:



$$z=\sqrt{1-x^2-y^2}\Rightarrow r=1$$

$$z=\sqrt{4-x^2-y^2}\Rightarrow r=2$$

$$z=\sqrt{x^2+y^2}\Rightarrow \varphi=\frac{\pi}{4}$$

لذا، داریم:

$$I=\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{4}}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=1}^{2}(r\cos\varphi)\left(r^2\sin\varphi\,dr\,d\theta\,d\varphi\right)$$

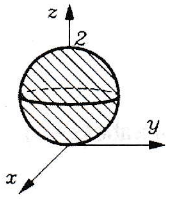
$$=\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}\sin2\varphi\,d\varphi\right).\left(\int_0^{2\pi}d\theta\right).\left(\int_1^2 r^3dr\right)$$

$$=-\frac{1}{4}\cos2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}.\ \theta\Big|_0^{2\pi}.\ \frac{1}{4}r^4\Big|_1^2=\left(\frac{1}{4}\right)(2\pi)\left(\frac{16-1}{4}\right)=\frac{15\pi}{8}$$

۱۵ ـ مطلوب است محاسبه $\iiint_D \frac{dxdydz}{x^2+y^2+z^2}$ **که در آن D کره توپر** $x^2+y^2+z^2\le 2z$ **می‌باشد.**

۱) $\frac{2\pi}{3}$ ۲) 2π ۳) $\frac{4\pi}{3}$ ۴) $\frac{\pi}{3}$

حل :



میدان انتگرال‌گیری داخل کره $x^2+y^2+(z-1)^2=1$ می‌باشد.

حال با استفاده از دستگاه مختصات کروی داریم:

$$x^2+y^2+z^2=2z \quad\rightarrow\quad r^2=2r\cos\varphi \quad\rightarrow\quad r=2\cos\varphi$$

و به‌دست می‌آید:

$$I=\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{2\cos\varphi}\frac{r^2\sin\varphi drd\theta d\varphi}{r^2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\left(\int_0^{2\pi}d\theta\right)\int_0^{2\cos\varphi}dr$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi.2\cos\varphi d\varphi=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\varphi d\varphi=2\pi\left(\frac{-1}{2}\cos 2\varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

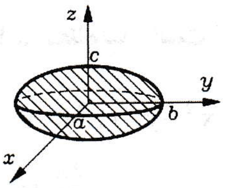
$$=-\pi(\cos\pi-\cos 0)=2\pi$$

۱۶ ـ حاصل انتگرال $I=\iiint_D e^{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}}dxdydz$ **که در آن D ناحیه داخل بیضوی** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ **می‌باشد، کدام است؟**

۱) $4\pi abc$ ۲) $8\pi abc(e-1)$ ۳) $4\pi abc(e-1)$ ۴) $4\pi abc(e-2)$

حل :

با استفاده از تغییر متغیرهای شبه کروی داریم:



$$\begin{cases} x = a\,r\sin\varphi\cos\theta \\ y = b\,r\sin\varphi\sin\theta \\ z = c\,r\cos\varphi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=r^2 \\ dxdydz = abc\,r^2\sin\varphi\,dr\,d\theta\,d\varphi \end{cases}$$

لذا، می‌توان نوشت:

$$I=\int_{\varphi=0}^{\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1} e^r\,abc\,r^2\sin\varphi\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

$$I=abc(-\cos\varphi)\Big|_0^{\pi}\times(\theta)\Big|_0^{2\pi}\times\left\{\left(r^2-2r+2\right)e^r\right\}\Big|_0^1=abc(1+1)(e-2)=4\pi abc(e-2)$$

فصل نهم

انتگرال‌های خط

یادداشت:

۱ـ انتگرال‌های منحنی الخط نوع اول

یک انتگرال منحنی الخط نوع اول به‌صورت $I=\int_C f(x,y,z)\,ds$ نوشته می‌شود که در آن C یک منحنی معلوم و $ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}$ المان طول قوس روی C می‌باشد.

روال کلی محاسبه این نوع انتگرال‌ها آن است که با توجه به معادله منحنی C و ارتباط بین متغیرها، کل عبارت $f(x,y,z)ds$ را برحسب تنها یک متغیر بیان کرده و با توجه به محدوده تغییرات این متغیر به حل یک انتگرال معین معمولی بپردازیم.

مشاهده می‌شود مشکل اصلی، تعیین تکلیف المان طول قوس ds می‌باشد که برای این کار روابط زیر می‌توانند مورد استفاده قرار گیرند.

الف ـ اگر منحنی C با معادله $y=h(x)$ بیان شده باشد؛ داریم:

$$ds=\sqrt{1+h'^2(x)}\,dx$$

ب ـ اگر منحنی C با معادله $x=h(y)$ بیان شده باشد؛ داریم:

$$ds=\sqrt{1+h'^2(y)}\,dy$$

ج ـ اگر منحنی C با معادله قطبی $r=h(\theta)$ بیان شده باشد؛ داریم:

$$ds=\sqrt{h^2(\theta)+h'^2(\theta)}\,d\theta$$

د ـ اگر منحنی C با معادلات پارامتری $x=x(t)\,,y=y(t)$ بیان شده باشد؛ داریم:

$$ds=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt$$

هـ ـ اگر منحنی C در فضا با معادلات پارامتری $x=x(t),y(t),z=z(t)$ بیان شده باشد؛ داریم:

$$ds=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt$$

خواص انتگرال‌های منحنی الخط نوع اول

اگر AB یک منحنی دلخواه باشد که از دو منحنی C_2 , C_1 تشکیل شده است و α,β اعداد ثابتی فرض شوند، داریم:

$$\int_{AB} P(x,y,z)\,ds=-\int_{BA} P(x,y,z)\,ds$$

$$\int_{AB}\Big(\alpha P(x,y,z)+\beta Q(x,y,z)\Big)ds=\alpha\int_{AB}P(x,y,z)ds+\beta\int_{AB}Q(x,y,z)ds$$

$$\int_{C=C_1+C_2}P(x,y,z)ds=\int_{C_1}P(x,y,z)ds+\int_{C_2}P(x,y,z)ds$$

کاربردهای انتگرال‌های منحنی‌الخط نوع اول

۱ـ اگر منحنی C در فاصله‌ای مشتق‌پذیر باشد، طول آن از طریق $L=\int_C ds$ قابل محاسبه است.

۲ـ مختصات مرکز طول منحنی C از روابط زیر قابل محاسبه است.

$$\bar{x}=\frac{\int_C x\,ds}{L}\quad,\quad \bar{y}=\frac{\int_C y\,ds}{L}\quad,\quad \bar{z}=\frac{\int_C z\,ds}{L}$$

۳ـ اگر $f(x,y,z)$ چگالی هر نقطه از منحنی C باشد، جرم این منحنی از رابطه $m=\int_C f(x,y,z)ds$ به‌دست می‌آید.

۴ـ چنانچه C یک منحنی معلوم در صفحه xy باشد، مساحت سطح حاصل از دوران این منحنی حول محورهای x و y را می‌توان از روابط زیر به‌دست آورد:

سطح حاصل از دوران منحنی C حول محور x: $S_x=2\pi\int_C y\,ds$

سطح حاصل از دوران منحنی C حول محور y: $S_y=2\pi\int_C x\,ds$

۵ـ مساحت سطح حاصل از دوارن منحنی قطبی $r=f(\theta)$ در فاصله θ_1 تا θ_2 حول محورهای x و y از روابط زیر به‌دست می‌آیند:

$$S_x=2\pi\int_{\theta_1}^{\theta_2} r\sin\theta\sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta$$

$$S_y=2\pi\int_{\theta_1}^{\theta_2} r\cos\theta\sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta$$

۶ـ منحنی پارامتری $C:\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}$ را برای $a\le t\le b$ در نظر بگیرید.

مساحت سطح حاصل از دوران این منحنی حول محور xها و حول محور yها به ترتیب با روابط زیر به‌دست می‌آیند:

$$S_x = 2\pi \int_a^b g(t)\sqrt{f'^2(t)+g'^2(t)}\,dt$$

$$S_y = 2\pi \int_a^b f(t)\sqrt{f'^2(t)+g'^2(t)}\,dt$$

۷ـ اگر C یک منحنی معلوم در صفحه xy و $f(x,y)$ تابعی نامنفی باشد، مساحت سطحی که قاعده آن C و ارتفاع هر نقطه از آن $f(x,y)$ است، از رابطه $\int_s f(x,y)\,ds$ به‌دست می‌آید.

۲ـ انتگرال‌های منحنی الخط نوع دوم (کار یک میدان برداری)

چنانچه، $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ بردار موضعی هر نقطه از منحنی معلوم C بوده و $d\vec{r}=dx\vec{i}+dy\vec{j}+dz\vec{k}$ المان بردار جابجایی روی C باشد، کار مربوط به میدان برداری $\vec{F}(x,y,z)=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}$ روی منحنی C از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$W=\int_C \vec{F}.d\vec{r}=\int_C P\,dx+Q\,dy+R\,dz$$

به انتگرال فوق یک انتگرال منحنی الخط نوع دوم می‌گوییم.

روال کلی محاسبه این نوع انتگرال‌ها آن است که با توجه به معادله منحنی C و ارتباط بین متغیرها، کل عبارت $Pdx+Qdy+Rdz$ را برحسب تنها یک متغیر بیان کرده و با توجه به محدوده تغییرات این متغیر به حل یک انتگرال معین معمولی بپردازیم.

خواص انتگرال‌های منحنی الخط نوع دوم

اگر AB یک منحنی دلخواه باشد، که از دو منحنی C_2, C_1 تشکیل شده است داریم:

$$\int_{AB} P(x,y,z)\,dx+Q(x,y,z)\,dy+R(x,y,z)\,dz$$

$$= -\int_{BA} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$$

$$\int_{AB} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$$
$$= \int_{AB} P(x,y,z)\,dx + \int_{AB} Q(x,y,z)\,dy + \int_{AB} R(x,y,z)\,dz$$

$$\int_{AB} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$$
$$= \int_{C_1} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$$
$$+ \int_{C_2} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$$

انتگرال‌های منحنی الخط نوع دوم مستقل از مسیر (کار میدان های برداری پایستار)

در حالت کلی کار یک نیرو علاوه بر نقاط ابتدایی و انتهایی، به مسیر نیز وابسته است. شرط آن که میدان نیروی $\vec{F}(x,y,z)=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}$ پایستار باشد و به تعبیری کار آن؛ یعنی، انتگرال $\int Pdx+Qdy+Rdz$ مستقل از مسیر بوده، تنها به نقاط ابتدایی و انتهایی مسیر بستگی داشته باشد، آن است که (دو بیان زیر معادل همدیگرند):

الف) $\vec{F}$ غیر چرخشی باشد؛ یعنی، $\vec{\nabla}\times\vec{F}=\vec{0}$ باشد و به تعبیری سه معادله زیر تواماً ارضا شوند:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}$$

ب) $\vec{F}$ را بتوان به‌صورت گرادیان یک تابع اسکالر؛ مانند، $u(x,y,z)$ نوشت و به تعبیری بتوان تابعی مانند u یافت که $du=Pdx+Qdy+Rdz$ باشد، که در این شرایط $u(x,y,z)$ را تابع پتانسیل میدان برداری پایستار $\vec{F}$ گفته و آن را می‌توان از حل دستگاه زیر به‌دست آورد:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}=Q \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial z}=R$$

توجه: اگر $Pdx+Qdy+Rdz$ یک دیفرانسیل کامل باشد، برای یافتن تابع پتانسیل u کافی است از جملات شامل z و y در P و از جملات شامل z در Q صرف نظر کرده و سپس از عبارت حاصل در P، Q و R به ترتیب نسبت به x، y و z انتگرال بگیریم.

چند نکته:

الف) اگر $I=\int_C P\,dx+Q\,dy+R\,dz$ مستقل از مسیر باشد، برای محاسبه آن روی هر مرز غیربسته دلخواه می‌توان به دو صورت عمل کرد:

۱ـ با یافتن تابع پتانسیل مساله، حاصل I را از طریق « $u\Big|_{\text{نقطه انتهایی}}-u\Big|_{\text{نقطه ابتدایی}}$ » به‌دست آورد.

۲ـ روی یک مرز ساده که نقاط ابتدایی و انتهایی مسیر C را به‌هم وصل می‌کند و البته، محاسبه $\int P\,dx+Q\,dy+R\,dz$ روی آن به‌سادگی امکان‌پذیر است، به محاسبه I پرداخت.

ب) اگر $P\,dx+Q\,dy+R\,dz$ یک دیفرانسیل کامل باشد و توابع $P\,,Q\,,R$ و تمامی مشتقات جزیی مرتبه اول آنها همه جا پیوسته باشند، آنگاه حاصل انتگرال $\int P\,dx+Q\,dy+R\,dz$ روی هر مرز بسته دلخواهی برابر صفر است.

قضیه گرین در صفحه

فرض کنید C یک منحنی بسته است که در جهت مثلثاتی طی شده و D ناحیه محصور شده به این منحنی بسته می‌باشد. حال، اگر توابع $P(x,y)$، $Q(x,y)$، $\frac{\partial P}{\partial y}$ و $\frac{\partial Q}{\partial x}$ در ناحیه D پیوسته باشند؛ داریم:

$$\oint_{C^+} P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy$$

ملاحظه می‌شود از طریق قضیه گرین می‌توان یک انتگرال منحنی الخط نوع دوم را به یک انتگرال دوگانه تبدیل نمود.

نکته: اگر وقتی روی منحنی C حرکت می‌کنیم، ناحیه محصور شده D در سمت چپمان واقع باشد، جهت مثبت روی C انتخاب شده است.

توجه مهم: در استفاده از قضیه گرین موجود بودن شرایط قضیه (یعنی، پیوستگی توابع P، Q، $\frac{\partial P}{\partial y}$ و $\frac{\partial Q}{\partial x}$ در ناحیه D) ضروری است؛ در غیر این صورت، رسیدن به جواب‌های غلط دور از انتظار نمی‌باشد.

از قضیه گرین در صفحه نتایج زیر حاصل می‌شود:

۱) اگر C یک منحنی بسته در مختصات دکارتی باشد، مساحت ناحیه محصور شده با این منحنی عبارت است از:

$$S = \iint dx\,dy = \oint_C x\,dy = -\oint_C y\,dx = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx$$

۲) هرگاه C منحنی بسته‌ای به‌صورت $r = f(\theta)$ باشد، مساحت ناحیه محصور شده با این منحنی عبارت است از:

$$S = \frac{1}{2}\oint_C r^2 d\theta$$

۳) هرگاه ناحیه D در صفحه uv به منحنی بسته C محدود باشد و داشته باشیم:

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$$

آن گاه:

$$S = \iint_D \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} du\,dv$$

که در آن S تصویر ناحیه D در صفحه xy با تغییر متغیرهای بیان شده است.

نکته: گاهی مواقع، در محاسبه انتگرال‌های منحنی‌الخط نوع دوم روی مسیر غیربسته C، می‌توان با اضافه کردن یک مسیر ساده به منحنی C، یک خم بسته ایجاد کرد و با استفاده از قضیه گرین به محاسبه انتگرال منحنی‌الخط مورد نظر روی خم بسته پرداخت و سپس مقدار انتگرال منحنی‌الخط مزبور را روی مسیر اضافه شده، محاسبه نمود و از تفریق این دو مقدار، حاصل انتگرال منحنی‌الخط مورد نظر را روی مسیر غیربسته C که مورد نظرمان بوده، به‌دست آورد.

مجموعه تست انتگرال‌های خط

۱ـ طول منحنی $y=\cosh^{-1}x$ **در فاصله** $1\le x\le \frac{17}{8}$ **کدام است؟**

۱) 1.225 ۲) 1.875 ۳) 2.25 ۴) 2.5

حل :

$$y=\cosh^{-1}x \to y'=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad \to \quad ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx=\sqrt{1+\frac{1}{x^2-1}}\,dx$$

$$=\sqrt{\frac{x^2-1+1}{x^2-1}}\,dx=\frac{|x|}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$$

لذا داریم:

$$L=\int_1^{\frac{17}{8}}\frac{|x|}{\sqrt{x^2-1}}dx=\int_1^{\frac{17}{8}}\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}}=\sqrt{x^2-1}\,\Bigg|_1^{\frac{17}{8}}=\sqrt{\left(\frac{17}{8}\right)^2-1}-\sqrt{(1)^2-1}=1.875$$

تذکر: توجه کنید که در بازه $\left(1,\frac{17}{8}\right)$ داریم: $|x|=x$.

۲ـ طول منحنی $y=\int_0^x\sqrt{\frac{1+\sin^2 t}{\cos^2 t}}\,dt$ **در فاصله** $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ **کدام است؟**

۱) $2\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$ ۲) $2\ln\left(1+\sqrt{3}\right)$

۳) $\sqrt{2}\ln\left(1+\sqrt{3}\right)$ ۴) $\sqrt{2}\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$

حل :

$$y=\int_0^x\sqrt{\frac{1+\sin^2 t}{\cos^2 t}}\,dt \quad \to \quad y'=\sqrt{\frac{1+\sin^2 x}{\cos^2 x}}$$

$$\to \quad ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx=\sqrt{1+\frac{1+\sin^2 x}{\cos^2 x}}\,dx=\sqrt{\frac{\cos^2 x+1+\sin^2 x}{\cos^2 x}}=\frac{\sqrt{2}}{|\cos x|}\,dx$$

با توجه به مثبت بودن $\cos x$ در بازه $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ داریم:

$$L=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{2}}{\cos x}dx=\sqrt{2}\,\ln\left|\sec x+\tan x\right|\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\sqrt{2}\left\{\ln\left(2+\sqrt{3}\right)-\ln(1+0)\right\}=\sqrt{2}\,\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$$

۳ـ حاصل $\int_C x^2y^2ds$ که در آن C دایره $x^2+y^2=1$ می‌باشد، کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{\pi}{8}$ ۴) 0

حل :

روی دایره $x^2+y^2=1$ با استفاده از فرم پارامتری $\begin{cases}x=\cos t\\ y=\sin t\end{cases}$ داریم:

$$ds=\sqrt{x'^2+y'^2}\;dt=\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2}\;dt=dt$$

لذا، می‌توان نوشت:

$$I=\int_{t=0}^{2\pi}\left(\cos^2 t\right)\left(\sin^2 t\right)dt=\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}\sin^2 2t\,dt=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 4t}{2}dt$$

$$=\frac{1}{8}\left(t-\frac{1}{4}\sin 4t\right)\Big|_0^{2\pi}=\frac{2\pi}{8}=\frac{\pi}{4}$$

۴ـ طول منحنی پارامتری $\left(t,\frac{t^2}{2},\frac{t^3}{6}\right)$ از $t=0$ تا $t=6$ کدام است؟

۱) 36 ۲) 42 ۳) 48 ۴) 54

حل :

$$\begin{cases}x=t\\ y=\dfrac{t^2}{2}\\ z=\dfrac{t^3}{6}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x'=1\\ y'=t\\ z'=\dfrac{t^2}{2}\end{cases}\rightarrow ds=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\;dt$$

$$ds=\sqrt{1+t^2+\frac{t^4}{4}}\;dt=\sqrt{\left(1+\frac{t^2}{2}\right)^2}\;dt=\left(1+\frac{t^2}{2}\right)dt$$

لذا، داریم:

$$L=\int_{t_1}^{t_2} ds=\int_0^6\left(1+\frac{t^2}{2}\right)dt=\left(t+\frac{t^3}{6}\right)\Bigg|_0^6=42$$

۵ـ حاصل $I=\int_C (x+z)ds$ که در آن C پاره‌خطی است که نقطه $A(1,2,0)$ را به نقطه $B(-1,0,1)$ وصل می‌کند، کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) 1 ۴) $\frac{1}{2}$

حل :

معادله خطی که نقطه $A(1,2,0)$ را به نقطه $B(-1,0,1)$ وصل می‌کند، چنین است:

$$\frac{x-1}{-1-1}=\frac{y-2}{0-2}=\frac{z-0}{1-0}=t \rightarrow \begin{cases} x=-2t+1 \\ y=-2t+2 \\ z=t \end{cases}$$

لذا داریم:

$$ds=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+(1)^2}\,dt=3dt$$

و به‌دست می‌آید:

$$I=\int_C (x+z)ds=\int_{t=0}^1 (-2t+1+t)3dt=\int_0^1 3(1-t)dt=3\left(t-\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_0^1$$

$$=3\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}$$

۶ـ حاصل $\int_C xy\,ds$ که در آن C منحنی به معادله زیر در فاصله $0\le t\le\frac{\pi}{4}$ می‌باشد، کدام است؟

$$\vec{R}(t)=(\cos t-\sin t)\vec{i}+(\cos t+\sin t)\vec{j}+t\vec{k}$$

۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) 0

حل :

$$C:\begin{cases} x(t)=\cos t-\sin t \\ y(t)=\cos t+\sin t \\ z(t)=t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x'=-\sin t-\cos t \\ y'=-\sin t+\cos t \\ z'=1 \end{cases}$$

$$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\ dt = \sqrt{3}\ dt$$

لذا، داریم:

$$I = \int_{t=0}^{\frac{\pi}{4}} (\cos t - \sin t)(\cos t + \sin t)\ \sqrt{3}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{3}\cos 2t = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

۷ـ سطح قسمتی از استوانه $x^2+y^2=1$ که بین صفحات $x+y+z=7$ و $x-y+z=2$ قرار دارد، کدام است؟

۱) 10π ۲) 12π ۳) 8π ۴) 13π

حل :

$$S = \int_{C:x^2+y^2=1} (z_2 - z_1)\,ds = \int_{x^2+y^2=1} \{(7-x-y)-(2-x+y)\}\,ds$$

$$= \int_{x^2+y^2=1} (5-2y)\,ds$$

در مختصات قطبی داریم:

$$x^2+y^2=1 \ \to\ r^2=1 \ \to\ r=1 \ \to\ ds=\sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta = \sqrt{1+0}\,d\theta = d\theta$$

با جایگذاری $x = r\cos\theta = \cos\theta$ و $y = r\sin\theta = \sin\theta$ داریم:

$$S = \int_{\theta=0}^{2\pi} (5-2\sin\theta)\,d\theta = (5\theta + 2\cos\theta)\Big|_0^{2\pi} = 10\pi$$

۸ـ قسمت بالایی دلنمای $r=1-\cos\theta$ را حول محور xها دوران داده‌ایم، سطح حاصل از دوران کدام است؟

۱) $\frac{16\pi}{5}$ ۲) $\frac{8\pi}{5}$ ۳) $\frac{32\pi}{5}$ ۴) $\frac{64\pi}{5}$

حل :

$$ds = \sqrt{r^2+r'^2}\ d\theta = \sqrt{(1-\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2}\ d\theta = \sqrt{1+\cos^2\theta - 2\cos\theta + \sin^2\theta}\ d\theta$$

$$= \sqrt{2(1-\cos\theta)}\ d\theta = \sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}}\ d\theta = \left|2\sin\frac{\theta}{2}\right| d\theta$$

پس سطح موردنظر چنین به‌دست می‌آید (توجه کنید که: $0 \le \theta \le \pi$؛ پس، $0 \le \frac{\theta}{2} \le \frac{\pi}{2}$ و لذا،

$\sin\frac{\theta}{2} \ge 0$ ؛ یعنی: $\left|\sin\frac{\theta}{2}\right| = \sin\frac{\theta}{2}$:(

$$S_x = 2\pi \int_C y\,ds = 2\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} r\sin\theta\sqrt{r^2 + r'^2}\,d\theta$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi} (1-\cos\theta)\sin\theta \,.\, 2\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi} 2\sin^2\frac{\theta}{2} .\, 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} .\, 2\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

$$= 16\pi \int_0^{\pi} \sin^4\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta = 16\pi \,.\, \frac{2}{5}\sin^5\frac{\theta}{2}\Big|_0^{\pi} = \frac{32\pi}{5}$$

۹ـ منحنی $C:\begin{cases} x = \dfrac{t^2}{2} \\ y = \dfrac{1}{3}(2t+1)^{\frac{3}{2}} \end{cases}$ **در فاصله** $0 \le t \le 1$ **مفروض است. مساحت سطح حاصل از دوران این منحنی حول محور yها کدام است؟**

۱) $\frac{7\pi}{5}$ ۲) $\frac{7\pi}{12}$ ۳) $\frac{7\pi}{3}$ ۴) $\frac{7\pi}{4}$

حل:

$$\begin{cases} x = \dfrac{t^2}{2} \to x' = t \\ y = \dfrac{1}{3}(2t+1)^{\frac{3}{2}} \to y' = \dfrac{1}{3}\,\dfrac{3}{2}(2t+1)^{\frac{1}{2}}(2) = (2t+1)^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow ds = \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt = \sqrt{t^2 + (2t+1)}\,dt = \sqrt{(t+1)^2}\,dt = |t+1|\,dt = t+1\,;\ (0 \le t \le 1)$$

لذا، داریم:

$$S_y = 2\pi \int_C x\,ds = 2\pi \int_0^1 \frac{t^2}{2}(t+1)\,dt$$

$$= \pi \int_0^1 \left(t^3 + t^2\right)dt = \pi\left(\frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \pi\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right) = \frac{7\pi}{12}$$

۱۰ـ **حاصل** $I=\int_C (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$ **روی منحنی** $\begin{cases}x=\cos t\\ y=\sin t\\ z=t\end{cases}$ **در فاصله** $0\le t\le 2\pi$ **کدام است؟**

۱) -2π ۲) -4π ۳) 0 ۴) 2π

حل:

$$I=\int_0^{2\pi}(\sin t-t)(-\sin t\,dt)+(t-\cos t)(\cos t\,dt)+(\cos t-\sin t)dt$$
$$=\int_0^{2\pi}((t-1)\sin t+(t+1)\cos t-1)\,dt$$

به کمک انتگرال‌گیری جزءبه‌جزء داریم:

$$I=\{(1-t)\cos t+\sin t+(t+1)\sin t+\cos t-t\}\Big|_0^{2\pi}=(1-2\pi+1-2\pi)-(1+1)=-4\pi$$

۱۱ـ **حاصل کار نیروی** $\vec F=x^3 i+3zy^2 j-x^2 y k$ **روی منحنی** C **که قسمتی از خط** $\frac{x}{3}=\frac{y}{2}=z$ **از نقطه** $(3,2,1)$ **تا نقطه** $(0,0,0)$ **می‌باشد، کدام است؟**

۱) $-\frac{87}{4}$ ۲) صفر ۳) $\frac{87}{4}$ ۴) $-\frac{27}{4}$

حل:

$$C:\frac{x}{3}=\frac{y}{2}=z=t \;\rightarrow\; \begin{cases}x=3t\\ y=2t\\ z=t\end{cases} \;\rightarrow\; \begin{cases}dx=3dt\\ dy=2dt\\ z=dt\end{cases}$$

طبق تعریف کار داریم:

$$W=\int_C \vec F.d\vec r=\int_C x^3dx+3zy^2dy-x^2y\,dz$$
$$=\int_{t=1}^{0}(3t)^3(3dt)+3(t)(2t)^2(2dt)-(3t)^2(2t)(dt)$$
$$=\int_1^0\left(81t^3+24t^3-18t^3\right)dt=\int_1^0 87t^3\,dt=\frac{87}{4}t^4\Big|_1^0=-\frac{87}{4}$$

۱۲ ـ مطلوب است محاسبه $\int_C \frac{y^2dx - x^2dy}{x^2+y^2}$ **که در آن C نیم‌دایره** $y=\sqrt{a^2-x^2}$ **می‌باشد که در جهت مثلثاتی طی شده است.**

۱) $-\frac{4a}{3}$ ۲) $-\frac{2a}{3}$ ۳) صفر ۴) πa

حل :

روی نیم‌دایره $y=\sqrt{a^2-x^2}$ داریم:

$$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a\sin\theta \end{cases} , \quad 0 \le \theta \le \pi$$

لذا، می‌توان نوشت:

$$I = \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{(a\sin\theta)^2(-a\sin\theta\, d\theta) - (a\cos\theta)^2(a\cos\theta\, d\theta)}{a^2}$$

$$= -a\int_0^{\pi}\left(\sin^3\theta + \cos^3\theta\right)d\theta = -a\int_0^{\pi}\left\{\sin\theta\left(1-\cos^2\theta\right)+\cos\theta\left(1-\sin^2\theta\right)\right\}d\theta$$

$$= -a\left\{-\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3} + \sin\theta - \frac{\sin^3\theta}{3}\right\}\Bigg|_0^{\pi} = -\frac{4a}{3}$$

۱۳ ـ حاصل $\int\left(\frac{1}{y}-\frac{z}{x^2}\right)dx + \left(\frac{1}{z}-\frac{x}{y^2}\right)dy + \left(\frac{1}{x}-\frac{y}{z^2}\right)dz$ **روی مرزی که** $(1,1,1)$ **را به** $(-1,-1,-1)$ **وصل می‌کند، کدام است؟ (این مرز هیچ‌کدام از محورها را قطع نمی‌کند).**

۱) 0 ۲) 6 ۳) 3 ۴) به مسیر بستگی دارد.

حل :

انتگرال موردنظر مستقل از مسیر است؛ زیرا:

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{1}{y^2} \\ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} = -\frac{1}{x^2} \\ \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} = -\frac{1}{z^2} \end{cases}$$

لذا، با یافتن تابع پتانسیل داریم:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{1}{y} - \dfrac{z}{x^2} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{1}{z} - \dfrac{x}{y^2} \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{y}{z^2} \end{cases} \rightarrow u(x,y,z) = \frac{x}{y} + \frac{z}{x} + \frac{y}{z}$$

برای یافتن تابع پتانسیل اگر $Pdx+Qdy+Rdz$ دیفرانسیل کامل باشد کافیست از جملات شامل z و y در P و از جملات شامل z در Q صرف نظر کرده و سپس از عبارت حاصل در P، Q، R به ترتیب نسبت به x و y و z انتگرال بگیریم

لذا داریم:

$$I = u(-1,-1,-1) - u(1,1,1) = (1+1+1) - (1+1+1) = 0$$

۱۴ـ اگر $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ باشد، حاصل $\oint_C \vec{r} \,.\, d\vec{r}$ کدام است؟

۱) طول منحنی C

۲) مساحت سطح محدود به منحنی C

۳) 0

۴) سه برابر طول منحنی C

حل :

$$I = \oint_C \vec{r} . d\vec{r} = \oint_C \left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right) . d\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right)$$

$$= \oint_C x\,dx + y\,dy + z\,dz = \frac{1}{2}\oint_C d\left(x^2 + y^2 + z^2\right) = 0$$

دقت کنید چون تابع زیر علامت انتگرال یک دیفرانسیل کامل شده حاصل انتگرال روی مرز بسته C برابر صفر خواهد بود.

۱۵ـ کار نیروی $\vec{F} = xyi + zj + y^2k$ روی مسیر بسته‌ای با شروع از $(1,2,3)$ و پایان در همان نقطه کدام است؟

۱) 0 ۲) 1 ۳) 2 ۴) به مسیر بستگی دارد.

حل :

$P : xy \quad , \quad Q : z \quad , \quad R : y^2$

شرط آنکه کار نیرو مستقل از مسیر باشد آن است که:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} \\ \dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial x} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial y} \end{cases}$$

ولی، ملاحظه می‌شود:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x \neq \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

لذا، نیروی مذکور پایستار نبوده و کار آن به مسیر اعمال نیرو بستگی دارد.

۱۶ـ به ازاء چه $L(x)$ ای حاصل $\int L(x)\left(4y^3dx + 3xy^2dy\right)$ روی هر مرز بسته‌ای صفر خواهد شد؟

۱) $\frac{1}{x^3}$ ۲) x^3 ۳) $e^{\frac{x^3}{6}}$ ۴) $e^{-\frac{x^3}{6}}$

حل :

برای صفر شدن حاصل انتگرال روی هر مرز بسته، باید تابع زیر علامت انتگرال دیفرانسیل کامل باشد و این می‌طلبد:

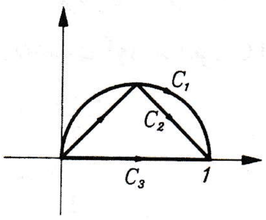
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(4y^3L(x)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(3xy^2L(x)\right) \rightarrow 12y^2L(x) = 3y^2\left(L(x) + xL'(x)\right)$$

$$\rightarrow 4L = L + xL' \rightarrow 3L = xL' \rightarrow \frac{3}{x} = \frac{L'}{L}$$

$$\rightarrow 3\ln|x| = \ln|L(x)| + \ln|c'| \rightarrow \left|x^3\right| = |c'L(x)|$$

$$\rightarrow L(x) = \pm\frac{x^3}{c'} \rightarrow L(x) = cx^3$$

۱۷ـ حاصل $\int\left(y^2 + x^3\right)dx + \left(y^3 + 2xy\right)dy$ روی کدام مسیر بزرگ‌تر است؟



۱) در مسیر C_1

۲) در مسیر C_2

۳) در مسیر C_3

۴) در هر سه مسیر جواب یکسان خواهد بود.

حل :

$$P: y^2 + x^3 \rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 2y \qquad Q: y^3 + 2xy \rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y$$

لذا، انتگرال موردنظر، مستقل از مسیر بوده و تنها به نقاط ابتدایی و انتهایی مسیر بستگی دارد و از آنجا که نقطه ابتدایی و انتهایی هرسه مسیر C_1، C_2 و C_3 یکسان است، حاصل انتگرال روی هر سه مسیر جواب یکسان دارد.

۱۸ ـ مطلوب است محاسبه $\int_C \left(2x\cos y - y^2\sin x\right)dx + \left(2y\cos x - x^2\sin y\right)dy$ **که در آن C منحنی** $y=\pi x^3$ **از** $(0,0)$ **تا** $(1,\pi)$ **می‌باشد.**

۱) $-1+\pi^2\cos 1$ ۲) $-1+\pi^2\sin 1$

۳) $1+\pi^2\cos 1$ ۴) صفر

حل :

ملاحظه می‌شود:

$$P: 2x\cos y - y^2\sin x \quad \rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -2x\sin y - 2y\sin x$$

$$Q: 2y\cos x - x^2\sin y \quad \rightarrow \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -2y\sin x - 2x\sin y$$

لذا، انتگرال موردنظر مستقل از مسیر بوده و برای یافتن تابع پتانسیل داریم:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x\cos y - y^2\sin x \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 2y\cos x - x^2\sin y \end{cases} \rightarrow \quad u = x^2\cos y + y^2\cos x$$

بنابراین، خواهیم داشت:

$$I = u(1,\pi) - u(0,0) = \left\{(1)^2\cos\pi + (\pi)^2\cos 1\right\} - \left\{0^2\cos 0 + 0^2\cos 0\right\} = -1+\pi^2\cos 1$$

۱۹ ـ حاصل $\int_C \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ **را که در آن C مسیر دلخواهی است که نقطه‌ای از کره** $x^2+y^2+z^2=a^2$ **را به نقطه‌ای از کره** $x^2+y^2+z^2=b^2$ **وصل می‌کند؛ به‌دست آورید (مرز C از مبدأ مختصات نمی‌گذرد و** $a\,,\,b>0$).

۱) $\frac{b+a}{2}$

۲) $\frac{b-a}{2}$

۳) $b-a$

۴) موقعیت دقیق نقاط موردنظر بر روی دو کره داده شده، باید مشخص باشند.

حل :

اگر کمی دقت کنیم ملاحظه می‌شود انتگرال موردنظر مستقل از مسیر است؛ زیرا، تابع زیر علامت انتگرال یک دیفرانسیل کامل است، چون:

$$d\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)=\frac{2x\,dx+2y\,dy+2z\,dz}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

پس انتگرال موردنظر فقط به نقاط ابتدایی و انتهایی مسیر بستگی دارد و از آنجاکه تابع پتانسیل $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ می‌باشد؛ داریم:

$$I=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\Big|_{(\text{نقطه انتهایی})}-\sqrt{x^2+y^2+z^2}\Big|_{(\text{نقطه ابتدایی})}=\sqrt{b^2}-\sqrt{a^2}=b-a$$

۲۰ـ کار نیروی $\vec{F}=\left(3x^2y+z^3\ ,\ x^3+3zy^2\ ,\ y^3+3xz^2\right)$ در روی منحنی حاصل از تقاطع کره $x^2+y^2+z^2=16$ و صفحه $2x+y+z=1$ کدام است؟

۱) 0 ۲) 4π ۳) 2π ۴) 3π

حل:

$$\vec{\nabla}\times\vec{F}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 3x^2y+z^3 & x^3+3zy^2 & y^3+3xz^2\end{vmatrix}$$

$$=i\left(3y^2-3y^2\right)-j\left(3z^2-3z^2\right)+k\left(3x^2-3x^2\right)=\vec{0}$$

پس $\vec{F}$ یک میدان پایستار است و چون مؤلفه‌های $\vec{F}$ و مشتقات نسبی مرتبه اول آن همه جا پیوسته‌اند، کار این نیرو روی هر مسیر بسته‌ای؛ مانند، منحنی $C:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=16\\ 2x+y+z=1\end{cases}$ برابر صفر است.

۲۱ـ حاصل $\oint_C\left(e^{x^3}+3y\right)dx+\left(2x+\operatorname{Arctan}y\right)dy$ که در آن C محیط منحنی $|x|+|y|=1$ می‌باشد، کدام است؟

۱) -2 ۲) -1 ۳) 2 ۴) 1

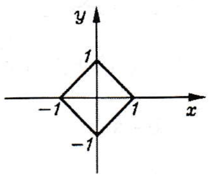
حل:

$$P(x,y)=e^{x^3}+3y\ \rightarrow\ \frac{\partial P}{\partial y}=3\quad,\quad Q(x,y)=2x+\operatorname{Arctan}y\ \rightarrow\ \frac{\partial Q}{\partial x}=2$$

و چون شرایط استفاده از قضیه گرین در این مساله موجود است، می‌توان نوشت:

$$I=\iint_{R:|x|+|y|\le 1}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=\iint_R (2-3)dx\,dy=-1\ (\text{R مساحت ناحیه})$$

اما ناحیه R مطابق شکل مقابل است که مربعی با طول ضلع $\sqrt{2}$ می‌باشد و در نتیجه:



$$I=-1\left(\sqrt{2}\right)^2=-2$$

۲۲ـ مطلوب است محاسبه $I=\oint_C \frac{x^2y}{x^2+1}dx-\mathrm{Arctg}\,x\,dy$ **که در آن C مرز بیضی** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ **می‌باشد که در جهت مثلثاتی طی شده است.**

۱) $2\pi ab$ ۲) $-2\pi ab$ ۳) πab ۴) $-\pi ab$

حل :

$$P:\frac{x^2y}{x^2+1}\ \rightarrow\ \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{x^2}{x^2+1}\quad,\quad Q:-\mathrm{Arctg}\,x\ \rightarrow\ \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{-1}{x^2+1}$$

لذا، طبق قضیه گرین داریم:

$$I=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=\iint_D\left(\frac{-1}{x^2+1}-\frac{x^2}{x^2+1}\right)dx\,dy$$

$$=\iint_D -dx\,dy=-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ \text{مساحت بیضی}\right)=-\pi ab$$

۲۳ـ اگر C منحنی مرز ناحیه محدود به نمودارهای $y=-x\ ,\ y=2-x^2$ **باشد، مطلوب است محاسبه** $I=\oint_C\left(x^2-y^2\right)dx+\left(x-2xy\right)dy$.

۱) $\frac{9}{2}$ ۲) $\frac{11}{2}$ ۳) $\frac{7}{2}$ ۴) $\frac{5}{2}$

حل :

$$\begin{cases}y=2-x^2\\ y=-x\end{cases}\ \Rightarrow\ 2-x^2=-x\ \Rightarrow\ x^2-x-2=0\ \Rightarrow\ x=-1,2$$

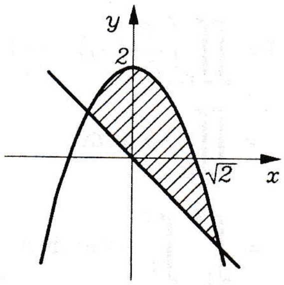
$$P:x^2-y^2\ \rightarrow\ \frac{\partial P}{\partial y}=-2y\quad,\quad Q:x-2xy\ \rightarrow\ \frac{\partial Q}{\partial x}=1-2y$$

طبق قضیه گرین به‌دست می‌آید:

$$I = \iint_R (1-2y+2y)\,dx\,dy$$

$$= \int_{-1}^{2}\int_{-x}^{2-x^2} dy\,dx = \int_{-1}^{2}\left(2-x^2+x\right)dx$$

$$= \left(2x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{2} = \left(4-\frac{8}{3}+2\right)-\left(-2+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{2}$$



۲۴ـ اگر C یک منحنی بسته و R ناحیه محدود شده به آن باشد؛ طبق قضیه گرین، می‌توان نشان داد که $\oint_C x\,dy = \iint_R dx\,dy$. با این فرض سطح محدود شده به منحنی $\vec{R}(t)=t^2 i+\left(\frac{t^3}{3}-t\right)j$ در فاصله $-\sqrt{3}\le t\le\sqrt{3}$ کدام است؟

۱) $\frac{24\sqrt{3}}{15}$ ۲) $\frac{17\sqrt{3}}{15}$ ۳) $\frac{13\sqrt{3}}{15}$ ۴) $\frac{11\sqrt{3}}{15}$

حل :

روی منحنی داده شده داریم:

$$x=t^2 \quad , \quad y=\frac{t^3}{3}-t \quad ; \quad -\sqrt{3}\le t\le\sqrt{3}$$

لذا، می‌توان نوشت:

$$S=\iint_R dx\,dy=\oint_C x\,dy=\int_{t=-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} t^2\left(t^2-1\right)dt = 2\int_0^{\sqrt{3}}\left(t^4-t^2\right)dt$$

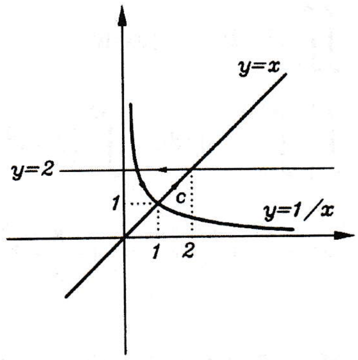
$$=2\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{3}} = 2\left(\frac{9\sqrt{3}}{5}-\frac{3\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{8\sqrt{3}}{5}$$

۲۵ـ حاصل $I=\oint_C xy\,dx-dy$ که در آن C منحنی حاصل از تقاطع منحنی‌های $y=\frac{1}{x}$، $y=x$ و $y=2$ می‌باشد، کدام است؟

۱) $\frac{-11}{12}$ ۲) 0 ۳) $\frac{-5}{12}$ ۴) $\frac{-7}{12}$

حل :

مطابق قضیه گرین داریم:



$$I=\iint_D\left(\frac{\partial}{\partial x}(-1)-\frac{\partial}{\partial y}(xy)\right)dx\,dy$$
$$=\iint_D -x\,dx\,dy$$
$$=\int_1^2\int_{\frac{1}{y}}^{y}-x\,dx\,dy=\int_1^2\left(\frac{-x^2}{2}\right)\Bigg|_{\frac{1}{y}}^{y}dy$$
$$=\int_1^2\left(\frac{-y^2}{2}+\frac{1}{2y^2}\right)dy=\left(\frac{-y^3}{6}+\frac{-1}{2y}\right)\Bigg|_1^2=\left(\frac{-8}{6}+\frac{-1}{4}\right)-\left(\frac{-1}{6}+\frac{-1}{2}\right)=\frac{-11}{12}$$

۲۶ـ حاصل $I=\oint_C y\,dx$ که در آن C منحنی حاصل از تقاطع $xy=3$، $xy=1$، $y=2x^2$ و $y=x^2$ می‌باشد، کدام است؟

۱) $\frac{-2}{3}\ln 2$ ۲) $\frac{-1}{3}\ln 2$ ۳) $\frac{-2}{3}$ ۴) $\frac{-1}{3}$

حل:

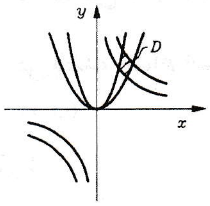
با استفاده از قضیه گرین داریم:

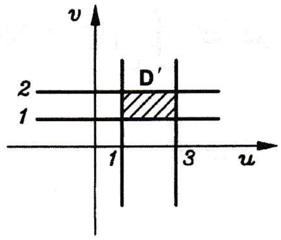
$$P:y\ \rightarrow\ \frac{\partial P}{\partial y}=1\qquad,\qquad Q:0\ \rightarrow\ \frac{\partial Q}{\partial x}=0$$
$$I=\iint_D(0-1)\,dx\,dy$$

برای محاسبه انتگرال دوگانه فوق با تغییر متغیرهای $\begin{cases}xy=u\\ \frac{y}{x^2}=v\end{cases}$ داریم:

$$J=\frac{1}{\begin{vmatrix}u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{vmatrix}}=\frac{1}{\begin{vmatrix}y & x\\ \frac{-2y}{x^3} & \frac{1}{x^2}\end{vmatrix}}=\frac{1}{\frac{3y}{x^2}}=\frac{1}{3v}$$

و با توجه به تبدیل یافته ناحیه D که به‌صورت مقابل است، خواهیم داشت:



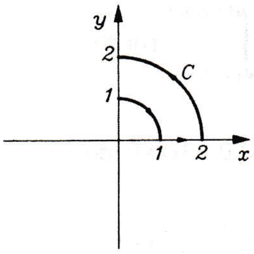


$$I=\iint_{D'} -\frac{1}{3v}\,du\,dv$$

$$=\frac{-1}{3}\int_{v=1}^{2}\int_{u=1}^{3}\frac{du\,dv}{v}$$

$$=\frac{-1}{3}\,u\Big|_1^3\ \ln|v|\Big|_1^2=\frac{-2}{3}\ln 2$$

۲۷ـ حاصل $\oint_C \left(x^3y\,dx+y^3x\,dy\right)$ که در آن C مطابق شکل مقابل است، کدام است؟



۱) صفر

۲) $\frac{124}{15}$

۳) $\frac{248}{15}$

۴) $\frac{-124}{15}$

حل :

$$P:x^3y \;\rightarrow\; \frac{\partial P}{\partial y}=x^3 \qquad\qquad Q:xy^3 \;\rightarrow\; \frac{\partial Q}{\partial x}=y^3$$

طبق قضیه گرین داریم:

$$I=\iint_D \left(y^3-x^3\right)dx\,dy$$

با استفاده از دستگاه مختصات قطبی داریم:

$$I=\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=1}^{2}\left(r^3\sin^3\theta-r^3\cos^3\theta\right)r\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\left(1-\cos^2\theta\right)\sin\theta-\left(1-\sin^2\theta\right)\cos\theta\right)d\theta\ .\ \int_1^2 r^4\,dr$$

$$=\left(-\cos\theta+\frac{\cos^3\theta}{3}-\sin\theta+\frac{\sin^3\theta}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}.\ \frac{r^5}{5}\Bigg|_1^2==\left(\left(-1+\frac{1}{3}\right)-\left(-1+\frac{1}{3}\right)\right)\left(\frac{32}{5}-\frac{1}{5}\right)=0$$

۲۸ـ حاصل $\oint_C \left(x^3-3y\right)dx+\left(x+y^2\right)dy$ **که در آن C مرز دلنمای** $r=1+\cos\theta$ **می‌باشد، کدام است؟**

۱) 6π ۲) 8π ۳) 10π ۴) 12π

حل :

مطابق قضیه گرین می‌توان نوشت:

$$I=\iint_D\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(x+y^2\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(x^3-3y\right)\right)dx\,dy=\iint_D(1+3)\,dx\,dy$$

$$=4\left(r=1+\cos\theta \text{ مساحت محصور به دلنمای}\right)=(4)\ (2)\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{r=0}^{1+\cos\theta} r\,dr\,d\theta$$

$$=8\int_0^{\pi}\frac{1}{2}r^2\Big|_0^{1+\cos\theta}d\theta=4\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^2\,d\theta=4\int_0^{\pi}\left(1+\cos^2\theta+2\cos\theta\right)d\theta$$

$$=4\int_0^{\pi}\left(1+\frac{1+\cos 2\theta}{2}+2\cos\theta\right)d\theta=4\left\{\frac{3}{2}\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta+2\sin\theta\right\}\Bigg|_0^{\pi}=4\left(\frac{3\pi}{2}\right)=6\pi$$

۲۹ـ با توجه به قضیه گرین حاصل $\oint_C f\,dg$ **به کدام صورت زیر قابل بیان است؟(R ناحیه محدود شده به منحنی بسته C بوده و g و f توابعی دو متغیره با مشتقات جزئی تا هر مرتبه پیوسته می‌باشند).**

۱) $\iint_R\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial y}\right)dx\,dy$ ۲) $\iint_R\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}\right)dx\,dy$

۳) $\iint_R\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}\right)dx\,dy$ ۴) صفر

حل :

$$I=\oint_C f\,dg=\oint_C f\left(\frac{\partial g}{\partial x}dx+\frac{\partial g}{\partial y}dy\right)=\oint_c\left(f\frac{\partial g}{\partial x}dx+f\frac{\partial g}{\partial y}dy\right)$$

مطابق قضیه گرین داریم:

$$I=\iint_R\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(f\frac{\partial g}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(f\frac{\partial g}{\partial x}\right)\right\}dx\,dy$$

$$= \iint_R \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} + f\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x} - f\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \right\} dx\,dy$$

$$= \iint_R \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x} \right) dx\,dy$$

۳۰ـ حاصل $I = \oint_C \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)dx + \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\right)dy$ **که در آن** f **تابعی همساز برحسب** x **و** y **می‌باشد، کدام است؟**

۱) 0 ۲) مساحت ناحیه محدود به منحنی بسته C

۳) محیط منحنی بسته C ۴) به تابع f بستگی دارد.

حل :

با استفاده از قضیه گرین داریم:

$$I = \iint_D \left\{ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) \right\} dx\,dy$$

$$= \iint_D \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) dx\,dy$$

می‌دانیم، همواره $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$؛ لذا، به سبب همساز بودن تابع f داریم $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ و در نتیجه: $I = 0$.

۳۱ـ حاصل $I = \int \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2}$ **روی دایره** $x^2 + y^2 = a^2$ **کدام است؟**

۱) 0 ۲) 2π ۳) 4π ۴) -2π

حل :

هر دو تابع $Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$ و $P(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}$ در نقطه $(0, 0)$ تعریف نشده‌اند (دقت کنید که این نقطه داخل ناحیه محدود به $x^2 + y^2 = a^2$ واقع است)؛ لذا، مجاز به استفاده از قضیه گرین نمی‌باشیم؛ اما، روی مرز $x^2 + y^2 = a^2$ با فرض $\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a\sin\theta \end{cases}$ داریم:

$$I = \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{(-a\sin\theta)(-a\sin\theta\,d\theta) + (a\cos\theta)(a\cos\theta\,d\theta)}{a^2} = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$$

تذکر: به عنوان تمرین نشان دهید $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ و لذا چنانچه به غلط از قضیه گرین استفاده کنیم به جواب نادرست $I = 0$ می رسیم.