لگاریتم ها و نمائی ها

تابع لگاریتم طبیعی :

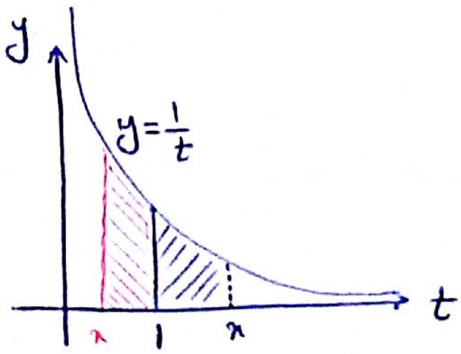
تمام توان‌های x : $\dots, x^{-2}, x^{-1}, x^{0}=1, x, x^{2}, x^{3}, \dots$

مشتق ↓

پاسخ‌ها: $\dots, -2x^{-3}, -x^{-2}, 0, 1, 2x, 3x^{2}, \dots$

دقت کنید که در بین پاسخ‌ها $x^{-1} = \frac{1}{x}$ موجود نیست یعنی در قسمت بالا تابعی نداشتیم که مشتق آن $\frac{1}{x}$ شود. چنین تابعی را $\ln x$ می‌نامیم که $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

تعریف: به ازای هر $x>0$ ، A_x را مساحت ناحیه محدود به منحنی $y=\frac{1}{t}$ ، محور t ، خطوط قائم $t=1$ و $t=x$ می‌گیریم.



و تابع $\ln x$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\ln x := \begin{cases} A_x & x \geq 1 \\ -A_x & 0<x<1 \end{cases}$$

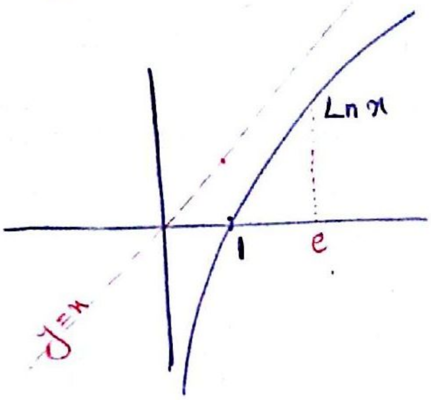
خواص اولیه :

۱- دامنه تابع لگاریتم طبیعی $Ln\,x$ برابر است با : $D_{Ln\,x} = \mathbb{R}^+$ یعنی $x \underset{\neq}{>} 0$ و به صورت کلی :

$Ln(\text{عبارت}) \longrightarrow$ شرط دامنه : $\boxed{\text{عبارت} > 0}$

۲- برای $x \geq 1$ مقدار تابع عددی مثبت و برای $0 < x < 1$ مقدار تابع عددی منفی است پس $\overset{\text{برد}}{R_{Ln\,x}} = \mathbb{R}$

۳- شکل یا نمودار تابع :



تابع $Ln\,x$ پیوسته و صعودی اکید است.

۴- برخی مقادیر و حدود مهم :

$Ln\,1 = 0$

$\lim_{x \to \infty} Ln\,x = +\infty$

$\lim_{x \to 0^+} Ln\,x = -\infty$

$\cancel{\lim_{x \to -\infty} Ln\,x}$ بی معنا چون دامنه Ln فقط اعداد مثبت است

۵- عدد خاصی وجود دارد که $Ln\,x = 1$ و آن عدد e عدد نپر است : $e \simeq ۲,۷۱۸۲۸۱۸۲۸٤۵۹۰٤۵$

$Ln\,e = 1$

۶- مشتق تابع:

$$(Ln\,x)' = \frac{1}{x}$$

و به صورت کلی

$$\boxed{(Ln\,u)' = \frac{u'}{u}}$$

۷- انتگرال مشتق بر تابع : (مبتنی)

در حالت کلی

$$\int \frac{1}{x}\, dx = Ln|x|$$

« مشتق مخرج در صورت » $\int \frac{u'}{u}\, dx = Ln|u|$ مخرج

مثال : دامنه تابع $\sqrt{Ln(x-2)}$ را بیابید.

حل :

شرط رادیکال : $Ln(x-2) \geq 0 \Rightarrow x-2 \geq 1 \Rightarrow x \geq 3$

شرط لگاریتم طبیعی : $x-2 > 0 \Rightarrow x > 2$

اشتراک می‌گیریم :

$$D = [3, \infty) \cap (2, \infty) = [3, \infty)$$

مثال : دامنه $y = Ln(Ln(Ln\, x))$ را بیابید.

۱ ۲ ۳

شرط برای Ln سوم (۳) : $x > 0$

Ln دوم (۲) " " : $Ln\, x > 0 \Rightarrow x > 1$

Ln اول (۱) " " : $Ln(Ln\, x) > 0 \Rightarrow Ln\, x > 1 \Rightarrow x > e$

اشتراک $\Rightarrow x > e$

$$\Rightarrow D_y = (e, \infty)$$

مثال: مشتق بگیرید:

$$* \; y = x \sin(Ln\, x)$$

$$\Rightarrow y' = 1 \times \sin(Ln\, x) + x \times \cos(Ln\, x) \times \frac{1}{x}$$
$$= \sin(Ln\, x) + \cos(Ln\, x)$$

$$* \; y = Ln(\underbrace{Ln\, x}_{u})$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{Ln\, x} \times \frac{1}{x} = \frac{1}{x\, Ln\, x}$$

یا $\dfrac{\frac{1}{x}}{Ln\, x}$ مشتق

مثال: حاصل حد مقابل را در صورت وجود بیابید.

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{Ln\, x} - \frac{1}{x-1} \right) \overset{\infty - \infty}{=\!=}$$

توضیح: تبدیل به یکی از حالت‌های مبهم $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ می‌کنیم تا اجازه هوپیتال داشته باشیم؛ لذا:

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x - 1 - Ln\, x}{(x-1)\, Ln\, x} \underset{هـ}{\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}} \lim_{x \to 1} \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 \times Ln\, x + \underbrace{\frac{x-1}{x}}_{= 1 - \frac{1}{x}}}$$

$$\underset{هـ}{\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}} \lim_{x \to 1} \frac{+\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}$$

مثال: انتگرال بگیرید:

$$\int \frac{7t^6 + \cos t}{\sin t + t^7}\, dt \; \underset{\text{در صورت}}{\overset{\text{مشتق مخرج}}{=\!=}} \; Ln\left|\sin t + t^7\right|$$

خواص لگاریتم طبیعی (ادامه): برای $x,y>۰$ و $r\in\mathbb{Q}$:

یک) $\operatorname{Ln}(xy)=\operatorname{Ln}x+\operatorname{Ln}y$

دو) $\operatorname{Ln}\left(\frac{۱}{x}\right)=-\operatorname{Ln}x$

سه) $\operatorname{Ln}\left(\frac{x}{y}\right)=\operatorname{Ln}x-\operatorname{Ln}y$

چهار) $\operatorname{Ln}x^{r}=r\operatorname{Ln}x$

مثال، این عبارات را برحسب لگاریتم طبیعی اعداد اول بنویسید.

$$*\ \operatorname{Ln}۶^{\frac{۱}{۵}}=\frac{۱}{۵}\operatorname{Ln}(\overbrace{۲\times۳}^{۶})=\frac{۱}{۵}(\operatorname{Ln}۲+\operatorname{Ln}۳).$$

$$*\ \operatorname{Ln}\sqrt[۳]{\frac{۲۴}{۲۵}}=\operatorname{Ln}\left(\frac{۲^{۳}\times۳}{۵^{۲}}\right)^{\frac{۱}{۳}}=\frac{۱}{۳}(\operatorname{Ln}۲^{۳}+\operatorname{Ln}۳-\operatorname{Ln}۵^{۲})$$

$$=\frac{۱}{۳}(۳\operatorname{Ln}۲+\operatorname{Ln}۳-۲\operatorname{Ln}۵)$$

$$=\operatorname{Ln}۲+\frac{۱}{۳}\operatorname{Ln}۳-\frac{۲}{۳}\operatorname{Ln}۵.$$

مشتق گیری لگاریتمی :

برای مشتق گیری از توابع دارای پیچیدگی در ضرب، تقسیم، توان و رادیکال علاوه بر روش اصلی مشتق گیری می توان از مشتق گیری لگاریتمی استفاده کرد. این روش عملیات فوق را به جمع، تفریق و ضرب تبدیل می کند.

روش کار: برای مشتق گیری از $y=f(x)$ و محاسبه y' :

$$y=f(x) \Rightarrow |y|=|f(x)|$$

$$\Rightarrow \ln|y| = \ln|f(x)| \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{y'}{y} = \left(\ln|f(x)| \text{ ساده شده}\right)'$$

$$\Rightarrow y' = y\left(\ln|f(x)| \text{ ساده شده}\right)'$$

مثال: مشتق تابع زیر را محاسبه کنید.

$$y = \frac{(2x^2-3)\sqrt{4x+1}}{(x+2)^7(\ln x)^3}$$

حل :

$$\Rightarrow \ln|y| = \ln\left|\frac{(2x^2-3)(4x+1)^{\frac{1}{2}}}{(x+2)^7(\ln x)^3}\right| \xRightarrow{\text{ساده شده}}$$

$$\Rightarrow \ln|y| = \ln|2x^2-3| + \frac{1}{2}\ln|4x+1| - 7\ln|x+2| - 3\ln|\ln x|$$

$$\Rightarrow y' = \underbrace{\left(\frac{(2x-3)\sqrt{4x+1}}{(x+2)^7(\ln x)^3}\right)}_{y}\left(\frac{4x}{2x^2-3} + \frac{1}{2}\,\frac{4}{4x+1} - 7\,\frac{1}{x+2} - 3\,\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\right)$$

مثال: مشتق بگیرید:

$$y = \frac{(۲ - \operatorname{cotg} x)^{۳}}{(۳ + \sec x)^{۲}}$$

حل:

$$\Rightarrow \operatorname{Ln}|y| = \operatorname{Ln}\left|\frac{(۲ - \operatorname{cotg} x)^{۳}}{(۳ + \sec x)^{۲}}\right| = ۳\operatorname{Ln}|۲ - \operatorname{cotg} x| - ۲\operatorname{Ln}|۳ + \sec x|$$

$$\Rightarrow y' = \left(\frac{(۲ - \operatorname{cotg} x)^{۳}}{(۳ + \sec x)^{۲}}\right) \times \left(۳\,\frac{+\csc^{۲} x}{۲ - \operatorname{cotg} x} - ۲\,\frac{\sec x \operatorname{tg} x}{۳ + \sec x}\right)$$

تابع نمایی : معکوس تابع لگاریتم طبیعی

$$Ln : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$

مشتق $Ln x$ برابر $\frac{1}{x}$ و بر $x>0$ مثبت است؛
لذا Ln صعودی اکیدا و در نتیجه یک به یک و معکوس پذیر است.

$$\boxed{\begin{gathered} exp := Ln^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow (0,\infty) \\ y = exp\, x \iff x = Ln\, y \end{gathered}}$$

خواص :

$$exp(Ln\, x) = x \quad ; \quad x>0$$

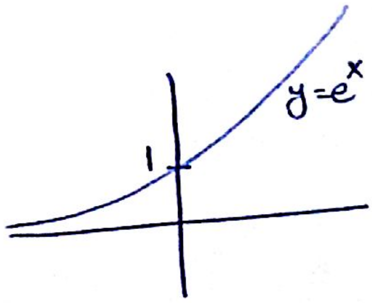
$$Ln(exp\, x) = x \quad ; \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to 0^+} Ln\, x = -\infty \implies \lim_{x\to -\infty} exp\, x = 0$$

$$Ln\, 1 = 0 \implies exp(0) = 1$$

$$Ln\, e = 1 \implies exp(1) = e$$

$$\lim_{x\to \infty} Ln\, x = +\infty \implies \lim_{x\to +\infty} exp\, x = +\infty$$



همچنین :

$$\begin{cases} (exp\, x)^r = exp(rx) \\ exp(x+y) = exp\, x \cdot exp\, y \\ exp(-x) = \dfrac{1}{exp\, x} \\ exp(x-y) = \dfrac{exp\, x}{exp\, y} \end{cases}$$

یک رابطه بسیار مهم: طبق تعاریف Ln داریم:

$$\ln e^{r} = r\ln e = r\times 1 = r \iff \boxed{\exp r = e^{r}}$$

به چهار رابطه آخر صفحه قبل دقت کنید. مثلاً $e^{x}\times e^{y} = e^{x+y}$ ، ...

مشتق تابع exp : توضیح : $y=e^{x} \Rightarrow x=\ln y$ & $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{dx/dy}=\frac{1}{1/y}=y=e^{x}$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}(\exp x) = (e^{x})' = e^{x} \\ \\ \dfrac{d}{dx}(\exp u) = (e^{u})' = e^{u}\times u' = u'e^{u} \end{cases}$$

انتگرال تابع exp :

$$\int \exp x\, dx = \int e^{x}\, dx = e^{x}$$

مثال : اگر x در ربع اول دایره مثلثاتی باشد، عبارت زیر را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

$$L = e^{2\ln \cos x} + (\ln \exp(\sin x))^{2}$$

حل :

$$L = e^{\ln \cos^{2} x} + (\ln e^{\sin x})^{2} \xrightarrow[f^{-1}\circ f(s)=s]{f\circ f^{-1}(s)=s} \cos^{2} x + (\sin x)^{2}$$

$$= \cos^{2} x + \sin^{2} x = 1$$

$$\Rightarrow \underline{L=1} \quad \square$$

مثال: دامنه تابع $f(x)=x^2 e^{\sqrt{x}}-1$ را بیابید.

حل: تمام توابع به کار رفته در تابع فوق بدون محدودیت در دامنه می‌باشند بجز تابع $\sqrt{x}$ که:

$$x \geqslant 0 \Rightarrow D_f=[0,\infty)$$

مثال: حد بگیرید.

* $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\sin x}-e}{\cos x}$$

حل $$\xrightarrow[\text{هـ}]{\frac{e-e}{0}=\frac{0}{0}} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\cdot e^{\sin x}-0}{-\sin x}=\frac{0\times e^{1}}{-1}=0$$

مثال: انتگرال بگیرید.

* $$\int e^{\frac{1}{3}x+7}\,dx$$

حل $$\xrightarrow[\text{فرمول ترکیب با خطی}]{\int e^x dx=e^x} \frac{e^{\frac{1}{3}x+7}}{\frac{1}{3}}=3e^{\frac{x}{3}+7}$$

مثال: انتگرال بگیرید.

* $$\int_2^4 \frac{dx}{1-e^{-x}}$$

حل $$\xrightarrow[\times\frac{e^x}{e^x}]{} \int_2^4 \frac{e^x}{e^x-e^0}\,dx=\int_2^4 \frac{e^x}{e^x-1}\,dx$$

$$\xrightarrow[\text{صورت}]{\text{مشتق مخرج در}} \left(\ln|e^x-1|\right)_2^4=\ln(e^4-1)-\ln(e^2-1)$$

مخرج

$$=\ln\left(\frac{e^4-1}{e^2-1}\right)=\ln\frac{\cancel{(e^2-1)}(e^2+1)}{\cancel{e^2-1}}=\ln(e^2+1).\ \square$$