

روش اجزای محدود

FINITE ELEMENTS METHOD

نظام ارزیابی:

تکالیف دوره ای

تکالیف کلاسی

مشارکت کلاسی

امتحان ترم

پروژه

مراجع:

- ۴ نمره
- ۲ نمره
- ۱ نمره
- ۸ نمره
- ۶ نمره

The Finite Element Method Zienkewicz & Taylor

An Introduction to Finite Element Computation Hinton & Owen

روش تحلیل ماتریسی: تکنیکی قدرتمند جهت حل سازه‌های اسکلتی.
مقدمه ای برای تکنیک عمومی تر اجزاء محدود. (دهه ۵۰ و ۶۰)
روشی مبتنی بر اصل تعادل

روش اجزاء محدود: روشی برای تحلیل سازه های پیوسته (دهه ۶۰ و ۷۰)
روشی مبتنی بر اصل کار مجازی و اصل انرژی پتانسیل مینیمم

تحلیل ماتریسی سازه های خرابای یک بعدی :

اصل تعادل

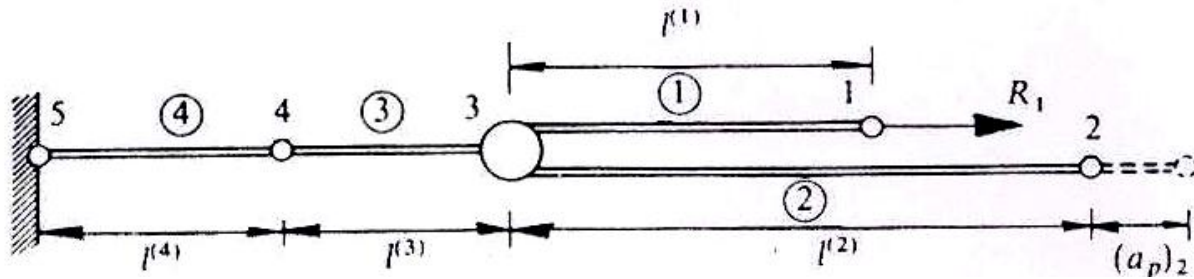
(Equilibrium)

کمینه سازی انرژی پتانسیل کل (Minimum Total potential Energy)

اصل کار مجازی

(Virtual work Principle)

تحلیل ماتریسی سازه های خرابی یک بعدی : اصل تعادل



مجهولات

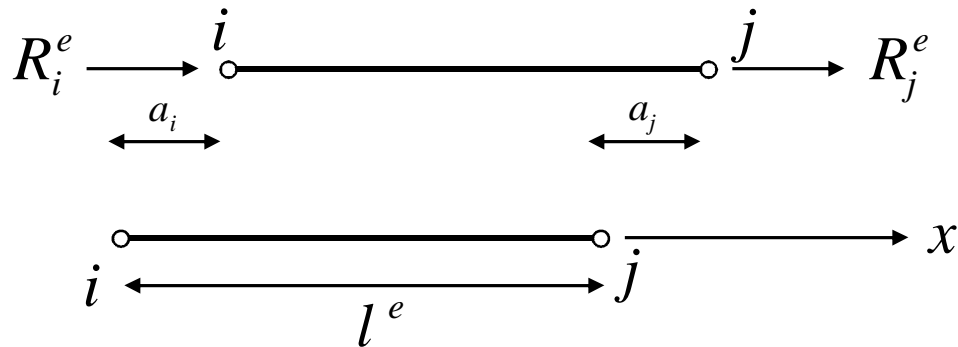
$$a = [a_1, a_2, a_3, a_4, a_5]^T$$

تعادل مفصها

اصل تعادل سازه

تعادل هر یک از اعضا

تبادل عضو فرضی: رابطه نیرو - تغییر مکان



$$R_i^e = -R_j^e \quad R_i^e = A^e s^e \quad s^e = E^{(e)} e^e$$

$$e^e = (a_i - a_j) / l^{(e)}$$

$$R_i^e = \left(\frac{EA}{l} \right)^e (a_i - a_j)$$

$$R_j^e = \left(\frac{EA}{l} \right)^e (a_j - a_i)$$

شرایط تعادل در هر یک از مفصلها روابط زیر را ایجاد می کند.

$$R_i = \sum_{e=1}^E R_i^e$$

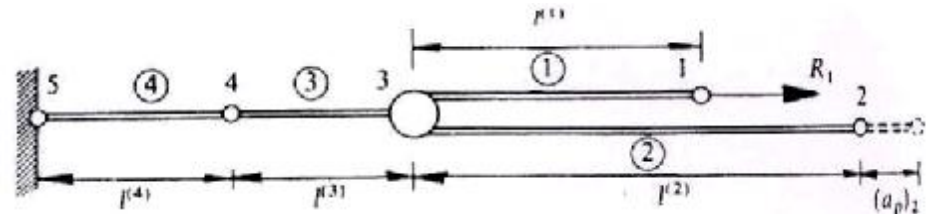
$$R_1^{(1)} = R_1$$

$$R_2^{(2)} = R_2$$

$$R_3^{(1)} + R_3^{(2)} + R_3^{(3)} = R_3 = 0$$

$$R_4^{(3)} + R_4^{(4)} = R_4 = 0$$

$$R_5^{(4)} = R_5$$



$$k^{(1)}a_1 - k^{(1)}a_3 = R_1,$$

$$k^{(2)}a_2 - k^{(2)}a_3 = R_2,$$

$$-k^{(1)}a_1 - k^{(2)}a_2 + k^{(1)}a_3 + k^{(2)}a_3 + k^{(3)}a_3 - k^{(3)}a_4 = 0,$$

$$-k^{(3)}a_3 + k^{(3)}a_4 + k^{(4)}a_4 - k^{(4)}a_5 = 0,$$

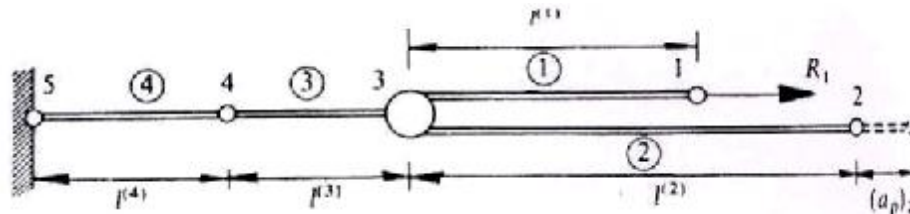
$$-k^{(4)}a_4 + k^{(4)}a_5 = R_5.$$

$$a_5 = 0.0, \quad a_2 = (a_p)_2$$

تحت شرایط مرزی

رابطه ماتریسی تعادل سازه

$$\begin{bmatrix} k^{(1)} & 0 & -k^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & k^{(2)} & -k^{(2)} & 0 & 0 \\ -k^{(1)} & -k^{(2)} & k^{(1)} + k^{(2)} + k^{(3)} & -k^{(3)} & 0 \\ 0 & 0 & -k^{(3)} & k^{(3)} + k^{(4)} & -k^{(4)} \\ 0 & 0 & 0 & -k^{(4)} & k^{(4)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ 0 \\ 0 \\ R_5 \end{bmatrix}$$



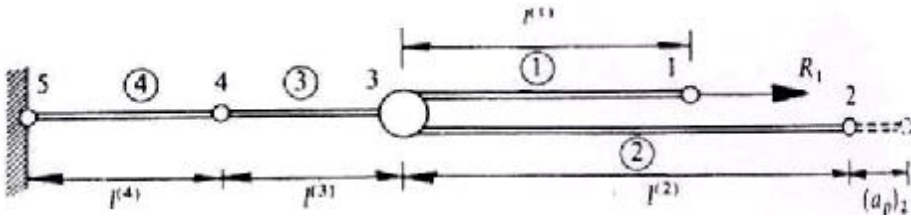
یا

$$Ka=R$$

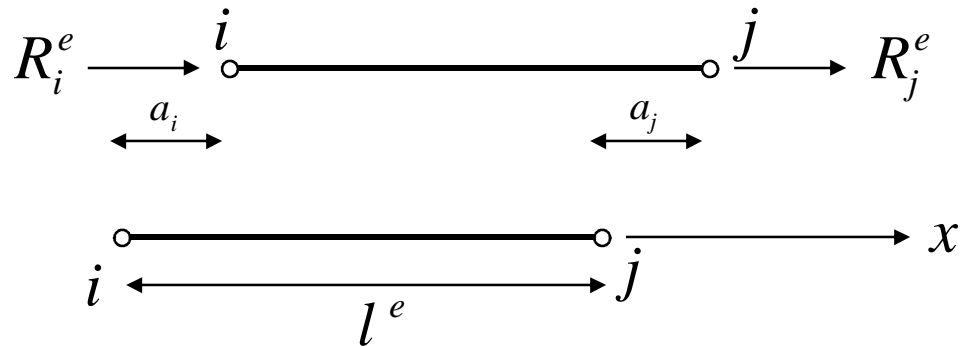
K ماتریس سختی کلی و a و R بترتیب بردارهای تغییر مکان و نیروی کلی

a_5 و a_2 دارای مقادیر از پیش تعیین شده معلوم اند ولی عکس عملهای مربوطه R_2 و R_5 را باید محاسبه کرد.

فرمولبندی ماتریسی اصل تعادل:



رابطه نیرو - تغییر مکان دوانتهای عضو (تعادل عضو)



$$R_i^e = \left(\frac{EA}{l} \right)^e (a_i - a_j)$$

$$R_j^e = \left(\frac{EA}{l} \right)^e (a_j - a_i)$$

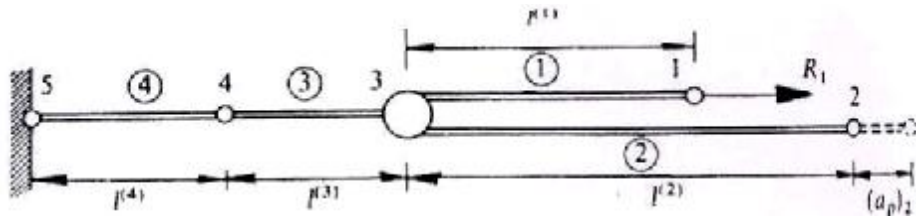
شکل ماتریسی رابطه تعادل

$$\begin{bmatrix} R_i \\ R_j \end{bmatrix}^{(e)} = k^{(e)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_i \\ a_j \end{bmatrix}$$

ی یا در شکل فشرده

$$R^{(e)} = K^{(e)} a^{(e)}$$

رابطه سختی عضو



رابطه سختی اعضا

$$\begin{bmatrix} R_3 \\ R_1 \end{bmatrix}^{(1)} = k^{(1)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 \\ a_1 \end{bmatrix}$$

عضو ۱

$$\begin{bmatrix} R_3 \\ R_2 \end{bmatrix}^{(2)} = k^{(2)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

عضو ۲

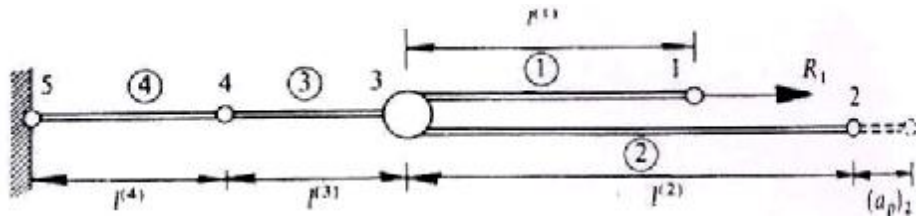
$$\begin{bmatrix} R_4 \\ R_3 \end{bmatrix}^{(3)} = k^{(3)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_4 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

عضو ۳

$$\begin{bmatrix} R_5 \\ R_4 \end{bmatrix}^{(4)} = k^{(4)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_5 \\ a_4 \end{bmatrix}$$

عضو ۴

$$k^{(e)} = \left(\frac{EA}{l} \right)^{(e)}$$



شرط تعادل گرهها

$$R_i = \sum_{e=1}^N R_i^e = \sum_{e \in i} R_i^e$$

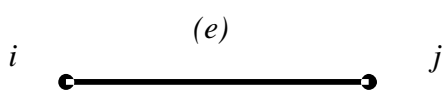
$$R = \sum_{e=1}^N R^e$$

$$R = \sum_{e=1}^N K^e a^e$$

$$Ka = R$$

ی بصورت ماتریسی

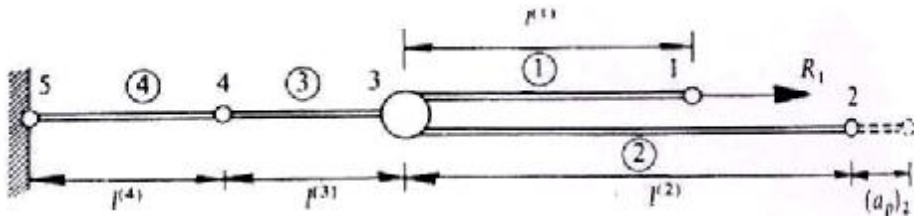
با جای گذاری

$$R = \sum_{e=1}^N K^{(e)} a^{(e)}$$


شکل گسترده رابطه سختی برای عضو فرضی

$$R^{(e)} = K^{(e)} a^{(e)}$$

$$\begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ R_i \\ 0.0 \\ R_j \\ 0.0 \\ 0.0 \end{bmatrix}^{(e)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k^e & 0 & -k^e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k^e & 0 & k^e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ .. \\ a_i \\ .. \\ a_j \\ .. \\ a_5 \end{bmatrix}$$



$$R = \left[\sum_{e=1}^N K^e \right] a$$

$$Ka = R$$

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \end{bmatrix}$$

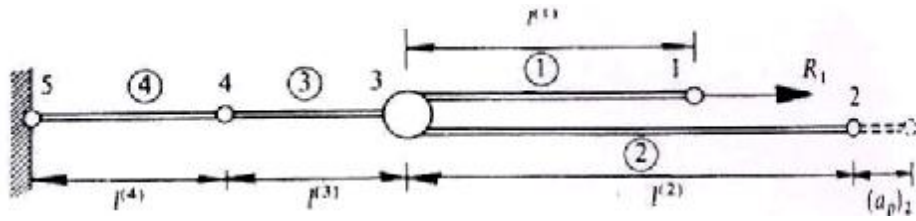
$$K = \sum_{e=1}^N K^e$$

فرآیند جمع بندی:

$$i \text{ --- } (e) \text{ --- } j$$

$$\begin{array}{c}
 i \qquad \qquad j \\
 \left[\begin{array}{cc}
 \vdots & \vdots \\
 \dots k(e) \dots -k(e) \dots & a_i \\
 \dots -k(e) \dots k(e) \dots & a_j \\
 \vdots & \vdots
 \end{array} \right]
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{c}
 R_i \\
 R_j
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

ماتریس سختی عضو فرضی e واقع شده بین مفصلهای i ، j بصورتی که در شکل نشان داده شده است در تشکیل ماتریس سختی کلی مشارکت می کند



$$\begin{bmatrix}
 k^{(1)} & 0 & -k^{(1)} & 0 & 0 \\
 0 & k^{(2)} & -k^{(2)} & 0 & 0 \\
 -k^{(1)} & -k^{(2)} & k^{(1)} + k^{(2)} + k^{(3)} & -k^{(3)} & 0 \\
 0 & 0 & -k^{(3)} & k^{(3)} + k^{(4)} & -k^{(4)} \\
 0 & 0 & 0 & -k^{(4)} & k^{(4)}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 a_1 \\
 a_2 \\
 a_3 \\
 a_4 \\
 a_5
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 R_1 \\
 R_2 \\
 0 \\
 0 \\
 R_5
 \end{bmatrix}
 \begin{matrix}
 \\
 a_2 = (a_p)_2 \\
 \\
 \\
 a_5 = 0
 \end{matrix}$$

HALF-BAND WIDTH

$$\begin{bmatrix}
 R_3 \\
 R_1
 \end{bmatrix}^{(1)}
 = k^{(1)}
 \begin{bmatrix}
 1 & -1 \\
 -1 & 1
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 a_3 \\
 a_1
 \end{bmatrix}
 \qquad
 \begin{bmatrix}
 R_4 \\
 R_3
 \end{bmatrix}^{(1)}
 = k^{(3)}
 \begin{bmatrix}
 1 & -1 \\
 -1 & 1
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 a_4 \\
 a_3
 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
 R_3 \\
 R_2
 \end{bmatrix}^{(2)}
 = k^{(2)}
 \begin{bmatrix}
 1 & -1 \\
 -1 & 1
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 a_3 \\
 a_2
 \end{bmatrix}
 \qquad
 \begin{bmatrix}
 R_5 \\
 R_4
 \end{bmatrix}^{(1)}
 = k^{(4)}
 \begin{bmatrix}
 1 & -1 \\
 -1 & 1
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 a_5 \\
 a_4
 \end{bmatrix}$$

اصل انرژی پتانسیل کل مینیم :

یک سازه فرضی وقتی در حال تعادل است که مقدار انرژی پتانسیل کل آن کمینه باشد. انرژی پتانسیل کلی جسمی تحت بارهای نقطه ای را می توان در حالت کلی بصورت زیر نوشت.

$$I = I_S + I_R$$

$$I = \frac{1}{2} \int_V \sigma \epsilon \, dv - \sum R_i a_i,$$

s و ϵ به ترتیب نمایشگر تنشها و کرنشهای محوری داخلی حاصل از بارگذاری اند و انتگرال گیری در حجم V جسم صورت می گیرد. جمله R_i نماینده بارهای نقطه ای و a_i نمایشگر تغییر مکانهای مربوطه است و مجموعیابی نسبت به همه بارهای وارده صورت می گیرد

اصل کار مجازي :

يك سازه فرضي تحت تاثير بارهاي خارجي R_i در وضعیت تعادل است و تنشهاي داخلي S در آن ایجاد شده است. اگر سازه تحت سیستم بارگذاري مستقل ديگري قرار گرفته و تغيير مکانهاي a_i^* و کرنشهاي داخلي e^* در آن ایجاد شود در این صورت کار انجام شده توسط نیروهای داخلی و خارجی در حین تغییر مکانهای مجازی برابر خواهد بود

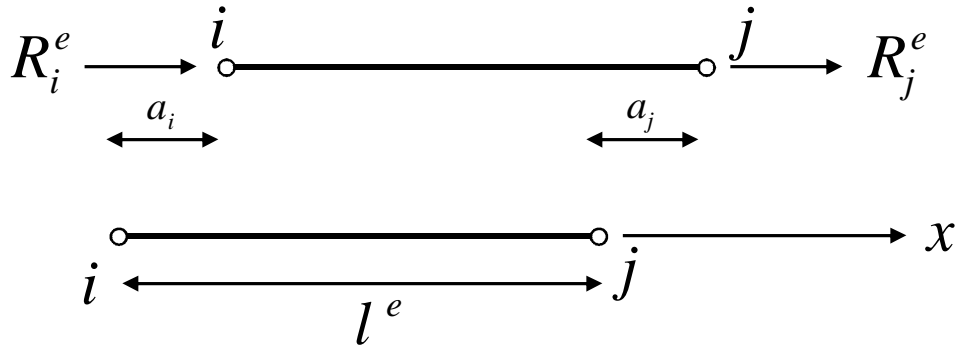
$$W_I = W_E$$

$$\int_v \sigma \cdot \varepsilon^* dv = \sum R_i a_i^*,$$

کاربرد اصل انرژی پتانسیل مینیمم و اصل کار مجازی:

- ۱: تعادل هر یک از اعضا: مستلزم تاملین تعادل مفصلها
- ۲: تعادل کل سازه

اصل انرژی پتانسیل کل مینیمم برای تعادل اعضا:



انرژی پتانسیل کل عضو نمونه

$$\frac{1}{2} \int_{v^e} \mathbf{s}^e \mathbf{e}^e dv - R_i^e a_i - R_j^e a_j$$

$$\mathbf{s}^e = E^{(e)} \mathbf{e}^e$$

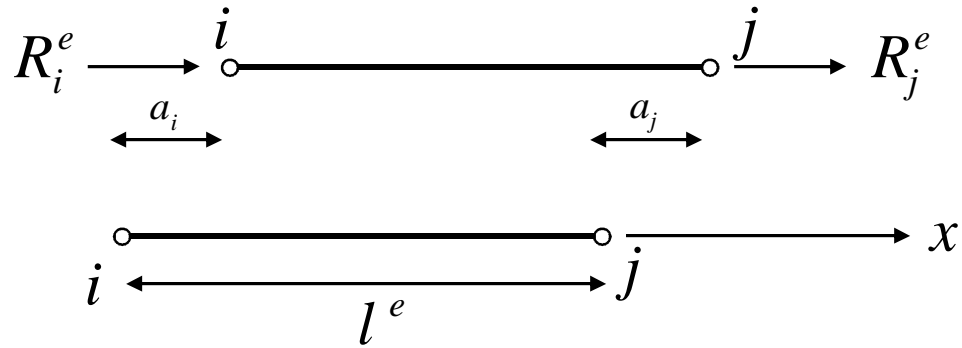
$$\mathbf{e}^e = (a_i - a_j) / l^{(e)}$$

$$\frac{k^{(e)}}{2} (a_i - a_j)^2 - R_i^e a_i - R_j^e a_j$$

با کمی‌نه سازی نسبت به تغییری در مکانهای گرهی

$$k^{(e)} (a_i - a_j) - R_i^e = 0.0$$

$$-k^{(e)} (a_i - a_j) - R_j^e = 0.0$$



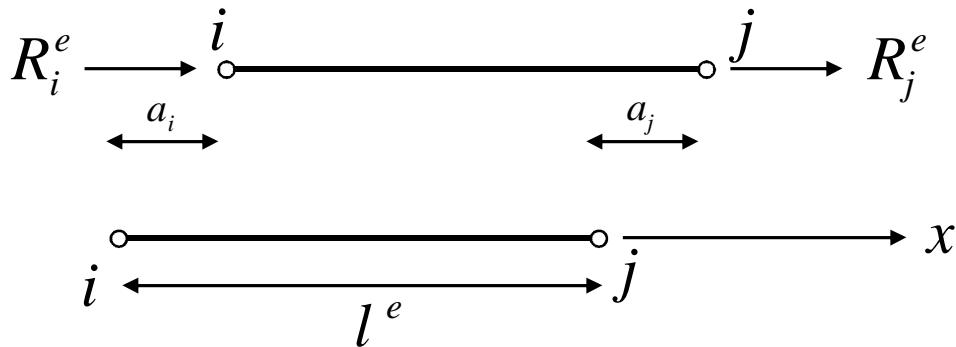
شکل ماتریسی رابطه

$$\begin{bmatrix} R_i \\ R_j \end{bmatrix}^{(e)} = k^{(e)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_i \\ a_j \end{bmatrix}$$

$$R^{(e)} = K^{(e)} a^{(e)}$$

ی یا در شکل فشرده

اصل کار مجازی برای تعادل اعضا:



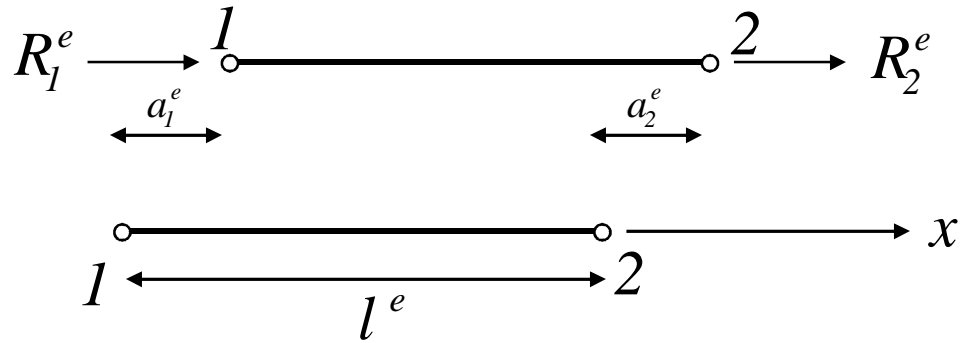
$$\mathbf{s}^e = E^{(e)} \mathbf{e}^e \quad \mathbf{e}^{*e} = (a_i^* - a_j^*) / l^{(e)}$$

$$\int_e \mathbf{s}^e \mathbf{e}^{*e} dv = R_i^e a_i^* + R_j^e a_j^*$$

$$\left(\frac{EA}{l} \right)^e (a_i - a_j) (a_i^* - a_j^*) = R_i^e a_i^* + R_j^e a_j^*$$

$$k^{(e)}(a_i - a_j) - R_i^e = 0.0$$

$$-k^{(e)}(a_i - a_j) - R_j^e = 0.0$$



شکل ماتریسی رابطه

$$\begin{bmatrix} R_i \\ R_j \end{bmatrix}^{(e)} = k^{(e)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_i \\ a_j \end{bmatrix}$$

$$R^{(e)} = K^{(e)} a^{(e)}$$

ی در شکل فشرده

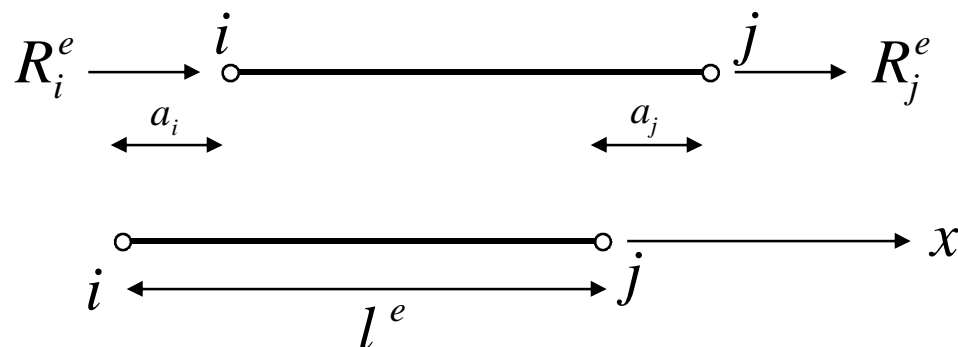
اصل انرژی پتانسیل کل مینیمم برای تعادل کل سازه :

یک سازه فرضی وقتی در حال تعادل است که مقدار انرژی پتانسیل کل آن کمینه باشد. انرژی پتانسیل کلی جسمی تحت بارهای نقطه ای را می توان در حالت کلی بصورت زیر نوشت.

$$I = I_S + I_R$$

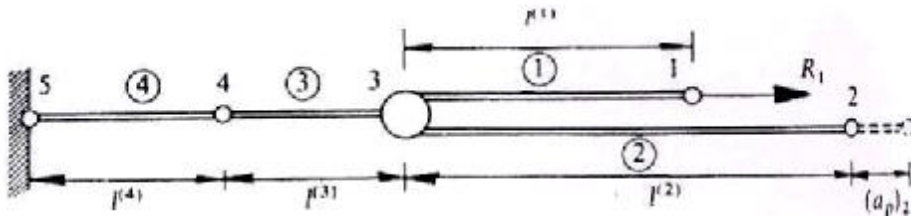
$$I = \frac{1}{2} \int_V \sigma \epsilon \, dv - \sum R_i a_i$$

s و ϵ به ترتیب نمایشگر تنشها و کرنشهای محوری داخلی حاصل از بارگذاری اند و انتگرال گیری در حجم V جسم صورت می گیرد. جمله R_i نماینده بارهای نقطه ای و a_i نمایشگر تغییر مکانهای مربوطه است و مجموعیابی نسبت به همه بارهای وارده صورت می گیرد



$$e^e = (a_i - a_j) / l^{(e)}$$

$$s^e = E^{(e)} e^e$$



سهم جزء e از انرژی پتانسیل کرنشی :

$$I_s^{(e)} = \frac{k^{(e)}}{2} (a_i - a_j)^2$$

$$I_s = \sum_1^N I_s^e$$

مقدار انرژی پتانسیل کرنشی کل

مقدار انرژی پتانسیل کل برای سازه نشان داده شده در شکل

$$I = I^{(1)} + I^{(2)} + I^{(3)} + I^{(4)} - \sum_{i=1}^5 R_i a_i$$

با جایگذاری

$$I = \frac{k^{(1)}}{2} (a_1 - a_3)^2 + \frac{k^{(2)}}{2} (a_2 - a_3)^2 + \frac{k^{(3)}}{2} (a_3 - a_4)^2 + \frac{k^{(4)}}{2} (a_4 - a_5)^2 - \sum_{i=1}^5 R_i a_i$$

با کمینه سازی رابطه بالا نسبت به تغییر مکانهای مفصلی

$$\frac{\partial I}{\partial a_i} = 0 \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial I}{\partial a_1} = k^{(1)}(a_1 - a_3) - R_1 = 0 \\ \frac{\partial I}{\partial a_2} = k^{(2)}(a_2 - a_3) - R_2 = 0 & a_2 = (a_p)_2 \\ \frac{\partial I}{\partial a_3} = k^{(1)}(a_3 - a_1) + k^{(2)}(a_3 - a_2) + k^{(3)}(a_3 - a_4) - R_3 = 0 \\ \frac{\partial I}{\partial a_4} = k^{(3)}(a_4 - a_3) + k^{(4)}(a_4 - a_5) - R_4 = 0 \\ \frac{\partial I}{\partial a_5} = k^{(4)}(a_5 - a_4) - R_5 = 0 & a_5 = 0.0 \end{cases}$$

$$Ka = R$$

اصل کار مجازي برای تعادل کل سازه :

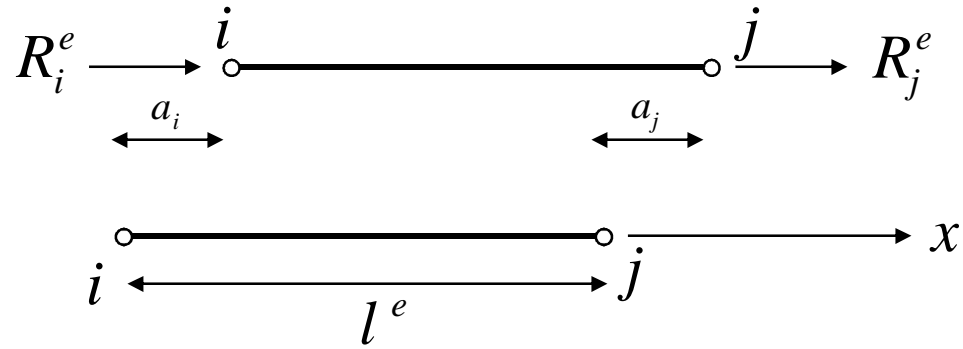
يك سازه فرضي تحت تاثیر بارهاي خارجي R_i در وضعیت تعادل است و تنشهاي داخلي S در آن ایجاد شده است. اگر سازه تحت سیستم بارگذاري مستقل ديگري قرار گرفته و تغيير مکانهاي a_i^* و کرنشهاي داخلي ϵ^* در آن ایجاد شود در این صورت کار انجام شده توسط نیروهای داخلی و خارجی در حین تغییر مکانهای مجازی برابر خواهد بود

$$W_I = W_R$$

$$\int_v \sigma \cdot \epsilon^* dv = \sum R_i a_i^*,$$

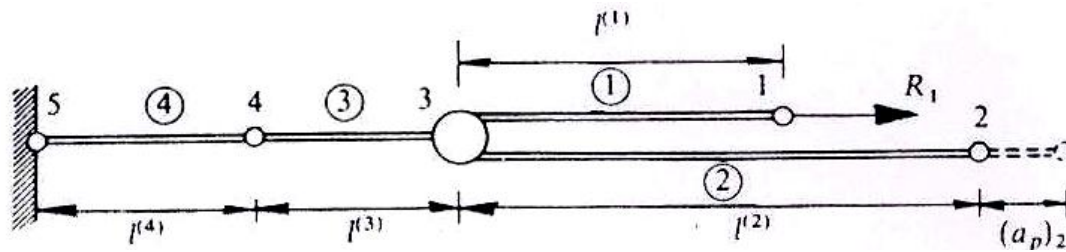
کار انجام شده توسط نیروهای داخلی برابر حاصل جمع کار انجام شده در هر یک از اعضاست

$$W_I = \sum_{e=1}^N W_I^e$$



$$s^e = E^{(e)} e^e \quad e^{*e} = (a_i^* - a_j^*) / l^{(e)}$$

$$\int_e s^e e^{*e} dv = A^e \int_e s^e e^{*e} dx = \left(\frac{EA}{l} \right)^e (a_i - a_j) (a_i^* - a_j^*)$$



با جایگذاری

$$k^{(1)}(a_1 - a_3)(a_1^* - a_3^*) + k^{(2)}(a_2 - a_3)(a_2^* - a_3^*) + k^{(3)}(a_3 - a_4)(a_3^* - a_4^*) + k^{(4)}(a_4 - a_5)(a_4^* - a_5^*) = R_1 a_1^* + R_2 a_2^* + R_3 a_3^* + R_4 a_4^* + R_5 a_5^*$$

با مرتب سازی داریم:

$$k^{(1)}(a_1 - a_3) = R_1$$

$$k^{(2)}(a_2 - a_3) = R_2$$

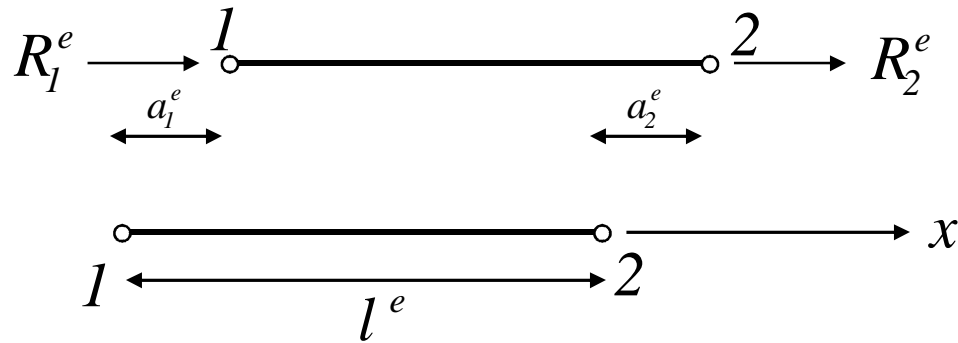
$$k^{(1)}(a_3 - a_1) + k^{(2)}(a_3 - a_2) + k^{(3)}(a_3 - a_4) = 0$$

$$k^{(3)}(a_4 - a_3) + k^{(4)}(a_4 - a_5) = 0$$

$$k^{(4)}(a_5 - a_4) = R_5$$

$$Ka = R$$

شماره گذاری موضعی عضو



رابطه سختی

$$R^{(e)} = K^{(e)} a^{(e)}$$

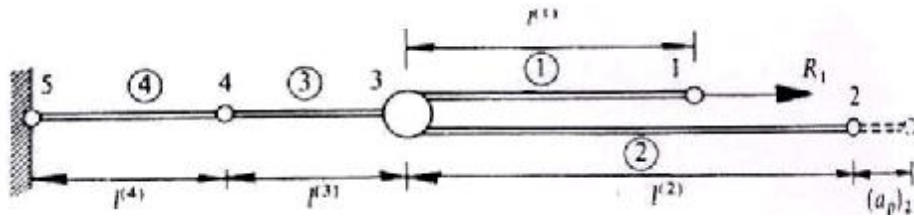
$$K^e = \begin{bmatrix} k^e & -k^e \\ -k^e & k^e \end{bmatrix}$$

$$a^e = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}^{(e)}$$

$$R^e = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix}^{(e)}$$

با فرض این که هر یک از اعضاء منفرد بگونه ای که در شکل نشان داده شده است ، قرار گرفته اند. بعبارت دیگر انتهای سمت چپ همواره انتهای شماره ۱ و انتهای سمت راست انتهای شماره ۲ منظور می شود .

شرط همخوانی تغییر مکانها در هر يك از مفاصلها



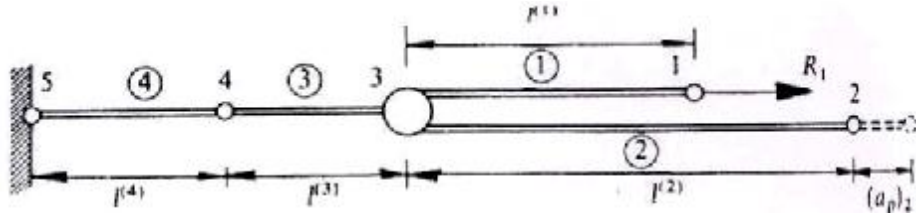
$$a_2^{(1)} = a_1$$

$$a_2^{(2)} = a_2$$

$$a_1^{(1)} = a_1^{(2)} = a_2^{(3)} = a_3$$

$$a_1^{(3)} = a_2^{(4)} = a_4$$

$$a_1^{(4)} = a_5$$



با اعمال شرط همخوانی تغییر مکانها

$$\begin{bmatrix} R_3 \\ R_1 \end{bmatrix}^{(1)} = k^{(1)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 \\ a_1 \end{bmatrix}$$

عضو ۱

$$\begin{bmatrix} R_3 \\ R_2 \end{bmatrix}^{(2)} = k^{(2)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

عضو ۲

$$\begin{bmatrix} R_4 \\ R_3 \end{bmatrix}^{(3)} = k^{(3)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_4 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

عضو ۳

$$\begin{bmatrix} R_5 \\ R_4 \end{bmatrix}^{(4)} = k^{(4)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_5 \\ a_4 \end{bmatrix}$$

عضو ۴

$$k^{(e)} = \left(\frac{EA}{l} \right)^{(e)}$$

فرآیند جمع بندی:

$$\begin{matrix} & i & j \\ \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} & \begin{bmatrix} K_{11}^{(e)} & K_{12}^{(e)} \\ K_{21}^{(e)} & K_{22}^{(e)} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_i \\ a_j \end{bmatrix} \\ & & = \begin{bmatrix} R_i \\ R_j \end{bmatrix}
 \end{matrix}$$

ماتریس سختی عضو فرضی e واقع شده بین مفصلهای i ، j بصورتی که در شکل نشان داده شده است در تشکیل ماتریس سختی کلی مشارکت می کند

روشهای مستقیم
 حذف مستقیم گوس
 تحویل چولسکی (یا چولسکی اصلاح شده)
 روشهای تکراری
 روش تکراری گوس - سایدال
 روش شیب مزدوج
 طرحهای تخفیفی

روش حذف گوس: تبدیل معادلات بصورت مثلثی

$$k'_{11}a_1 + k'_{12}a_2 + k'_{13}a_3 + \dots + k'_{1,n-1}a_{n-1} + k'_{1n}a_n = f'_1$$

$$k'_{22}a_2 + k'_{23}a_3 + \dots + k'_{2,n-1}a_{n-1} + k'_{2n}a_n = f'_2$$

$$k'_{33}a_3 + \dots + k'_{3,n-1}a_{n-1} + k'_{3n}a_n = f'_3$$

.....

$$k'_{n-1,n-1}a_{n-1} + k'_{n-1,n}a_n = f'_{n-1}$$

$$0 + k'_{nn}a_n = f'_n$$

روش حذف مستقیم گوس برای حل دستگاه معادلات:

$$\begin{aligned} k_{11}a_1 + k_{12}a_2 + k_{13}a_3 + \dots + k_{1n}a_n &= f_1 \\ k_{21}a_1 + k_{22}a_2 + k_{23}a_3 + \dots + k_{2n}a_n &= f_2 \\ \dots & \\ k_{n1}a_1 + k_{n2}a_2 + k_{n3}a_3 + \dots + k_{nn}a_n &= f_n \end{aligned}$$

یا

$$K_{ij}a_j = f_i$$

که در آن ai درجه آزادی i ام ، Kij عنصری از ماتریس سختی که درجات آزادی ai و aj را به هم مربوط می کند و fi نمایشگر نیرو یا عکس العمل مربوط به درجه آزادی ai است

مرحله تحویل یا حذف:

بکارگیری معادله i ام برای حذف a_i از همه معادلات زیرین، یعنی معادله $i+1$ ام تا معادله n ام،

تفریق حاصلضرب معادله i ام در ضریب $\frac{K_{ri}}{K_{ii}}$ از معادله r ام

برای مثال می توان از معادله اول به صورت زیر برای حذف a_1 از معادله ۲ تا n استفاده کرد.

$$\begin{aligned}
 & k_{11}a_1 + k_{12}a_2 + k_{13}a_3 + \dots + k_{1n}a_n = f_1 \\
 0 \cdot a_1 + \left(k_{22} - k_{12} \frac{k_{21}}{k_{11}}\right) a_2 + \left(k_{23} - k_{13} \frac{k_{21}}{k_{11}}\right) a_3 + \dots + \left(k_{2n} - k_{1n} \frac{k_{21}}{k_{11}}\right) a_n \\
 & \qquad \qquad \qquad = f_2 - f_1 \frac{k_{21}}{k_{11}} \\
 \dots \dots \dots \\
 0 a_1 + \left(k_{n2} - k_{12} \frac{k_{n1}}{k_{11}}\right) a_2 + \left(k_{n3} - k_{13} \frac{k_{n1}}{k_{11}}\right) a_3 + \dots + \left(k_{nn} - k_{1n} \frac{k_{n1}}{k_{11}}\right) a_n \\
 & \qquad \qquad \qquad = f_n - f_1 \frac{k_{n1}}{k_{11}}
 \end{aligned}$$

دستگاه معادلات اصلاح شده کماکان متقارن است.

تغییر مکانهای از پیش تعیین شده:

مثال فرض کنید که a_2 دارای مقدار از پیش تعیین شده ای برابر ap باشد. در این مورد حذف a_2 به سادگی با جایگزینی $a_2 = ap$ در معادلات ۳ تا n و سپس انتقال مقدار معلوم به سمت راست هر یک از معادلات صورت می گیرد.

$$\begin{aligned} k_{11}a_1 + k_{12}a_2 + k_{13}a_3 + \dots + k_{1n}a_n &= f_1 \\ 0 \cdot a_1 + k'_{22}a_2 + k'_{23}a_3 + \dots + k'_{2n}a_n &= f_2 \\ 0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + k'_{33}a_3 + \dots + k'_{3n}a_n &= f_3 - k'_{32}a_p \\ \dots & \\ 0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + k'_{n3}a_3 + \dots + k'_{nn}a_n &= f_n - k'_{n2}a_p \end{aligned}$$

برای حالت خاصی که در آن مقدار تغییر مکان از پیش تعیین شده - مثلاً بدلیل وجود تکیه گاه مفصلی - صفر باشد، روش مناسب این است که سطر و ستون مربوط به تغییر مکان صفر را از دستگاه معادلات حذف کنیم. عکس العمل تکیه گاهی را در صورت لزوم می توان بصورت جداگانه و با استفاده از نیروهای اعضایی که در مفصل مورد نظر مشترکند بدست آورد.

مثال - جمع بندی اعضاي با بارگذاري محوري

با مراجعه به سازه نشان داده شده در شکل و فرض مقادير زير

$$k^{(1)} = 1, \quad k^{(2)} = 2, \quad k^{(3)} = 3, \quad k^{(4)} = 4, \quad R_1 = 10, \quad (a_p)_2 = 2.$$

با جایگزینی آنها در رابطه سختي داریم:

$$a_1 + 0 \cdot a_2 - a_3 + 0 \cdot a_4 + 0 \cdot a_5 = 10$$

$$0 \cdot a_1 + 2a_2 - 2a_3 + 0 \cdot a_4 + 0 \cdot a_5 = R_2; \quad a_2 = 2$$

$$-a_1 - 2a_2 + 6a_3 - 3a_4 + 0 \cdot a_5 = 0$$

$$0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 - 3a_3 + 7a_4 - 4a_5 = 0$$

$$0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + 0 \cdot a_3 - 4a_4 + 4a_5 = R_5; \quad a_5 = 0.$$

مرحله حذف

$$a_1 + 0 \cdot a_2 - a_3 + 0 \cdot a_4 + 0 \cdot a_5 = 10$$

$$0 \cdot a_1 + 2a_2 - 2a_3 + 0 \cdot a_4 + 0 \cdot a_5 = R_2; \quad a_2 = 2$$

$$0 \cdot a_1 - 2a_2 + 5a_3 - 3a_4 + 0 \cdot a_5 = 10$$

$$0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 - 3a_3 + 7a_4 - 4a_5 = 0$$

$$0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + 0 \cdot a_3 - 4a_4 + 4a_5 = R_5; \quad a_5 = 0$$

حذف a_1

$$a_1 + 0 \cdot a_2 - a_3 + 0 \cdot a_4 + 0 \cdot a_5 = 10$$

$$0 \cdot a_1 + 2a_2 - 2a_3 + 0 \cdot a_4 + 0 \cdot a_5 = R_2; \quad a_2 = 2$$

$$0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + 5a_3 - 3a_4 + 0 \cdot a_5 = 14$$

$$0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 - 3a_3 + 7a_4 - 4a_5 = 0$$

$$0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + 0 \cdot a_3 - 4a_4 + 4a_5 = R_5; \quad a_5 = 0.$$

حذف a_2

$$a_1 + 0 \cdot a_2 - a_3 + 0 \cdot a_4 + 0 \cdot a_5 = 10$$

$$0 \cdot a_1 + 2a_2 - 2a_3 + 0 \cdot a_4 + 0 \cdot a_5 = R_2; \quad a_2 = 2$$

$$0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + 5a_3 - 3a_4 + 0 \cdot a_5 = 14$$

$$0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + 0 \cdot a_3 + \frac{26}{5}a_4 - 4a_5 = \frac{42}{5}$$

$$0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + 0 \cdot a_3 - 4a_4 + 4a_5 = R_5; \quad a_5 = 0.$$

حذف a_3

$$a_1 + 0 \cdot a_2 - a_3 + 0 \cdot a_4 + 0 \cdot a_5 = 10$$

$$0 \cdot a_1 + 2a_2 - 2a_3 + 0 \cdot a_4 + 0 \cdot a_5 = R_2; \quad a_2 = 2$$

$$0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + 5a_3 - 3a_4 + 0 \cdot a_5 = 14$$

$$0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + 0 \cdot a_3 + \frac{26}{5}a_4 - 4a_5 = \frac{42}{5}$$

$$0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + 0 \cdot a_3 + 0 \cdot a_4 + \frac{12}{13}a_5 = \frac{84}{13} + R_5; \quad a_5 = 0.$$

حذف a_4

مرحله جایگذاری پسرو :

$$R_5 = -\frac{84}{13}; \quad a_5 = 0,$$

$$a_4 = \frac{5}{26} \left(\frac{42}{5} \right) = \frac{21}{13},$$

$$a_3 = \frac{1}{5} \left(14 + 3 \cdot \frac{21}{13} \right) = \frac{49}{13},$$

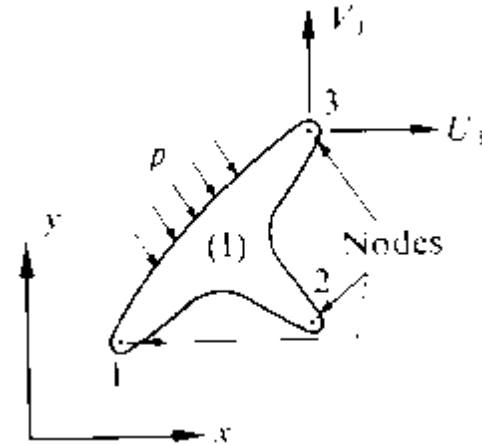
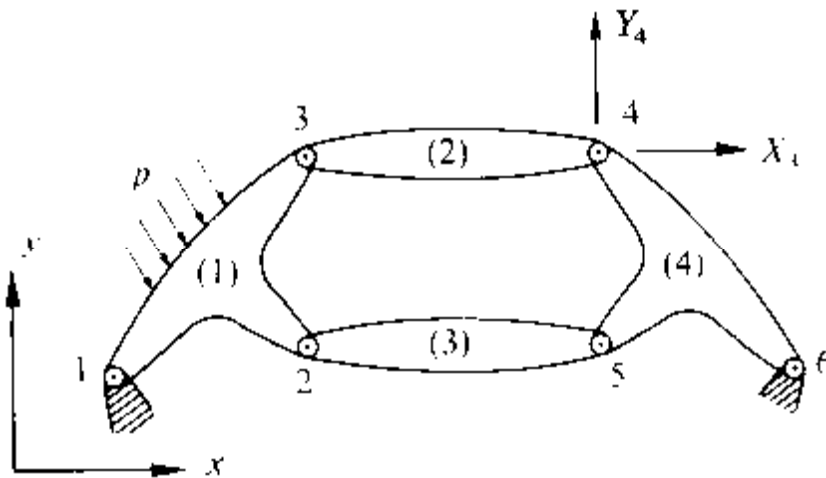
$$R_2 = 2(2) - 2 \left(\frac{49}{13} \right) = -\frac{46}{13}; \quad a_2 = 2,$$

$$a_1 = 10 + \frac{49}{13} = \frac{179}{13}.$$

اجزای محدود:

مراحل اساسی روش اجزای محدود:

- ۱- سازه مورد نظر به نواحی متمایز ناهمپوش موسوم به اجزاء تقسیم می شود.
- ۲- فرض می شود که این اجزاء تنها در تعداد محدودی از نقاط موسوم به نقاط گرهی به یکدیگر متصل بوده و با یکدیگر اندرکنش دارند
- ۳- ماتریس سختی و بردار بار هر یک از اجزاء محاسبه می شود.
- ۴- ماتریس سختی و بردار بار اجزاء جمع بندی شده و ماتریس سختی کلی و بردار بار کلی بدست می آیند.
- ۵- دستگاه معادلات حاصل برای بدست آوردن متغیرهای گرهی مجهول که در مورد مسائل سازه ای همان تغییر مکانهای گرهی اند، حل می شود.
- ۶- و سرانجام کمیت‌های ثانویه همچون مولفه های تنش و کرنش در داخل هر یک از اجزاء محاسبه می شود.

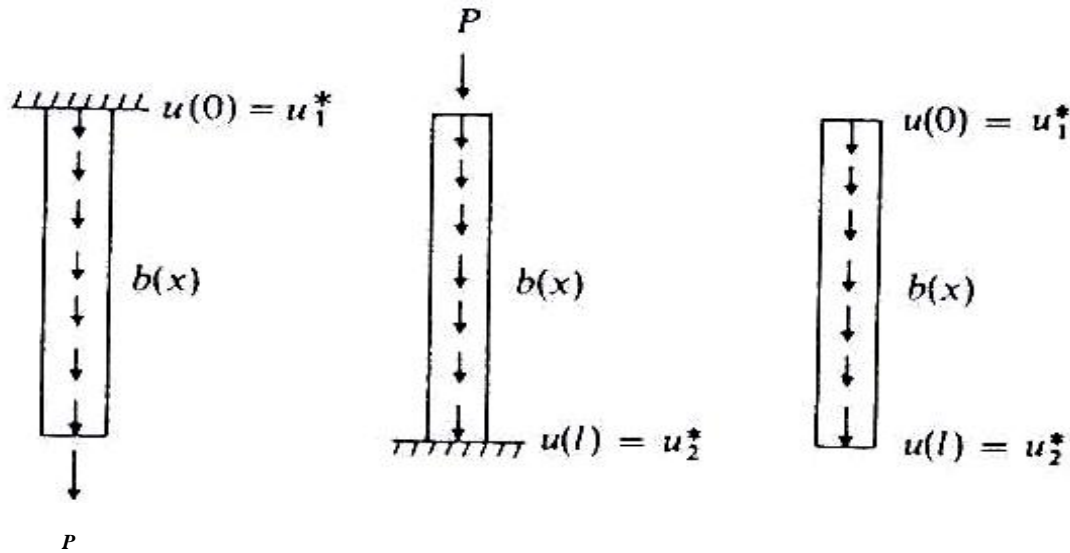


مرحله اول یعنی گسسته سازی : یکی از تفاوت‌های عمده روش اجزای محدود و روش تحلیل ماتریسی سازه ها است که از طریق آن تعداد متغیرهای مجهول مسئله از تعداد نامتناهی به تعداد متناهی تبدیل می شود.

محاسبه ماتریس سختی و بردار بار هر یک از اجزاء :

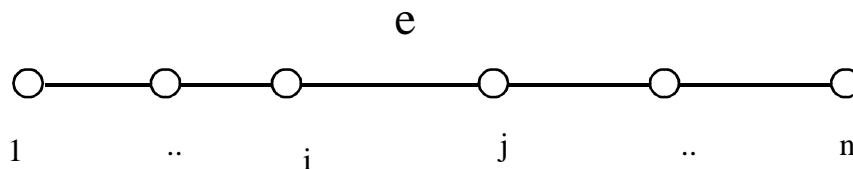
- ۱- پیوستار مورد نظر با استفاده از خطوط یا رویه های موهومی (فرضی) به تعدادی "اجزاء محدود" تقسیم می شود. هر چه اندازه اجزاء کوچکتر باشد نتایج حاصل از تحلیل دقیقتر خواهد بود.
- ۲- فرض می شود که اجزاء تنها در نقاط محدودی بر روی محیط آنها واقع شده به یکدیگر متصلند. تغییر مکان این نقاط موسوم به نقاط گرهی بمنزله مجهولات اصلی مسئله منظور خواهد شد.
- ۳- مجموعه ای از توابع بگونه ای انتخاب می شوند تا وضعیت تغییر مکان در داخل هر یک از اجزای محدود را بصورتی یکتا و منحصر بفرد بر حسب تغییر مکانهای گرهی تعریف کنند.
- ۴- توابع تغییر مکان امکان تعیین وضعیت کرنش در داخل هر جزء بر حسب تغییر مکان های گرهی آن را بصورتی یکتا و منحصر بفرد فراهم می کند. این کرنشها به نوبه خود وضعیت تنش را در داخل جزء و مرزهای آن بدست می دهند.
- ۵- مجموعه ای از نیروهای متمرکز گرهی بگونه ای تعریف می شود تا تنشهای مرزی و بارهای گسترده را متعادل کند.

اجزاء محدود يك بعدي:

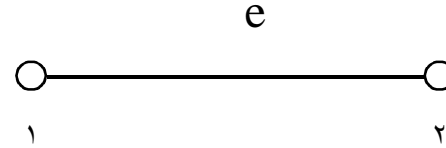


میله ای بطول l را که تحت تاثیر نیرویی حجمی برابر $b(x)$ در واحد طول و مجموعه ای از بارهای نقطه ای R_i قرار گرفته است در نظر بگیرید. علاوه بر این فرض می کنیم که مقدار تغییر مکان در تعدادی از نقاط میله مورد نظر معلوم باشد.

ابتدا میله مورد نظر را به اجزاء تقسیم می کنیم.



$$u^e(x) = a + bx$$



$$u^e(x_1) = a_1^e = a + bx_1$$

$$u^e(x_2) = a_2^e = a + bx_2$$

b, a

با حل دستگاه معادله برای

$$u^e(x) = \left(\frac{x_2 - x}{l^e} \right) a_1^e + \left(\frac{x - x_1}{l^e} \right) a_2^e$$

$$u^e(x) = N_1^e a_1^e + N_2^e a_2^e$$

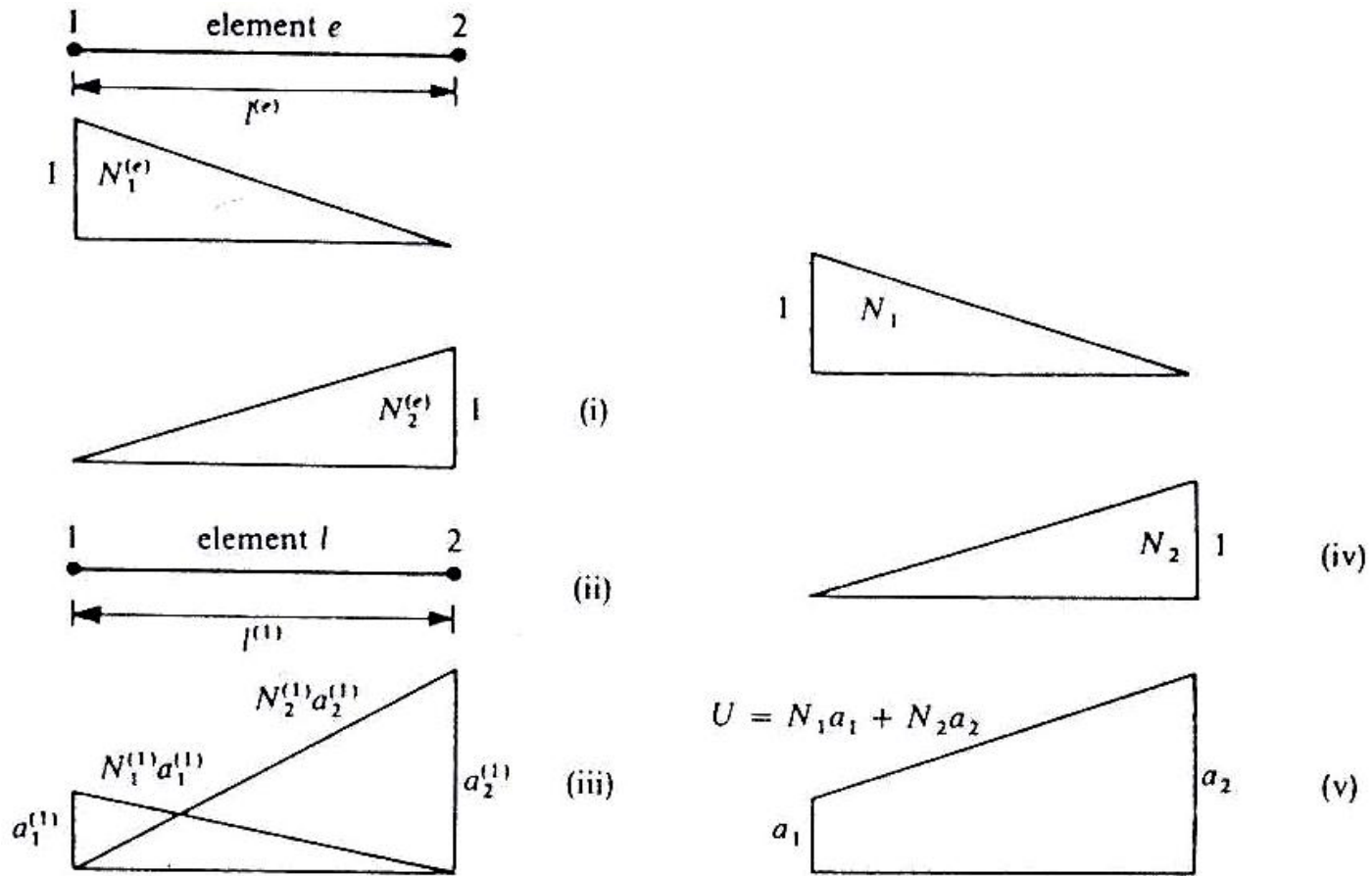
تابع تغییر مکان جزء

$$N_1^e = \left(\frac{x_2 - x}{l^e} \right) \quad N_2^e = \left(\frac{x - x_1}{l^e} \right)$$

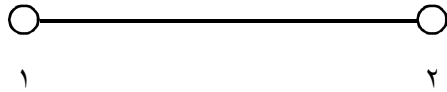
توابع شکل جزء

$$u^e(x) = [N_1 \quad N_2]^e \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}^e$$

$$u^e(x) = \mathbf{N}^e \mathbf{a}^e$$



توابع شکل باید شرایط خاصی را جهت حصول اطمینان از همگرایی نتایج به سمت جواب دقیق ،
 وقتیکه تعداد اجزاء مورد استفاده در تقریب افزایش می یابد، تامین کنند



انرژی پتانسیل کل جزء

$$I(e) = \frac{1}{2} \int_{v_e} e^{eT} s^e dv - \int_{x_e} u^{eT} b dx - R_1^e a_1^e - R_2^e a_2^e$$

گرنش محوري هر نقطه از داخل جزء

$$e^e = \frac{du^e}{dx} = \frac{dN_1^e}{dx} a_1^e + \frac{dN_2^e}{dx} a_2^e = \begin{bmatrix} \frac{dN_1^e}{dx} & \frac{dN_2^e}{dx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1^e \\ a_2^e \end{bmatrix} = \mathbf{B}^e \mathbf{a}^e$$

تغییر مکان ماتریس گرنش

$$\mathbf{B}^{(e)} = \left[\mathbf{B}_1^{(e)}, \mathbf{B}_2^{(e)} \right]$$

بردار تغییر مکانهای گرهی جزء

$$\mathbf{a}^{(e)} = \left[a_1^{(e)}, a_2^{(e)} \right]^T$$

$$\mathbf{B}^e = \left[\frac{dN_1^e}{dx}, \frac{dN_2^e}{dx} \right]$$

$$\mathbf{B}^e = \mathbf{S} \mathbf{N}^e \quad \mathbf{S} = \frac{d(\cdot)}{dx}$$

$$\mathbf{N}^e = \left[N_1^e \quad N_2^e \right]$$

تابع تغییر مکان جزء

$$u^e(x) = \mathbf{N}^e \mathbf{a}^e$$

تنش محوري هر نقطه از داخل جزء

$$\mathbf{s}^e = \mathbf{E} \mathbf{e}^e$$

نماد گذاری جبری محاسبه رابطه سختی

با جایگذاری

$$I(e) = \frac{1}{2} \int_{x_e} EA \left(\frac{du^e}{dx} \right)^2 dx - \int_{x_e} u^e b dx - R_1^e a_1^e - R_2^e a_2^e$$

$$I(e) = \int_{x_e} \frac{EA}{2} \left(\frac{dN_1^e}{dx} a_1^e + \frac{dN_2^e}{dx} a_2^e \right)^2 dx - \int_{x_e} (N_1^e a_1^e + N_2^e a_2^e) b dx - R_1^e a_1^e - R_2^e a_2^e$$

$$\int_{x_e} \frac{dN_1^e}{dx} \frac{dN_1^e}{dx} dx = \frac{1}{l^e}$$

$$\int_{x_e} \frac{dN_1^e}{dx} \frac{dN_2^e}{dx} dx = \frac{-1}{l^e}$$

$$\int_{x_e} \frac{dN_2^e}{dx} \frac{dN_1^e}{dx} dx = \frac{-1}{l^e}$$

$$\int_{x_e} \frac{dN_2^e}{dx} \frac{dN_2^e}{dx} dx = \frac{1}{l^e}$$

$$\int_{x_e} N_1^e dx = \frac{l^e}{2}$$

$$\int_{x_e} N_2^e dx = \frac{l^e}{2}$$

$$I(e) = \frac{EA}{2l^e} (a_1^{e2} - 2a_1^e a_2^e + a_2^{e2}) - \frac{bl^e}{2} (a_1^e + a_2^e) - R_1^e a_1^e - R_2^e a_2^e$$

با مشتق گیری نسبت به تغییر مکانهای گرهی

$$\frac{\partial I(e)}{\partial a_1^e} = \frac{EA}{l^e} (a_1^e - a_2^e) - \frac{bl^e}{2} - R_1^e = 0.0$$

$$\frac{\partial I(e)}{\partial a_2^e} = \frac{EA}{l^e} (-a_1^e + a_2^e) - \frac{bl^e}{2} - R_2^e = 0.0$$

$$\frac{EA}{l^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1^e \\ a_2^e \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{bl^e}{2} \\ \frac{bl^e}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1^e \\ R_2^e \end{bmatrix}$$

$$K^e a^e + f^e = R^e$$

نماد گذاری ماتریسی محاسبه رابطه سختی

$$I(e) = \frac{1}{2} \int_{v_e} e^{eT} s^e dv - \int_{x_e} u^{eT} b dx - R_1^e a_1^e - R_2^e a_2^e$$

با جایگذاری

$$e^e = B^e a^e \quad s^e = E e^e \quad u^e(x) = N^e a^e$$

$$I(e) = \frac{1}{2} \int_{v_e} a^{eT} [B^{eT} E A B^e] a^e dx - \int_{x_e} a^{eT} [N^{eT}] b dx - a^{eT} R^e$$

$$I(e) = \frac{1}{2} a^{eT} \left[\int_{v_e} B^{eT} E A B^e dx \right] a^e - a^{eT} \left[\int_{x_e} N^{eT} b dx \right] - a^{eT} [R^e]$$

با فرض

$$K^e = \int_{v_e} B^{eT} E A B^e dx \quad f^e = \int_{x_e} N^{eT} b dx$$

$$I(e) = \frac{1}{2} a^{eT} K^e a^e + a^{eT} f^e - a^{eT} R^e$$

$$I(e) = \frac{1}{2} \mathbf{a}^{eT} \mathbf{K}^e \mathbf{a}^e + \mathbf{a}^{eT} \mathbf{f}^e - \mathbf{a}^{eT} \mathbf{R}^e$$

با مشتق گیری نسبت به تغییر مکانهای گرهی

$$\frac{\partial I(e)}{\partial \mathbf{a}^e} = \frac{1}{2} \mathbf{K}^e \mathbf{a}^e + \frac{1}{2} [\mathbf{a}^{eT} \mathbf{K}^e]^T + \mathbf{f}^e - \mathbf{R}^e = 0.0$$

با توجه به رابطه $\mathbf{K}^{eT} = \mathbf{K}^e$

$$\mathbf{K}^e \mathbf{a}^e + \mathbf{f}^e = \mathbf{R}^e$$

$$\mathbf{K}^e = \frac{EA}{l^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

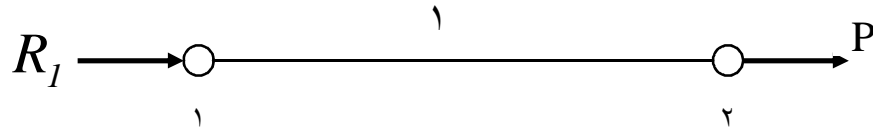
$$\mathbf{R}^e = \begin{bmatrix} R_1^e \\ R_2^e \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}^e = - \begin{bmatrix} \frac{bl^e}{2} \\ \frac{bl^e}{2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}^e = \begin{bmatrix} a_1^e \\ a_2^e \end{bmatrix}$$

با فرض استفاده از یک جزئی

صورت ماتریسی



$$Ka + f = R$$

$$K = \sum_{e=1} K^e \quad f = \sum_{e=1} f^e$$

$$R = \begin{bmatrix} R_1 \\ p \end{bmatrix} \quad a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

تحت شرایط تکیه گاهی $a_1 = \bar{a}_1 = 0.0$

$$\frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{a}_1 \\ a_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{bl}{2} \\ \frac{bl}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ p \end{bmatrix}$$

یا

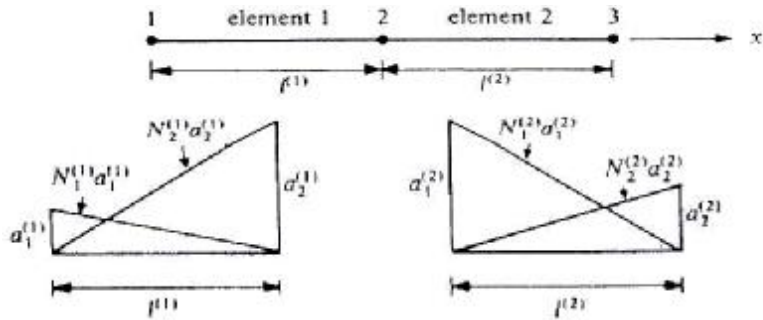
$$a_2 = l \left(p + \frac{bl}{2} \right) / EA \quad R_1 = -(p + bl)$$

با حل دستگاه معادله

$$\left(\frac{du}{dx} \right)^{(1)} = \left(\frac{dN_1^{(1)}}{dx} \right) a_1^{(1)} + \left(\frac{dN_2^{(1)}}{dx} \right) a_2^{(1)} = \frac{a_2}{l}$$

مقدار کرنش در داخل جزء

تحلیل سازه با استفاده از دو جزء:



(i)

(ii)

مفهوم توابع شکل کلی و تابع تغییر مکان کلی

$$N_1 = N_1^e \quad e = 1$$

$$N_1 = 0.0 \quad e \neq 1$$

$$N_2 = N_2^e \quad e = 1$$

$$N_2 = N_1^e \quad e = 2$$

(iii)

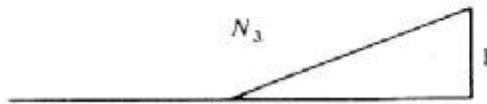
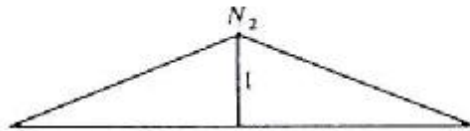
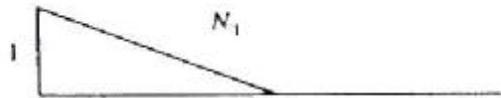
$$N_3 = N_2^e \quad e = 2$$

$$N_3 = 0.0 \quad e \neq 2$$

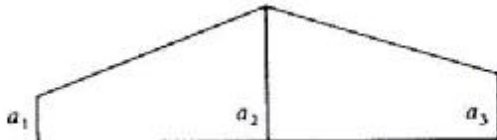
(iv)

$$U(x) = N_1(x)a_1 + N_2(x)a_2 + N_3(x)a_3$$

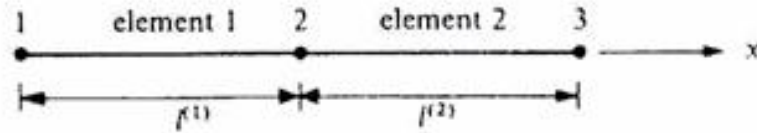
$$u(x) = \mathbf{N} \mathbf{a}$$



$$u = N_1 a_1 + N_2 a_2 + N_3 a_3$$



عمیات جبری



$$U(x) = N_1(x)a_1 + N_2(x)a_2 + N_3(x)a_3$$

$$\frac{du(x)}{dx} = \frac{dN_1(x)}{dx}a_1 + \frac{dN_2(x)}{dx}a_2 + \frac{dN_3(x)}{dx}a_3.$$

کرنش ها

انرژی پتانسیل کل بر حسب تابع تغییر مکان کلی (توابع شکل کلی)

$$I = \frac{1}{2} \int_x EA \left(\frac{du(x)}{dx} \right)^2 dx - \int_x u(x) b dx - R_1 a_1 - R_2 a_2 - R_3 a_3$$

$$\begin{aligned} I = & \frac{EA}{2} \int_0^l \left[\left(\frac{dN_1}{dx} \right)^2 a_1^2 + \frac{dN_1}{dx} a_1 \frac{dN_2}{dx} a_2 + \frac{dN_1}{dx} a_1 \frac{dN_3}{dx} a_3 \right. \\ & + \frac{dN_2}{dx} a_2 \frac{dN_1}{dx} a_1 + \left(\frac{dN_2}{dx} \right)^2 a_2^2 + \frac{dN_2}{dx} a_2 \frac{dN_3}{dx} a_3 \\ & \left. + \frac{dN_3}{dx} a_3 \frac{dN_1}{dx} a_1 + \frac{dN_3}{dx} a_3 \frac{dN_2}{dx} a_2 + \left(\frac{dN_3}{dx} \right)^2 a_3^2 \right] dx \\ & + b \int_0^l [N_1 a_1 + N_2 a_2 + N_3 a_3] dx - R_1 a_1 - R_2 a_2 - R_3 a_3 \end{aligned}$$

انرژی پتانسیل کل بر حسب توابع تغییر مکان جز (توابع شکل جز)

$$I = \frac{1}{2} \int_x EA \left(\frac{du(x)}{dx} \right)^2 dx - \int_x u(x) b dx - R_1 a_1 - R_2 a_2 - R_3 a_3$$

$$I = I_1 + I_2$$

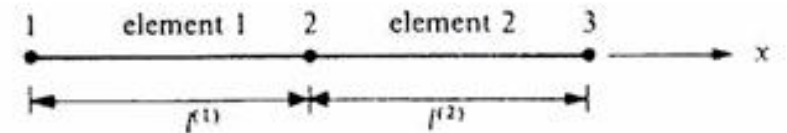
$$I_1 = \frac{1}{2} \int_x EA \left(\frac{du(x)}{dx} \right)^2 dx - \int_x u(x) b dx$$

$$I_2 = -R_1 a_1 - R_2 a_2 - R_3 a_3$$

$$I_1 = I_1^{(1)} + I_1^{(2)}$$

$$I_1^{(1)} = \frac{EA}{2l^{(1)}} (a_1^2 - 2a_1 a_2 + a_2^2) - \frac{bl^{(1)}}{2} (a_1 + a_2)$$

$$I_1^{(2)} = \frac{EA}{2l^{(2)}} (a_2^2 - 2a_2 a_3 + a_3^2) - \frac{bl^{(2)}}{2} (a_2 + a_3)$$



مینیم سازی نسبت به تغییر مکانهای گرهی

$$I = \sum_{e=1}^2 I_1^e - R_1 a_1 - R_2 a_2 - R_3 a_3$$

$$\frac{\partial I}{\partial a_1} = \frac{\partial I^{(1)}}{\partial a_1} - R_1 = 0$$

$$\frac{EA}{l^{(1)}}(a_1 - a_2) - \frac{bl^{(1)}}{2} - R_1 = 0$$

$$\frac{\partial I}{\partial a_2} = \frac{\partial I^{(1)}}{\partial a_2} + \frac{\partial I^{(2)}}{\partial a_2} - R_2 = 0$$

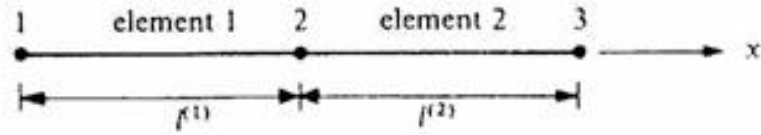
$$\left[\frac{EA}{l^{(1)}}(-a_1 + a_2) - \frac{bl^{(1)}}{2} \right] + \left[\frac{EA}{l^{(2)}}(a_2 - a_3) - \frac{bl^{(2)}}{2} \right] - R_2 = 0$$

$$\frac{\partial I}{\partial a_3} = \frac{\partial I^{(2)}}{\partial a_3} - R_3 = 0$$

$$\left[\frac{EA}{l^{(2)}}(-a_2 + a_3) - \frac{bl^{(2)}}{2} - R_3 \right] = 0$$

$$\begin{bmatrix} k^1 & -k^1 & 0 \\ -k^1 & k^1 + k^2 & -k^2 \\ 0 & -k^2 & k^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{bl^1}{2} \\ \frac{bl^1}{2} + \frac{bl^2}{2} \\ \frac{bl^2}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Ka} + \mathbf{f} = \mathbf{R}$$



عملیات ماتریسی با استفاده از روابط سختی اجزا

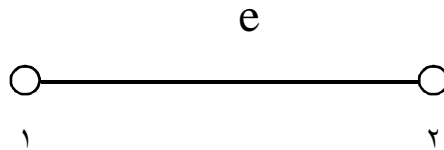
$$Ka + f = R$$

$$K = \sum_{e=1} K^e$$

$$f = \sum_{e=1} f^e$$

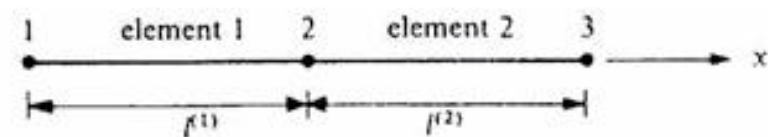
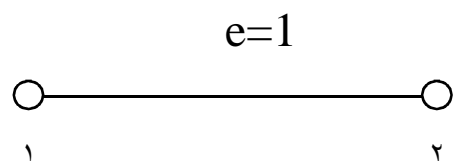
$$R = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix}$$

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$



$$K^e = \frac{EA}{l^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad f^e = - \begin{bmatrix} \frac{bl^e}{2} \\ \frac{bl^e}{2} \end{bmatrix}$$

جمع بندی جز (۱)



$$\mathbf{K}^1 = \begin{bmatrix} k^1 & -k^1 \\ -k^1 & k^1 \end{bmatrix}$$

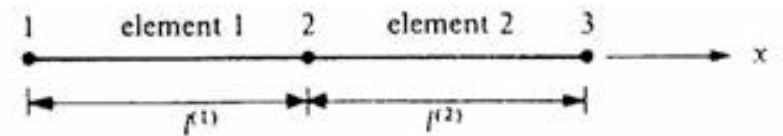
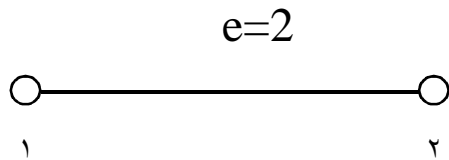
$$\mathbf{f}^1 = - \begin{bmatrix} \frac{bl^1}{2} \\ \frac{bl^1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k^1 & -k^1 & 0 \\ -k^1 & k^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f} = - \begin{bmatrix} \frac{bl^1}{2} \\ \frac{bl^1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k^1 & -k^1 & 0 \\ -k^1 & k^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{f} = - \begin{bmatrix} \frac{bl^1}{2} \\ \frac{bl^1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

جمع بندی جز (۲)



$$\mathbf{K}^2 = \begin{bmatrix} k^2 & -k^2 \\ -k^2 & k^2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{f}^2 = - \begin{bmatrix} \frac{bl^2}{2} \\ \frac{bl^2}{2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k^1 & -k^1 & 0 \\ -k^1 & k^1 + k^2 & -k^2 \\ 0 & -k^2 & k^2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{f} = - \begin{bmatrix} \frac{bl^1}{2} \\ \frac{bl^1}{2} + \frac{bl^2}{2} \\ \frac{bl^2}{2} \end{bmatrix}$$

حل دستگاه معادلات

در صورتی که اندازه اجزاء یکسان باشد، $l^{(1)} = l^{(2)} = \frac{l}{2}$

با منظور کردن $R_3 = p, R_2 = 0, \bar{a}_1 = 0$

$$\begin{bmatrix} k^1 & -k^1 & 0 \\ -k^1 & k^1 + k^2 & -k^2 \\ 0 & -k^2 & k^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{a}_1 = 0.0 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{bl^1}{2} \\ \frac{bl^1}{2} + \frac{bl^2}{2} \\ \frac{bl^2}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ 0.0 \\ p \end{bmatrix}$$

$$R_1 = bl + P, \quad R_1 = -(p + bl)$$

$$a_2 = \frac{l}{2AE} \left(P + \frac{3bl}{4} \right),$$

$$a_3 = \frac{l}{2AE} \left(P + \frac{bl}{2} \right).$$

گرنش در داخل جزء ۱

$$\begin{aligned}\left(\frac{du}{dx}\right)^{(1)} &= \left(\frac{dN_1^{(1)}}{dx}\right) a_1^{(1)} + \left(\frac{dN_2^{(1)}}{dx}\right) a_2^{(1)} \\ &= -a_1^{(1)}/l^{(1)} + a_2^{(1)}/l^{(1)} \\ &= a_2/l^{(1)}.\end{aligned}$$

گرنش در داخل جزء ۲

$$\begin{aligned}\left(\frac{du}{dx}\right)^{(2)} &= \left(\frac{dN_1^{(2)}}{dx}\right) a_1^{(2)} + \left(\frac{dN_2^{(2)}}{dx}\right) a_2^{(2)} \\ &= -a_2/l^{(2)} + a_3/l^{(2)}.\end{aligned}$$

خواص توابع شکل

فرض کنید که جمله انتگرالده موجود در معادلات انتگرالی یا تابعك ها در بردارنده مشتق‌هایی تا مرتبه $(m+1)$ ام باشند { کرنشها با مشتق $(m+1)$ ام تغییر مکان تعریف شوند}. در این صورت توابع شکل مورد استفاده باید شرایط زیر را برای تضمین همگرایی جوابها بهنگام کاهش اندازه اجزاء تامین کنند.

- (i) **شرایط همخوانی** - توابع شکل باید از پیوستگی $C(m)$ مابین اجزاء برخوردار باشند (دقت کنید که پیوستگی $C(0)$ به معنی پیوستگی متغیر اصلی ، پیوستگی $C(1)$ به معنی پیوستگی مشتق اول ، پیوستگی $C(2)$ به معنی پیوستگی مشتق دوم و غیر آن است
- (ii) **شرط کمال** - توابع شکل باید در درون اجزاء از پیوستگی $C(m+1)$ برخوردار باشند. {شرط کرنش ثابت}

مفاهیم پیشرفته اجزاء محدود یک بعدی - اجزاء لاگرانژی

بسط چند جمله ای مربوط به نمایش تقریبی متغیری چون u (مثلاً تغییر مکانهای محوری) در داخل یک جزء یک بعدی

$$u = p_0 + p_1x + p_2x^2 + \dots,$$

$$u = p_0 + p_1 x.$$

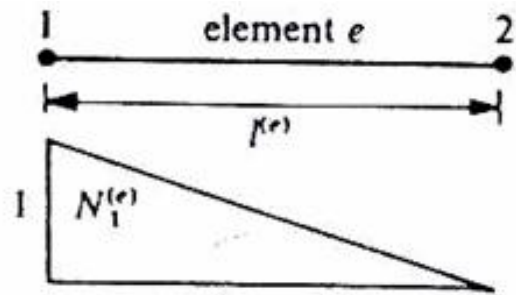
مورد يك چند جمله اي خطي بايد از جزئي دو گره ي استفاده كنيم

براي جزء خطي نمونه e با طول $l^{(e)}$ و گره هاي ۱ و ۲ به ترتيب در $x_1^{(e)}$ و $x_2^{(e)}$

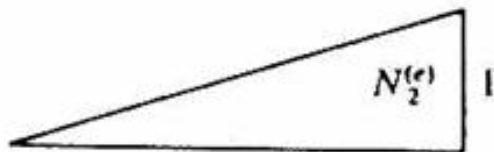
$$u(x_1^{(e)}) = a_1^{(e)} = p_0 + p_1 x_1^{(e)},$$

$$u = N_1^{(e)} a_1^{(e)} + N_2^{(e)} a_2^{(e)},$$

$$u(x_2^{(e)}) = a_2^{(e)} = p_0 + p_1 x_2^{(e)},$$



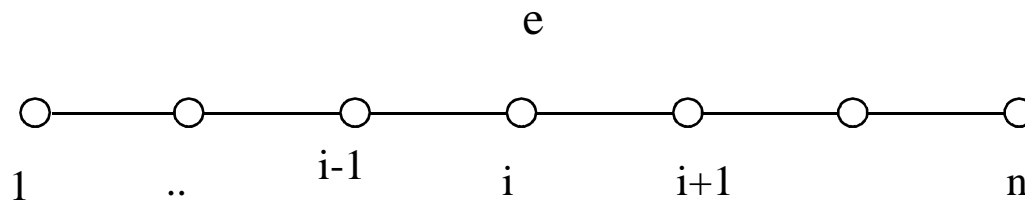
$$N_1^{(e)} = (x_2^{(e)} - x) / l^{(e)}$$



$$N_2^{(e)} = (x - x_1^{(e)}) / l^{(e)}$$

توابع درونیاب لاگرانژی

تابع شکل لاگرانژی از درجه $(n-1)$ ام مربوط به گر i ام از یک جزء n گرهی



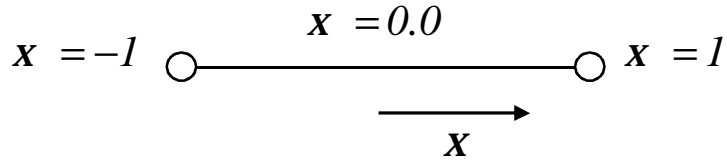
$$N_i^{(e)}(x) = \frac{(x - x_1^{(e)})(x - x_2^{(e)}) \cdots (x - x_{i-1}^{(e)})(x - x_{i+1}^{(e)}) \cdots (x - x_n)}{(x_i^{(e)} - x_1^{(e)})(x_i^{(e)} - x_2^{(e)}) \cdots (x_i^{(e)} - x_{i-1}^{(e)})(x_i^{(e)} - x_{i+1}^{(e)}) \cdots (x_i^{(e)} - x_n^{(e)})}$$

در این مرحله دستگاه مختصات بدون بعد ξ را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$\xi = -1$ در انتهای چپ جزء

$\xi = 0$ در مرکز جزء

$\xi = 1$ در انتهای راست جزء



توابع شکل يك جزء خطي دو گرهه با گره هاي $x_1 = -1$ و $x_2 = +1$

$$N_1^{(e)} = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{1}{2}(1 - x)$$

$$N_2^{(e)} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{1}{2}(1 + x)$$

توابع شکل یک جزء ۳ گرهی درجه دوم باگره های

$$x_3 = +1 \quad x_2 = 0 \quad x_1 = -1$$

$$N_1^{(e)} = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{x}{2}(x-1)$$

$$N_2^{(e)} = \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = (1+x)(1-x)$$

$$N_3^{(e)} = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{x}{2}(x+1)$$

توابع شکل یک جزء 4 گرهی درجه سوم باگره های

$$x_4 = +1 \quad x_3 = +1/3 \quad x_2 = -1/3 \quad x_1 = -1$$

$$N_1^{(e)} = \frac{(\xi-\xi_2)(\xi-\xi_3)(\xi-\xi_4)}{(\xi_1-\xi_2)(\xi_1-\xi_3)(\xi_1-\xi_4)} = -\frac{9}{16}(\xi+\frac{1}{3})(\xi-\frac{1}{3})(\xi-1),$$

$$N_2^{(e)} = \frac{(\xi-\xi_1)(\xi-\xi_3)(\xi-\xi_4)}{(\xi_2-\xi_1)(\xi_2-\xi_3)(\xi_2-\xi_4)} = \frac{27}{16}(\xi+1)(\xi-\frac{1}{3})(\xi-1),$$

$$N_3^{(e)} = \frac{(\xi-\xi_1)(\xi-\xi_2)(\xi-\xi_4)}{(\xi_3-\xi_1)(\xi_3-\xi_2)(\xi_3-\xi_4)} = -\frac{27}{16}(\xi+1)(\xi+\frac{1}{3})(\xi-1),$$

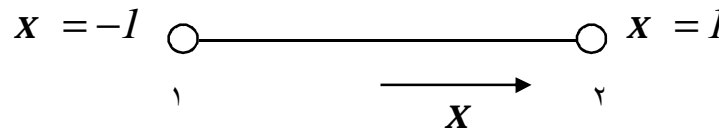
$$N_4^{(e)} = \frac{(\xi-\xi_1)(\xi-\xi_2)(\xi-\xi_3)}{(\xi_4-\xi_1)(\xi_4-\xi_2)(\xi_4-\xi_3)} = \frac{9}{16}(\xi+1)(\xi+\frac{1}{3})(\xi-\frac{1}{3}).$$

جزء میله ای تحت بار گذاری محوری - نسخه هم پارامتر

انرژی پتانسیل کل میله ای تحت بار گذاری محوری

$$I = \frac{1}{2} \int_x EA \left(\frac{du(x)}{dx} \right)^2 dx - \int_x u(x) b dx - \sum R_i a_i$$

جزء خطی دو گرهی



$$u(\xi)^{(e)} = [N_1^{(e)}, N_2^{(e)}] \begin{bmatrix} a_1^{(e)} \\ a_2^{(e)} \end{bmatrix} \\ = \mathbf{N}^{(e)} \mathbf{a}^{(e)}$$

تابع تغییر مکان یک جزء خطی نمونه e با گره های ۱ و ۲

$$x(\xi)^{(e)} = [N_1^{(e)}, N_2^{(e)}] \begin{bmatrix} x_1^{(e)} \\ x_2^{(e)} \end{bmatrix} \\ = \mathbf{N}^{(e)} \mathbf{x}^{(e)}$$

مختصات x

مختصات دو گره جزء

$x_1^{(e)}$ و $x_2^{(e)}$

$$N_1^{(e)} = \frac{l}{2}(1-x)$$

$$N_2^{(e)} = \frac{l}{2}(1+x)$$

$$x(\mathbf{X}) = x_c + l^{(e)}\mathbf{X}$$

$$\mathbf{X} = \frac{x - x_c}{l^{(e)}}$$

رابطه نگاشت

جزء هم پارامتر:

هندسۀ جزء با استفاده از همان توابع شکل بکار گرفته شده در تعریف تابع تغییر مکان تعریف شده است

محاسبه $(du/dx)^{(e)}$

$$\begin{aligned} \left(\frac{du}{dx}\right)^{(e)} &= \left[\left(\frac{dN_1}{dx}\right)^{(e)}, \left(\frac{dN_2}{dx}\right)^{(e)} \right] \begin{bmatrix} a_1^{(e)} \\ a_2^{(e)} \end{bmatrix} \\ &= [B_1^{(e)}, B_2^{(e)}] \begin{bmatrix} a_1^{(e)} \\ a_2^{(e)} \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{B}^{(e)} \mathbf{a}^{(e)}, \end{aligned}$$

$$\left(\frac{dN_1}{dx}\right)^{(e)} = \left(\frac{dN_1}{d\xi}\right)^{(e)} \left(\frac{d\xi}{dx}\right)^{(e)},$$

$$\left(\frac{dN_2}{dx}\right)^{(e)} = \left(\frac{dN_2}{d\xi}\right)^{(e)} \left(\frac{d\xi}{dx}\right)^{(e)}.$$

با مشتق گیری از رابطه نگاشت نسبت به ξ

$$\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^{(e)} = \left(\frac{dN_1}{d\xi}\right)^{(e)} x_1^{(e)} + \left(\frac{dN_2}{d\xi}\right)^{(e)} x_2^{(e)},$$

با توجه به رابطه

$$\left(\frac{dN_1}{dx}\right)^{(e)} = -\frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{dN_2}{dx}\right)^{(e)} = \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^{(e)} = \frac{x_2^{(e)} - x_1^{(e)}}{2} = \frac{l^{(e)}}{2}$$

$$dx = \frac{l^{(e)}}{2} d\xi$$

$$\left(\frac{dN_1}{d\xi}\right)^{(e)} = -\frac{1}{l^{(e)}}$$

$$\left(\frac{dN_2}{d\xi}\right)^{(e)} = \frac{1}{l^{(e)}}$$

مشارکت جزء نمونه e در مقدار انرژی پتانسیل کل با صرف نظر از بارهای نقطه‌ای

$$I = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} EA \left(\frac{du(x)}{dx} \right)^2 dx - \int_{x_1}^{x_2} u(x) b dx$$

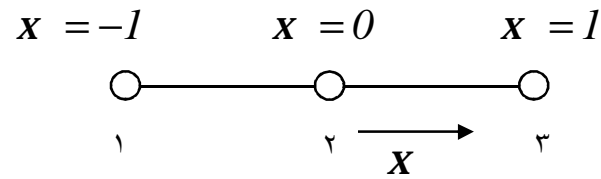
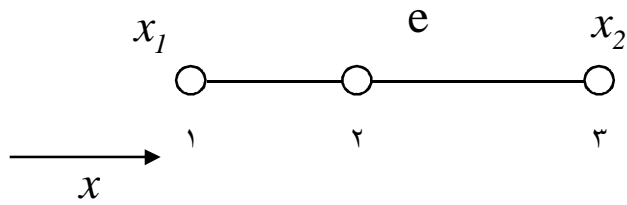
$$\begin{aligned}
I^{(e)} &= \int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}} \frac{(EA)^{(e)}}{2} \left[\left(\frac{du}{dx} \right)^{(e)} \right]^2 dx - \int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}} b^{(e)} u^{(e)} dx \\
&= \int_{-1}^{+1} \frac{(EA)^{(e)}}{2} \left[\left(\frac{du}{dx} \right)^{(e)} \right]^2 \frac{l^{(e)}}{2} d\xi - \int_{-1}^{+1} b^{(e)} u^{(e)} \frac{l^{(e)}}{2} d\xi \\
&= \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} [a_1^{(e)}, a_2^{(e)}] \begin{bmatrix} B_1^{(e)} \\ B_2^{(e)} \end{bmatrix} D^{(e)} [B_1^{(e)}, B_2^{(e)}] \begin{bmatrix} a_1^{(e)} \\ a_2^{(e)} \end{bmatrix} \frac{l^{(e)}}{2} d\xi \\
&\quad - \int_{-1}^{+1} [a_1^{(e)}, a_2^{(e)}] \begin{bmatrix} N_1^{(e)} \\ N_2^{(e)} \end{bmatrix} b^{(e)} \frac{l^{(e)}}{2} d\xi \\
&= \frac{1}{2} [a_1^{(e)}, a_2^{(e)}] \left[\int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} -1/l^{(e)} \\ 1/l^{(e)} \end{bmatrix} (EA)^{(e)} [-1/l^{(e)}, 1/l^{(e)}] \frac{l^{(e)}}{2} d\xi \right] \begin{bmatrix} a_1^{(e)} \\ a_2^{(e)} \end{bmatrix} \\
&\quad - [a_1^{(e)}, a_2^{(e)}] \left[\int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-\xi) \\ \frac{1}{2}(1+\xi) \end{bmatrix} b^{(e)} \frac{l^{(e)}}{2} d\xi \right] \\
&= \frac{1}{2} [a^{(e)}]^T \mathbf{K}^{(e)} a^{(e)} + [a^{(e)}]^T f^{(e)},
\end{aligned}$$

$$\mathbf{K}^{(e)} = \left(\frac{EA}{l} \right)^{(e)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad f^{(e)} = -(bl)^{(e)} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

جزء درجه دوم سه گرهی

جزء ۳ گرهی درجه دوم باگره های

$$x_3 = +1 \quad x_2 = 0 \quad x_1 = -1$$



فرمولبندی هم پارامتر

$$u(\xi)^{(e)} = [N_1^{(e)}, N_2^{(e)}, N_3^{(e)}] \begin{bmatrix} a_1^{(e)} \\ a_2^{(e)} \\ a_3^{(e)} \end{bmatrix}$$

$$= \mathbf{N}^{(e)} \mathbf{a}^{(e)}$$

$$x(\xi)^{(e)} = [N_1^{(e)}, N_2^{(e)}, N_3^{(e)}] \begin{bmatrix} x_1^{(e)} \\ x_2^{(e)} \\ x_3^{(e)} \end{bmatrix}$$

$$= \mathbf{N}^{(e)} \mathbf{x}^{(e)}$$

$$\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^{(e)} = \left(\frac{dN_1}{d\xi}\right)^{(e)} x_1^{(e)} + \left(\frac{dN_2}{d\xi}\right)^{(e)} x_2^{(e)} + \left(\frac{dN_3}{d\xi}\right)^{(e)} x_3^{(e)}.$$

با مشتق گیری از توابع شکل

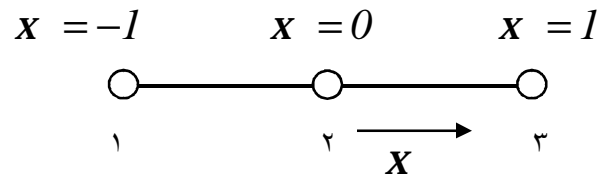
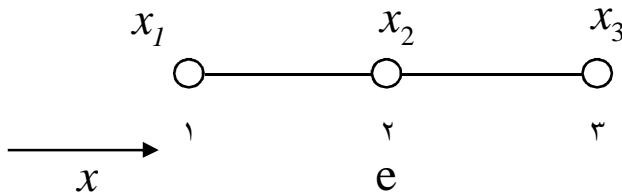
$$\left(\frac{dN_1}{d\xi}\right)^{(e)} = \xi - \frac{1}{2},$$

$$\left(\frac{dN_2}{d\xi}\right)^{(e)} = -2\xi,$$

$$\left(\frac{dN_3}{d\xi}\right)^{(e)} = \xi + \frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{dX}\right)^{(e)} &= \left(x - \frac{1}{2}\right)x_1^{(e)} - 2x x_2^{(e)} + \left(x + \frac{1}{2}\right)x_3^{(e)} \\ &= \frac{(x_3^{(e)} - x_1^{(e)})}{2} + x(x_1^{(e)} + x_3^{(e)} - 2x_2^{(e)}) \end{aligned}$$

در نتیجه



اگر گره ۲ جزء دستگاہ مختصات کلی در وسط گره های ۱ و ۳ قرار داشته باشد

$$\left(\frac{dx}{dX}\right)^{(e)} = \frac{l^{(e)}}{2}$$

$$dx = \frac{l^{(e)}}{2} dX$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{du}{dx}\right)^{(e)} &= \left[\left(\frac{dN_1}{dx}\right)^{(e)}, \left(\frac{dN_2}{dx}\right)^{(e)}, \left(\frac{dN_3}{dx}\right)^{(e)}\right] \begin{bmatrix} a_1^{(e)} \\ a_2^{(e)} \\ a_3^{(e)} \end{bmatrix} \\ &= [B_1^{(e)}, B_2^{(e)}, B_3^{(e)}] \begin{bmatrix} a_1^{(e)} \\ a_2^{(e)} \\ a_3^{(e)} \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{B}^{(e)} \mathbf{a}^{(e)}, \end{aligned}$$

محاسبه $(du/dx)^{(e)}$

که در آن

$$\left(\frac{dN_1}{dx}\right)^{(e)} = \left(\frac{dN_1}{d\xi}\right)^{(e)} \left(\frac{d\xi}{dx}\right)^{(e)} = \left(\xi - \frac{1}{2}\right) \frac{2}{l^{(e)}},$$

$$\left(\frac{dN_2}{dx}\right)^{(e)} = \left(\frac{dN_2}{d\xi}\right)^{(e)} \left(\frac{d\xi}{dx}\right)^{(e)} = (-2\xi) \frac{2}{l^{(e)}},$$

$$\left(\frac{dN_3}{dx}\right)^{(e)} = \left(\frac{dN_3}{d\xi}\right)^{(e)} \left(\frac{d\xi}{dx}\right)^{(e)} = \left(\xi + \frac{1}{2}\right) \frac{2}{l^{(e)}}.$$

مشارکت جزء در مقدار I

$$\begin{aligned}
 I^{(e)} &= \int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}} \frac{(EA)^{(e)}}{2} \left[\left(\frac{du}{dx} \right)^{(e)} \right]^2 dx - \int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}} b^{(e)} u^{(e)} dx \\
 &= \int_{-1}^{+1} \frac{(EA)^{(e)}}{2} \left[\left(\frac{du}{dx} \right)^{(e)} \right]^2 \frac{l^{(e)}}{2} d\xi - \int_{-1}^{+1} b^{(e)} u^{(e)} \frac{l^{(e)}}{2} d\xi \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} [a_1^{(e)}, a_2^{(e)}, a_3^{(e)}] \begin{bmatrix} B_1^{(e)} \\ B_2^{(e)} \\ B_3^{(e)} \end{bmatrix} D^{(e)} [B_1^{(e)}, B_2^{(e)}, B_3^{(e)}] \begin{bmatrix} a_1^{(e)} \\ a_2^{(e)} \\ a_3^{(e)} \end{bmatrix} \frac{l^{(e)}}{2} d\xi \\
 &\quad - \int_{-1}^{+1} [a_1^{(e)}, a_2^{(e)}, a_3^{(e)}] \begin{bmatrix} N_1^{(e)} \\ N_2^{(e)} \\ N_3^{(e)} \end{bmatrix} \frac{(bl)^{(e)}}{2} d\xi \\
 &= \frac{1}{2} [a_1^{(e)}, a_2^{(e)}, a_3^{(e)}] \left[\int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} (\xi - \frac{1}{2}) 2/l^{(e)} \\ (-2\xi) 2/l^{(e)} \\ (\xi + \frac{1}{2}) 2/l^{(e)} \end{bmatrix} \right. \\
 &\quad \times (EA)^{(e)} \left[(\xi - \frac{1}{2}) \frac{2}{l^{(e)}}, (-2\xi) \frac{2}{l^{(e)}}, (\xi + \frac{1}{2}) \frac{2}{l^{(e)}} \right] \\
 &\quad \times \frac{l^{(e)}}{2} d\xi \begin{bmatrix} a_1^{(e)} \\ a_2^{(e)} \\ a_3^{(e)} \end{bmatrix} - [a_1^{(e)}, a_2^{(e)}, a_3^{(e)}] \left[\int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} -\xi/2(1-\xi) \\ (1-\xi)(1+\xi) \\ \xi/2(1+\xi) \end{bmatrix} \frac{(bl)^{(e)}}{2} d\xi \right] \\
 &= \frac{1}{2} [a^{(e)}]^T \mathbf{K}^{(e)} a^{(e)} - [a^{(e)}]^T f^{(e)},
 \end{aligned}$$

ماتریس سختی و بردار نیروی جزء

$$\mathbf{K}^{(e)} = \left(\frac{EA}{6l} \right)^{(e)} \begin{bmatrix} 14 & -16 & 2 \\ -16 & 32 & -16 \\ 2 & -16 & 14 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{f}^{(e)} = \frac{(bl)^{(e)}}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

انتگرال گیری عددی

فرض کنید که انتگرال گیری تابعی چون $f(x)$ در داخل جزء مد نظر باشد

$$\bar{I} = \int_{-l}^{+l} f(x) dx.$$

$$\bar{I}_p = W_1 f(\bar{x}_1) + W_2 f(\bar{x}_2) + \mathbf{K} + W_p f(\bar{x}_p)$$

قاعده P نقطه ای

p	$\bar{\xi}_i$	W_i
1	0.000000	2.000000
2	± 0.577530 or $\pm(3)^{-1/2}$	1.000000
3	0.000000 ± 0.774597	8/9 5/9
4	± 0.861136 ± 0.339981	0.347855 0.652145

حال انتگرال زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned}\bar{I} &= \int_{-1}^{+1} (-1+2\xi)^2 \left(\frac{EA}{2l}\right)^{(e)} d\xi \\ &= \int_{-1}^{+1} (1-4\xi+4\xi^2) \left(\frac{EA}{2l}\right)^{(e)} d\xi.\end{aligned}$$

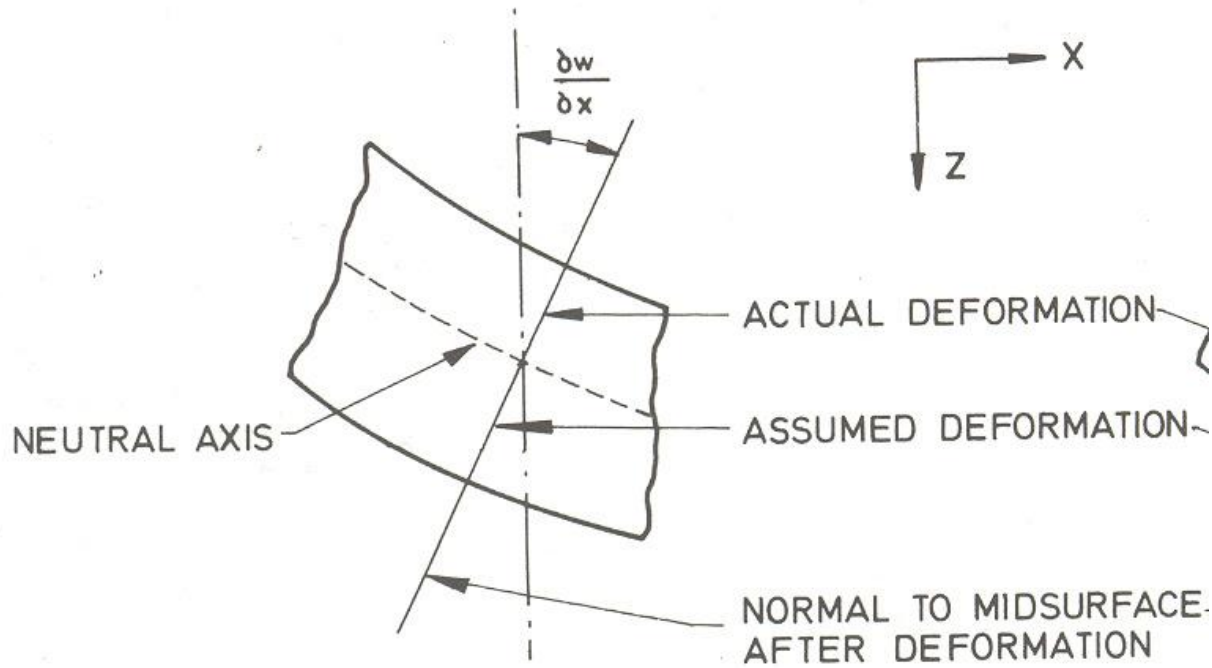
با استفاده از قاعده دو نقطه ای داریم

$$\begin{aligned}\bar{I}_2 &= \left(\frac{EA}{2l}\right)^{(e)} \left((1) \cdot \left[1+4\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+4\left(\frac{1}{3}\right) \right] + (1) \cdot \left[1-4\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+4\left(\frac{1}{3}\right) \right] \right) \\ &= \frac{14}{6} \left(\frac{EA}{l}\right)^{(e)},\end{aligned}$$

که در واقع بیانگر جواب دقیق است

قاعده n نقطه ای می تواند توابع چند جمله ای از درجه $2n-1$ ام یا کمتر را دقیقاً انتگرال گیری کند.

تیرهای خمشی

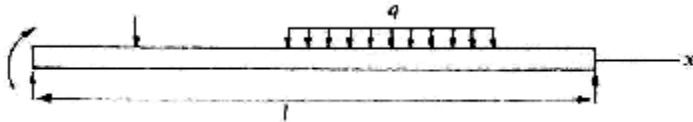


جزء تیرسنتی: تیر اولر - برنولی

تیری که در آن تغییر شکلهای برشی جانبی مهم نیست

- (i) خیزهای جانبی در مقایسه با ضخامت تیر کوچکند
- (ii) خطوط قائم بر محور خنثای تیر در حین تغییر شکل مستقیم و قائم بر این محور باقی میمانند

تیري با سختي خمشي EI و طول l را که تحت تاثیر بارهاي جانبي گسترده ، نیروهاي جانبي نقطه اي X_r و لنگرهاي M_r قرار دارد در نظر بگیرید



انرژی پتانسیل کل

$$I(w) = \frac{1}{2} \int_v e^T s dv - \int_0^l q w dx - \sum_r X_r w(x_r) - \sum_r M_r \left(\frac{dw(x_r)}{dx} \right)$$

$$I_s = \frac{1}{2} \int_v e^T s dv$$

$$e = \frac{y}{R} = -y \frac{d^2 w}{dx^2}$$

$$s = Ee$$

$$I(w) = \int_0^l \frac{EI}{2} \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx - \int_0^l q w dx - \sum_r X_r w(x_r) - \sum_r M_r \left(\frac{dw(x_r)}{dx} \right),$$

$$I(w) = \int_0^l \frac{EI}{2} \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx - \int_0^l q w dx - \sum_r X_r w(x_r) - \sum_r M_r \left(\frac{dw(x_r)}{dx} \right),$$

$$I(w) \neq \sum_e I^{(e)}(w).$$

در صورت استفاده از جزء $C(0)$ پیوسته

اجزاء يك بعدي هرمني

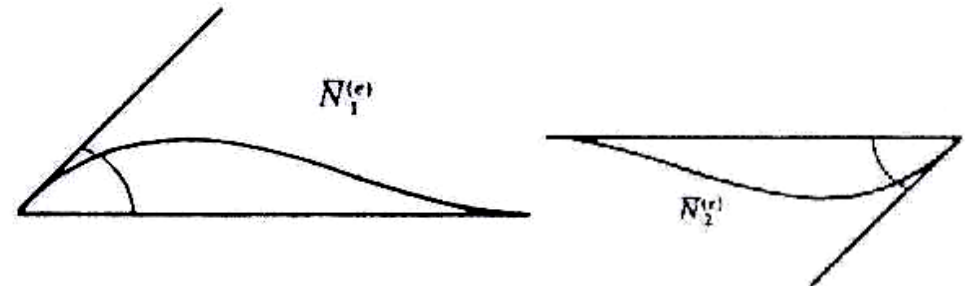


پیوستگی مشتق اول

$$u(\xi)^{(e)} = N_1(\xi)^{(e)} a_1^{(e)} + \bar{N}_1(\xi)^{(e)} \left(\frac{da}{d\xi} \right)_1^{(e)} + N_2(\xi)^{(e)} a_2^{(e)} + \bar{N}_2(\xi)^{(e)} \left(\frac{da}{d\xi} \right)_2^{(e)},$$

$$\left. \begin{aligned} N_i(\xi_i)^{(e)} &= \delta_{ij} \\ \frac{d}{d\xi} \bar{N}_i(\xi_i)^{(e)} &= \delta_{ij} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \delta_{ij} &= 1 \quad \text{if } i=j \\ &= 0 \quad \text{if } i \neq j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_1^{(e)} &= (2 + \xi)(1 - \xi)^2 / 4 = (2 - 3\xi + \xi^3) / 4 \\ \bar{N}_1^{(e)} &= (1 + \xi)(1 - \xi)^2 / 4 = (1 - \xi - \xi^2 + \xi^3) / 4 \\ N_2^{(e)} &= (2 - \xi)(1 + \xi)^2 / 4 = (2 + 3\xi - \xi^3) / 4 \\ \bar{N}_2^{(e)} &= -(1 - \xi)(1 + \xi)^2 / 4 = (-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3) / 4, \end{aligned}$$



مشتق های n ام تابع در دو دستگاه مختصات x و ξ

$$\left(\frac{d^n u}{d\xi^n}\right)^{(e)} = \left(\frac{l^{(e)}}{2}\right)^n \left(\frac{d^n u}{dx^n}\right)^{(e)}$$

پیوستگی مشتقهای دوم

$$u(\xi)^{(e)} = N_1(\xi)^{(e)} a_1^{(e)} + \bar{N}_1(\xi)^{(e)} \left(\frac{da}{d\xi}\right)_1^{(e)} + \tilde{N}_1(\xi)^{(e)} \left(\frac{d^2 a}{d\xi^2}\right)_1^{(e)} \\ + N_2(\xi)^{(e)} a_2^{(e)} + \bar{N}_2(\xi)^{(e)} \left(\frac{da}{d\xi}\right)_2^{(e)} + \tilde{N}_2(\xi)^{(e)} \left(\frac{d^2 a}{d\xi^2}\right)_2^{(e)}$$



$$N_i(\xi_j)^{(e)} = \delta_{ij},$$

$$\frac{d\bar{N}_i}{d\xi}(\xi_j)^{(e)} = \delta_{ij},$$

$$\frac{d^2 \tilde{N}_i}{d\xi^2}(\xi_j)^{(e)} = \delta_{ij},$$

$$N_1(\xi)^{(e)} = [1 + \frac{3}{2}(1 + \xi) + \frac{3}{2}(1 + \xi)^2](1 - \xi)^3 / 8,$$

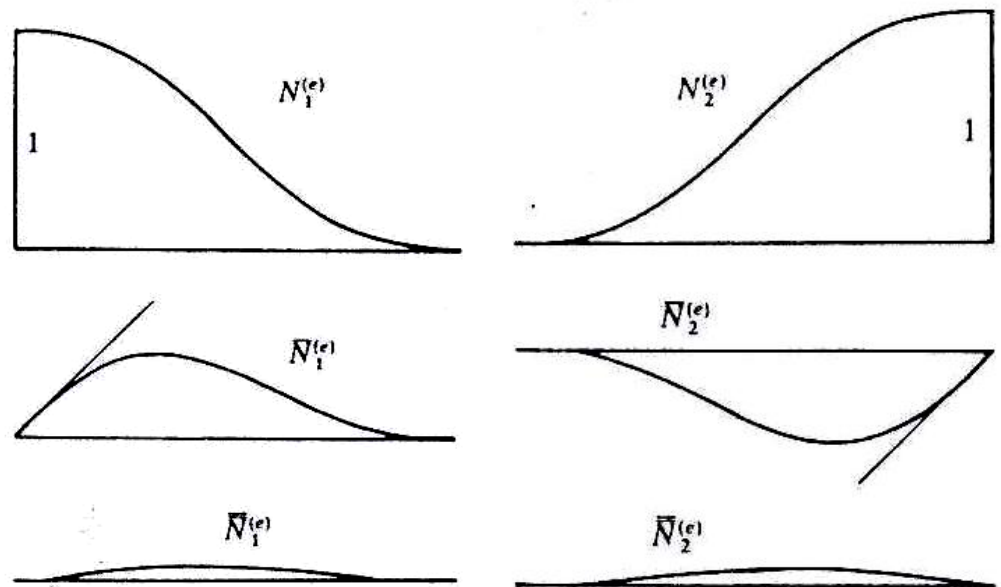
$$\bar{N}_1(\xi)^{(e)} = [1 + \frac{3}{2}(1 + \xi)](1 + \xi)(1 - \xi)^3 / 8,$$

$$\tilde{N}_1(\xi)^{(e)} = (1 + \xi)^2(1 - \xi)^3 / 16,$$

$$N_2(\xi)^{(e)} = [1 + \frac{3}{2}(1 - \xi) + \frac{3}{2}(1 - \xi)^2](1 + \xi)^3 / 8,$$

$$\bar{N}_2(\xi)^{(e)} = -[1 + \frac{3}{2}(1 - \xi)](1 - \xi)(1 + \xi)^3 / 8,$$

$$\tilde{N}_2(\xi)^{(e)} = (1 - \xi)^2(1 + \xi)^3 / 16.$$



مشارکت جزء نمونه e در مقدار انرژی پتانسیل کل / در نبود بارها و نیروهای عکس العمل نقطه ای ،
لنگرها یا لنگرهای عکس العمل

$$I(e) = \int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}} \frac{(EI)^{(e)}}{2} \left(\frac{d^2 w(e)}{dx^2} \right)^2 dx - \int_0^{l^{(e)}} q^{(e)} w^{(e)} dx.$$

تغییر مکان جانبی در مورد جزء تیر درجه سوم

$$w(\xi)^{(e)} = N_1^{(e)}(\xi) w_1^{(e)} + \bar{N}_1^{(e)}(\xi) \left(\frac{dw}{d\xi} \right)_1 \\ + N_2^{(e)}(\xi) w_2^{(e)} + \bar{N}_2^{(e)}(\xi) \left(\frac{dw}{d\xi} \right)_2 ,$$

داریم

$$\left(\frac{dw}{dx} \right)^{(e)} = \frac{l^{(e)}}{2} \left(\frac{dw}{d\xi} \right)^{(e)} ,$$

با توجه به رابطه

$$w(\xi)^{(e)} = N_1^{(e)}(\xi) w_1^{(e)} + \bar{N}_1^{(e)}(\xi) \frac{l^{(e)}}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)_1 \\ + N_2^{(e)}(\xi) w_2^{(e)} + \bar{N}_2^{(e)}(\xi) \frac{l^{(e)}}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)_2 .$$

با استفاده از رابطه

$$\text{انحاء تیر} \quad \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^{(e)} = \frac{4}{(l^{(e)})^2} \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^{(e)}$$

$$\left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^{(e)} = \frac{4}{(l^{(e)})^2} \left[\frac{d^2 N_1^{(e)}}{dx^2}, \frac{d^2 \bar{N}_1^{(e)} l^{(e)}}{dx^2 2}, \frac{d^2 N_2^{(e)}}{dx^2}, \frac{d^2 \bar{N}_2^{(e)} l^{(e)}}{dx^2 2} \right] \begin{bmatrix} w_1^{(e)} \\ (dw/dx)_1^{(e)} \\ w_2^{(e)} \\ (dw/dx)_2^{(e)} \end{bmatrix}$$

$$= [B_1^{(e)}, \bar{B}_1^{(e)}, B_2^{(e)}, \bar{B}_2^{(e)}] \begin{bmatrix} w_1^{(e)} \\ (dw/dx)_1^{(e)} \\ w_2^{(e)} \\ (dw/dx)_2^{(e)} \end{bmatrix}$$

$$= \mathbf{B}^{(e)} \mathbf{a}^{(e)}$$

$$= \left[\frac{6\xi}{(l^{(e)})^2}, \frac{(-1+3\xi)}{l^{(e)}}, -\frac{6\xi}{(l^{(e)})^2}, \frac{(1+3\xi)}{l^{(e)}} \right] \begin{bmatrix} w_1^{(e)} \\ (dw/dx)_1^{(e)} \\ w_2^{(e)} \\ (dw/dx)_2^{(e)} \end{bmatrix}$$

مشارکت جزء e در مقدار انرژی پتانسیل کل با صرف نظر از بارهای نقطه‌ای

$$\begin{aligned}
 I^{(e)} = & \int_{-1}^{+1} \left[w_1^{(e)}, \left(\frac{dw}{dx} \right)_1^{(e)}, w_2^{(e)}, \left(\frac{dw}{dx} \right)_2^{(e)} \right] \begin{bmatrix} B_1^{(e)} \\ \bar{B}_1^{(e)} \\ B_2^{(e)} \\ \bar{B}_2^{(e)} \end{bmatrix} B^{(e)} \\
 & \times [B_1^{(e)}, \bar{B}_1^{(e)}, B_2^{(e)}, \bar{B}_2^{(e)}] \\
 & \times \begin{bmatrix} w_1^{(e)} \\ (dw/dx)_1^{(e)} \\ w_2^{(e)} \\ (dw/dx)_2^{(e)} \end{bmatrix} \frac{I^{(e)}}{2} d\xi \\
 & - \int_{-1}^{+1} \left[w_1^{(e)}, \left(\frac{dw}{dx} \right)_1^{(e)}, w_2^{(e)}, \left(\frac{dw}{dx} \right)_2^{(e)} \right] \begin{bmatrix} N_1^{(e)} \\ \bar{N}_1^{(e)} \\ N_2^{(e)} \\ \bar{N}_2^{(e)} \end{bmatrix} \frac{(ql)^{(e)}}{2} d\xi,
 \end{aligned}$$

$$I^{(e)} = \frac{1}{2} [\mathbf{a}^{(e)}]^T \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{a}^{(e)} + [\mathbf{a}^{(e)}]^T \mathbf{f}^{(e)},$$

$$I = \sum_{e=1} I^{(e)} - \sum_{i=1} w_i X_i - \sum_{i=1} \left(\frac{dw}{dx} \right)_i M_i$$

$$I = \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \mathbf{K} \mathbf{a} + \mathbf{a}^T \mathbf{f} - \sum_{r=1} [w, \frac{dw}{dx}]_r \begin{bmatrix} X \\ M \end{bmatrix}_r$$

$$I = \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \mathbf{K} \mathbf{a} + \mathbf{a}^T \mathbf{f} - \mathbf{a}^T \mathbf{R}$$

$$\mathbf{K} \mathbf{a} + \mathbf{f} = \mathbf{R}$$

ماتریس سختی و بردار نیروی جزء

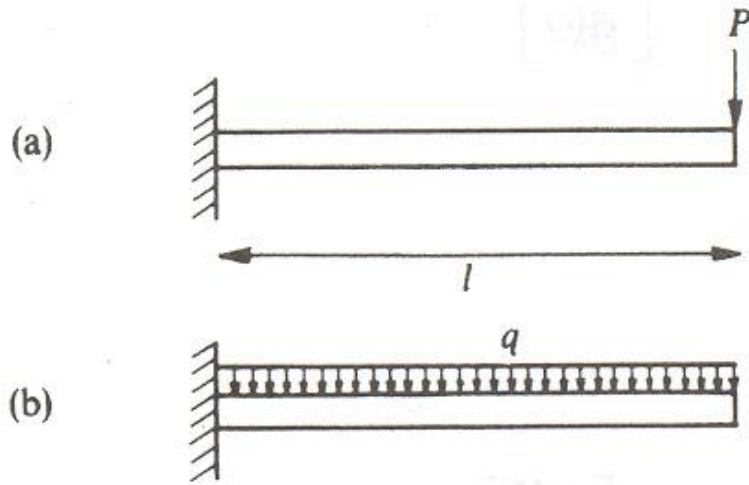
$$\mathbf{K}^{(e)} = \left(\frac{EI}{l} \right)^{(e)} \begin{bmatrix} 12 & & & \text{sym.} \\ 6l^{(e)} & 4(l^{(e)})^2 & & \\ -12 & -6l^{(e)} & 12 & \\ 6l^{(e)} & 2(l^{(e)})^2 & -6l^{(e)} & 4(l^{(e)})^2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{f}^{(e)} = - (ql)^{(e)} \left[\frac{1}{2}, \frac{l^{(e)}}{12}, \frac{1}{2}, -\frac{l^{(e)}}{12} \right]^T.$$

لنگر خمشی در هر نقطه از داخل جزء

$$M(x)^{(e)} = D^{(e)} B^{(e)} a^{(e)}$$

مثال:



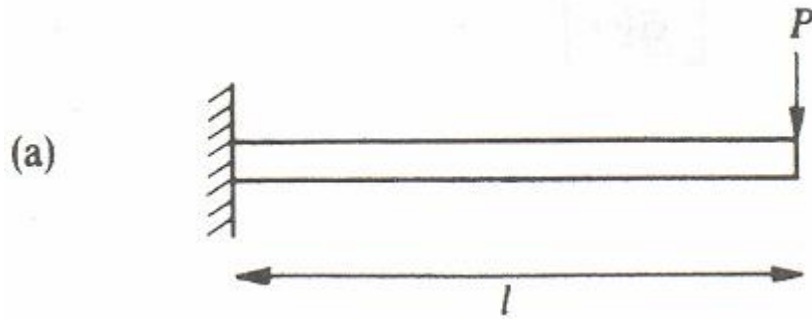
تیر طره ای به طول l با سختی خمشی EI تحت تأثیر دو مجموعه از بارهای جداگانه زیر قرار گرفته است

- (i) بار انتهایی p - بارگذاری شماره ۱
(ii) بار گسترده یکنواخت q - بارگذاری شماره ۲

اگر از يك جزء تیر درجه سوم منفرد برای حل این مسئله استفاده شود

$$K^{(1)} = \left(\frac{EI}{l^3}\right)^{(1)} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix}$$

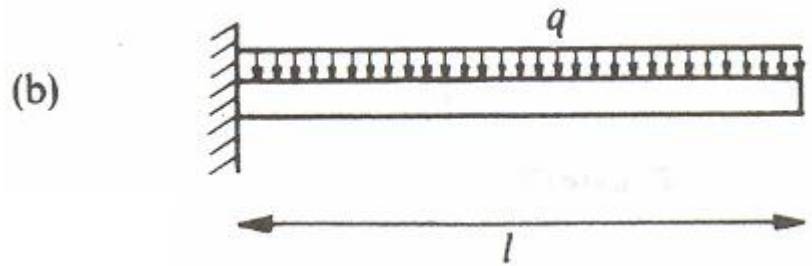
بارگذاری شماره ۱



$$R = [0, 0, p, 0]^T$$

$$f^{(1)} = -[0, 0, 0, 0]^T$$

بارگذاری شماره ۲



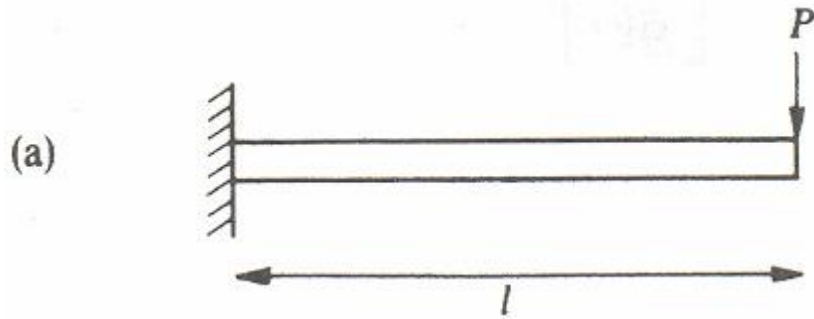
$$R = [0, 0, 0, 0]^T$$

$$f^{(1)} = -\left[\left(\frac{ql}{2}\right)^{(1)}, \left(\frac{ql^2}{12}\right)^{(1)}, \left(\frac{ql}{2}\right)^{(1)}, -\left(\frac{ql^2}{12}\right)^{(1)} \right]^T$$

$$a = \left[0, 0, w_2, \left(\frac{dw}{dx}\right)_2 \right]^T.$$

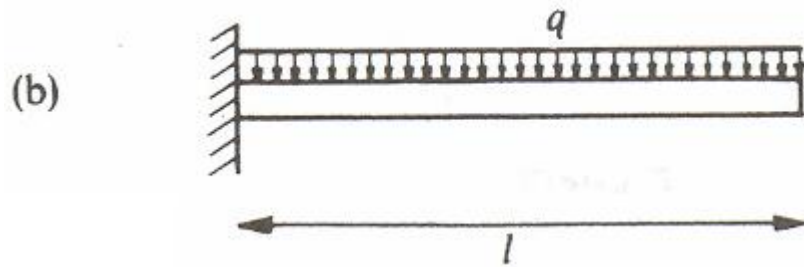
بردار تغییر مکانهای گرهی

برای بارگذاری شماره 1



$$\left(\frac{EI}{l^3}\right) \begin{bmatrix} 12 & -6l \\ -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_2 \\ (dw/dx)_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$w_2 = \frac{pl^3}{3EI}, \quad \left(\frac{dw}{dx}\right)_2 = \frac{pl^2}{2EI}.$$



$$\left(\frac{EI}{l^3}\right) \begin{bmatrix} 12 & -6l \\ -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_2 \\ (dw/dx)_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{ql}{2} \\ -\frac{ql^2}{12} \end{bmatrix},$$

$$w_2 = \frac{ql^4}{8EI}, \quad \left(\frac{dw}{dx}\right)_2 = \frac{ql^3}{6EI}.$$

برای بارگذاری شماره 2

$$w_2 = \frac{pl^3}{3EI}, \quad \left(\frac{dw}{dx} \right)_2 = \frac{pl^2}{2EI}.$$

برای بارگذاری شماره 1

$$w_2 = \frac{ql^4}{8EI}, \quad \left(\frac{dw}{dx} \right)_2 = \frac{ql^3}{6EI}.$$

برای بارگذاری شماره 2

جوابهای بدست آمده هر دو دقیق اند

تذکر این نکته لازم است که جواب دقیق مربوط به بارگذاری شماره ۱ از درجه سوم است و لذا تغییر مکان جانبی، انحناء و لنگرهای خمشی محاسبه شده از طریق روش اجزاء محدود در تمامی نقاط دقیق اند. جواب دقیق مربوط به بارگذاری شماره ۲ از درجه چهارم و در نتیجه جوابهای اجزاء محدود محاسبه شده فقط در گره ها دقیق اند

علاوه بر این مشاهده می شود که مقادیر لنگرهای خمشی (انحناء) نیز در دو نقطه گوس یعنی نقاط

$$x = -1/\sqrt{3} \quad \text{دقیق اند} \quad x = 1/\sqrt{3}$$

و

نقاط تنشهای بهینه (Optimal Stress Points)

بعضی از مدل‌های اجزاء محدود شامل نقاطی خاص و یکتایند که مقادیر تنشها یا برآیند تنشها در آنها دقت بیشتری از نقاط دیگر دارد

برای اجزاء تیر درجه سوم سنتی

$$w(\xi)^{(e)} = N_1^{(e)} w_1^{(e)} + \bar{N}_1^{(e)} \left(\frac{dw}{dx} \right)_1^{(e)} + N_2^{(e)} w_2^{(e)} + \bar{N}_2^{(e)} \left(\frac{dw}{dx} \right)_2^{(e)}$$

$$w_a(\mathbf{x})^{(e)} = [1, \mathbf{x}, \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3] \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3, a_4]^T$$

به روشی دیگر

فرض کنید که از این جزء برای نمایش میدان تغییر مکان معلوم مرتبه چهارم زیر استفاده شده باشد

$$w_b(\mathbf{x})^{(e)} = [1, \mathbf{x}, \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3, \mathbf{x}^4] \mathbf{b}, \quad \mathbf{b} = [b_1, b_2, b_3, b_4, b_5]^T$$

محاسبه تغییر مکانهای گرهی جزء $a_a^{(e)}$ با استفاده از مقادیر گرهی

$$w_a(\mathbf{x})^{(e)} = [1, \mathbf{x}, \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3] \mathbf{a},$$

$$w_a(-1)^{(e)} = [1, -1, +1, -1] \mathbf{a},$$

$$\frac{dw_a}{d\mathbf{x}}(-1)^{(e)} = [0, 1, -2, 3] \mathbf{a},$$

$$w_a(1)^{(e)} = [1, 1, 1, 1] \mathbf{a},$$

$$\frac{dw_a}{d\mathbf{x}}(1)^{(e)} = [0, 1, 2, 3] \mathbf{a},$$

$$a_a^{(e)} = A \mathbf{a}.$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

محاسبه تغییر مکانهای گرهی جزء $a_b^{(e)}$ با استفاده از مقادیر گرهی

$$w_b(\mathbf{x})^{(e)} = [1, \mathbf{x}, \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3, \mathbf{x}^4] \mathbf{b},$$

$$w_b(-1)^{(e)} = [1, -1, +1, -1, +1] \mathbf{b},$$

$$\frac{dw_b}{d\mathbf{x}}(-1)^{(e)} = [0, 1, -2, 3, -4] \mathbf{b},$$

$$w_b(1)^{(e)} = [1, 1, 1, 1, 1] \mathbf{b},$$

$$\frac{dw_b}{d\mathbf{x}}(1)^{(e)} = [0, 1, 2, 3, 4] \mathbf{b},$$

$$a_b^{(e)} = B\mathbf{b}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$a_b^{(e)} = B\mathbf{b},$$

تغییر مکانهای گرهی جزء $a_b^{(e)}$

$$A\mathbf{a} = B\mathbf{b},$$

$$\mathbf{a} = [A]^{-1} B\mathbf{b},$$

در این صورت برای دقت جوابهای اجزای محدود

که در آن

$$[A]^{-1} B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

برای اینکه مقادیر انحنای (کرنش و در نتیجه تنش) حاصل از دومیدان تغییر مکان دقیق و تقریبی یکسان باشد

$$\left(\frac{d^2 w_a}{dx^2} \right)^{(e)} = \left(\frac{d^2 w_b}{dx^2} \right)^{(e)}, \quad \text{یا} \quad w_b(x)^{(e)} = [1, x, x^2, x^3, x^4] b,$$

$$w_a(x)^{(e)} = [1, x, x^2, x^3] a,$$

$$[0, 0, 2, 6x] a = [0, 0, 2, 6x, 12x^2] b.$$

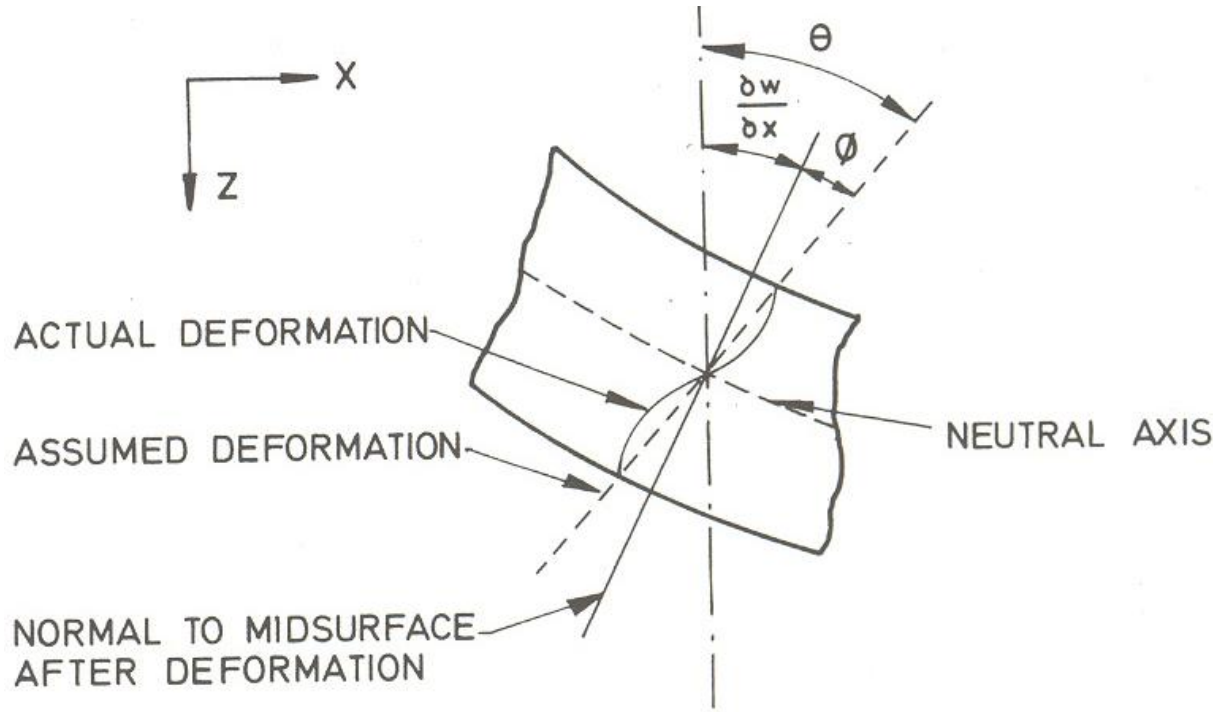
$$a = [A]^{-1} B b, \quad \text{با جایگذاری } a \text{ بر حسب } b$$

$$[0, 0, 2, 6x, 4] b = [0, 0, 2, 6x, 12x^2] b.$$

این رابطه در صورتی بازای همه مقادیر b برقرار است که

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

جزء تیر تیموشنکو



تیري که در آن تغییر شکلهای برشی جانبی مهم است

(i) خیزهای جانبی در مقایسه با ضخامت تیر کوچکند

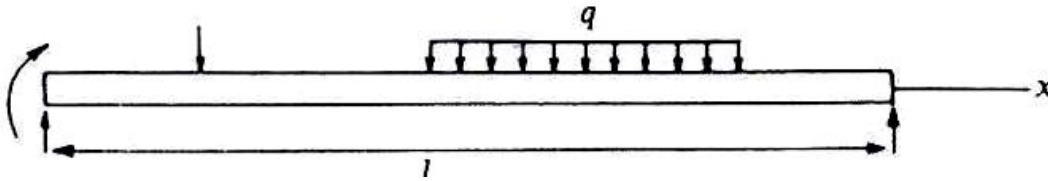
(ii) خطوط قائم بر محور خنثای تیر در حین تغییر شکل مستقیم باقی میمانند ولی این خطوط ضرورتاً بعد از تغییر شکل نیز قائم بر این محور نخواهد بود.

$$q = \frac{dw}{dx} - f$$

چرخش قائم بر محور خنثی

f چرخش ناشی از تغییر شکل برشی جانبی

حال تیر تیموشنکوی با سختی خمشی EI ، سختی برشی GA/a و طول l را که تحت تاثیر بار گسترده جانبی q ، بار نقطه ای X_r و لنگرهای M_r قرار گرفته در نظر بگیرید



انرژی کرنش خمشی

$$I_p = \frac{1}{2} \int_v e^T s dv$$

$$e = \frac{y}{R} = -y \frac{dq}{dx},$$

انرژی پتانسیل کل را اکنون می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$I(w, \theta) = \int_0^l \frac{EI}{2} \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 dx + \int_0^l \frac{GA}{2\alpha} (\phi)^2 dx - \int_0^l qw dx - \sum_i X_i w(x_i) - \sum_i M_i \theta(x_i).$$

$$I(w, \theta) = \int_0^l \frac{EI}{2} \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 dx + \int_0^l \frac{GA}{2\alpha} (\phi)^2 dx - \int_0^l qw dx - \sum_i X_i w(x_i) - \sum_i M_i \theta(x_i).$$

a پارامتریست که برای منظور کردن پدیده تبلیگی ناشی از توزیع غیر یکنواخت تنش برشی در مقطع مورد استفاده قرار گرفته است. $a = 5/6$ برای توزیع سهموی

$$\frac{dq}{dx},$$

کرنش خمشی

$$f = \frac{dw}{dx} - q.$$

f کرنش برشی

مقدار لنگر M و نیروی برشی Q در هر نقطه از محور خنثای تیر

$$M = EI \frac{dq}{dx},$$

$$Q = \frac{GA}{a} f.$$

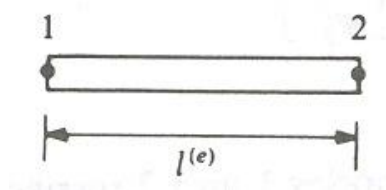
اجزاء تیر تیموشنکو

$$I(w, \theta) = \int_0^l \frac{EI}{2} \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 dx + \int_0^l \frac{GA}{2\alpha} (\phi)^2 dx - \int_0^l qw dx - \sum_i X_i w(x_i) - \sum_i M_i \theta(x_i).$$

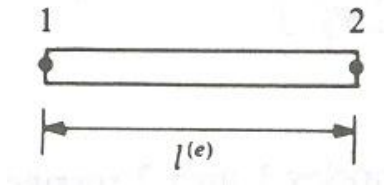
مشتقهای اول $\left(\frac{dw}{dx} \right)$ و $\left(\frac{dq}{dx} \right)$ بالاترین مرتبه مشتقهای موجود در انتگرالده تابع نمای مورد نظر است بنابراین، بر خلاف اجزاء تیر سنتی که استفاده از آنها مستلزم پیوستگی $C(1)$ است، اجزاء تیر تیموشنکو فقط نیازمند پیوستگی $C(0)$ است

جزء تیر تیموشنکو ی خطی دو گرهی

ساده ترین جزء تیر تیموشنکو دارای دو گره ۱ و ۲ به ترتیب در نقاط $x_1 = -l$ و $x_2 = +l$ است



تغییر مکان جانبی w و چرخش قائم q را می توان بمنزله متغیرهایی کاملاً مستقل منظور کرد



در این جا از توابع شکل یکسانی برای w و q استفاده شده است.

$$w(\mathbf{x})^{(e)} = [N_1(\mathbf{x})^{(e)}, N_2(\mathbf{x})^{(e)}] \begin{bmatrix} w_1^{(e)} \\ w_2^{(e)} \end{bmatrix}$$

$$q(\mathbf{x})^{(e)} = [N_1(\mathbf{x})^{(e)}, N_2(\mathbf{x})^{(e)}] \begin{bmatrix} q_1^{(e)} \\ q_2^{(e)} \end{bmatrix}$$

بردار تغییر مکانهای گرهی جزء

$$\mathbf{a}^{(e)} = [w_1^{(e)}, q_1^{(e)}, w_2^{(e)}, q_2^{(e)}]^T$$

$$\mathbf{a}_i^{(e)} = \begin{bmatrix} w_i^{(e)} \\ q_i^{(e)} \end{bmatrix} \quad i = 1, 2$$

$$\mathbf{N}_i^{(e)} = \begin{bmatrix} N_i^{(e)} & 0 \\ 0 & N_i^{(e)} \end{bmatrix} \quad i = 1, 2$$

با فرض

$$\mathbf{u}^{(e)} = [N_1^{(e)}, N_2^{(e)}] \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^{(e)} \\ \mathbf{a}_2^{(e)} \end{bmatrix} = \mathbf{N}^{(e)} \mathbf{a}^{(e)},$$

$$\mathbf{N}^{(e)} = \begin{bmatrix} N_1^{(e)} & 0 & N_1^{(e)} & 0 \\ 0 & N_2^{(e)} & 0 & N_2^{(e)} \end{bmatrix}$$

کرنش خمشی یا انحنای تی ر

که در آن

$$\mathbf{e}_f^{(e)} = \left(\frac{dq}{dx} \right)^{(e)} = \left(\frac{dq}{dx} \right)^{(e)} \left(\frac{dx}{dx} \right)^{(e)}$$

$$\left(\frac{dq}{dx} \right)^{(e)} = \left[\left(\frac{dN_1}{dx} \right)^{(e)}, \left(\frac{dN_2}{dx} \right)^{(e)} \right] \begin{bmatrix} q_1^{(e)} \\ q_2^{(e)} \end{bmatrix}$$

$$\left(\frac{dx}{dx} \right)^{(e)} = \frac{2}{l^{(e)}}$$

با توجه به رابطه

$$\mathbf{a}^{(e)} = [w_1^{(e)}, q_1^{(e)}, w_2^{(e)}, q_2^{(e)}]^T$$

$$\mathbf{e}_f^{(e)} = \mathbf{B}_f^{(e)} \mathbf{a}^{(e)}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_f^{(e)} &= \left[0, \left(\frac{dN_1}{d\xi} \right)^{(e)} \frac{2}{l^{(e)}}, 0, \left(\frac{dN_2}{d\xi} \right)^{(e)} \frac{2}{l^{(e)}} \right] \\ &= \left[0, -\frac{1}{l^{(e)}}, 0, \frac{1}{l^{(e)}} \right], \end{aligned}$$

ماتریس کرنش خمشی - تغییر مکان

کرنشهای برشی

$$\mathbf{e}_s^{(e)} = \mathbf{f}^{(e)} = \left(\frac{dw}{dx} \right)^{(e)} - \mathbf{q}^{(e)} = \left(\frac{dw}{dx} \right)^{(e)} \left(\frac{d\mathbf{x}}{dx} \right)^{(e)} - \mathbf{q}^{(e)},$$

که در آن

$$\left(\frac{dw}{dx} \right)^{(e)} = \left[\left(\frac{dN_1}{dx} \right)^{(e)}, \left(\frac{dN_2}{dx} \right)^{(e)} \right] \begin{bmatrix} w_1^{(e)} \\ w_2^{(e)} \end{bmatrix}$$

$$\left(\frac{d\mathbf{x}}{dx} \right)^{(e)} = \frac{2}{l^{(e)}}$$

روابط کرنش برشی - تغییر مکان

$$\mathbf{e}_s^{(e)} = \mathbf{B}_s^{(e)} \mathbf{a}^{(e)}$$

ماتریس کرنش برشی - تغییر مکان

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_s^{(e)} &= \left[\left(\frac{dN_1}{d\xi} \right)^{(e)} \frac{2}{l^{(e)}}, -N_1^{(e)}, \left(\frac{dN_2}{d\xi} \right)^{(e)} \frac{2}{l^{(e)}}, -N_2^{(e)} \right] \\ &= \left[-\frac{1}{l^{(e)}}, -\frac{(1-\xi)}{2}, \frac{1}{l^{(e)}}, -\frac{(1+\xi)}{2} \right], \end{aligned}$$

مشارکت جزء نمونه e در مقدار انرژی پتانسیل کل را در نبود نیروهای جانبی و لنگرهای نقطه ای

$$I^{(e)} = \int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}} \frac{(EI)^{(e)}}{2} \left(\frac{dq^{(e)}}{dx} \right)^2 dx + \int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}} \frac{(GA)^{(e)}}{2a} (f)^2 dx - \int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}} w^{(e)} q^{(e)} dx.$$

$$e_f^{(e)} = \left(\frac{dq}{dx} \right)^{(e)}$$

$$D_f^{(e)} = (EI)^{(e)}$$

با جای گذاری

$$e_s^{(e)} = f^{(e)}$$

$$D_s^{(e)} = \left(\frac{GA}{a} \right)^{(e)}$$

$$I^{(e)} = \frac{1}{2} \int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}} \epsilon_f^{(e)} D_f^{(e)} \epsilon_f^{(e)} dx + \frac{1}{2} \int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}} \epsilon_s^{(e)} D_s^{(e)} \epsilon_s^{(e)} dx - \int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}} q^{(e)} w^{(e)} dx$$

$$I^{(e)} = \frac{1}{2} \int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}} \epsilon_f^{(e)} D_f^{(e)} \epsilon_f^{(e)} dx + \frac{1}{2} \int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}} \epsilon_s^{(e)} D_s^{(e)} \epsilon_s^{(e)} dx - \int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}} q^{(e)} w^{(e)} dx$$

$$N^{(e)} = \begin{bmatrix} N_1^{(e)} & 0 & N_1^{(e)} & 0 \\ 0 & N_2^{(e)} & 0 & N_2^{(e)} \end{bmatrix}$$

با توجه به ماتریس توابع شکل

$$w^{(e)} = N'^{(e)} a^{(e)}, \quad N'^{(e)} = [N_1^{(e)}, 0, N_2^{(e)}, 0]$$

$$b^{(e)} = q^{(e)}$$

$$e_f^{(e)} = B_f^{(e)} a^{(e)}$$

$$e_s^{(e)} = B_s^{(e)} a^{(e)}$$

$$I^{(e)} = \frac{[a^{(e)}]^T}{2} \left[\int_{-1}^{+1} [B_f^{(e)}]^T D_f^{(e)} B_f^{(e)} \frac{l^{(e)}}{2} d\xi \right] a^{(e)} + \frac{[a^{(e)}]^T}{2} \left[\int_{-1}^{+1} [B_s^{(e)}]^T D_s^{(e)} B_s^{(e)} \frac{l^{(e)}}{2} d\xi \right] a^{(e)} - [a^{(e)}]^T \int_{-1}^{+1} [N'^{(e)}]^T b^{(e)} \frac{l^{(e)}}{2} d\xi$$

مشارکت جزء نمونه e در مقدار انرژی پتانسیل کل را در نبود نیروهای جانبی و لنگرهای نقطه ای

$$I^{(e)} = \frac{[\mathbf{a}^{(e)}]^T}{2} \mathbf{K}_f^{(e)} \mathbf{a}^{(e)} + \frac{[\mathbf{a}^{(e)}]^T}{2} \mathbf{K}_s^{(e)} \mathbf{a}^{(e)} + [\mathbf{a}^{(e)}]^T \mathbf{f}^{(e)},$$

$$I^{(e)} = \frac{1}{2} \mathbf{a}^{(e)T} \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{a}^{(e)} + \mathbf{a}^{(e)T} \mathbf{f}^{(e)}$$

یا

$$\mathbf{K}^{(e)} = \mathbf{K}_f^{(e)} + \mathbf{K}_s^{(e)},$$

که در آن

$$\mathbf{K}_f^{(e)} = \int_{-1}^{+1} [\mathbf{B}_f^{(e)}]^T \mathbf{D}_f^{(e)} \mathbf{B}_f^{(e)} \frac{l^{(e)}}{2} d\xi$$

$$\mathbf{K}_s^{(e)} = \int_{-1}^{+1} [\mathbf{B}_s^{(e)}]^T \mathbf{D}_s^{(e)} \mathbf{B}_s^{(e)} \frac{l^{(e)}}{2} d\xi$$

$$\mathbf{f}^{(e)} = - \int_{-1}^{+1} [\mathbf{N}'^{(e)}]^T \mathbf{b}^{(e)} \frac{l^{(e)}}{2} d\xi$$

در صورتی که از انتگرال گیری عددی برای محاسبه ماتریس سختی جزء استفاده شود.

$$\mathbf{K}_f^{(e)} = \int_{-1}^{+1} [\mathbf{B}_f^{(e)}]^T \mathbf{D}_f^{(e)} \mathbf{B}_f^{(e)} \frac{l^{(e)}}{2} d\xi$$

$$\mathbf{B}_f^{(e)} = \left[0, -\frac{1}{l^{(e)}}, 0, \frac{1}{l^{(e)}} \right],$$

برای محاسبه دقیق $\mathbf{K}_f^{(e)}$ باید از قاعده تک نقطه ای

$$\mathbf{K}_s^{(e)} = \int_{-1}^{+1} [\mathbf{B}_s^{(e)}]^T \mathbf{D}_s^{(e)} \mathbf{B}_s^{(e)} \frac{l^{(e)}}{2} d\xi$$

$$\mathbf{B}_s^{(e)} = \left[-\frac{1}{l^{(e)}}, -\frac{(1-\xi)}{2}, \frac{1}{l^{(e)}}, -\frac{(1+\xi)}{2} \right],$$

برای محاسبه دقیق $\mathbf{K}_s^{(e)}$ باید از قاعده دو نقطه ای استفاده کرد

$$\mathbf{f}^{(e)} = - \int_{-1}^{+1} [\mathbf{N}'^{(e)}]^T \mathbf{b}^{(e)} \frac{l^{(e)}}{2} d\xi$$

$$\mathbf{N}'^{(e)} = [N_1^{(e)}, 0, N_2^{(e)}, 0],$$

برای محاسبه دقیق $\mathbf{f}^{(e)}$ باید از قاعده تک نقطه ای استفاده کرد

با انجام این محاسبات

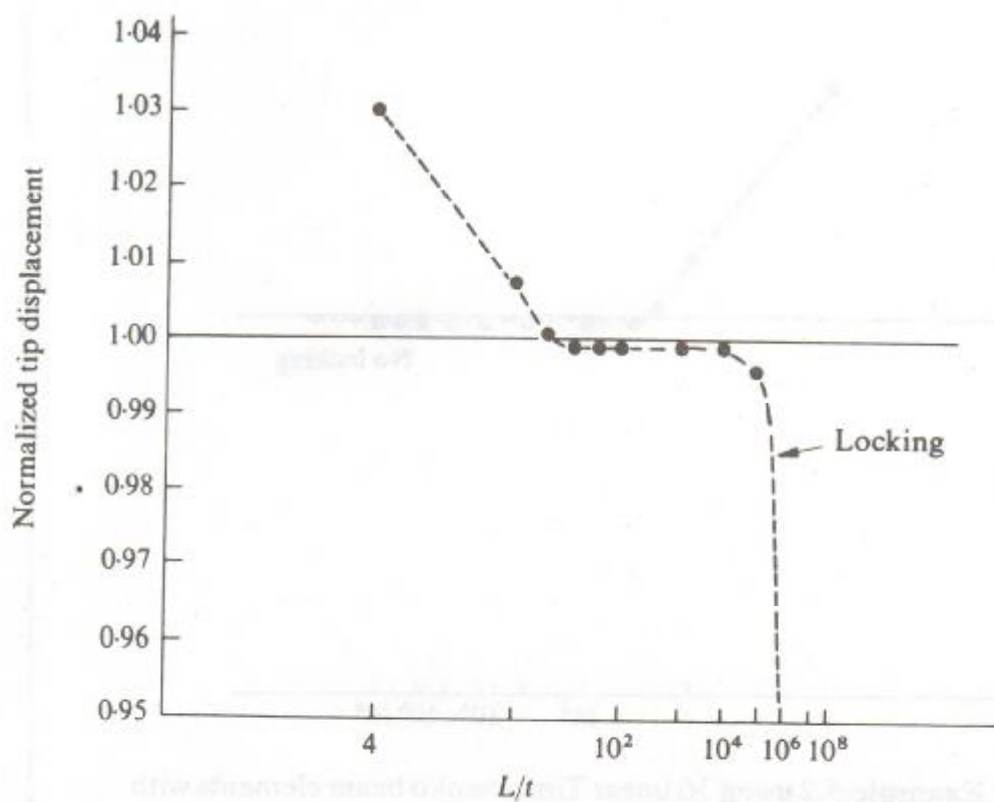
$$\mathbf{K}_f^{(e)} = \left(\frac{EI}{l}\right)^{(e)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}_s^{(e)} = \left(\frac{GA}{\alpha l}\right)^{(e)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{l^{(e)}}{2} & -1 & \frac{l^{(e)}}{2} \\ \frac{l^{(e)}}{2} & \frac{(l^{(e)})^2}{3} & -\frac{l^{(e)}}{2} & \frac{(l^{(e)})^2}{6} \\ -1 & -\frac{l^{(e)}}{2} & 1 & -\frac{l^{(e)}}{2} \\ \frac{l^{(e)}}{2} & \frac{(l^{(e)})^2}{6} & -\frac{l^{(e)}}{2} & \frac{(l^{(e)})^2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}^{(e)} = \left[\frac{(ql)^{(e)}}{2}, 0, \frac{(ql)^{(e)}}{2}, 0 \right]^T.$$

پدیده قفل شدن:

تیر طره ای که تحت تاثیر بار گسترده قرار گرفته و با استفاده از شانزده جزء تحلیل شده است را در نظر بگیرید. اگر رفتار تیر را بازای مقادیر مختلف نسبت ضخامت به دهانه مورد بررسی قرار دهیم ، در این صورت مشاهده خواهیم کرد که مطابق آنچه در شکل نشان داده شده است ، نتایج بدست آمده برای تیرهای نازکتر بیش از حد سخت است. این در واقع ناشی از بروز پدیده ای بنام “ قفل شدن ” است.



انتگرال گیری کاهش یافته

در این روش انتگرال گیری ماتریس

با استفاده از $K^{(e)}$ قاعده گوس - لژاندر تک نقطه ای محاسبه می شود. در این صورت

$$K_s^{(e)} = \left(\frac{GA}{\alpha l}\right)^{(e)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{l^{(e)}}{2} & -1 & \frac{l^{(e)}}{2} \\ \frac{l^{(e)}}{2} & \frac{(l^{(e)})^2}{4} & -\frac{l^{(e)}}{2} & \frac{(l^{(e)})^2}{4} \\ -1 & -\frac{l^{(e)}}{2} & 1 & -\frac{l^{(e)}}{2} \\ \frac{l^{(e)}}{2} & \frac{(l^{(e)})^2}{4} & -\frac{l^{(e)}}{2} & \frac{(l^{(e)})^2}{4} \end{bmatrix}$$

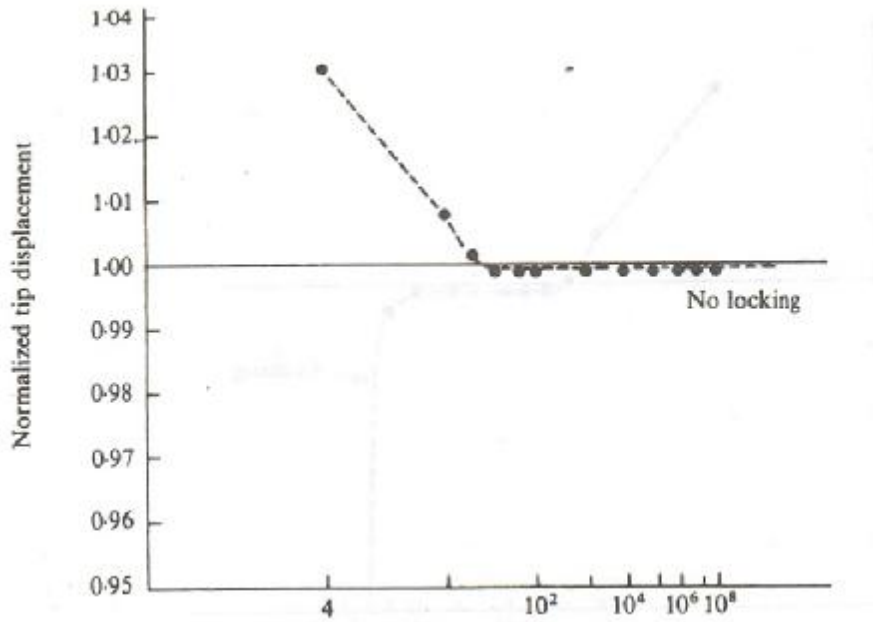
انتگرال گیری کاهش یافته

$$B_s^{(e)} = \left[-\frac{1}{l^{(e)}}, -\frac{(1-\xi)}{2}, \frac{1}{l^{(e)}}, -\frac{(1+\xi)}{2} \right],$$

$$K_s^{(e)} = \left(\frac{GA}{\alpha l}\right)^{(e)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{l^{(e)}}{2} & -1 & \frac{l^{(e)}}{2} \\ \frac{l^{(e)}}{2} & \frac{(l^{(e)})^2}{3} & -\frac{l^{(e)}}{2} & \frac{(l^{(e)})^2}{6} \\ -1 & -\frac{l^{(e)}}{2} & 1 & -\frac{l^{(e)}}{2} \\ \frac{l^{(e)}}{2} & \frac{(l^{(e)})^2}{6} & -\frac{l^{(e)}}{2} & \frac{(l^{(e)})^2}{3} \end{bmatrix}$$

انتگرال گیری دقیق

انتگرال گیری کاهش یافته



$$f = \frac{dw}{dx} - q.$$

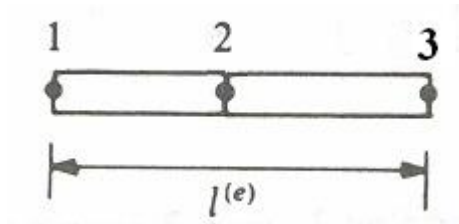
$$q = \frac{dw}{dx}$$

با توجه به رابطه کرنش برشی

نازکتر شدن تیر عملاً به معنی اعمال قید زیر است:

این قید در واقع در g نقطه گوس هر یک از اجزاء اعمال می شود.

حال تیری را که با استفاده از n جزء مدلسازی شده است را در نظر بگیرید. چنین تیری دارای $2(n+1)$ منهای تعداد شرایط تکیه گاهی] درجه آزادی و $2 * g$ قید خواهد بود. اگر تعداد کل قیود برابر یا بیشتر از تعداد کل درجات آزادی باشند در این صورت پدیده قفل شدن رخ خواهد داد.



$$w(\mathbf{x})^{(e)} = [N_1^{(e)}, N_2^{(e)}, N_3^{(e)}] \begin{bmatrix} w_1^{(e)} \\ w_2^{(e)} \\ w_3^{(e)} \end{bmatrix}$$

$$q(\mathbf{x})^{(e)} = [N_1^{(e)}, N_2^{(e)}, N_3^{(e)}] \begin{bmatrix} q_1^{(e)} \\ q_2^{(e)} \\ q_3^{(e)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}^{(e)} = [w_1^{(e)}, q_1^{(e)}, w_2^{(e)}, q_2^{(e)}, w_3^{(e)}, q_3^{(e)}]^T$$

$$\mathbf{a}_i^{(e)} = \begin{bmatrix} w_i^{(e)} \\ q_i^{(e)} \end{bmatrix} \quad i = 1, 2, 3$$

$$N_i^{(e)} = \begin{bmatrix} N_i^{(e)} & 0 \\ 0 & N_i^{(e)} \end{bmatrix} \quad i = 1, 2, 3$$

با فرض

$$\mathbf{u}^{(e)} = [N_1^{(e)}, N_2^{(e)}, N_3^{(e)}] \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^{(e)} \\ \mathbf{a}_2^{(e)} \\ \mathbf{a}_3^{(e)} \end{bmatrix} = \mathbf{N}^{(e)} \mathbf{a}^{(e)},$$

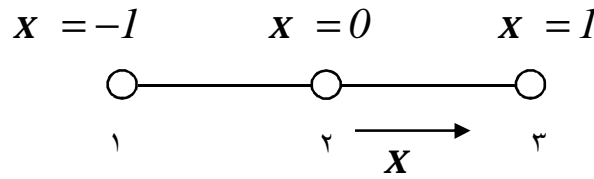
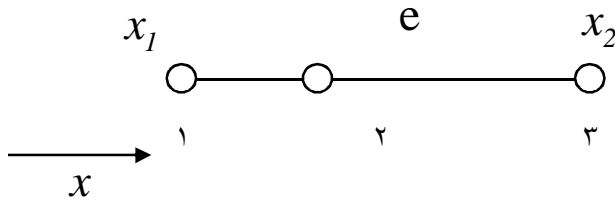
$$\mathbf{N}^{(e)} = \begin{bmatrix} N_1^{(e)} & 0 & N_1^{(e)} & 0 \\ 0 & N_2^{(e)} & 0 & N_2^{(e)} \end{bmatrix}$$

- اجزاء تیر تیموشنکوی درجه دوم

تغییر مکانهای جانبی

تغییر مکانهای برشی

بردار تغییر مکانهای گرهی جزء



$$x(\mathbf{X})^{(e)} = \mathbf{N}^{(e)} \mathbf{x}^{(e)}$$

$$\mathbf{x}^{(e)} = [x_1^{(e)}, x_2^{(e)}, x_3^{(e)}]^T$$

مختصات x

$$\left(\frac{dx(\xi)}{d\xi}\right)^{(e)} = \left[\left(\frac{dN_1(\xi)}{d\xi}\right)^{(e)}, \left(\frac{dN_2(\xi)}{d\xi}\right)^{(e)}, \left(\frac{dN_3(\xi)}{d\xi}\right)^{(e)} \right].$$

$$\mathbf{e}_f^{(e)} = \mathbf{B}_f^{(e)} \mathbf{a}^{(e)}$$

کرنشهای خمشی یا انحناء

$$\mathbf{B}_f^{(e)} = \left[0, \left(\frac{dN_1}{d\xi}\right)^{(e)} \left(\frac{d\xi}{dx}\right)^{(e)}, 0, \left(\frac{dN_2}{d\xi}\right)^{(e)} \left(\frac{d\xi}{dx}\right)^{(e)}, 0, \left(\frac{dN_3}{d\xi}\right)^{(e)} \left(\frac{d\xi}{dx}\right)^{(e)} \right].$$

$$\mathbf{e}_s^{(e)} = \mathbf{B}_s^{(e)} \mathbf{a}^{(e)}$$

کرنشهای برشی

$$\mathbf{B}_s^{(e)} = \left[\left(\frac{dN_1}{dx}\right)^{(e)} \left(\frac{dx}{dx}\right)^{(e)}, -N_1^{(e)}, \left(\frac{dN_2}{dx}\right)^{(e)} \left(\frac{dx}{dx}\right)^{(e)}, -N_2^{(e)}, \left(\frac{dN_3}{dx}\right)^{(e)} \left(\frac{dx}{dx}\right)^{(e)}, -N_3^{(e)} \right].$$

ماتریس سختی جزء

$$\mathbf{K}_f^{(e)} = \int_{-1}^{+1} [\mathbf{B}_f^{(e)}]^T \mathbf{D}_f^{(e)} \mathbf{B}_f^{(e)} \left(\frac{dx}{dx} \right)^{(e)} dx ,$$

$$\mathbf{K}_s^{(e)} = \int_{-1}^{+1} [\mathbf{K}_s^{(e)}]^T \mathbf{D}_s^{(e)} \mathbf{K}_s^{(e)} \left(\frac{dx}{dx} \right)^{(e)} dx .$$

بردار نیروهای جزء حاصل از بارگذاری گسترده

$$\mathbf{f}^{(e)} = \int_{-1}^{+1} [\mathbf{N}'^{(e)}]^T \mathbf{q}^{(e)} \left(\frac{dx}{dx} \right)^{(e)} dx ,$$

$$\mathbf{N}'^{(e)} = [N_1^{(e)}, 0, N_2^{(e)}, 0, N_3^{(e)}, 0] .$$

انتگرال گیری دقیق ماتریس $\mathbf{K}_f^{(e)}$ مستلزم استفاده از قاعده ۳ - نقطه ای گوس - لژاندر است در حالیکه برای قاعده دو نقطه ای کفایت $\mathbf{K}_s^{(e)}$ کند. متأسفانه پدیده قفل شدن معمولاً در مورد چنین اجزایی نیز رخ می دهد و لذا استفاده از انتگرال گیری کاهش یافته برای اجتناب از آن ضروری است. در این مورد، انتگرال گیری کاهش یافته مستلزم استفاده از قاعده ۲ - نقطه ای برای هر دو ماتریس $\mathbf{K}_f^{(e)}$ و $\mathbf{K}_s^{(e)}$ است.

$$\mathbf{K}_s^{(e)} \quad \mathbf{K}_f^{(e)}$$

اجزای محدود دو و سه بعدی

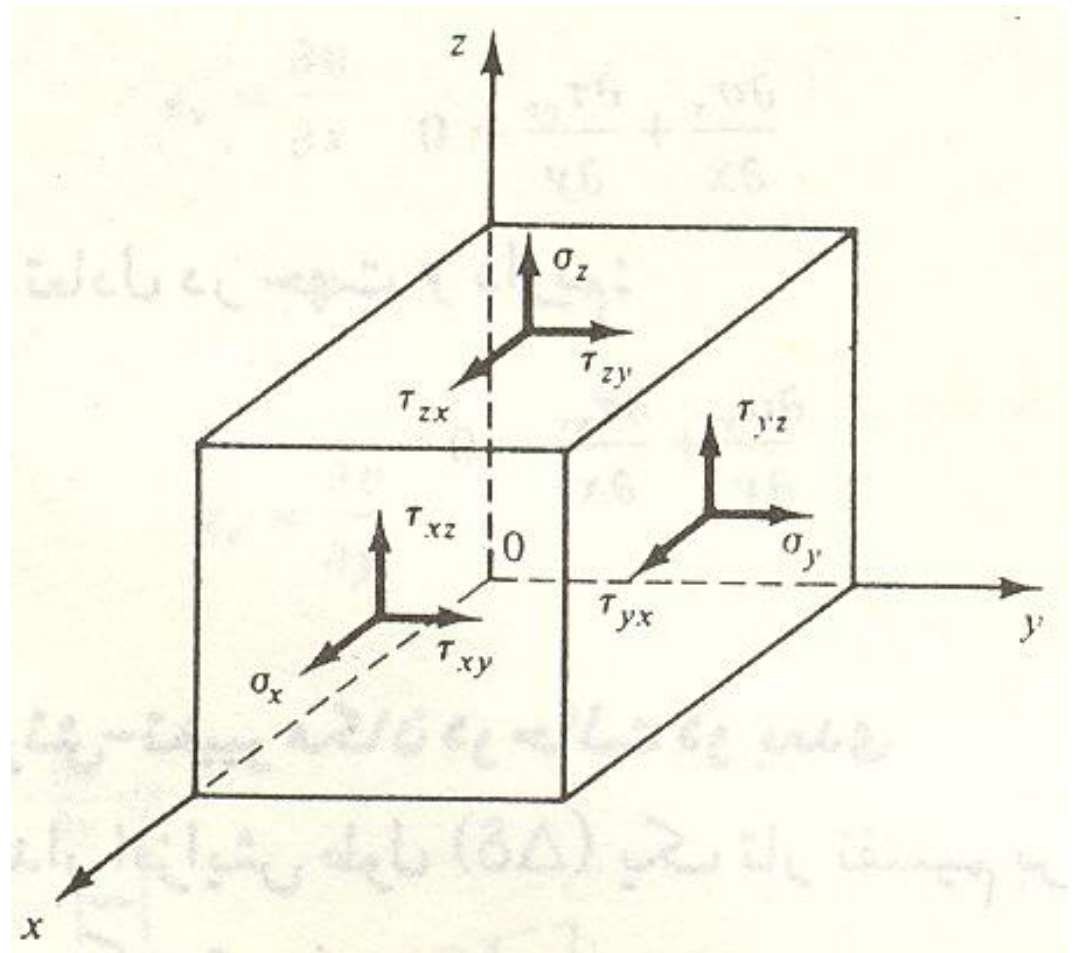
مقدمه ای بر تئوری ارتجاعی:

نیروهای وارده بر یک محیط پیوسته را می توان به نیروهای سطحی و نیروهای کالبدی (حجمی) تقسیم نمود. تحت تأثیر این نیروها تنشهایی در محیط مورد نظر ایجاد می شود که در هر نقطه می توان آن را با تانسور تنش نشان داد:

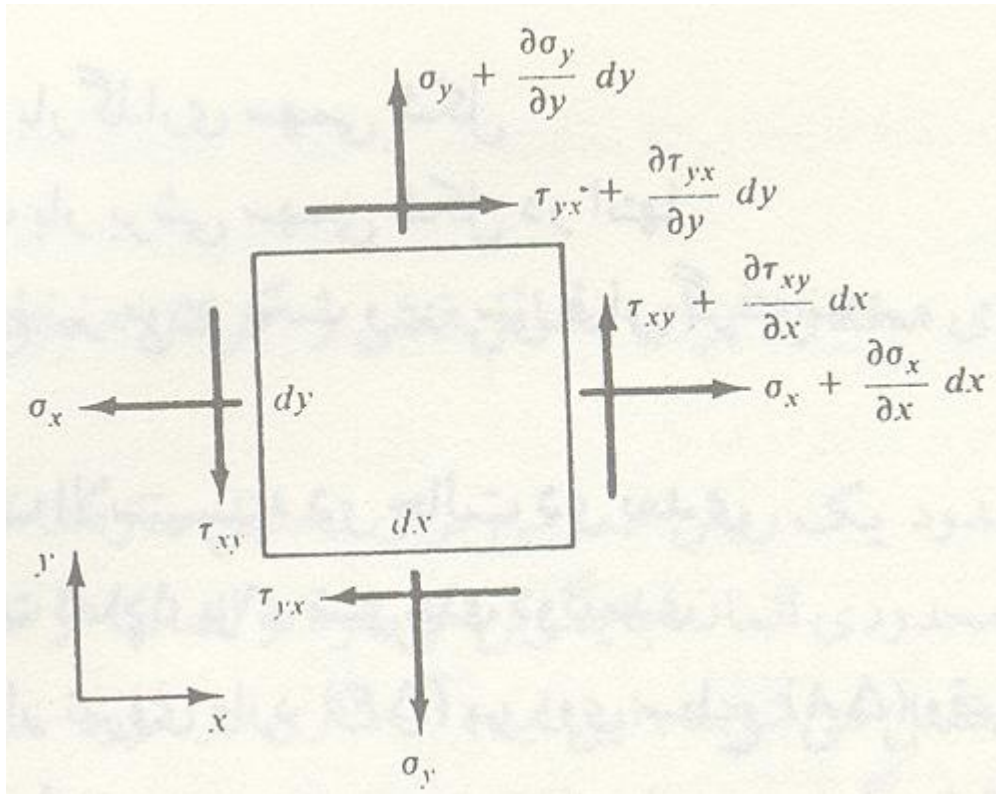
$$\sigma = \begin{bmatrix} s_{xx} & t_{xy} & t_{xz} \\ t_{yx} & s_{yy} & t_{yz} \\ t_{zx} & t_{xy} & s_{zz} \end{bmatrix}$$

نیروهای کالبدی

$$R = \{R_x, R_y, R_z\}$$



جزء حجمی با ابعاد dx و dy و dz تحت تأثیر تنشهای وارده در سطوح مختلف آن و نیروی کالبدی در واحد حجم قرار دارد. با فرض ثابت بودن تنشها بر روی هر وجه از جزء مورد نظر



$$\left(s_x + \frac{\partial s_x}{\partial x} dx \right) dydz + \left(t_{xy} + \frac{\partial t_{xy}}{\partial y} dy \right) dx dz + \left(t_{zx} + \frac{\partial t_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy + R_x dx dy dz - s_x dydz - t_{yx} dx dz - t_{zx} dx dy = 0$$

با فرض $dx, dy, dz \rightarrow 0$

$$\frac{\partial s_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial t_{zx}}{\partial z} + R_x = 0$$

$$\frac{\partial t_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial s_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial t_{zy}}{\partial z} + R_y = 0$$

$$\frac{\partial t_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial s_{zz}}{\partial z} + R_z = 0$$

تانسور کرنش نیز مانند تانسور تنش ماتریس 3×3 ، متقارن و در نتیجه دارای 6 مؤلفه مستقل از یکدیگر می باشد که بیانگر وضعیت کرنش در هر نقطه می باشد:

$$\begin{aligned} e_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & g_{xy} &= g_{yx} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ e_y &= \frac{\partial v}{\partial y} & g_{yz} &= g_{zy} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ e_z &= \frac{\partial w}{\partial z} & g_{xz} &= g_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned}$$

معادلات اساسی (روابط تنش - کرنش): رابطه کلی بین تنش ها و کرنش های ایجاد شده در یک جسم ارتجاعی

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = [s_x, s_y, s_z, t_{xy}, t_{yz}, t_{zx}]^T$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [e_x, e_y, e_z, g_{xy}, g_{yz}, g_{zx}]^T$$

\mathbf{D} ماتریسی است متقارن که در کلی ترین حالت ۲۱ پارامتر مستقل از هم دارد و در صورتیکه ماده مورد نظر همگن و ایزوتروپ باشد دارای ۲ پارامتر مستقل (یعنی مدول ارتجاعی E و ضریب پواسون ν) می باشد. در چنین حالتی کرنشهای قائم تنها ناشی از تنشهای قائم است.

$$e_x = \frac{s_x - n(s_y + s_z)}{E}$$

$$e_y = \frac{s_y - n(s_z + s_x)}{E}$$

$$e_z = \frac{s_z - n(s_y + s_x)}{E}$$

و کرنشهای برشی تنها ناشی از تنشهای برشی

$$g_{xy} = \frac{1}{G} t_{xy}$$

$$g_{yz} = \frac{1}{G} t_{yz}$$

$$g_{zx} = \frac{1}{G} t_{zx}$$

$$G = \frac{E}{2(1+n)}$$

مدول برشی

ماتریس ارتجاعی D را برای یک جسم ارتجاعی، ایزوتروپ و همگن سه بعدی

$$D = \frac{E}{(1+n)(1-2n)} \begin{bmatrix} 1-n & & & & & & \\ n & 1-n & & & & & \\ n & n & 1-n & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2n) & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2n) & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2n) & \end{bmatrix} \quad \text{Symmetric}$$

$$\frac{\partial^2 e_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 g_{xy}}{\partial x \partial y}$$

$$2 \frac{\partial^2 e_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial g_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial g_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial g_{xy}}{\partial z} \right)$$

$$\frac{\partial^2 e_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 e_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 g_{yz}}{\partial y \partial z}$$

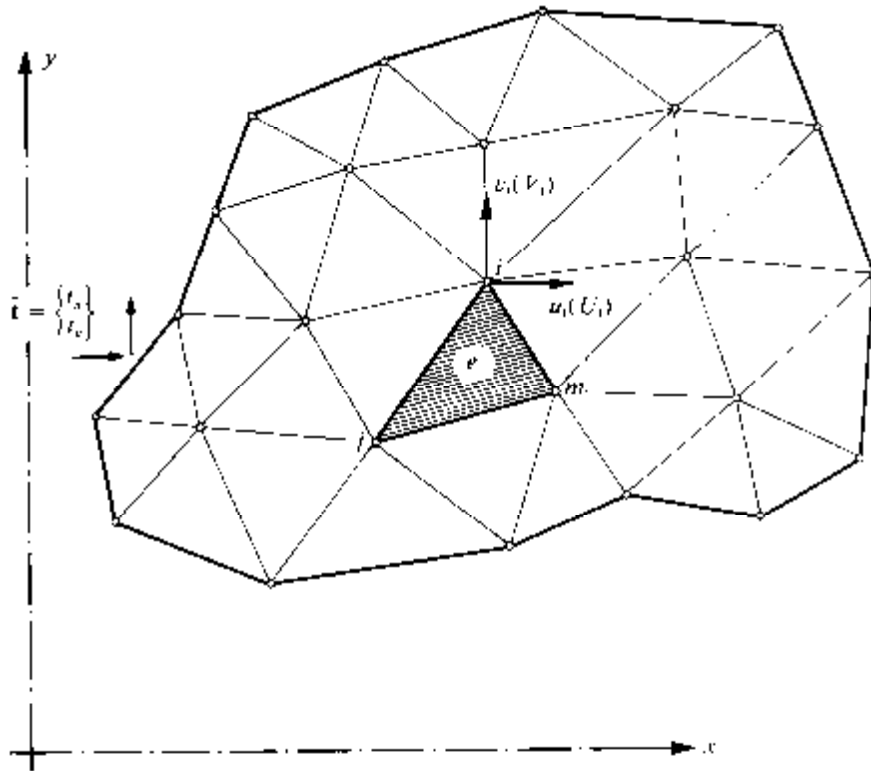
$$2 \frac{\partial^2 e_y}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial g_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial g_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial g_{xy}}{\partial z} \right)$$

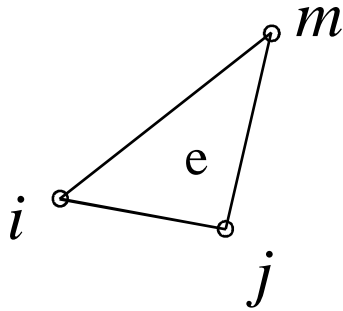
$$\frac{\partial^2 e_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 g_{xz}}{\partial x \partial z}$$

$$2 \frac{\partial^2 e_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial g_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial g_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial g_{xy}}{\partial z} \right)$$

فرمولبندی مستقیم روش اجزاء محدود

۱- گسسته سازی: پیوستار مورد نظر ابتدا به تعدادی جزء محدود تقسیم میشود





۲- تعریف تابع تغییر مکان جزء:

تابع تغییر مکان در داخل جزء نمونه e با گره‌های m, j, i (در این جا مثلثی با اضلاع مستقیم) را می توان بصورت زیر تعریف کرد

$$u^e(x) = N_i^e u_i + N_j^e u_j + N_m^e u_m$$

$$v^e(x) = N_i^e v_i + N_j^e v_j + N_m^e v_m$$

که در آن (u_i, u_j, u_m) و (v_i, v_j, v_m) نمایشگر تغییر مکانهای گرهی در جهات مختصات و (N_i, N_j, N_m) نمایشگر توابع معلومی از مکان موسوم به توابع شکل اند.

$$U^e(x) = N_i^e a_i + N_j^e a_j + N_m^e a_m$$

$$N^e = [N_i, N_j, N_m]^e$$

$$U^e(x) = N^e a^e$$

$$a^e = [a_i, a_j, a_m]$$

$$a_i = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix}$$

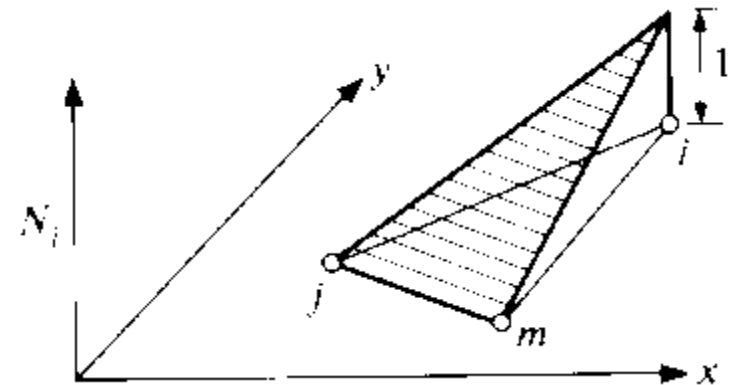
$$N_i^e = \begin{bmatrix} N_i^e & 0 \\ 0 & N_i^e \end{bmatrix}$$

توابع شکل بایستی چنان انتخاب شوند تا تابع تغییر مکان در هر گره فرضی مقدار تغییر مکان گرهی آن را بدست بدهد. بدین منظور باید رابطه زیر برقرار باشد .

$$N_i^e(x_i, y_i) = 1$$

$$N_i^e(x_j, y_j) = 0.0$$

$$N_i^e(x_m, y_m) = 0.0$$



توابع مورد نظر بایستی منحصر بفرد و یکتا باشد چرا که در غیر اینصورت تغییر مکان گره فرضی i دارای مقادیر متفاوتی در اجزای مجاور گره مورد نظر خواهد بود و لذا از اصل همخوانی تغییر مکانها تخطی خواهد شد

کرنش: با معلوم بودن تغییر مکان در داخل جزء می توان مقدار کرنش را در هر نقطه فرضی داخل جزء بصورت زیر بدست آورد.

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{S} \mathbf{U}^e$$

\mathbf{S} عملگر کرنش

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{B}^e \mathbf{a}^e$$

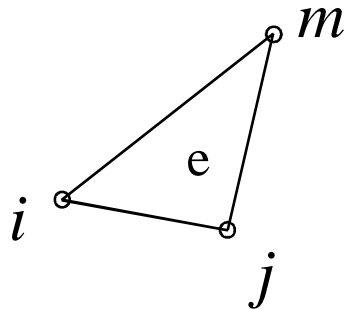
که در آن $\mathbf{B}^e = \mathbf{S} \mathbf{N}^e$ بنام ماتریس کرنش نامیده می شود.

تنش: پس از محاسبه وضعیت کرنش در داخل جزء می توان وضعیت تنش را با استفاده از رابطه کشسانی تنش- کرنش بصورت زیر محاسبه کرد.

$$\boldsymbol{\sigma}^e = \mathbf{D}^e \boldsymbol{\varepsilon}^e$$

که در آن \mathbf{D}^e ماتریس کشسانی است. در صورتی که جسم قبل از بارگذاری قسمت تاثیر تنشهای اولیه $\boldsymbol{\sigma}_0^e$ و کرنشهای اولیه $\boldsymbol{\varepsilon}_0^e$ قرار داشته باشد

$$\boldsymbol{\sigma}^e = \mathbf{D}^e (\boldsymbol{\varepsilon}^e - \boldsymbol{\varepsilon}_0^e) + \boldsymbol{\sigma}_0^e$$



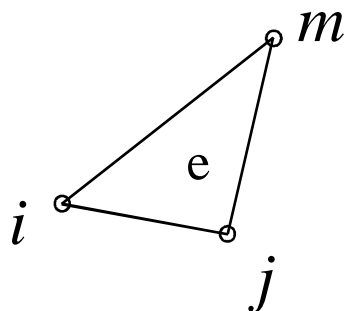
نیروهای گرهی هم ارز:

فرض کنید که

$$\mathbf{R}^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{R}_i \\ \mathbf{R}_j \\ \mathbf{R}_m \end{Bmatrix}^e \quad \mathbf{R}_i^e = \begin{Bmatrix} R_x \\ R_y \end{Bmatrix}_i$$

نمایشگر نیروهای گرهی هم ارز تنشهای داخلی و بارهای گسترده وارده بر جزء باشد. بارهای گسترده (کالبدی) بارهایی هستند که در واحد حجم وارد شده و در دو بعد با بردار زیر تعریف می شود.

$$\mathbf{b}^e = \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \end{Bmatrix}^e$$



محاسبه رابطه سختی با استفاده از اصل کار مجازی:

بردار تغییر مکان مجازی

$$da^e = \begin{Bmatrix} da_i^e \\ da_j^e \\ da_m^e \end{Bmatrix} \quad da_i^e = \begin{Bmatrix} du_i \\ dv_i \end{Bmatrix}^e$$

$$da^{eT} R^e$$

کار حاصل از نیروهای گرهی هم ارز خارجی

$$d\varepsilon^{eT} \sigma^e = da^{eT} (B^{eT} \sigma^e)$$

کار حاصل از تنشهای داخلی در واحد حجم

$$dU^{eT} b^e = da^{eT} (N^{eT} b^e)$$

کار حاصل از نیروهای کالبدی خارجی در واحد حجم

با مساوی قرار دادن کار خارجی و کار داخلی

$$da^{eT} R^e = da^{eT} \left[\int_{v^e} B^{eT} \boldsymbol{\sigma}^e dv - \int_{v^e} N^{eT} \mathbf{b}^e dv \right]$$

این رابطه بازای هر تغییر مکان فرضی (مجازی) صادق است. در نتیجه

$$R^e = \int_{v^e} B^{eT} \boldsymbol{\sigma}^e dv - \int_{v^e} N^{eT} \mathbf{b}^e dv$$

این گزاره کاملاً" عمومی است و بازای هر رابطه تنش - کرنش فرضی نیز برقرار است.

$$R^e = K^e a^e + f^e$$

$$K^e = \int_{v^e} B^{eT} D^e B^e dv$$

$$f^e = - \int_{v^e} N^{eT} \mathbf{b}^e dv - \int_{v^e} B^{eT} D^e \boldsymbol{\varepsilon}_0^e dv + \int_{v^e} B^{eT} \boldsymbol{\sigma}_0^e dv$$

تعداد نیروهای گرهی خارجی و داخلی

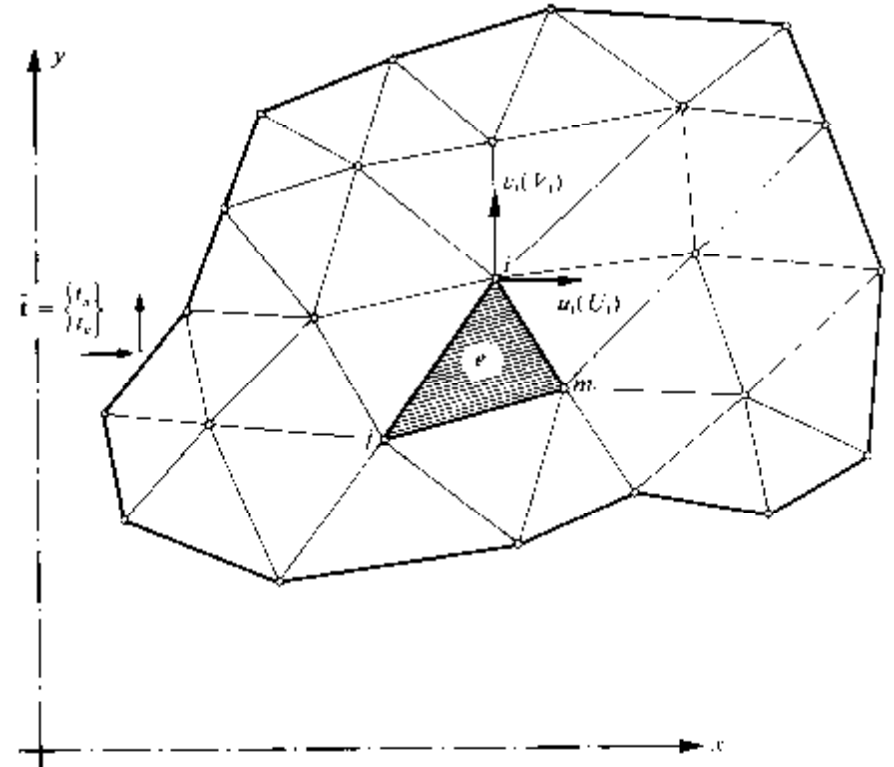
$$R = \sum R^e$$

$$R = \sum (K^e a^e + f^e)$$

$$R = Ka + f$$

$$K = \sum K^e$$

$$f = \sum f^e$$



تعمیم روش به کل حوزه:

انرژی کل یک سازه ارتجاعی حاصل جمع انرژی کرنشی و انرژی پتانسیل بارهای خارجی می باشد:

$$I = I_s + I_e$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) + \boldsymbol{\sigma}_0$$

با فرض رابطه تنش-کرنش

مقدار انرژی کرنشی

$$I_s = \frac{1}{2} \int_v \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} dv - \int_v \boldsymbol{\varepsilon}_0^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} dv + \int_v \boldsymbol{\sigma}_0^T \boldsymbol{\varepsilon} dv$$

$$I_s = \frac{1}{2} \int_v \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} dv - \int_v \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0 dv + \int_v \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}_0 dv$$

$\bar{\mathbf{t}}$

انرژی پتانسیل بارهای گسترده حجمی \mathbf{b} و تنش های سطحی

$$I_e = - \int_v \mathbf{U}^T \mathbf{b} dv - \int_{G_t} \mathbf{U}^T \bar{\mathbf{t}} dA$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{t}} = \begin{pmatrix} \bar{t}_x \\ \bar{t}_y \\ \bar{t}_z \end{pmatrix}$$

تابع تغییر مکان تقریبی

$$U = Na$$

$$a = [a_1, a_2, \dots, a_n]^T$$

$$a_i = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_i$$

دو بعد

$$a_i = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}_i$$

سه بعد

$$N = [N_1, N_2, \dots, N_n]$$

$$N_i = \begin{bmatrix} N & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}_i$$

دو بعد

$$N_i = \begin{bmatrix} N & 0 & 0 \\ 0 & N & 0 \\ 0 & 0 & N \end{bmatrix}_i$$

سه بعد

کرنشهای تقریبی

$$\varepsilon = SU$$

$$\varepsilon = S(Na)$$

$$\varepsilon = (SN) a$$

با فرض $SN = B$

$$\varepsilon = Ba$$

$$a = [a_1, a_2, \dots, a_n]^T$$

$$B = [B_1, B_2, \dots, B_n]$$

$$B_i = SN_i$$

با جایگذاری

$$I_s = \frac{1}{2} \int_v \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} dv - \int_v \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0 dv + \int_v \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}_0 dv - \int_v \mathbf{U}^T \mathbf{b} dv - \int_{G_t} \mathbf{U}^T \bar{\mathbf{t}} dA$$

$$I = \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \left[\int_v \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dv \right] \mathbf{a} + \mathbf{a}^T \left[\int_v \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0 dv \right] + \mathbf{a}^T \left[\int_v \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_0 dv \right] - \mathbf{a}^T \left[\int_v \mathbf{N}^T \mathbf{b} dv \right] - \mathbf{a}^T \left[\int_{G_t} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} dA \right]$$

$$I = \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \mathbf{K} \mathbf{a} + \mathbf{a}^T \mathbf{f}_{\varepsilon_0} + \mathbf{a}^T \mathbf{f}_{\sigma_0} + \mathbf{a}^T \mathbf{f}_b + \mathbf{a}^T \mathbf{f}_t$$

$$\frac{\partial I}{\partial \mathbf{a}} = 0$$

$$\frac{1}{2} \mathbf{K} \mathbf{a} + \frac{1}{2} (\mathbf{a}^T \mathbf{K})^T + \mathbf{f}_{s_0} + \mathbf{f}_{e_0} + \mathbf{f}_b + \mathbf{f}_t = 0$$

$$\mathbf{K} \mathbf{a} + \mathbf{f}_{s_0} + \mathbf{f}_{e_0} + \mathbf{f}_b + \mathbf{f}_t = 0$$

$$Ka + f = 0.0$$

$$K = \int_v B^T DB dv$$

$$f_{e_0} = - \int_v \epsilon_0^T DB dv$$

$$f_{\bar{t}} = - \int_{G_t} N^T \bar{t} dA$$

$$f_{s_0} = - \int_v s_0^T B dv$$

$$f_b = - \int_v N^T b dv$$

در صورت وجود نیروهای متمرکز

$$R = [R_1, R_2, \dots, R_n]$$

$$R_i = \begin{bmatrix} R_x \\ R_y \end{bmatrix}_i$$

دو بعد

$$a_i = \begin{bmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{bmatrix}_i$$

سه بعد

$$Ka + f = R$$

روش کار مجازی

$$\int d\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{S} dv = \int d\boldsymbol{U}^T \boldsymbol{b} dv + \int d\boldsymbol{U}^T \bar{\boldsymbol{t}} dA + d\boldsymbol{a}^T \boldsymbol{R}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) + \boldsymbol{\sigma}_0$$

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{N}\boldsymbol{a}$$

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{B}d\boldsymbol{a}$$

$$d\boldsymbol{a}^T \int \boldsymbol{\varepsilon}^T [\boldsymbol{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) + \boldsymbol{\sigma}_0] dv = d\boldsymbol{a}^T \left[\int \boldsymbol{N}^T \boldsymbol{b} dv + \int \boldsymbol{N}^T \bar{\boldsymbol{t}} dA + \boldsymbol{R} \right]$$

$$\left[\int \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{D} \boldsymbol{B} dv \right] \boldsymbol{a} - \int \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0 dv + \int \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{S}_0 dv - \int \boldsymbol{N}^T \boldsymbol{b} dv - \int \boldsymbol{N}^T \bar{\boldsymbol{t}} dA = \boldsymbol{R}$$

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{f} = \boldsymbol{R}$$

تحلیل سه بعدی محیطه‌های پیوسته ارتجاعی با استفاده از روش اجزاء محدود از نظر محاسباتی بسیار پرهزینه است لذا بسیار مطلوب است که در صورت امکان با استفاده از فرضیات ساده کننده مسأله را به ۲ بعد یا حتی ۱ بعد کاهش داد

تنش صفحه ای:

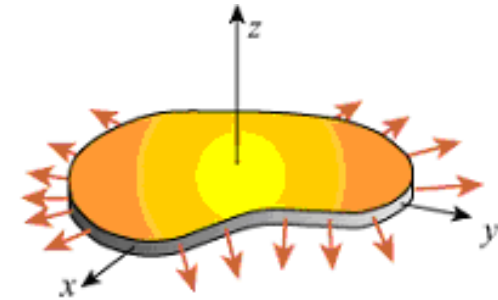
در مسائل تنش صفحه ای، ابعاد جسم ارتجاعی مورد نظر در یکی از جهات (جهت محور Z) در مقایسه با دیگر ابعاد بسیار کوچک بوده و هیچگونه بارگذاری در این جهت صورت نمی پذیرد.

$$U = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$$

$$b = \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \end{Bmatrix}$$

$$\delta = \begin{Bmatrix} s_x \\ s_y \\ t_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \\ g_{xy} \\ e_z \end{Bmatrix}$$



تمام مؤلفه های تنش، کرنش و تغییر مکانها تابعی از (X,Y) خواهند بود. در مؤلفه های کرنش از آنجا که مشارکتی در انرژی کرنشی ایجاد شده ندارد لذا در فرمولبندی وارد نمی شود و ما آن را حذف می کنیم.

هیچگونه

$$e_z = \frac{s_z - n(s_y + s_x)}{E}$$

$$D = \frac{E}{1-n^2} \begin{bmatrix} 1 & n & 0 \\ n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-n}{2} \end{bmatrix}$$

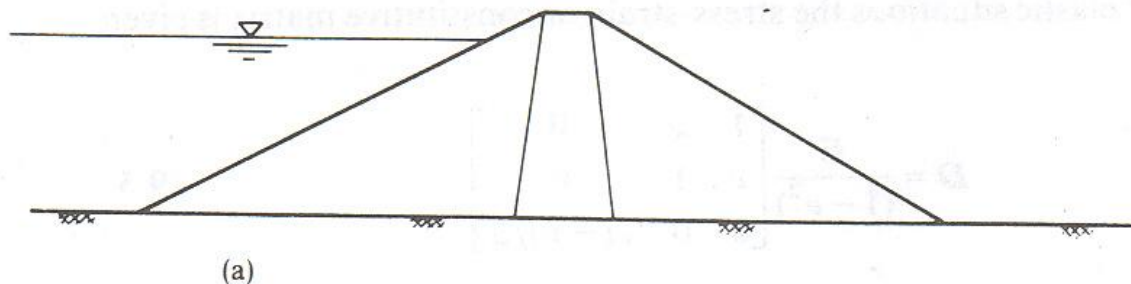
ماتریس ارتجاعی

کرنش صفحه ای:

در این حالت ابعاد محیط پیوسته مورد نظر در یکی از جهات (جهت محور Z) در مقایسه با ابعاد دیگر بسیار بزرگ بوده و علاوه بر این بارگذاری (نیروی حجمی و سطحی) در صفحه (X,Y) صورت می پذیرد. بارگذاری و هندسه مساله در جهت محور Zها ثابت و بدون تغییر فرض میشود. در این حالت هم تنشها و کرنشها و تغییر مکانها تنها تابعی از X,Y خواهد بود.

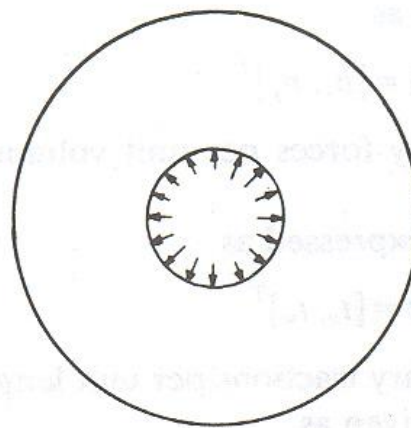
$$\mathbf{U} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \end{Bmatrix}$$



$$\mathbf{e} = \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{g}_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{d} = \begin{Bmatrix} s_x \\ s_y \\ t_{xy} \\ s_z \end{Bmatrix}$$



(b)

تنش d_z هیچگونه مشارکتی در انرژی کرنشی ندارد لذا از محاسبات حذف می شود

$$e_z = \frac{s_z - n(s_y + s_x)}{E}$$

ماتریس ارتجاعی

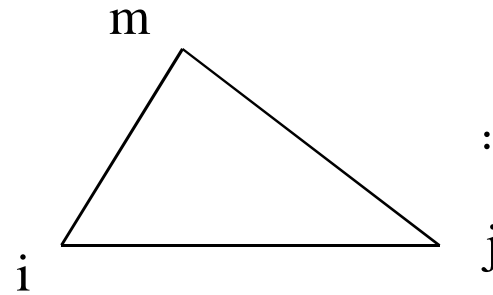
$$D = \frac{E}{(1+n)(1-2n)} \begin{bmatrix} 1-n & n & 0 \\ n & 1-n & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2n}{2} \end{bmatrix}$$

اجزای دو بعدی:

جزء مثلثی با کرنش ثابت (جزء مثلثی خطی):

$$u^e = a_1 + a_2x + a_3y$$

$$v^e = a'_1 + a'_2x + a'_3y$$



هر یک از این توابع دارای سه پارامتر مجهول بوده که مقدار آنها را می توان با استفاده از سه تغییر مکان گرهی مربوطه محاسبه نمود.

$$u_i = a_1 + a_2x_i + a_3y_i$$

$$u_j = a_1 + a_2x_j + a_3y_j$$

$$u_m = a_1 + a_2x_m + a_3y_m$$

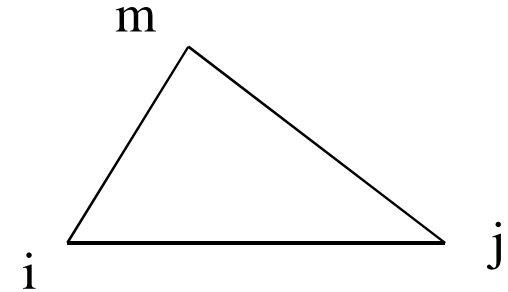
با مرتب سازی بصورت ماتریسی

$$\begin{bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

با حل دستگاه معادله

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2D} \begin{bmatrix} a_i & a_j & a_m \\ b_i & b_j & b_m \\ c_i & c_j & c_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \end{bmatrix}$$



که در آن

$$2D^e = \det \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix} = \text{دو برابر مساحت مثلث}$$

$$a_i = x_j y_m - x_m y_j$$

$$b_i = y_j - y_m$$

$$c_i = x_m - x_j$$

α با جایگذاری در رابطه تابع تغییر مکان و مرتب نمودن داریم:

$$u^e = \frac{1}{2D^e} [(a_i + b_i x + c_i y)u_i + (a_j + b_j x + c_j y)u_j + (a_m + b_m x + c_m y)u_m]$$

بروشی مشابه

$$v^e = \frac{1}{2D^e} [(a_i + b_i x + c_i y)v_i + (a_j + b_j x + c_j y)v_j + (a_m + b_m x + c_m y)v_m]$$

$$u^e = N_i^e u_i + N_j^e u_j + N_m^e u_m$$

توابع تغییر مکان

$$v^e = N_i^e v_i + N_j^e v_j + N_m^e v_m$$

$$U^e = \begin{bmatrix} u^e \\ v^e \end{bmatrix}$$

$$N_i^e = \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix}^e$$

$$a_i^e = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix}^e$$

یا

$$U^e(x) = N_i^e a_i + N_j^e a_j + N_m^e a_m$$

$$U^e = N^e a^e$$

$$N^e = [N_i, N_j, N_m]^e = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_m & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_m \end{bmatrix}^e$$

$$a^e = [a_i, a_j, a_m]^e = [u_i \quad v_i \quad u_j \quad v_j \quad u_m \quad v_m]^e$$

$$N_i^e = \frac{1}{2D^e} (a_i + b_i x + c_i y)$$

با استفاده از تابع تغییر مکان می توان مقدار کرنشها را در هر نقطه از داخل جزء بصورت زیر نمایش داد:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{g}_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}^e$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = S U^e$$

با جایگذاری

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{B}^e \mathbf{a}^e$$

$$\mathbf{B}^e = [\mathbf{B}_i \quad \mathbf{B}_j \quad \mathbf{B}_m]^e$$

$$\mathbf{a}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_i \\ \mathbf{a}_j \\ \mathbf{a}_m \end{bmatrix}^e$$

$$\mathbf{B}_i^e = \mathbf{S} \mathbf{N}_i^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix}^e$$

$$\mathbf{B}_i^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} = \frac{1}{2D} \begin{bmatrix} b_i & 0 \\ 0 & c_i \\ c_i & b_i \end{bmatrix}$$

ماتریس \mathbf{B}^e مستقل از X و Y بوده و دارای مقداری ثابت است و این بدان معنی است که کرنشها نیز در سراسر جزء ثابت می باشد. بدین ترتیب مشاهده می شود که شرط کرنش ثابت بوسیله توابع شکل تأمین گردیده است.

کرنشهای اولیه:

در آغاز تحلیل یک جسم ارتجاعی، ممکن است کرنشهایی در جسم قبل از بارگذاری موجود باشد که می توانند ناشی از عواملی چون تغییرات درجه حرارت، انقباض، رشد و تغییرات کریستالی باشند که به بردار کرنشهای زیر منجر می شوند:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0^e = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{x_0} \\ \mathbf{e}_{y_0} \\ \mathbf{g}_{xy_0} \end{bmatrix}$$

کرنشهای اولیه حرارتی:

تنش صفحه ای و مصالح ایزوتروپ

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0^e = \begin{bmatrix} \mathbf{a}q^e \\ \mathbf{a}q^e \\ 0 \end{bmatrix}$$

ایجاد $\mathbf{E} \mathbf{a} q^e$ شود که منجر به ایجاد

در حالت کرنش صفحه ای بدلیل افزایش حرارت در جهت محور Z تنشی به اندازه کرنشی برابر با در دو جهت $\mathbf{a} q^e$ می شود.

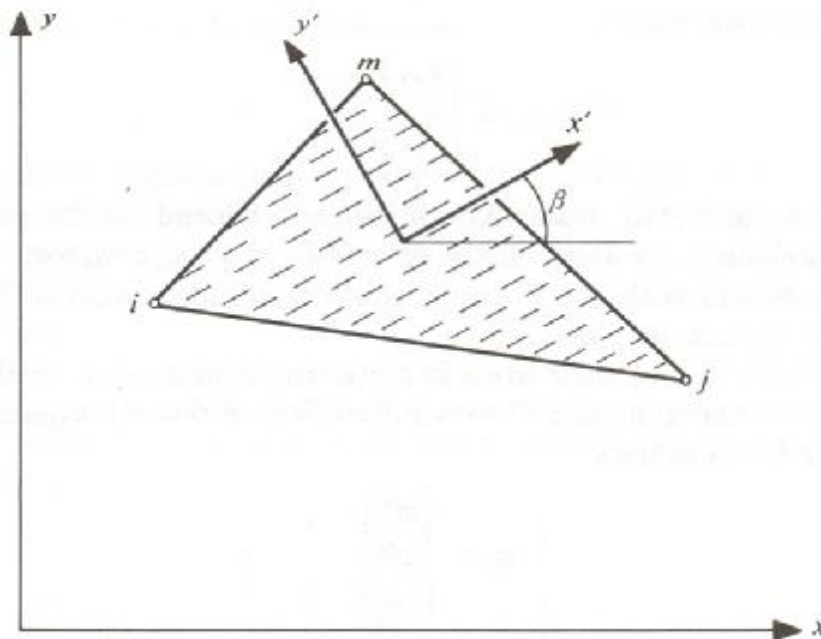
$$\boldsymbol{\varepsilon}_0^e = (1+n) \begin{bmatrix} \mathbf{a}q^e \\ \mathbf{a}q^e \\ 0 \end{bmatrix}$$

در صورتیکه ماده ایزوتروپ نباشد و

نمونه‌ها جهت اصلی مصالح باشد:

$$\boldsymbol{\varepsilon}'_0{}^e = \begin{bmatrix} e_{x'_0} \\ e_{y'_0} \\ g_{x'_0 y'_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 q^e \\ a_2 q^e \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}'_0{}^e = \mathbf{T}^T \boldsymbol{\varepsilon}_0{}^e$$



$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos^2 \beta & \sin^2 \beta & -2 \sin \beta \cos \beta \\ \sin^2 \beta & \cos^2 \beta & 2 \sin \beta \cos \beta \\ \sin \beta \cos \beta & -\sin \beta \cos \beta & \cos^2 \beta - \sin^2 \beta \end{bmatrix}$$

$$f_{e_0}^e = -\int B^{eT} D^e \epsilon_0^e dv = -B^{eT} D^e \epsilon_0^e t^e D^e$$

$$f_{s_0}^e = -\int B^{eT} \sigma_0^e dv = -B^{eT} \sigma_0^e t^e D^e$$

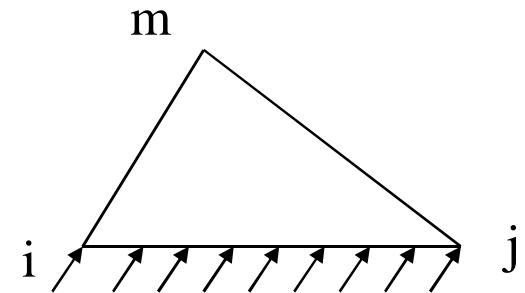
$$f_{\bar{t}}^e = -\int_{G_t^e} N^{eT} \bar{t}^e dG$$

مرز G_t^e مرزی است که مستقیماً تنش مرزی روی آن وارد می شود پس مقدار فقط برای اجزای مرزی موجود است.

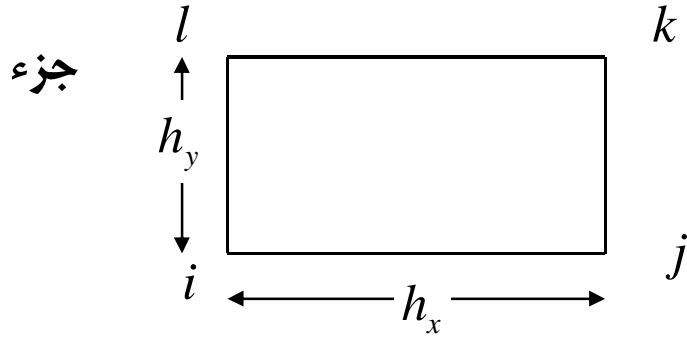
مثلاً در شکل زیر اگر این تنش دارای مقداری ثابت در طول ضلع ij باشد در این صورت داریم:

$$(f_{\bar{t}}^e)_i = -\int_{G_t^e} N_i^{eT} \bar{t}^e dG$$

$$\bar{t}^e = \begin{Bmatrix} \bar{t}_x \\ \bar{t}_y \end{Bmatrix}^e$$



$$(f_{\bar{t}}^e)_i = -\int_{ij} N_i^e I \bar{t}^e dG = -I \bar{t}^e \int_{ij} N_i^e dG = \frac{1}{2} \bar{t}^e l_{ij}$$



$$u^e = N_i^e u_i + N_j^e u_j + N_k^e u_k + N_l^e u_l$$

$$v^e = N_i^e v_i + N_j^e v_j + N_k^e v_k + N_l^e v_l$$

$$U^e = N^e a^e$$

$$N^e = [N_i, N_j, N_k, N_l]^e = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 & N_l & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 & N_l \end{bmatrix}^e$$

$$a^e = [a_i, a_j, a_k, a_k]^e = [u_i \quad v_i \quad u_j \quad v_j \quad u_k \quad v_k \quad u_l \quad v_l]^e$$

$$N_1 = \frac{(x_j - x)}{h_x} \cdot \frac{(y_l - y)}{h_y}$$

$$N_2 = \frac{(x - x_i)}{h_x} \cdot \frac{(y_k - y)}{h_y}$$

$$N_3 = \frac{(x - x_l)}{h_x} \cdot \frac{(y - y_j)}{h_y}$$

$$N_4 = \frac{(x_i - x)}{h_x} \cdot \frac{(y - y_k)}{h_y}$$

$$\mathbf{B}_i^e = \mathbf{S} \mathbf{N}_i^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_i^e & 0 \\ 0 & N_i^e \end{bmatrix}$$

ماتریس کرنش \mathbf{B}

$$\mathbf{B}_i^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial y} & \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \end{bmatrix}$$

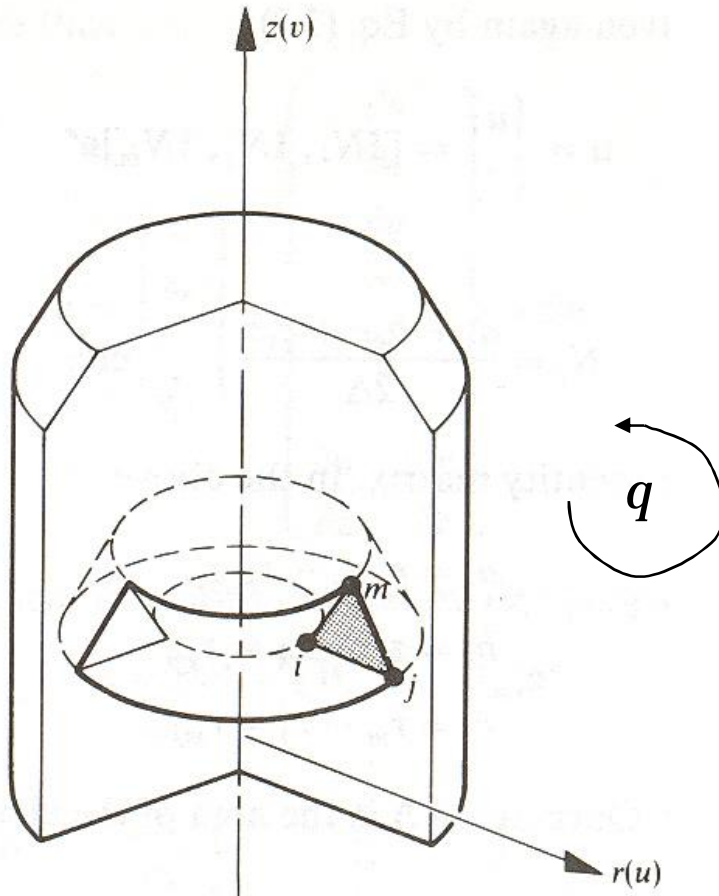
در اینجا ماتریس \mathbf{B} مثل حالت مثلثی دیگر ثابت نیست و تابعی خطی از x و y می باشد

مسائل محوری متقارن

با وجود سه بعدی بودن این اجسام به دلیل وجود تقارن، طبیعت آنها دو بعدی بوده و می توان از روشهای به کار گرفته شده در تحلیل مسائل صفحه ای در این جا نیز استفاده کرد.

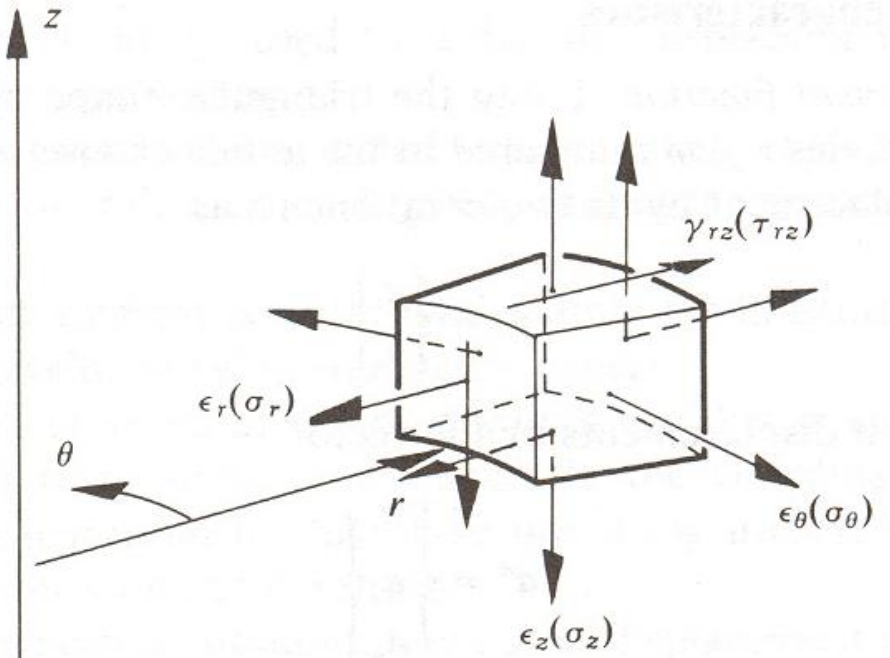
در شکل زیر نمونه ای از یک جسم دورانی نشان داده شده مولفه های تغییر مکان بواسطه تقارن تنها u , v بوده که در جهت محورهای Z , r در نظر گرفته می شوند. به دلیل تقارن موجود این تغییر مکانها مستقل از θ بوده و با آنها تغییر نمی نمایند.

q



به دلیل تقارن دو مولفه تنش برشی، و t_{rz} معادل صفر می باشد

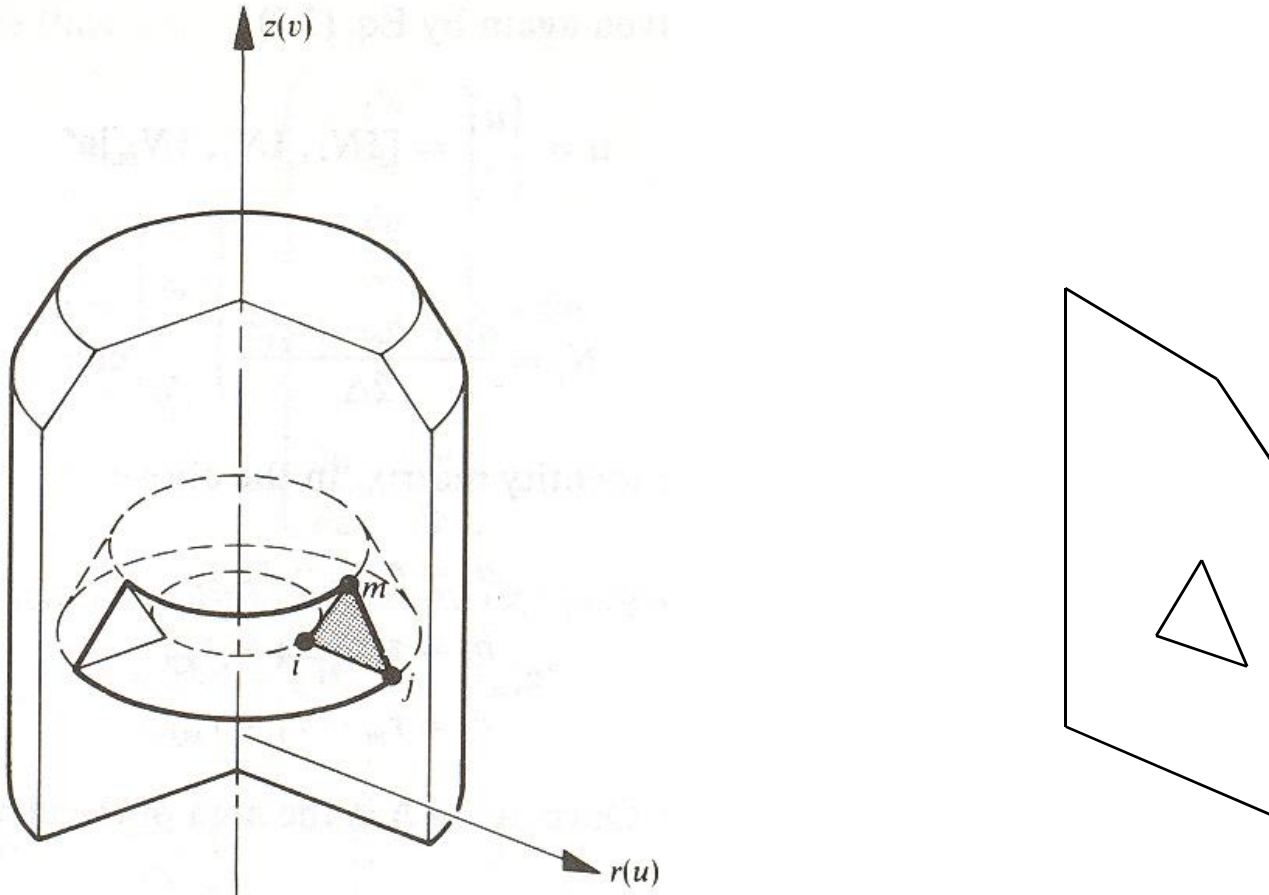
$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_z \\ \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ t_{rz} \end{Bmatrix}$$



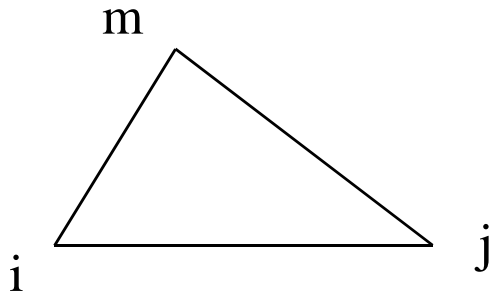
در حالت محوری متقارن، هر تغییر مکان شعاعی به یک کرنش مماسی منجر می شود و از آنجا که تنش در این جهت نیز مخالف صفر می باشد لذا بایستی سهم این مولفه چهارم در انرژی کل سازه منظور گردد. و این امر تفاوت اساسی بین حالت محوری متقارن و مسائل صفحه ای می باشد

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \epsilon_z \\ \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \\ g_{rz} \end{Bmatrix}$$

اجزاء مورد استفاده در تحلیل مسائل محوری متقارن حلقه‌هایی با سطح مقطع ثابت می‌باشند. اما از آنجا که تغییر مکان، کرنش، تنش، و نیز سطح مقطع بر روی این حلقه‌ها ثابت می‌باشد لذا می‌توان جزء مورد نظر را با سطح مقطع آن جایگزین نمود و روابط مورد نظر را با انتگرال گیری روابط موجود بر روی این سطح مقطع حول دایره به دست آورد. در این جا از تمامی اجزایی که قبلاً بحث شد به عنوان اجزاء مورد نظر از صفحه یک جسم محوری متقارن استفاده می‌کنیم.



جزء مثلثی خطی



$$U^e(x) = N_i^e a_i + N_j^e a_j + N_m^e a_m$$

$$U^e = \begin{bmatrix} u^e \\ v^e \end{bmatrix}$$

$$N_i^e = \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix}^e$$

$$a_i^e = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix}^e$$

$$U^e = N^e a^e$$

$$N^e = [N_i, N_j, N_m]^e = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_m & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_m \end{bmatrix}^e$$

$$a^e = [a_i, a_j, a_m]^e = [u_i \quad v_i \quad u_j \quad v_j \quad u_m \quad v_m]^e$$

$$N_i^e = \frac{1}{2D^e} (a_i + b_i x + c_i y)$$

بردار کرنش

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} e_z \\ e_r \\ e_q \\ g_{rz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial r} \\ u \\ r \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \end{bmatrix} = \mathbf{SU}$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ \frac{1}{r} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial r} \end{bmatrix}$$

عملگر S

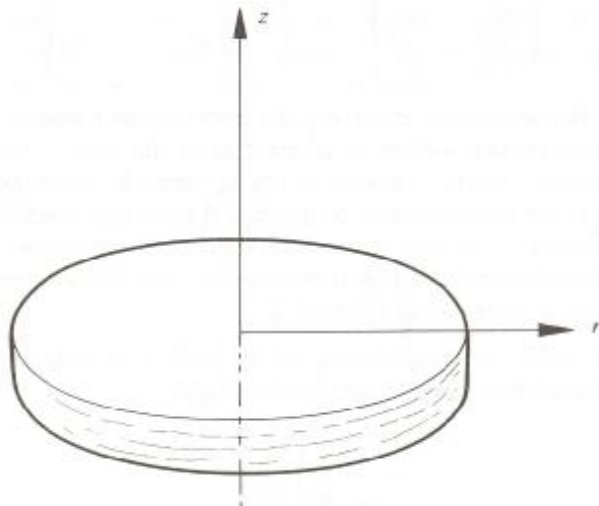
گرنش اولیه

معمولترین گرنش اولیه، گرنشهای ناشی از حرارت، برای یک ماده ایزوتروپ با ضریب انبساط حرارتی به صورت زیر تعریف می گردد. \mathbf{a}

$$= \begin{Bmatrix} a q^e \\ a q^e \\ a q^e \\ 0 \end{Bmatrix}$$

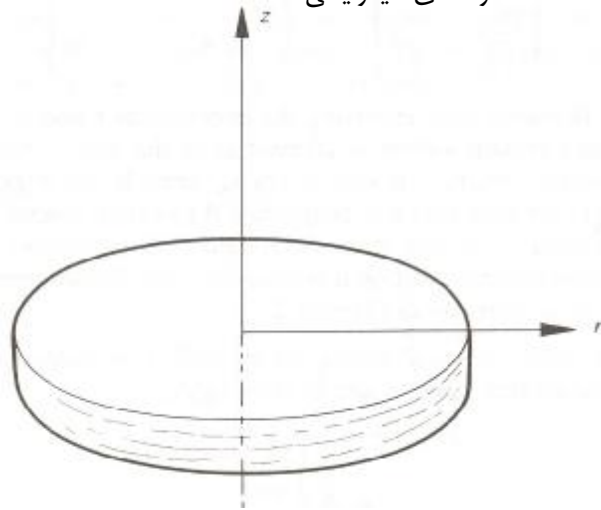
به ترتیب در جهت محور r ، θ و z تقارن و صفحه

اگر جسم ما لایه ای باشد در این حالت دو ضریب انبساط حرارت منظور خواهد شد (r, θ)



$$\mathbf{e}_0^e = \begin{Bmatrix} a_z q^e \\ a_r q^e \\ a_\theta q^e \\ 0 \end{Bmatrix}$$

رابطه تنش و کرنش



$$\sigma = D(\varepsilon - \varepsilon_0) + \sigma_0$$

برای مصالح غیر ایزوتروپ لایه‌ای روابط تنش و کرنش

$$e_z = \frac{s_z}{E_2} - \frac{n_2 s_r}{E_2} - \frac{n_2 s_q}{E_2}$$

$$e_r = \frac{s_r}{E_1} - \frac{n_2 s_2}{E_2} - \frac{n_1 s_q}{E_1}$$

$$e_q = \frac{s_q}{E_1} - \frac{n_2 s_2}{E_2} - \frac{n_1 s_r}{E_1}$$

$$g_{rz} = \frac{t_{rz}}{G_2}$$

(اندیس \$r, q\$) برای جهت \$z\$ منظور شده است

اندیس ۱ برای صفحه لایه ایزوتروپ

ماتریس ارتجاعی:

$$D = \frac{E_2}{(1+n_1)(1-n_1-2nn_2^2)} \begin{bmatrix} 1-n^2 & nn_2(1+n_1) & nn_2(1+n_1) & 0 \\ & n(1-2nn_2^2) & n(n_1+nn_2^2) & 0 \\ & & n(n_1+nn_2^2) & 0 \\ & & & T \end{bmatrix}$$

$$n = \frac{E_1}{E_2}, \quad m = \frac{G_2}{E_2}, \quad T = m(1-n_1)(1-\nu_{12}-2n\nu_2^2)$$

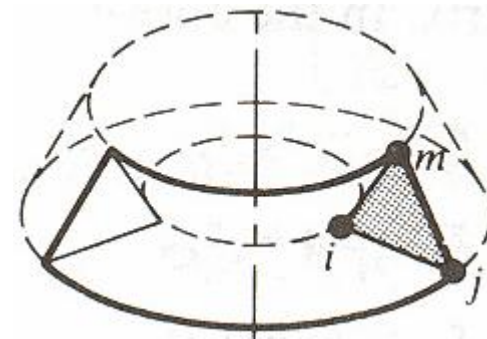
اندیس ۱ برای صفحه لایه ایزوتروپ و (اندیس) ۲ برای جهت Z منظور شده است

ماتریس سختی جزء: جزء ما حجمی است که از دوران جزء مثلثی حول محور تقارن به دست میآید.

$$K_{ij}^e = 2p \int_{v^e} B_i^T DB_j dv^e$$

$$dv^e = 2pr drdz$$

$$K_{ij}^e = 2p \int B_i^T DB_j r drdz$$

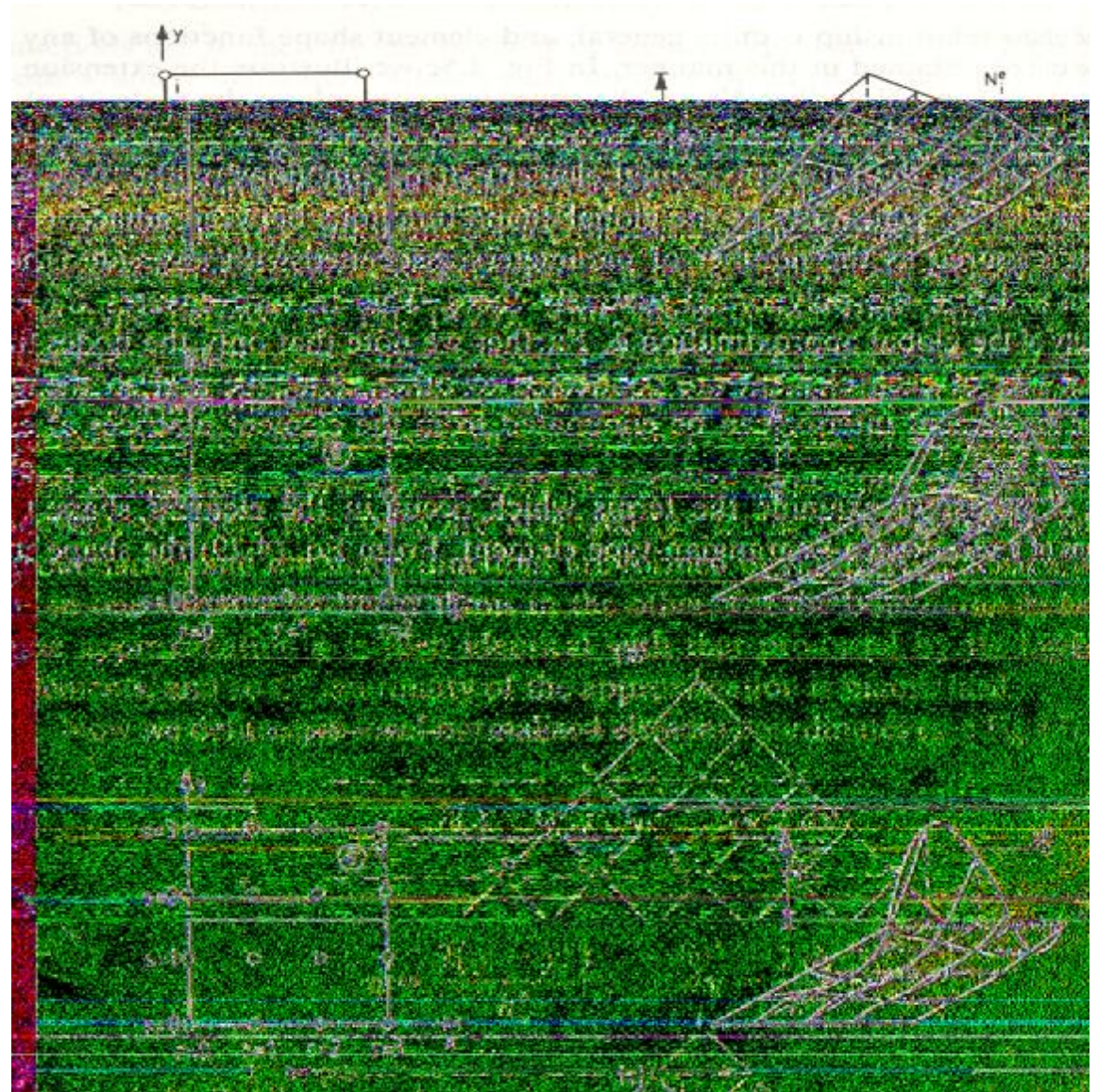


HIGHER ORDER RECTANGULAR ELEMENTS

Standard-Type Shape Functions-Lagrangian and Serendipity Elements

We can generate higher order shape functions, if the element nodes are placed on a rectangular grid.
if we label each point by a double suffix (r, s) ($r = 0, 1, 2$; $s = 0, 1, 2$ for the quadratic element), we can write the element shape function corresponding to node (r, s) as

$$N_{rs}^e = L_r^p(x) L_s^p(y)$$



where for the quadratic element $p = 2$. is the Lagrangian interpolation polynomial of degree p ,

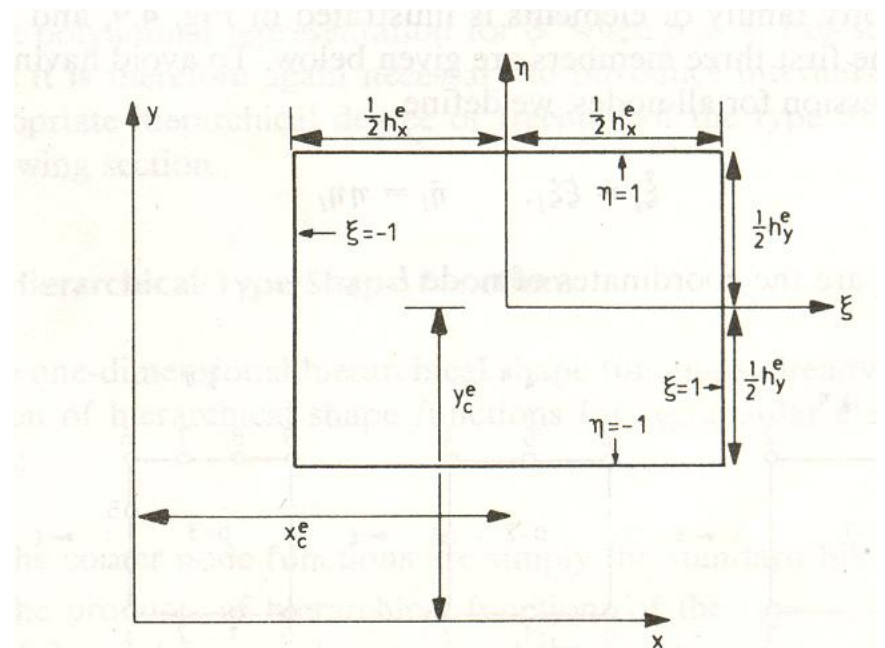
continuity of the global shape functions between adjacent elements is assured as the number of parameters associated with any side is sufficient to define the polynomial uniquely there ensuring Co continuity of the global approximation .

only the nodes along the sides of each element are connected to other elements, and so the nodes in the element interior can be eliminated from the element matrices at the element level.

Now we define two local normalized element coordinates

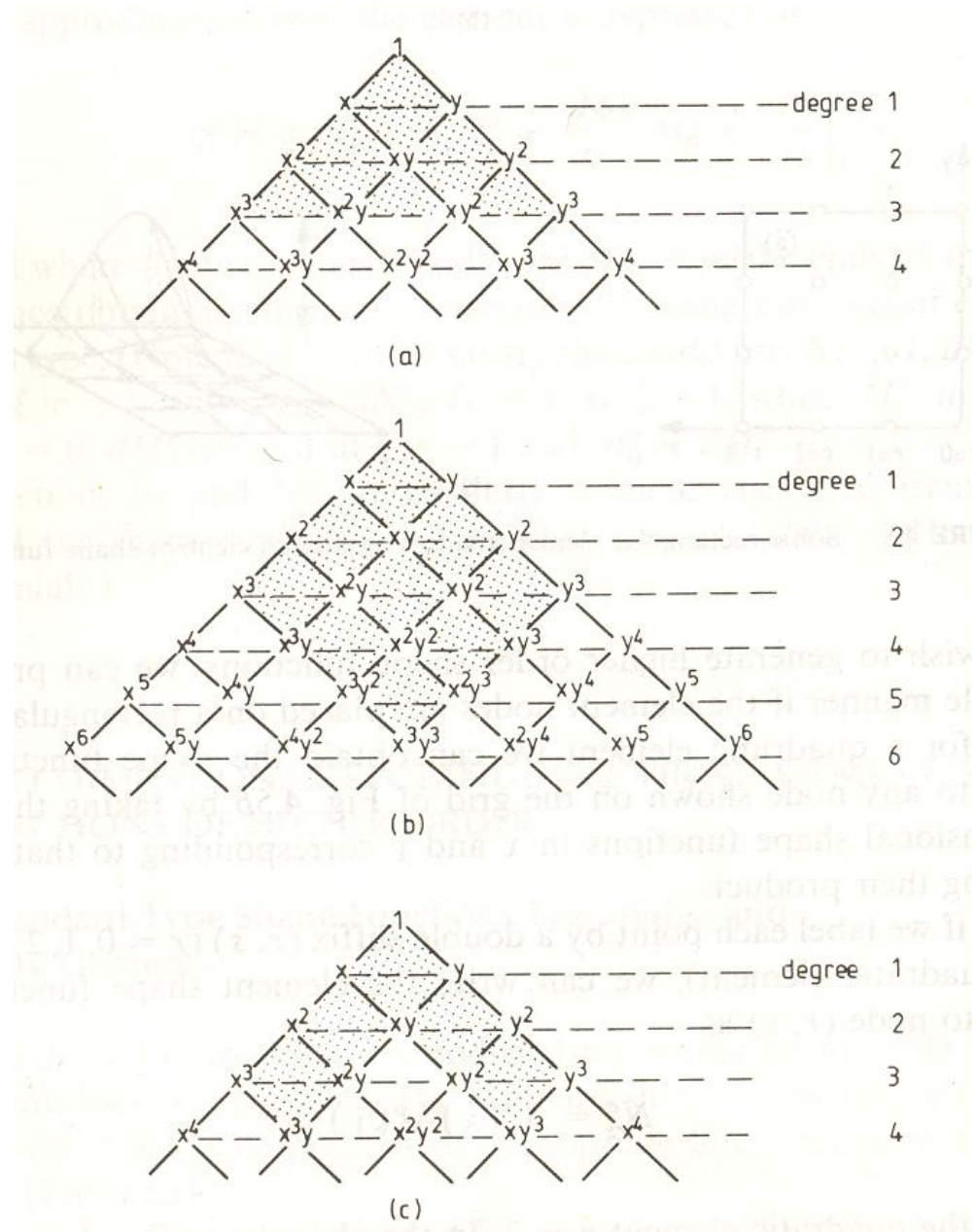
$$\mathbf{x} = \frac{2(x - x_c^e)}{h_x^e} \quad d\mathbf{x} = \frac{2dx}{h_x^e}$$

$$\mathbf{h} = \frac{2(y - y_c^e)}{h_y^e} \quad d\mathbf{h} = \frac{2dy}{h_y^e}$$



the terms which occur in the element shape functions of a p th-degree Lagrangian-type element is in excess of the number of terms necessary to reproduce a complete polynomial of degree p in x and y .

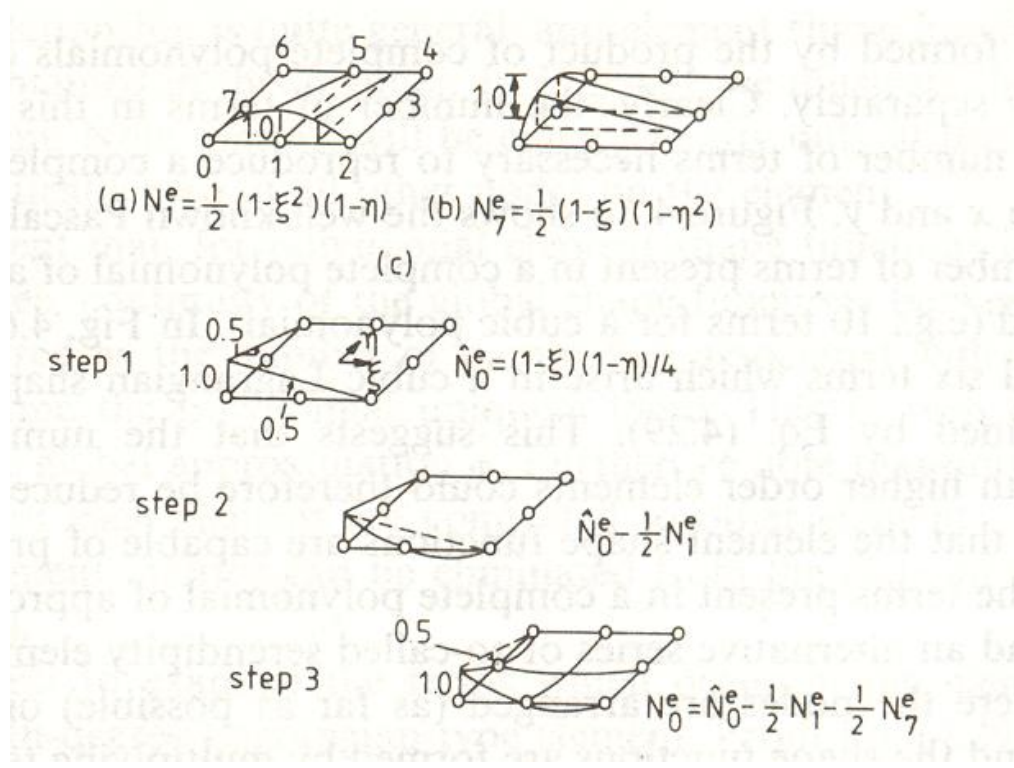
the number of nodes associated with higher order elements could therefore be reduced leading to serendipity elements



Pascal triangle

the nodes are arranged (as far as possible) on the element boundaries, and the shape functions are formed by multiplying terms of degree p in one variable by linear terms in the other..

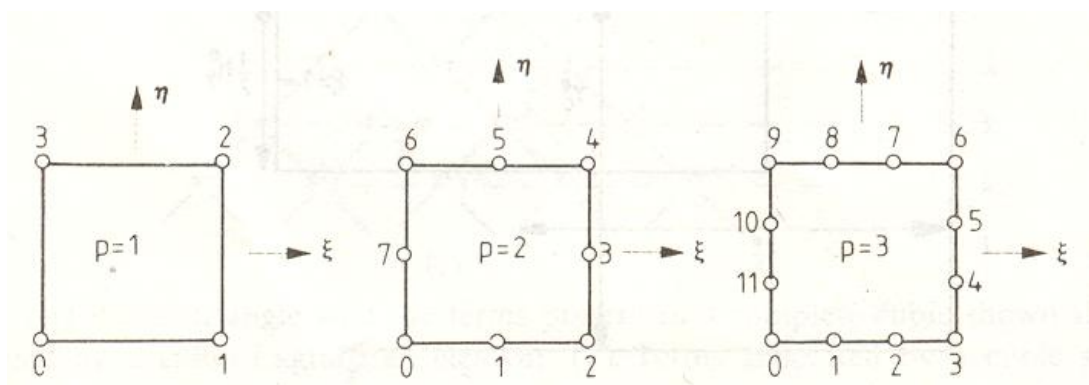
The serendipity family of elements for the first three members



$$\bar{\mathbf{x}}_l = \mathbf{xx}_l$$

$$\bar{\mathbf{h}}_l = \mathbf{hh}_l$$

Where \mathbf{x}_l and \mathbf{h}_l are the coordinates of node l



Linear Elements

$$N_l^e = \frac{1}{4}(1 + \tilde{\xi}_l)(1 + \tilde{\eta}_l), \quad l = 0, 1, 2, 3 \quad (4.32)$$

which are identical to the first-order Lagrangian element shape functions.

Quadratic Elements

$$\text{Corner node} \quad N_l^e = \frac{1}{4}(1 + \tilde{\xi}_l)(1 + \tilde{\eta}_l)(\tilde{\xi}_l + \tilde{\eta}_l - 1), \quad l = 0, 2, 4, 6 \quad (4.33a)$$

$$\text{Midside node} \quad N_l^e = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \tilde{\eta}_l), \quad l = 1, 5$$

$$N_l^e = \frac{1}{2}(1 + \tilde{\xi}_l)(1 - \eta^2), \quad l = 3, 7 \quad (4.33b)$$

Cubic Elements

$$\text{Corner node} \quad N_l^e = \frac{1}{32}(1 + \tilde{\xi}_l)(1 + \tilde{\eta}_l)[-10 + 9(\xi^2 + \eta^2)], \quad l = 0, 3, 6, 9 \quad (4.34a)$$

$$\text{Midside node} \quad N_l^e = \frac{9}{32}(1 + \tilde{\xi}_l)(1 - \eta^2)(1 + 9\tilde{\eta}_l), \quad l = 4, 5, 10, 11 \quad (4.34b)$$

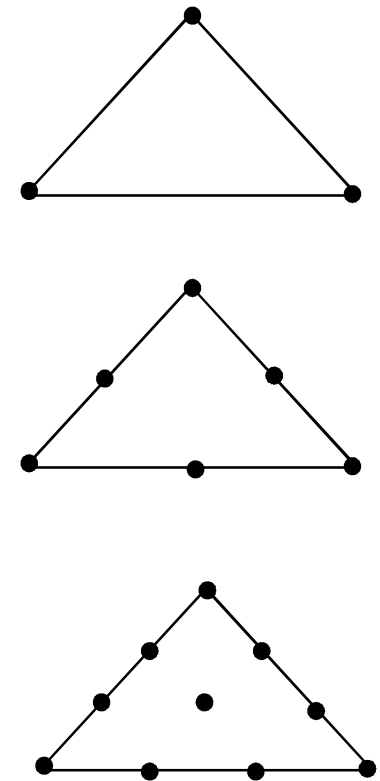
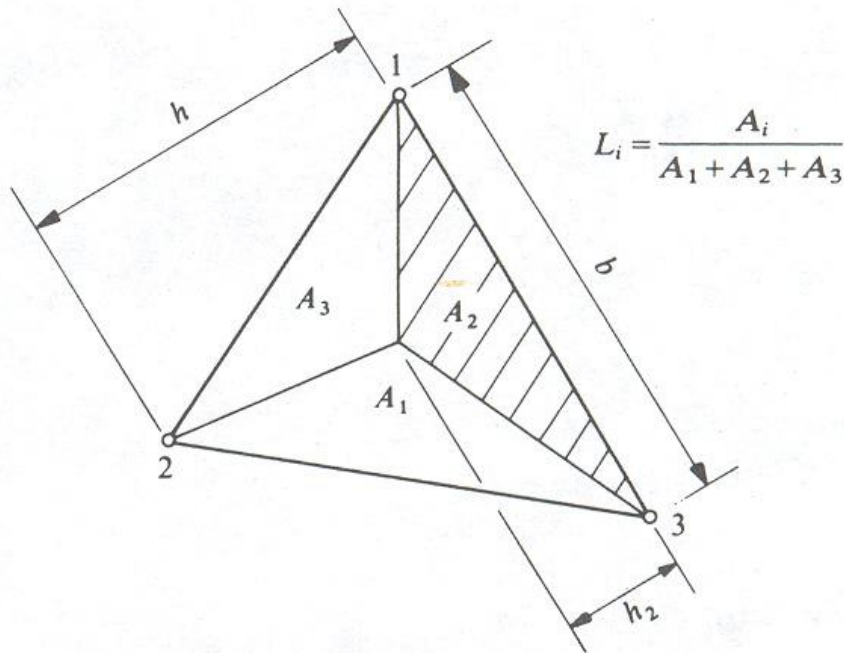
for the remaining midside nodes interchange the ξ and η variables in this expression.

For $p \geq 4$ it is necessary to introduce internal nodes.

TWO-DIMENSIONAL SHAPE FUNCTIONS FOR TRIANGLES

Standard-Type Shape Functions - Area Coordinates

triangular elements are a popular choice. if the nodes follow the intersection pattern of the lines shown in the Pascal triangle, we have at all times just a sufficient number of such nodes to generate a family of complete polynomials.



"natural" set of coordinates

area coordinates (L_0, L_1, L_2).

$$L_1 = \frac{a_1^e + b_1^e x + g_1^e y}{2\Delta^e}$$

$$L_2 = \frac{a_2^e + b_2^e x + g_2^e y}{2\Delta^e}$$

$$L_3 = \frac{a_3^e + b_3^e x + g_3^e y}{2\Delta^e}$$

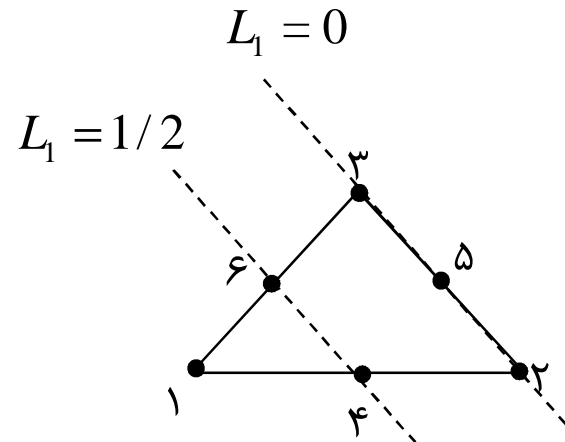
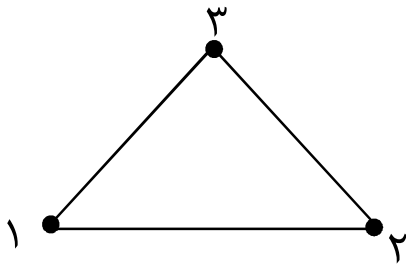
$$\Delta^e = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}$$

$$a_1^e = x_2 y_3 - x_3 y_2$$

$$b_1^e = y_2 - y_3$$

$$g_1^e = x_3 - x_2$$

for the linear three-noded triangle,



$$N_1^e = L_1$$

$$N_1^e = 2L_1(L_1 - 1/2)$$

$$N_4^e = 4L_1L_2$$

$$N_2^e = L_2$$

$$N_2^e = 2L_2(L_2 - 1/2)$$

$$N_5^e = 4L_2L_3$$

$$N_3^e = L_3$$

$$N_3^e = 2L_3(L_3 - 1/2)$$

$$N_6^e = 4L_1L_3$$

Mapping and Numerical Integration

THE CONCEPT OF MAPPING

The high degree of accuracy can be achieved with the higher order elements means that a small number of such elements can be used to obtain practically adequate solutions.

the simple shapes of the elements so far derived restrict severely their application in the analysis of practical problems, with complex geometrical boundaries have to be modeled.

This restriction would be removed if we could "map" a simple element, such as the rectangle in the local (ξ, η) element coordinates, into a more complex shape in the global (x, y) coordinate system.

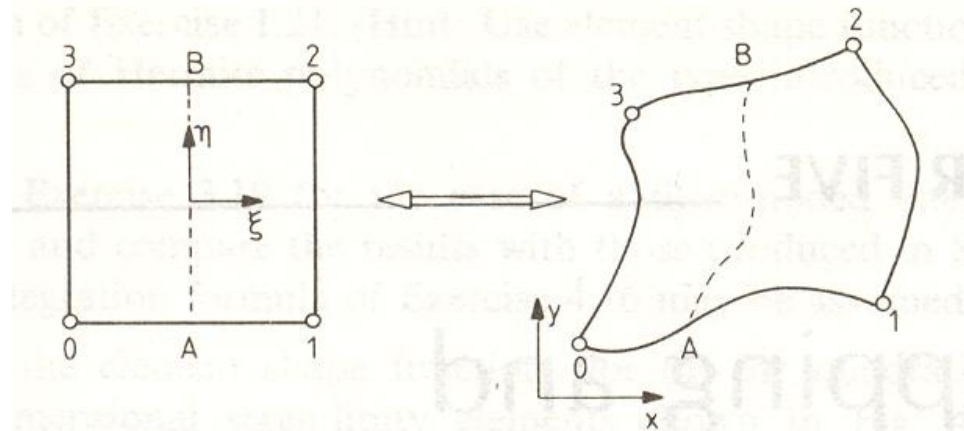


FIGURE 5.1. A general mapping of a square (ξ, η) element.

By *mapping* we understand here a unique, one-to-one relationship between the coordinates (ξ, η) and (x, y) .

relation between cylindrical polar and Cartesian coordinates

$$x = r \cos \theta$$

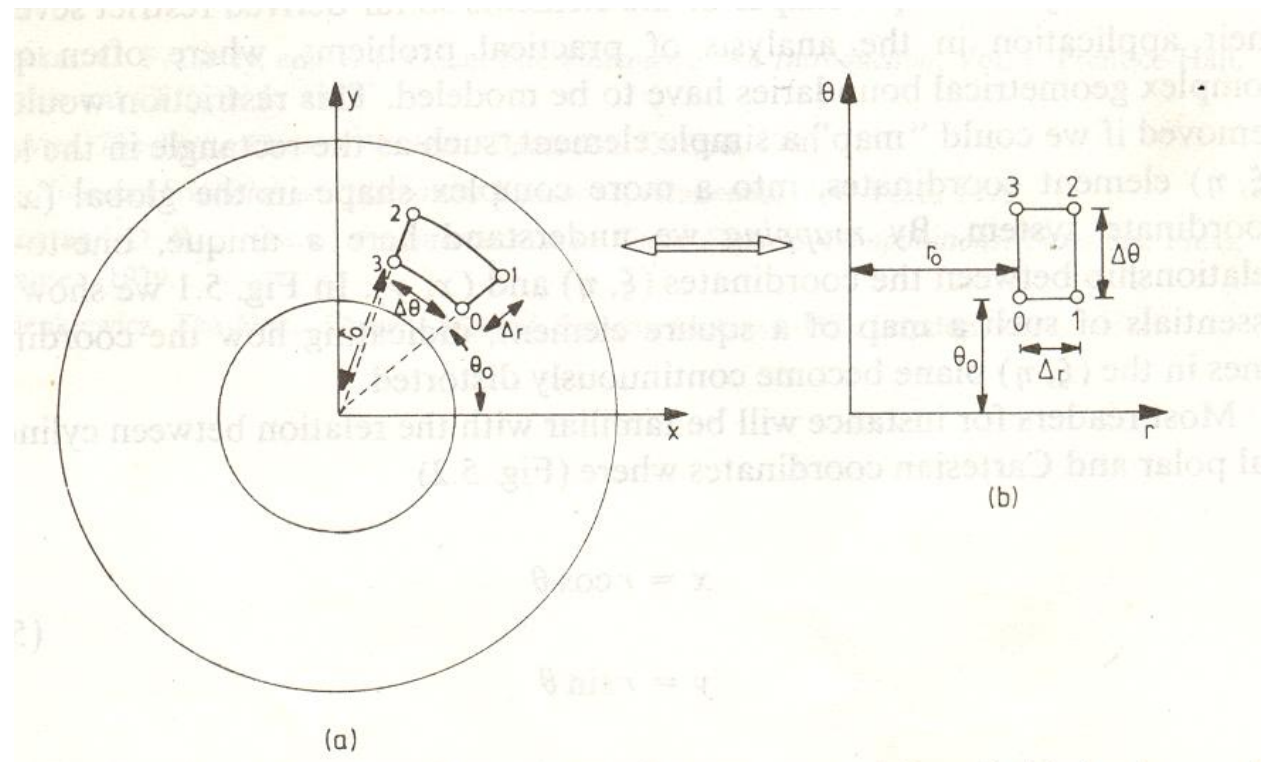
$$y = r \sin \theta$$

this transformation a mapping by which a rectangular (r, θ) domain (or element) is mapped into the (x, y) space.

A general mapping

$$x = f1(\xi, \eta)$$

$$y = f2(\xi, \eta)$$



Now the shape functions in the local element (ξ, η) space can be used to represent the function variation over the element in the global (x, y) space
 the derivation of the element matrices requires derivatives $\frac{\partial N_i^e}{\partial x}$ and $\frac{\partial N_i^e}{\partial y}$ calculation

$$\frac{\partial N_i^e}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \mathbf{x}}$$

$$\frac{\partial N_i^e}{\partial \mathbf{h}} = \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \mathbf{h}} + \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \mathbf{h}}$$

required derivatives $\frac{\partial N_i^e}{\partial x}$ and $\frac{\partial N_i^e}{\partial y}$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial \mathbf{h}} \end{bmatrix} \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \mathbf{x}} & \frac{\partial y}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{\partial x}{\partial \mathbf{h}} & \frac{\partial y}{\partial \mathbf{h}} \end{bmatrix}$$

provided that \mathbf{J} , the *Jacobian matrix* of the transformation, is nonsingular.

For the transformation from polar to Cartesian coordinates

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \cos q & \sin q \\ -r \sin q & r \cos q \end{bmatrix}$$

and so

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial h} \end{bmatrix} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} r \cos q & -\sin q \\ r \sin q & \cos q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial h} \end{bmatrix}$$

The element of area $dx dy$

$$dxdy = \det(\mathbf{J}) d\xi d\eta$$

in case of the polar coordinates

$$dxdy = r dr d\theta$$

Now any integral of interest

$$I = \int_{w^e} k \frac{\partial N_l^e}{\partial x} \frac{\partial N_m^e}{\partial y} dxdy$$

is recast in terms of integration over a square domain as

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 k \frac{\partial N_l^e}{\partial x} \frac{\partial N_m^e}{\partial y} \det(\mathbf{J}) dx dh$$

Parametric Mapping

$$x = N_0^e x_0 + N_1^e x_1 + \dots + N_M^e x_M$$

$$y = N_0^e y_0 + N_1^e y_1 + \dots + N_M^e y_M$$

$N_i^e = N_i^e(\mathbf{x}, h)$ represents a standard type of finite element shape function for an $(M + 1)$ noded element in the local domain,

non-proper mapping is produced if the determinant of the Jacobian matrix changes sign in the transformation domain.

for quadrilateral elements, an interior angle of the element exceeds 180°
 for quadratic mapping, the distance between a center node and a corner node is less than one-third of the length of a quadrilateral side.

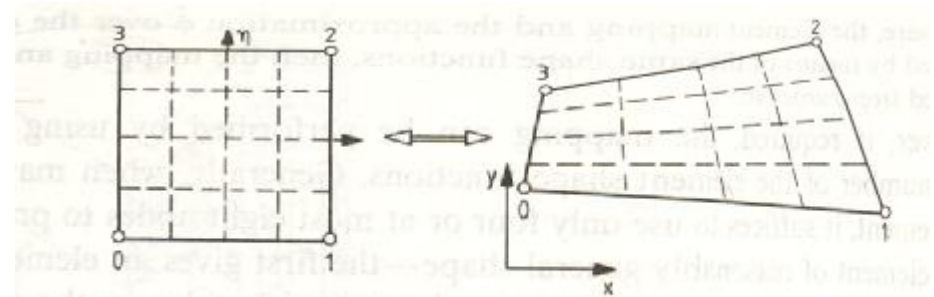
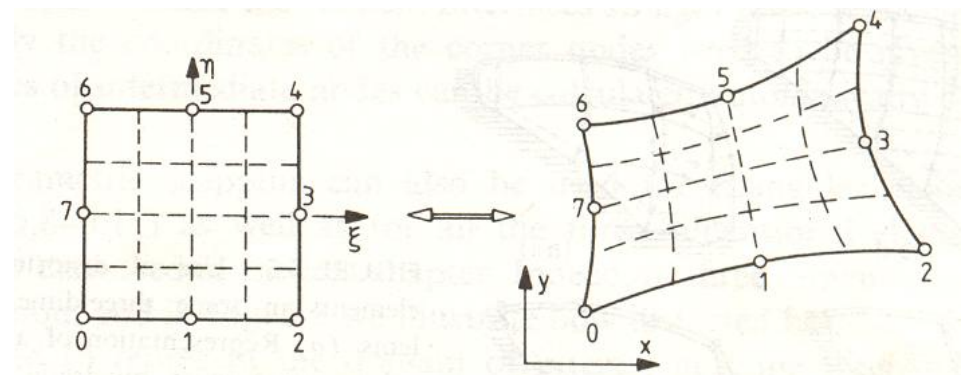


FIGURE 5.3. A linear isoparametric map.

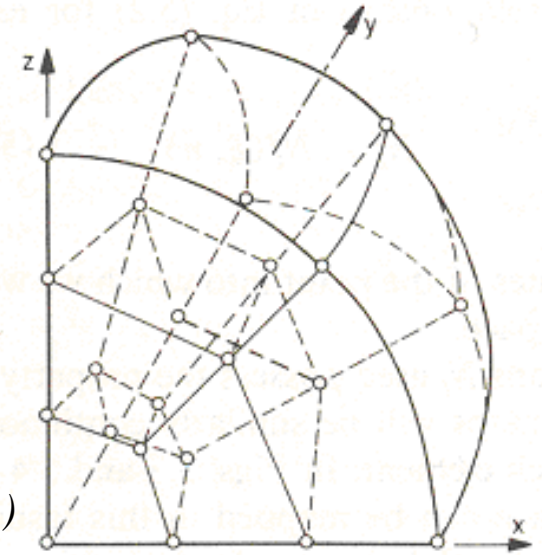


NUMERICAL INTEGRATION

complexity of the element matrices for higher order elements
inversion of the Jacobian matrix

$$I = \int_{-1}^1 G(x) dx \approx W_0 G(x_0) + W_1 G(x_1) + \dots + W_n G(x_n)$$

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 G(x, h) dx dh \approx W_0 G(x_0, h_0) + W_1 G(x_1, h_1) + \dots + W_n G(x_n, h_n)$$



(a)

choose x_0, x_1, \dots, x_n and then determine the weights w_0, w_1, \dots, w_n so that polynomial $F(\xi)$ of degree n which is exactly equal to $G(\xi)$ at each of these points.

$$F_n(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

the coefficients are given uniquely by solution of the equations

$$G(x_0) = a_0 + a_1 x_0 + \dots + a_n x_0^n$$

$$G(x_1) = a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_1^n$$

.....

$$G(x_n) = a_0 + a_1 x_n + \dots + a_n x_n^n$$

$$I = \int_{-1}^1 G(x) dx \approx \int F_n(x) dx = 2a_0 + \frac{2a_2}{3} + \dots + \frac{a_n}{n+1} [1 - (-1)^{n+1}]$$

trapezoidal approximation. ($\xi_0 = -1, \xi_1 = 1$)

$$F_1(x) = \frac{G(x_0) + G(x_1)}{2} + \frac{G(x_1) - G(x_0)}{2} x$$

The required integral is then approximated by

$$I = \int_{-1}^1 G(x) dx \approx \int F_1(x) dx = G(x_0) + G(x_1)$$

here $n = 1$.

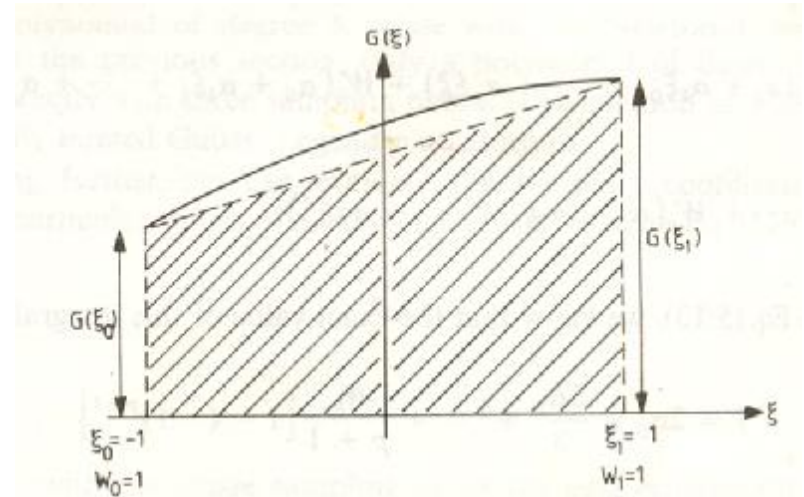
if n is odd, this method will integrate exactly any polynomial up to degree n ,

if n is even, the method is exact for any polynomial up to degree $n + 1$.

Newton-Cotes methods: the sampling points equally spaced

determine these coordinates so that the approximation gives the exact value of the integral whenever $G(\xi)$ is a polynomial of degree less than or equal to p , where $p(\geq n)$ is also to be determined.

$$F_p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_p x^p$$



numerical integration

$$I = \int_{-1}^1 F_p(x) dx$$

$$\approx W_0(a_0 + a_1 x_0 + \dots + a_p x_0^p) + W_1(a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_p x_1^p) + \dots + W_n(a_0 + a_1 x_n + \dots + a_p x_n^p)$$

exact integration

$$I = 2a_0 + \frac{2a_2}{3} + \dots + \frac{a_p}{p+1} [1 - (-1)^{p+1}]$$

For exact numerical integration

$$(a_0 + a_1 x_0 + \dots + a_p x_0^p) = 2$$

$$(a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_p x_1^p) = 0$$

.....

$$(a_0 + a_1 x_n + \dots + a_p x_n^p) = \frac{1}{p+1} [1 - (-1)^{p+1}]$$

$p+1$ equations

$2(n+1)$ unknowns

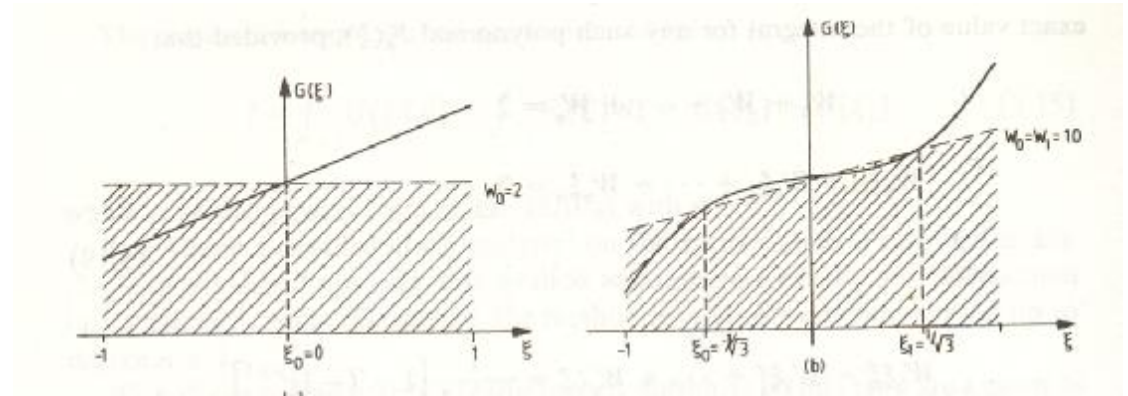
$W_i, x_i; i = 1, 2, \dots, n$

$$p+1 = 2(n+1)$$

For $n=0$

$$W_0 = 2$$

$$W_0 x_0 = 0$$



for $n = 1$

$$W_0 + W_1 = 2$$

$$W_0 x_0 + W_1 x_1 = 0$$

$$W_0 x_0^2 + W_1 x_1^2 = 2/3$$

the solution is

$$x_1 = -x_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.5773502591$$

$$W_1 = W_0 = 1.0$$

Gauss Quadrature in Two and Three Dimensions

In two-dimensional problems

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 G(x, h) dx dh$$

perform two numerical integrations in the ξ and η directions independently

$$I = \int_{-1}^1 G(x, h) dx \approx \sum_{i=0}^n W_i G(x_i, h)$$

a similar integration in the η direction

$$I = \int_{-1}^1 \left[\sum_{i=0}^n W_i G(x_i, h) \right] dh \approx \sum_{j=0}^n \left[W_j \sum_{i=0}^n W_i G(x_i, h_j) \right]$$

thus

$$I \approx \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \bar{W}_{ij} G(x_i, h_j) \quad \bar{W}_{ij} = W_i W_j$$

If the integrals in the ξ and η directions separately are exact polynomials of degree p , then the expression will integrate exactly all terms such as $\mathbf{x}^{p1} \mathbf{h}^{p2}$ where $p1, p2 \leq p$.

three-dimensional extension

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 G(x, h, z) dx dh dz \approx \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n \bar{W}_{ijk} G(x_i, h_j, z_k) \quad \bar{W}_{ijk} = W_i W_j W_k$$

Number of sampling points

Figure

Degree of polynomial integrated exactly

Points

Triangular coordinates

Weights

1



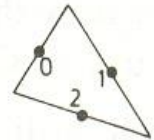
1

0

$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$

1

3



2

0

$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0$

$\frac{1}{3}$

1

$0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$

$\frac{1}{3}$

2

$\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$

$\frac{1}{3}$

4



3

0

$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$

$-\frac{27}{48}$

1

$0.6, 0.2, 0.2$

$\frac{25}{48}$

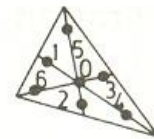
2

$0.2, 0.6, 0.2$

3

$0.2, 0.2, 0.6$

7



4

0

$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$

0.225000000

1

$\alpha_1, \beta_1, \beta_1$

0.1323941527

2

$\beta_1, \alpha_1, \beta_1$

3

$\beta_1, \beta_1, \alpha_1$

4

$\alpha_2, \beta_2, \beta_2$

5

$\beta_2, \alpha_2, \beta_2$

6

$\beta_2, \beta_2, \alpha_2$

0.1259391805

with

$\alpha_1 = 0.0597158717$

$\beta_1 = 0.4701420641$

$\alpha_2 = 0.7974269853$

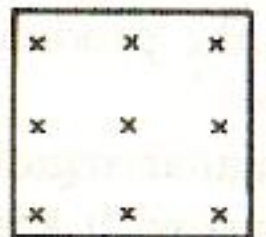
$\beta_2 = 0.1012865073$



$P_1, P_2 \leq 1$



$P_1, P_2 \leq 3$

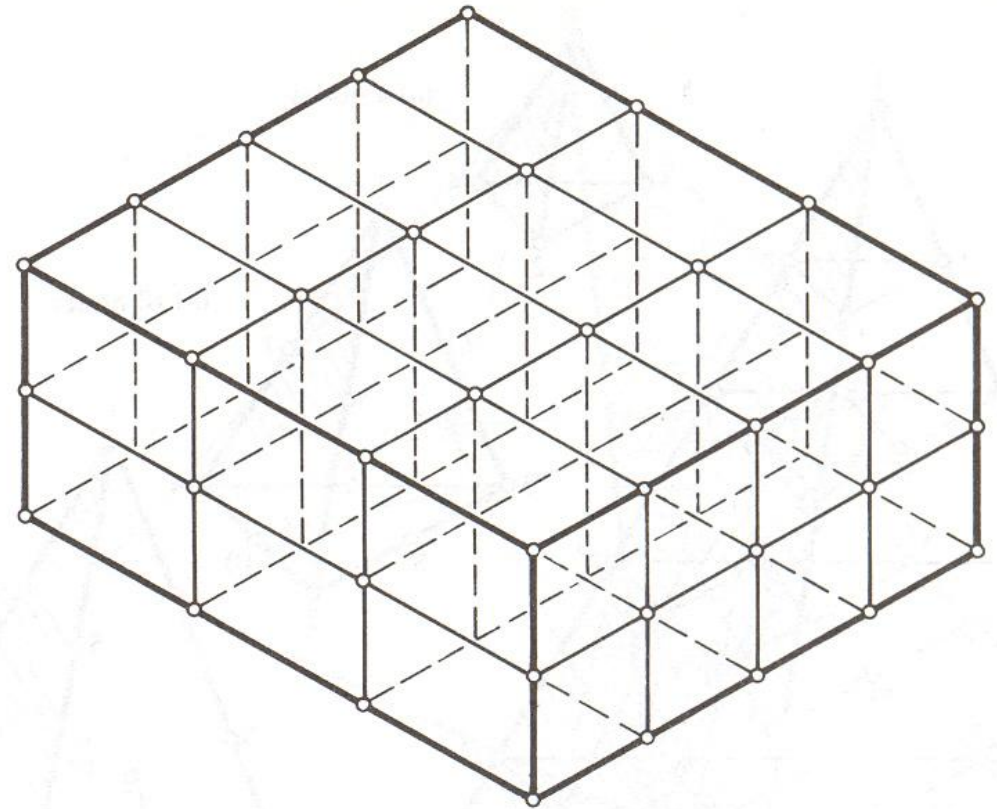


$P_1, P_2 \leq 5$

Three Dimensional Elements:

Lagrangian family

$$N_i = N_I N_J N_K = l_I^n l_J^m l_K^p$$



Three Dimensional Elements:

Serendipity family

'Linear' element (8 nodes)

$$N_i = \frac{1}{8}(1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(1 + \zeta_0)$$

'Quadratic' element (20 nodes)

Corner nodes:

$$N_i = \frac{1}{8}(1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(1 + \zeta_0)(\xi_0 + \eta_0 + \zeta_0 - 2)$$

Typical mid-side node:

$$\xi_i = 0 \quad \eta_i = \pm 1 \quad \zeta_i = \pm 1$$

$$N_i = \frac{1}{4}(1 - \xi^2)(1 + \eta_0)(1 + \zeta_0)$$

'Cubic' elements (32 nodes)

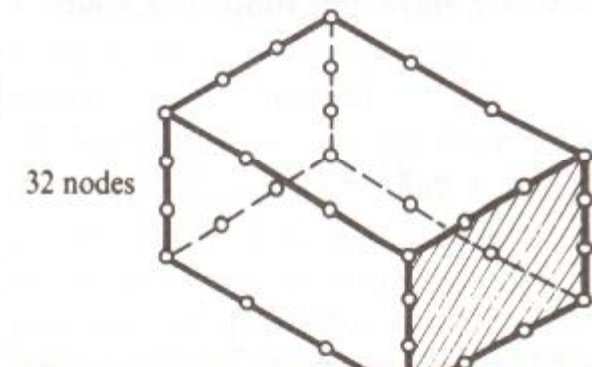
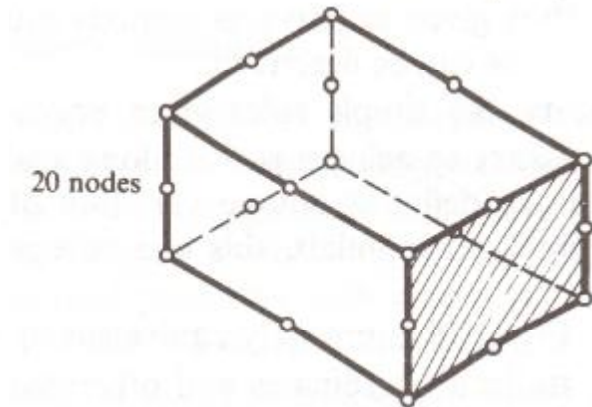
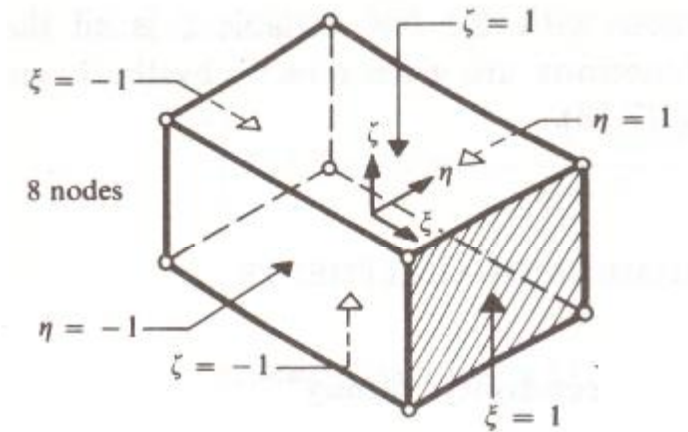
Corner node:

$$N_i = \frac{1}{64}(1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(1 + \zeta_0)[9(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) - 19]$$

Typical mid-side node:

$$\xi_i = \pm \frac{1}{3} \quad \eta_i = \pm 1 \quad \zeta_i = \pm 1$$

$$N_i = \frac{9}{64}(1 - \xi^2)(1 + 9\xi_0)(1 + \eta_0)(1 + \zeta_0)$$



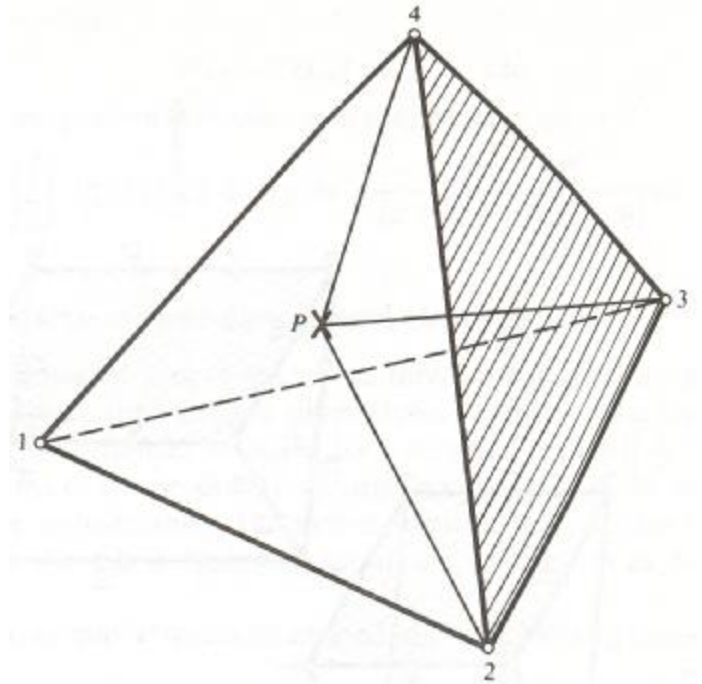
Volume coordinates:

$$L_1|_p = \frac{Vol(P234)}{Vol(1234)}$$

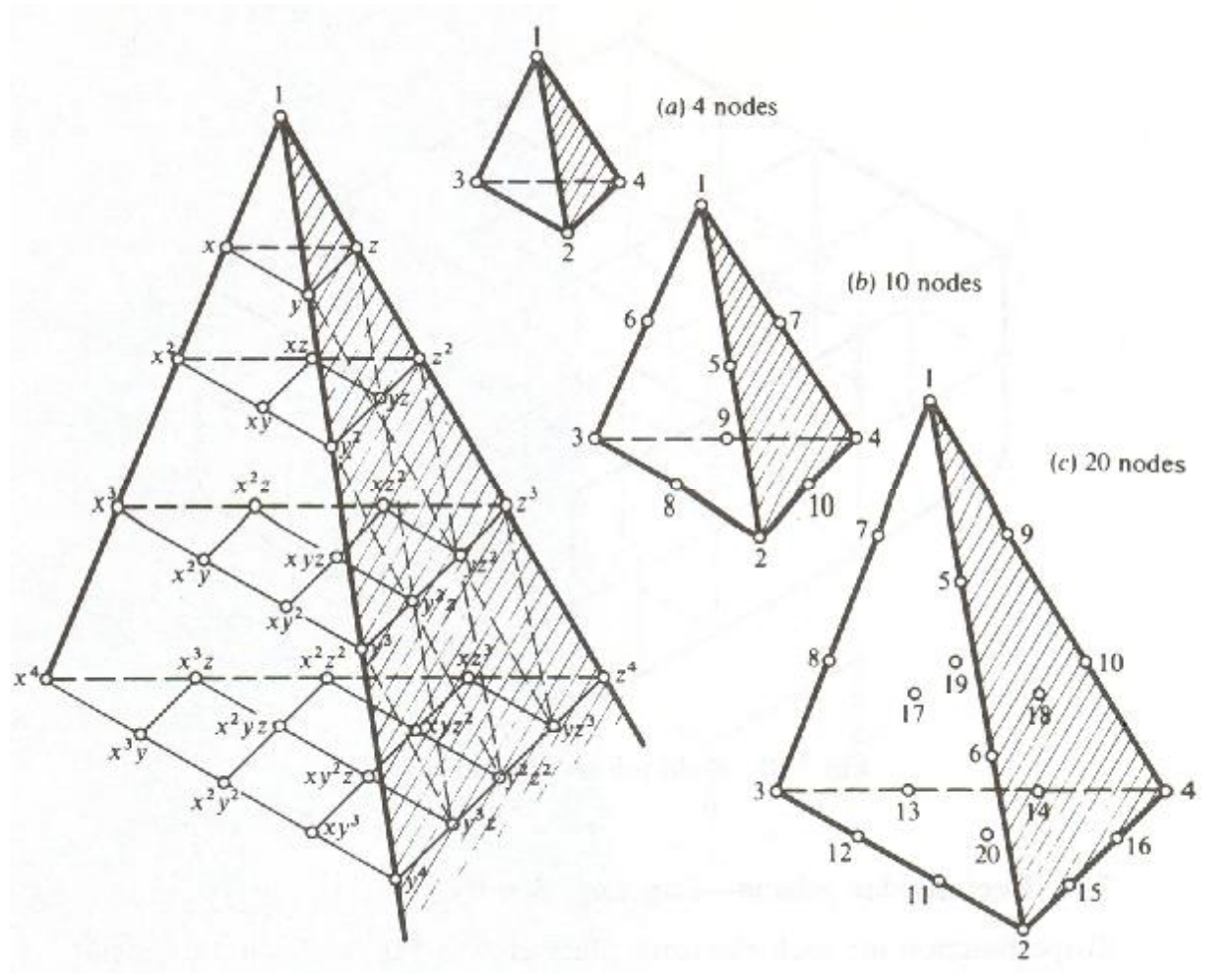
$$L_2|_p = \frac{Vol(P134)}{Vol(1234)}$$

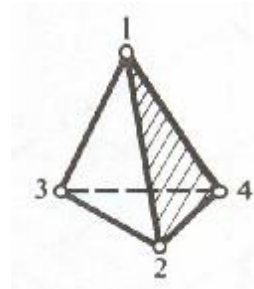
$$L_3|_p = \frac{Vol(P124)}{Vol(1234)}$$

$$L_4|_p = \frac{Vol(P123)}{Vol(1234)}$$



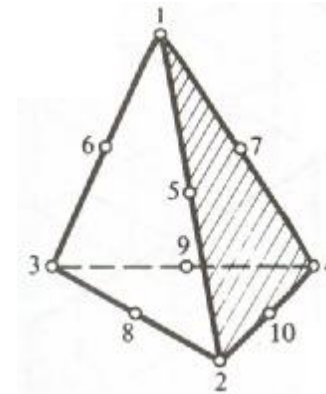
Tetrahedral Elements:





Linear Tetrahedron:

$$N_i = L_i \quad i = 1, 2, 3, 4$$



Quadratic Tetrahedron:

For Corner nodes

$$N_1 = (2L_1 - 1)L_1, \quad \text{etc.}$$

For mid-side nodes:

$$N_5 = 4L_1L_2, \quad \text{etc.}$$

'Cubic' tetrahedron

Corner nodes:

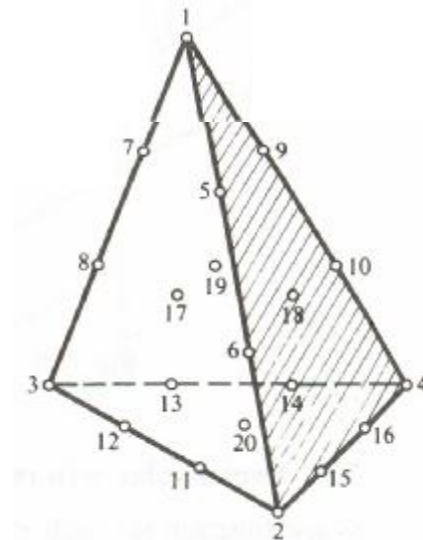
$$N_1 = \frac{1}{2}(3L_1 - 1)(3L_1 - 2)L_1, \quad \text{etc.}$$

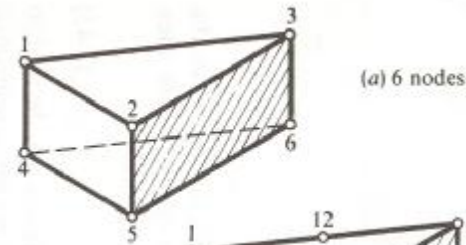
Mid-side nodes:

$$N_5 = \frac{9}{2}L_1L_2(3L_1 - 1), \quad \text{etc.}$$

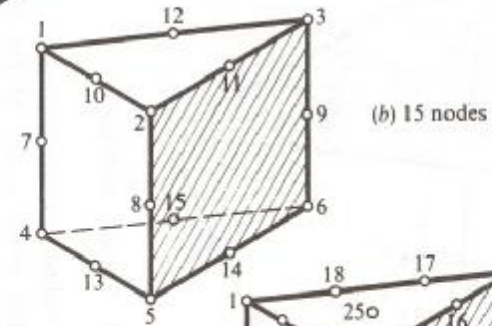
Mid-face nodes:

$$N_{17} = 27L_1L_2L_3, \quad \text{etc.}$$

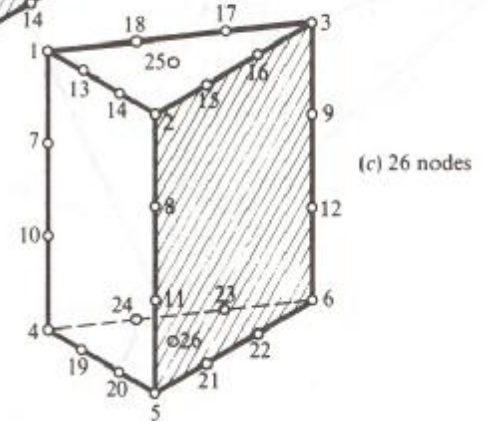




(a) 6 nodes



(b) 15 nodes



(c) 26 nodes

For a 'quadratic' element

Corner nodes $L_1 = \xi_1 = 1$:

$$N_1 = \frac{1}{2}L_1(2L_1 - 1)(1 + \zeta) - \frac{1}{2}L_1(1 - \zeta^2)$$

Mid-sides of triangles:

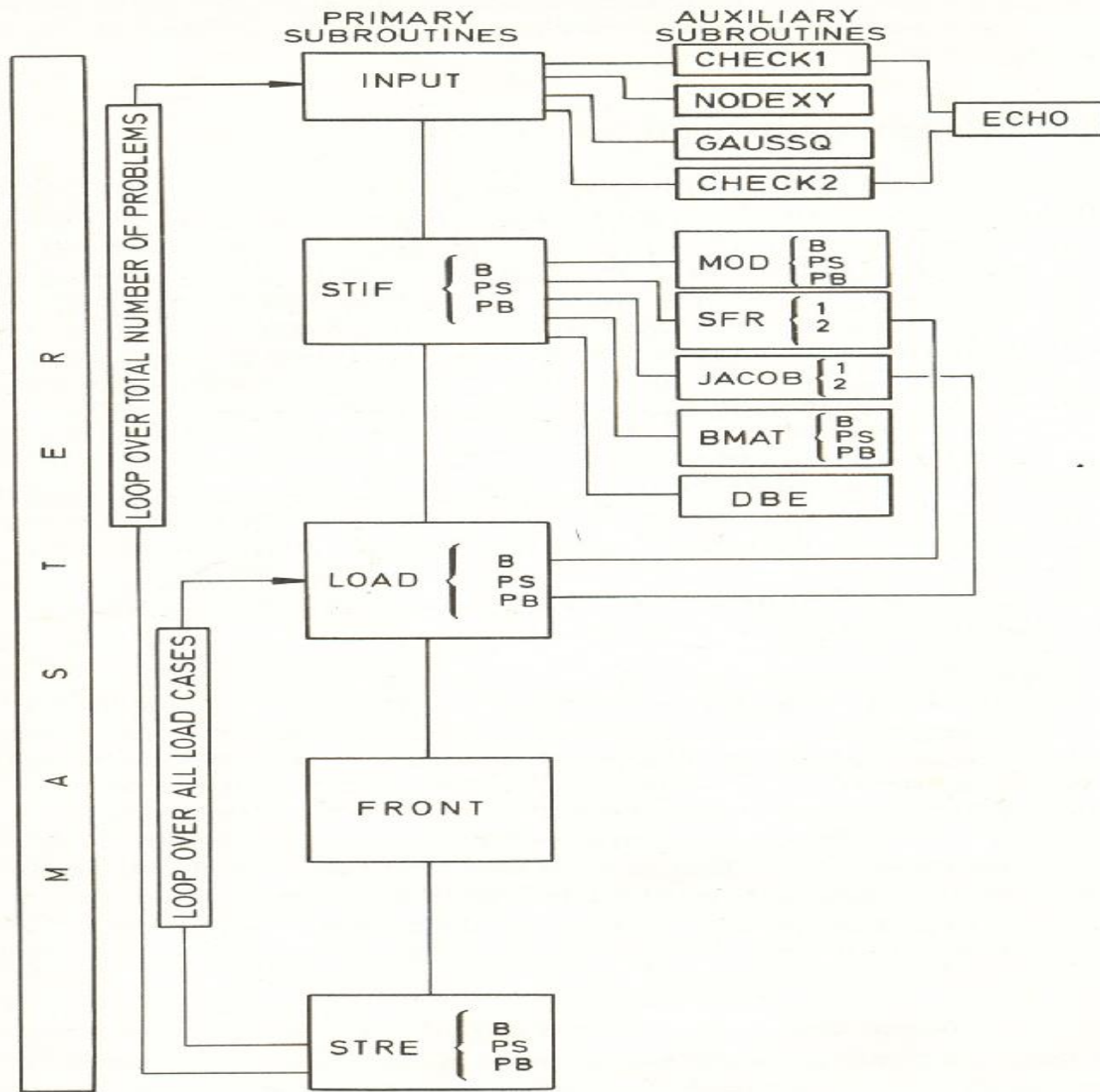
$$N_{10} = 2L_1L_2(1 + \zeta), \quad \text{etc.}$$

Mid-sides of rectangle:

$$N_7 = L_1(1 - \zeta^2), \quad \text{etc.}$$

A useful integration formula

$$\iiint_{\text{vol}} L_1^a L_2^b L_3^c L_4^d dx dy dz = \frac{a! b! c! d!}{(a + b + c + d + 3)!} 6V$$



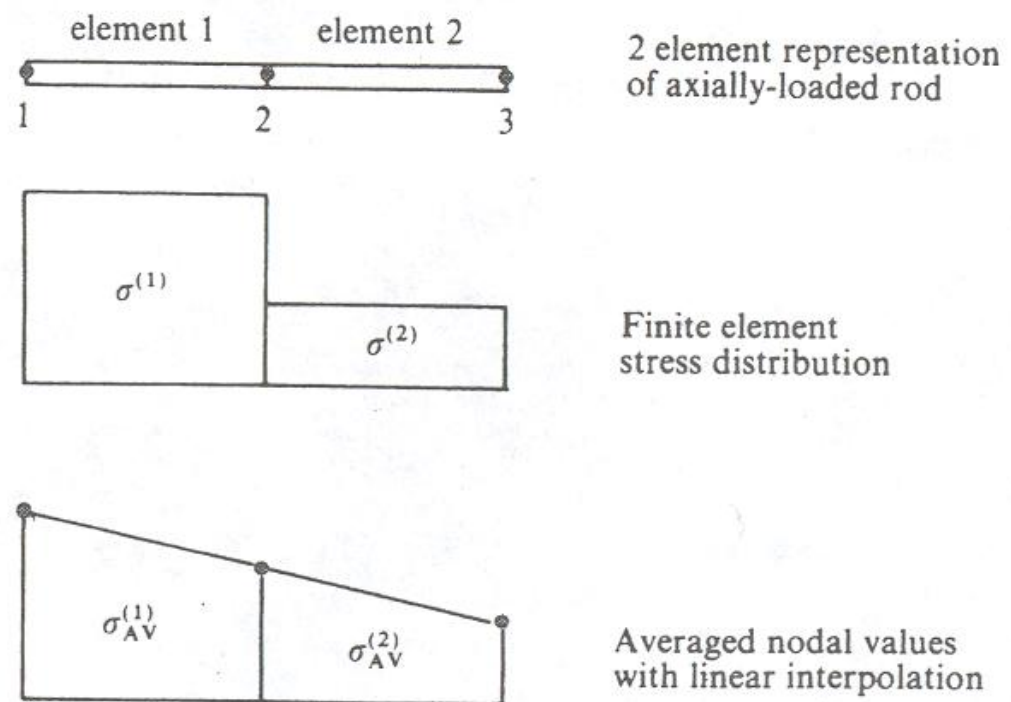
stress representation

In the displacement method, the stresses are discontinuous between elements because of the nature of the assumed displacement variation

there is a discontinuity at node 2 between elements 1 and 2

experience has shown that in isoparametric elements, the integration points are the best stress sampling points.

The nodes, which are the most useful output locations for stresses, appear to be the worst sampling points



Axial stress representations for an axially-loaded rod using two linear elements.

Stress smoothing

If the unsmoothed data is given by the function $S(x)$

And the proposed smoothing function is defined as

$$g(x) = a_0 + a_1x + \mathbf{L} + a_p x^p .$$

then the problem is of finding the coefficients which minimize the functional

$$I = \int_0^l (d - g)^2 dx .$$

Hence for I to be a minimum

$$\frac{\partial I}{\partial a_i} = 0 .$$

The normal equations have a tendency to be ill-conditioned especially if the order of the smoothing function is high

alternative method:

$$g(\mathbf{x})^{(e)} = \sum_{i=1}^n \tilde{N}_i^{(e)} \tilde{\mathbf{S}}_i^{(e)},$$

$\tilde{N}_i^{(e)}$ smoothing shape function

$\tilde{\mathbf{S}}_i^{(e)}$ smoothed nodal stress

error between the smoothed and unsmoothed stresses at any point within the element e

$$E(\mathbf{x})^{(e)} = \mathbf{S}(\mathbf{x})^{(e)} - g(\mathbf{x})^{(e)},$$

where the unsmoothed stress $\mathbf{S}^{(e)} = \mathbf{D}^{(e)} \mathbf{B}^{(e)} \mathbf{a}^{(e)}$,

find the set of smoothed nodal stresses $\tilde{\mathbf{S}}_1, \tilde{\mathbf{S}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{S}}_p$ which minimize the functional

$$I = \sum_{e=1}^m \int_{-1}^{+1} (E(\xi)^{(e)})^2 \det J^{(e)} d\xi$$

where p is the total number of nodes, m is the total number of elements

For I to be a minimum

$$\frac{\partial I}{\partial \tilde{S}_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, p ,$$

which leads to a set of equations of the form

$$S\tilde{S} = f ,$$

S is the smoothing matrix

$$S^{(e)} = \begin{bmatrix} \int_{-1}^{+1} \tilde{N}_1^{(e)} \tilde{N}_1^{(e)} \det J^{(e)} d\xi \cdots \int_{-1}^{+1} \tilde{N}_1^{(e)} \tilde{N}_n^{(e)} \det J^{(e)} d\xi \\ \vdots \\ \int_{-1}^{+1} \tilde{N}_n^{(e)} \tilde{N}_1^{(e)} \det J^{(e)} d\xi \cdots \int_{-1}^{+1} \tilde{N}_n^{(e)} \tilde{N}_n^{(e)} \det J^{(e)} d\xi \end{bmatrix},$$

$$f^{(e)} = \begin{bmatrix} \int_{-1}^{+1} \tilde{N}_1^{(e)} \sigma^{(e)} \det J^{(e)} d\xi \\ \vdots \\ \int_{-1}^{+1} \tilde{N}_n^{(e)} \sigma^{(e)} \det J^{(e)} d\xi \end{bmatrix}.$$

It should be noted that if the smoothing shape functions imply C(i) continuity across element interfaces, then the smoothed stress will also possess C(i) continuity.

Interpretation of the finite element displacement method as a stress error minimisation procedure

Let σ and ε be the finite element stresses and strains and \mathbf{s}_{EX} and \mathbf{e}_{EX} equal the exact stresses and strains. It is therefore possible to write

$$\mathbf{e} = [D]^{-1} \mathbf{s} \quad , \quad \mathbf{e}_{EX} = [D]^{-1} \mathbf{s}_{EX}$$

The total potential energy of the system

$$I = \int_0^l \frac{1}{2} [\mathbf{s}]^T [D]^{-1} \mathbf{s} \, dx - [\mathbf{a}]^T \mathbf{f} ,$$

for a small arbitrary virtual displacement $d\mathbf{a}$ it is possible to write by the principle of virtual work

$$\int_0^l [d\mathbf{e}]^T \mathbf{s}_{EX} \, dx = [d\mathbf{a}]^T \mathbf{f} .$$

Above equation may therefore be written in the following form

$$I = \int_0^l \frac{1}{2} [\boldsymbol{\sigma}]^T [\mathbf{D}]^{-1} \boldsymbol{\sigma} dx - \int_0^l [\boldsymbol{\sigma}_{EX}]^T \boldsymbol{\varepsilon} dx,$$

$$I = \int_0^l \frac{1}{2} [\boldsymbol{\sigma}]^T [\mathbf{D}]^{-1} \boldsymbol{\sigma} dx - \int_0^l [\boldsymbol{\sigma}_{EX}]^T [\mathbf{D}]^{-1} \boldsymbol{\sigma} dx.$$

On writing in a different form

$$\begin{aligned} I &= \int_0^l \frac{1}{2} [\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{EX}]^T [\mathbf{D}]^{-1} [\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{EX}] dx - \int_0^l \frac{1}{2} [\boldsymbol{\sigma}_{EX}]^T [\mathbf{D}]^{-1} \boldsymbol{\sigma}_{EX} dx \\ &= \int_0^l \frac{1}{2} [\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{EX}]^T [\mathbf{D}]^{-1} [\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{EX}] dx + c, \end{aligned}$$

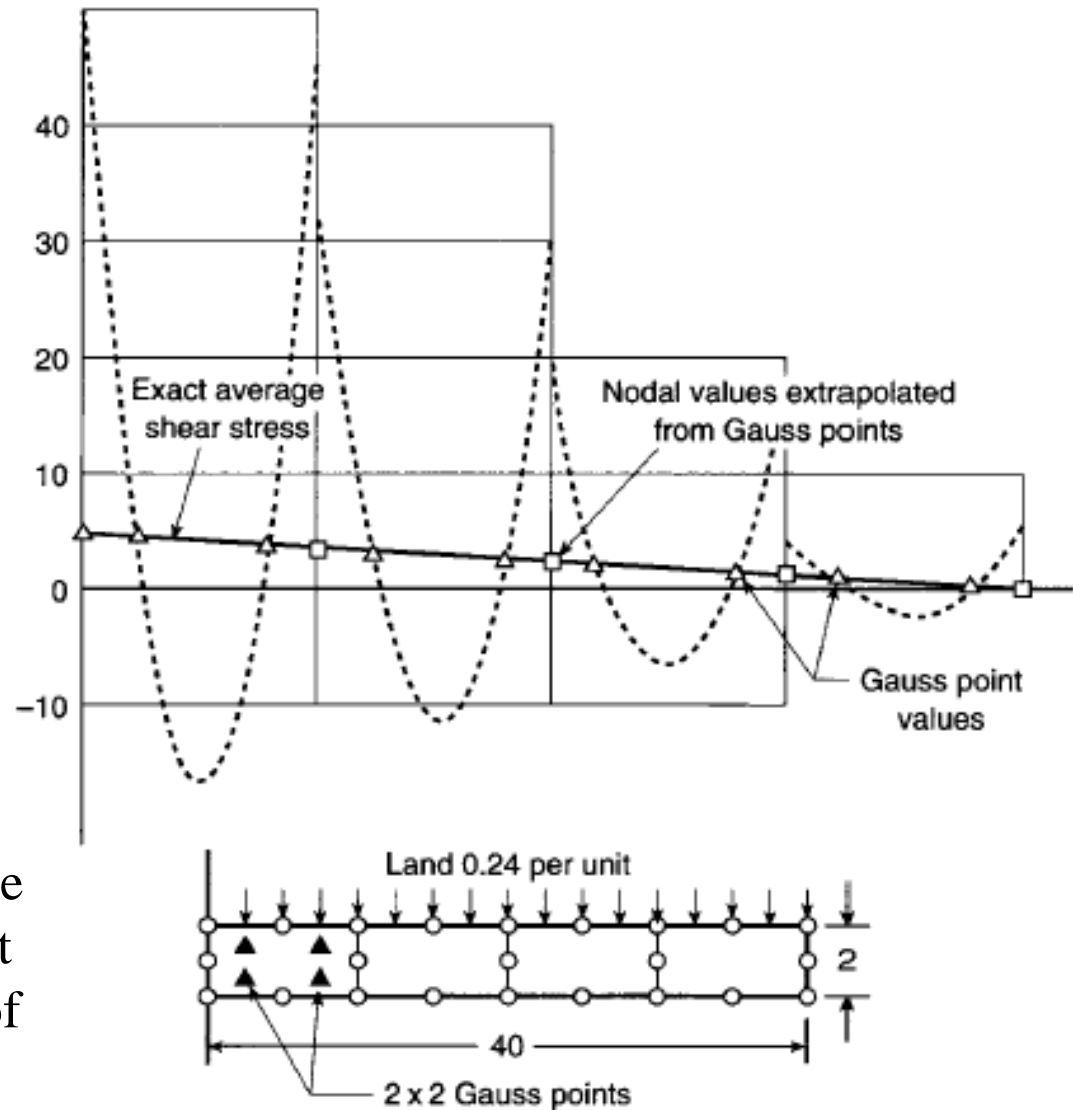
where c is a constant and does not depend on the nodal displacements.

The displacement finite element procedure may therefore be interpreted as a least squares error procedure where the measure of error is a weighted function of the error in the stresses.

Approximations which minimize the squared error tend to oscillate about the exact values

The Gauss-Legendre quadrature points have the well-known property that if we use a $M+1$ integration points which exactly integrates a polynomial of order $2M+1$, then the polynomial of order $M+1$ at these points will be equal to its least square representation by a polynomial of order M .

Generally the stresses are of order $(p-d)$, then if a $(p-d+1)$ point integration rule is used to integrate the energy, The value of stresses at these points define a polynomial of order $p-d$ which is exact of the order $(p-d+1)$

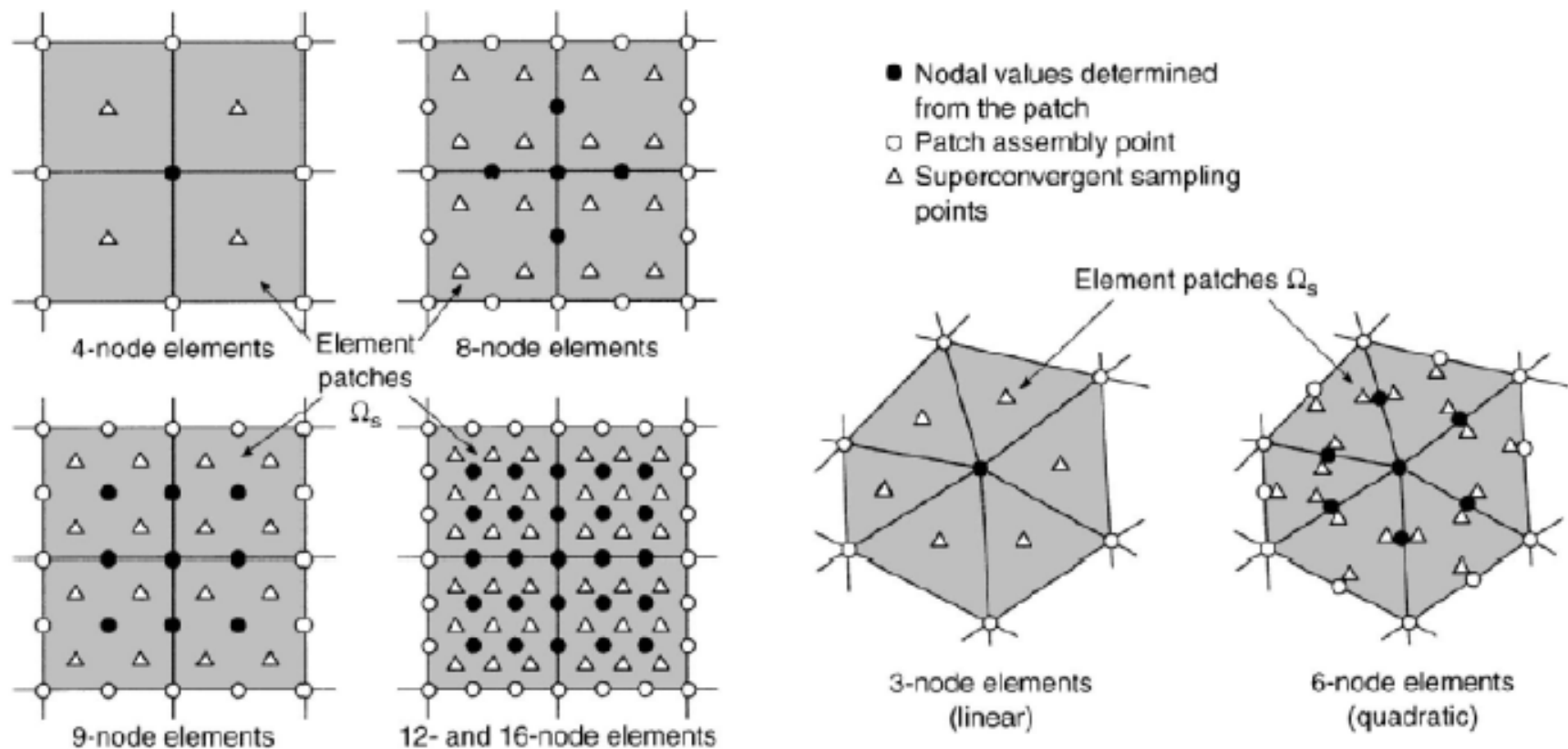


Cantilever beam with four quadratic (Q8) elements. Stress sampling at cubic order (2×2) Gauss - points with extrapolation to nodes.

superconvergent patch recovery

We have already noted that the stresses sampled at certain points in an element possess the superconvergent property and have errors of order $O(h^{p-d+2})$

smoothing of such values by a polynomial of order p within a *patch of elements* for which the number of sampling points can be taken as greater than the number of parameters in the polynomial.



If we accept the superconvergence of $\hat{\mathbf{S}}$ at certain points s in each element then we proceed for each component $\hat{\mathbf{S}}_i$ of $\hat{\mathbf{S}}$ as follows

$$\sigma_i^* = \mathbf{p}\mathbf{a} = [1, x, y, \dots, y^p] \mathbf{a}$$

$$\mathbf{a} = [a_1, a_2, \dots, a_m]^T$$

we minimize, for an element patch with total n sampling points

$$\Pi = \sum_{k=1}^n [\hat{\sigma}_i(x_k, y_k) - \mathbf{p}_k \mathbf{a}]^2$$

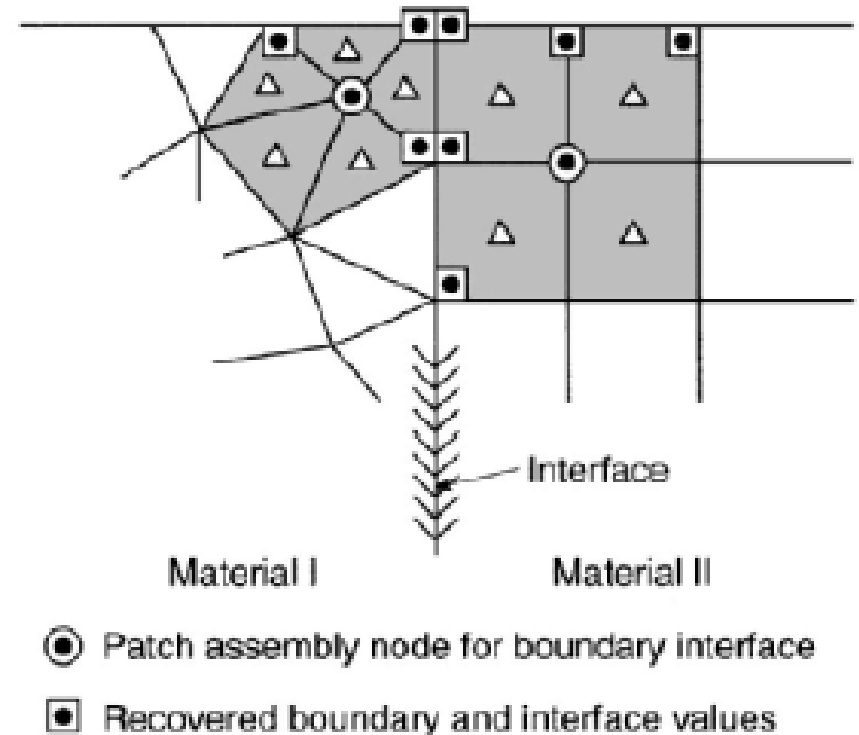
$$\mathbf{p}_k = \mathbf{p}(x_k, y_k)$$

(x_k, y_k) corresponding to coordinates of superconvergent points

obtaining immediately the coefficient \mathbf{a} as $\mathbf{a} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}$

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^n \mathbf{p}_k^T \mathbf{p}_k \quad \text{and} \quad \mathbf{b} = \sum_{k=1}^n \mathbf{p}_k^T \hat{\sigma}_i(x_k, y_k)$$

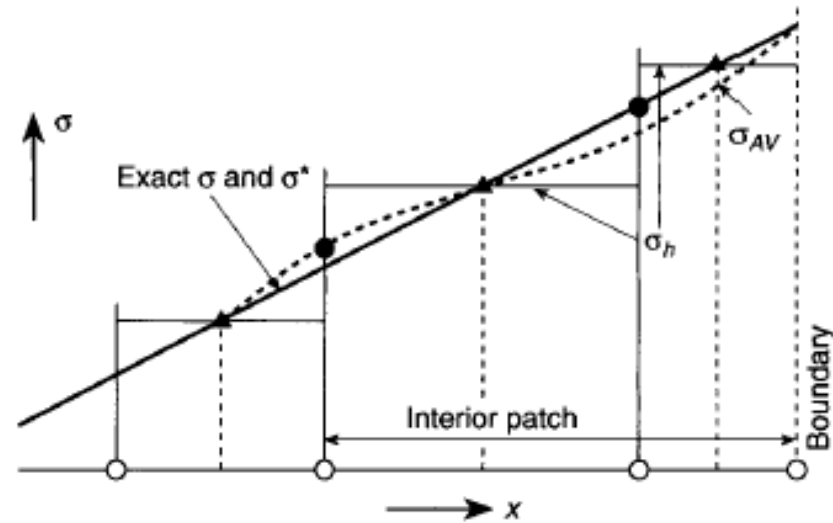
The availability of s^* allows the superconvergent values of \tilde{S}^* to be determined at all nodes. As some nodes belong to more than one patch, average value of \tilde{S}^* are obtained



It should be noted that on external boundaries and indeed on interfaces where stresses are discontinuous the nodal values should be calculated from interior patches

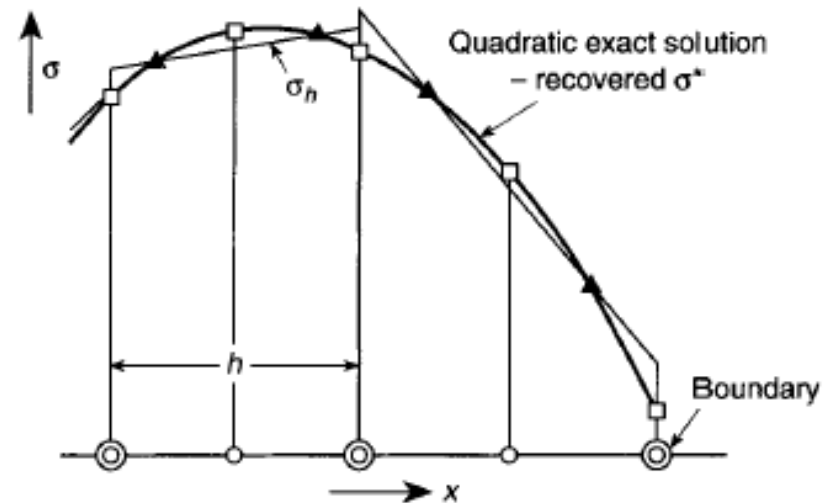
one-dimensional example:

the superconvergent patch recovery reproduces *exactly* the stress (gradient) solutions of order $p + 1$ for linear or quadratic elements. It is evident that superconvergent recovery is now achieved at all points. the figure shows why averaging (or projection) is inferior (particularly on boundaries.)



(a)

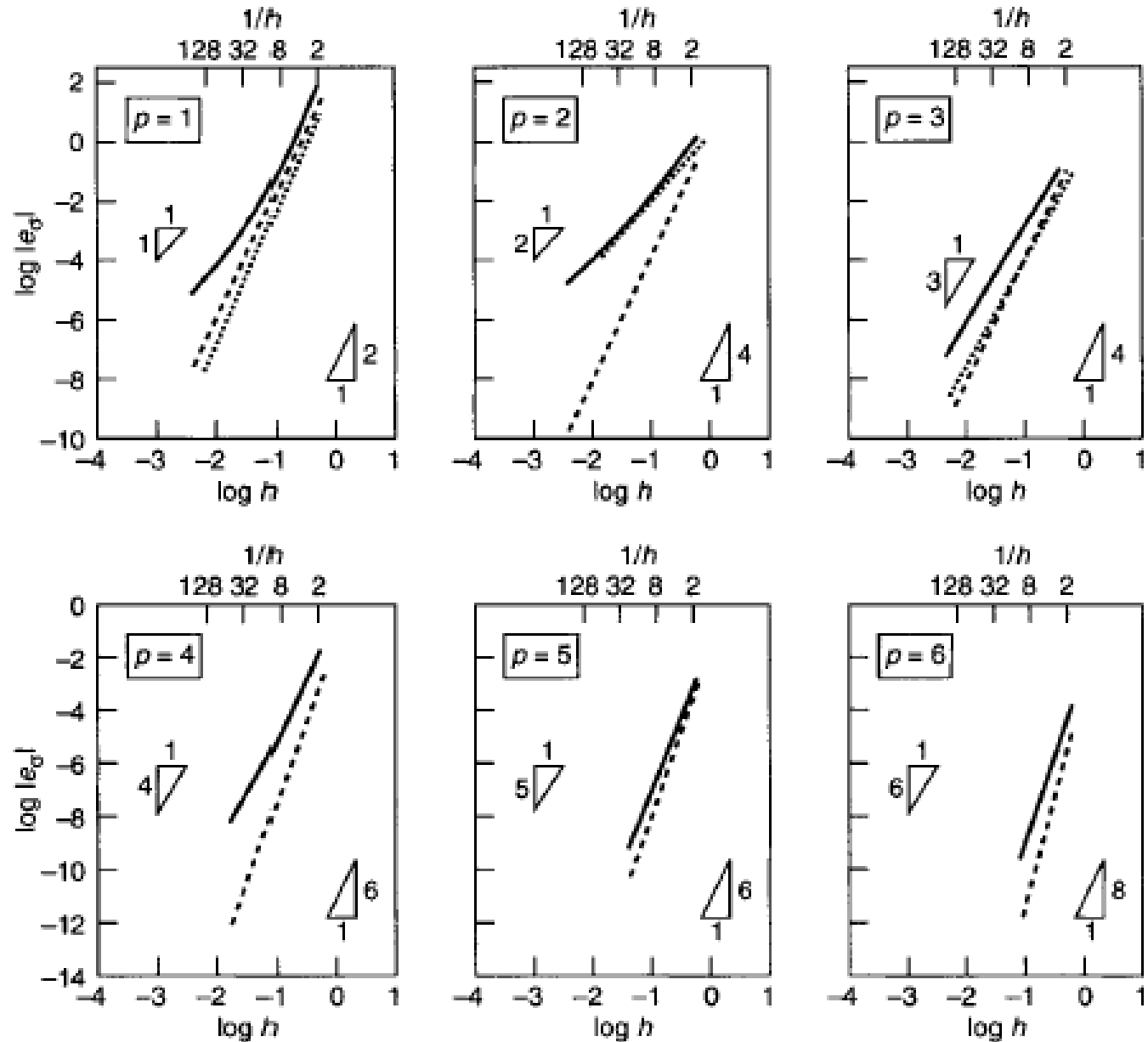
▲ Superconvergent values
□ Nodal SPR values



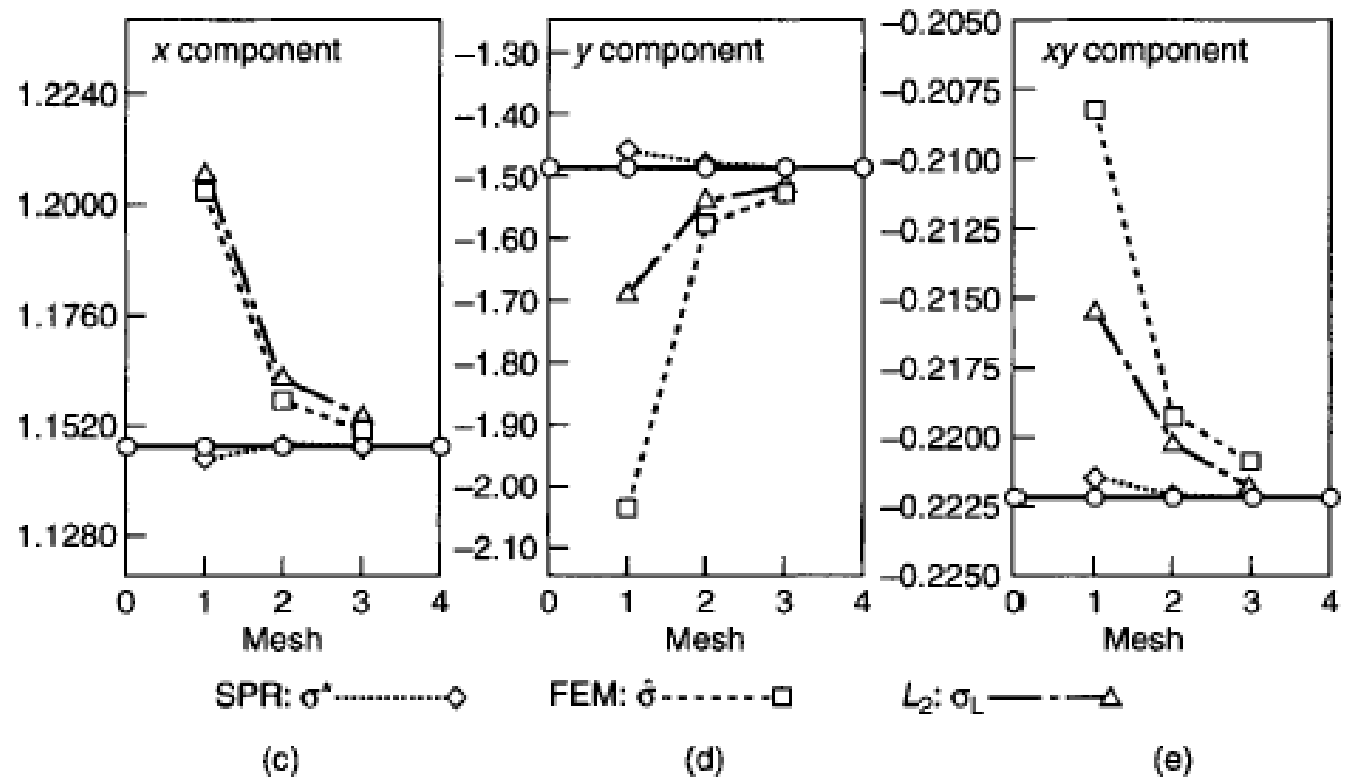
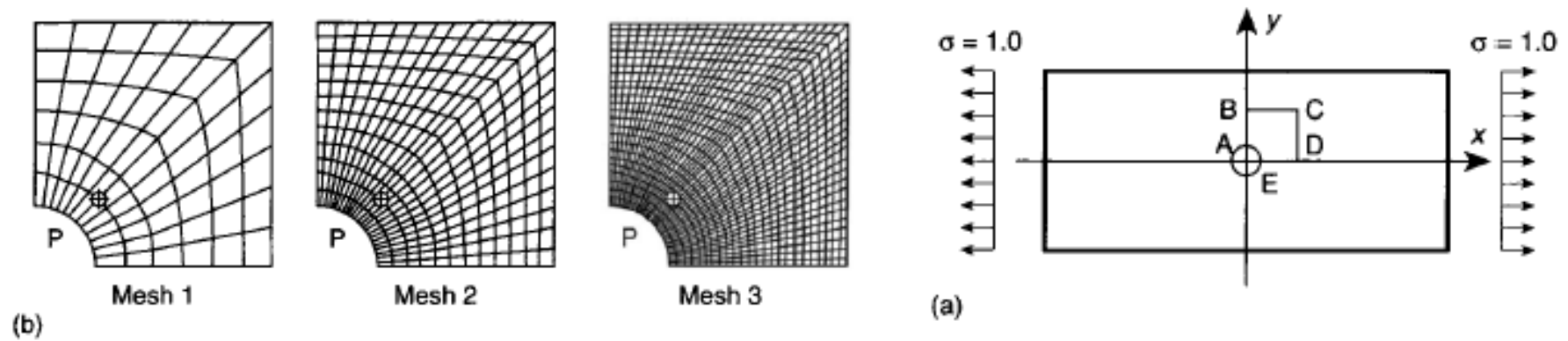
(b)

Recovery of exact σ of degree p by linear elements ($p = 1$) and quadratic elements ($p = 2$).

convergence rates for a one dimensional problem (stress distribution in a bar of length $L = 1$; $0 \leq x \leq 1$ and prescribed body forces). A uniform subdivision is used here to form the elements, and the convergence rates for the stress error at $x = 0.5$ are shown



$$(\hat{\sigma} \text{ --- } ; \sigma_L \text{ } ; \sigma^* \text{ - - - -})$$



Plane stress analysis of stresses around a circular hole