هر آن که جانب اهل خدا نگه دارد
خداش در همه حال از بلا نگه دارد
حدیث دوست نگویم مگر به حضرت دوست
که آشنا سخن آشنا نگه دارد

فصل چهارم: انتقال حرارت هدایت گذرا

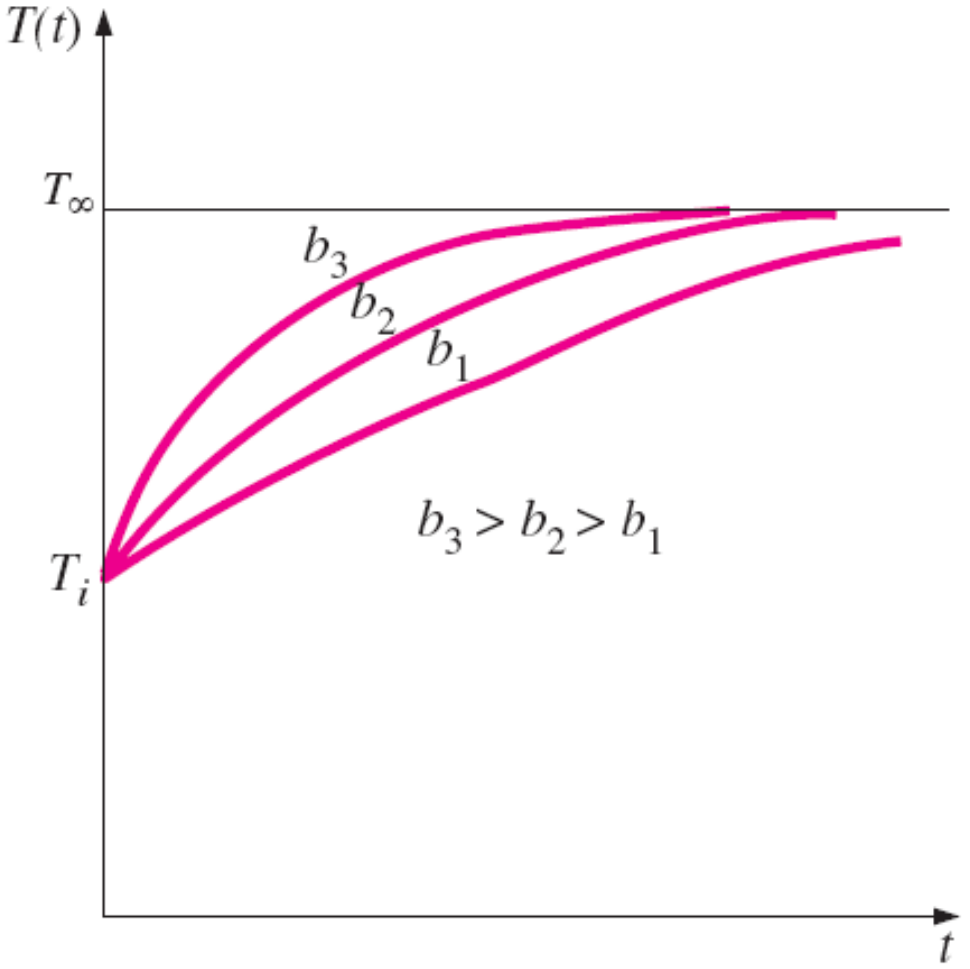
Transient Heat Conduction

اکبر اقبالی

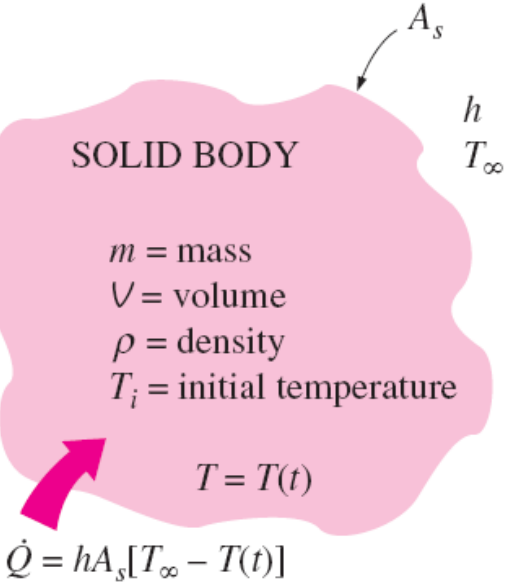
WWW.AEGHBALI.BLOG.IR
EGHBALI.D@GMAIL.COM

1393

مقدمه



- دمای داخلی برخی اج
یکنواخت باقی می ماند.
- دمای برخی از اجسام تن
- بررسی انتقال حرارت با



$$\ln \frac{T(t)-T_\infty}{T_i-T_\infty} = -\frac{hA_s}{\rho V c_p}\, t \qquad \frac{T(t)-T_\infty}{T_i-T_\infty} = e^{-bt} \qquad b = \frac{hA_s}{\rho V c_p} \quad (1/s)$$

مقدمه
معیار تحلیل
گذرا یک بعدی
بی بعد سازی
حل دقیق
حل تقریبی
نیمه بی نهایت
چند بعدی

مقدمه

The rate of convection HT between the body and its environment at time t

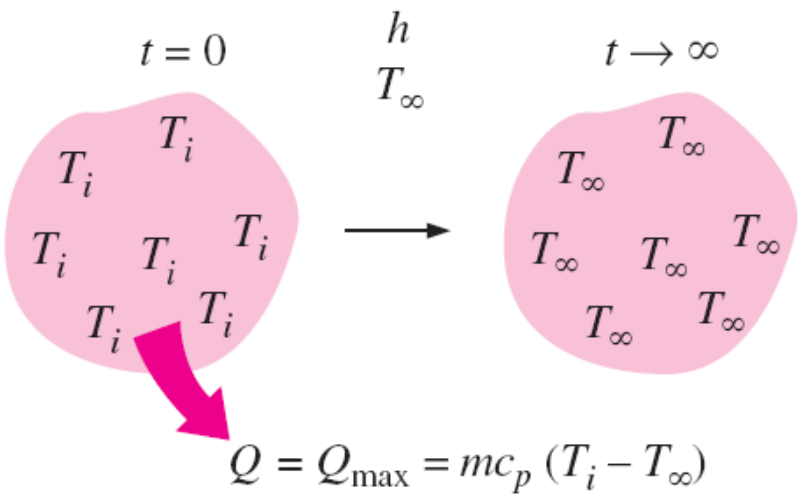
$$\dot{Q}(t) = hA_s[T(t) - T_\infty] \qquad \text{(W)}$$

The total amount of HT over the time interval t = o to t

$$Q = mc_p[T(t) - T_i] \qquad \text{(kJ)}$$

The maximum heat transfer between the body and its surroundings

$$Q_{\max} = mc_p(T_\infty - T_i) \qquad \text{(kJ)}$$



- مقدار انتقال حرارت زمانی به حداکثر می رسد که جسم به دمای محیط برسد.

مقدمه
معیار تحلیل
گذرا یک بعدی
بی بعد سازی
حل دقیق
حل تقریبی
نیمه بی نهایت
چند بعدی

مقدمه

The rate of convection HT between the body and its environment at time t

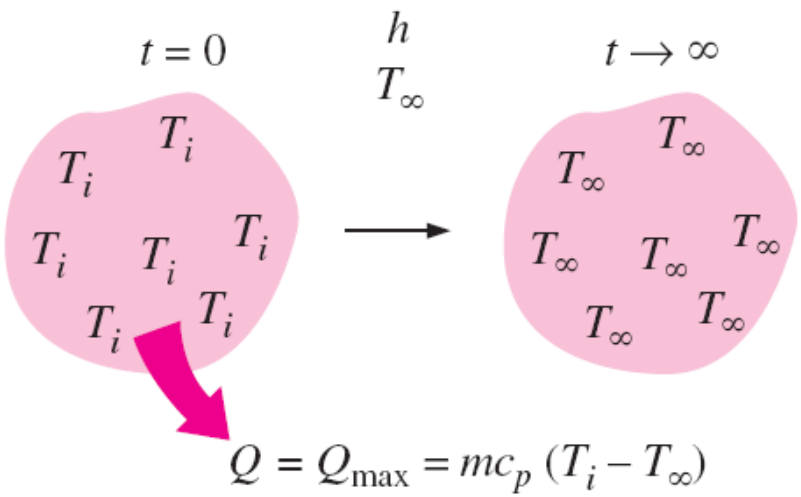
$$\dot{Q}(t) = hA_s[T(t) - T_\infty] \qquad \text{(W)}$$

The total amount of HT over the time interval t = o to t

$$Q = mc_p[T(t) - T_i] \qquad \text{(kJ)}$$

The maximum heat transfer between the body and its surroundings

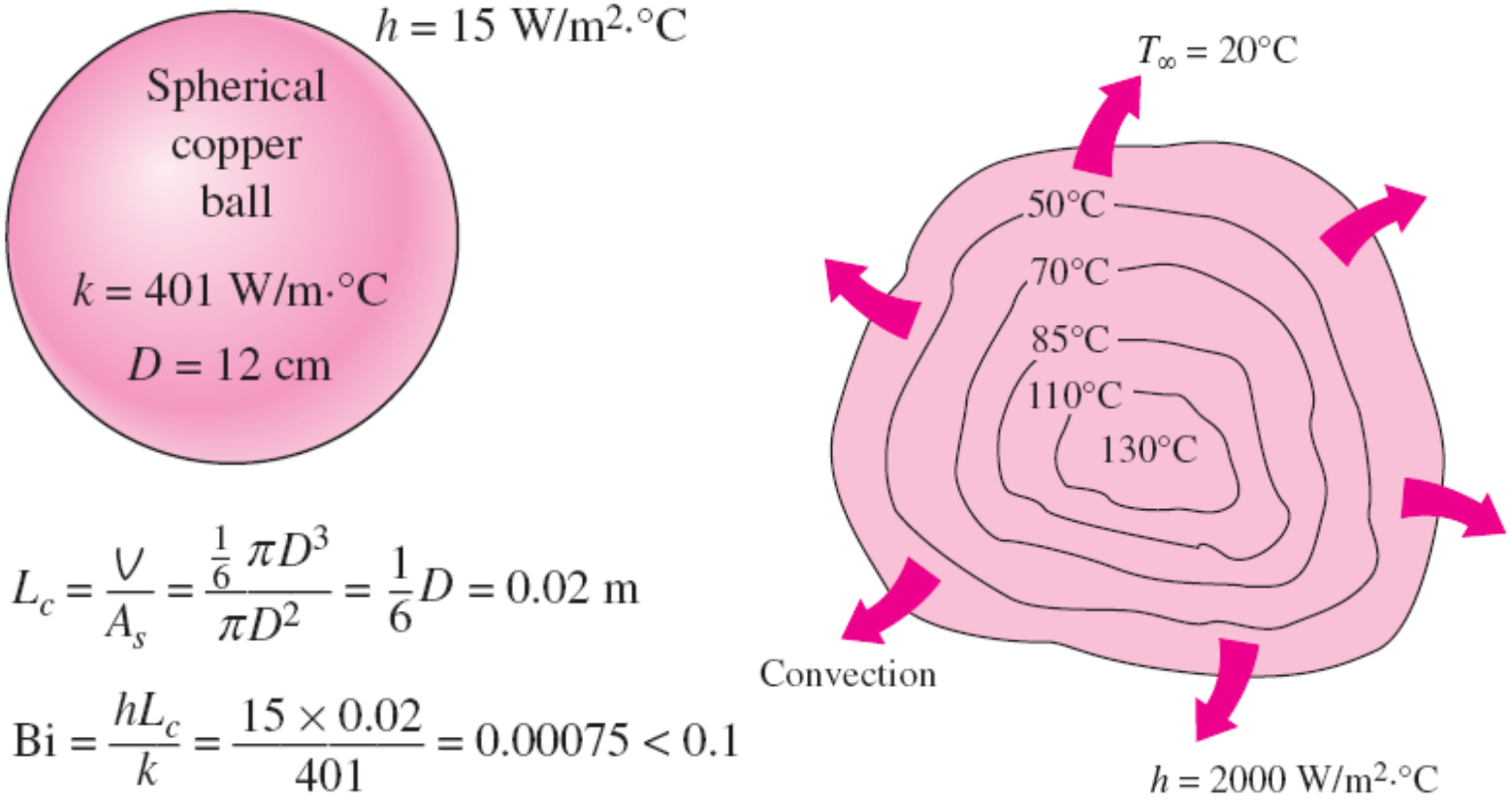
$$Q_{\max} = mc_p(T_\infty - T_i) \qquad \text{(kJ)}$$



- مقدار انتقال حرارت زمانی به حداکثر می رسد که جسم به دمای محیط برسد.

مقدمه
معیار تحلیل
گذرا یک بعدی
بی بعد سازی
حل دقیق
حل تقریبی
نیمه بی نهایت
چند بعدی

معیاری برای تحلیل



$$L_c = \frac{V}{A_s} = \frac{\frac{1}{6}\pi D^3}{\pi D^2} = \frac{1}{6}D = 0.02 \text{ m}$$

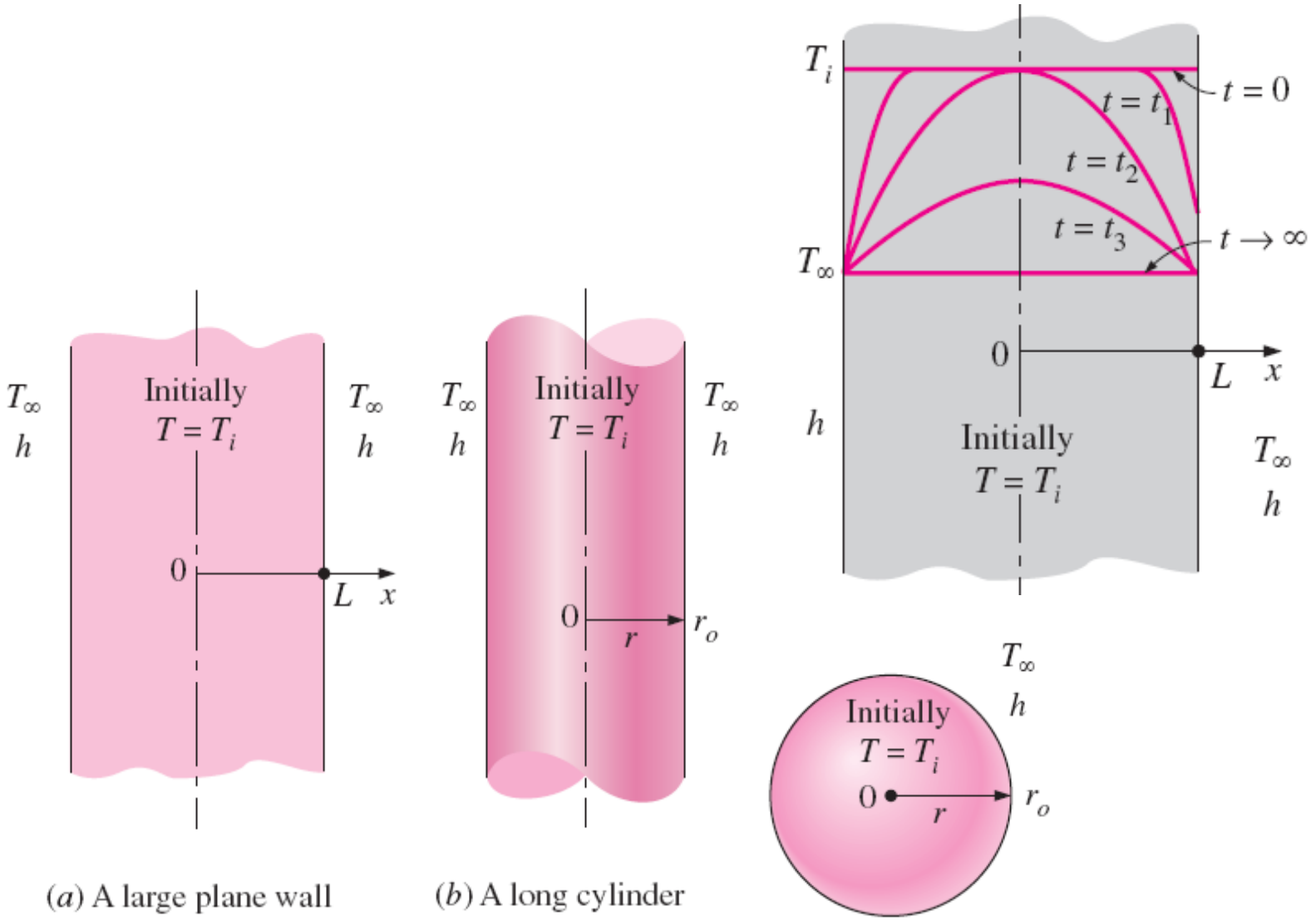
$$\text{Bi} = \frac{hL_c}{k} = \frac{15 \times 0.02}{401} = 0.00075 < 0.1$$

$$\text{Bi} = \frac{h}{k/L_c}\frac{\Delta T}{\Delta T} = \frac{\text{Convection at the surface of the body}}{\text{Conduction within the body}}$$

$$\text{Bi} = \frac{L_c/k}{1/h} = \frac{\text{Conduction resistance within the body}}{\text{Convection resistance at the surface of the body}}$$

مقدمه
معیار تحلیل
گذرا یک بعدی
بی بعد سازی
حل دقیق
حل تقریبی
نیمه بی نهایت
چند بعدی

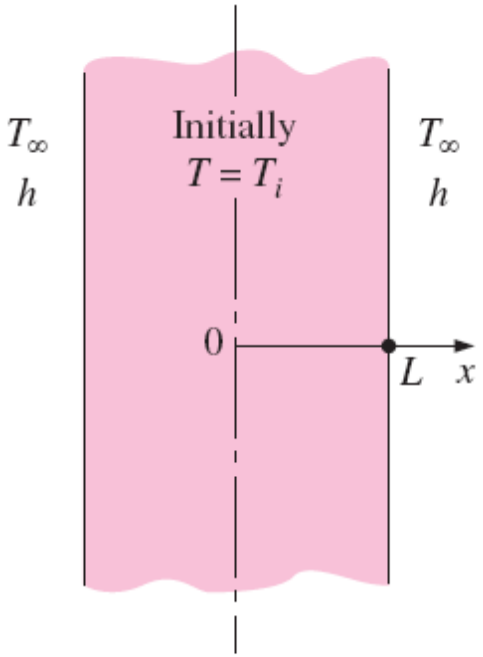
انتقال حرارت هدایت گذرا و یک بعدی



(a) A large plane wall (b) A long cylinder

مقدمه
معیار تمایل
گذرا یک بعدی
بی بعد سازی
حل دقیق
حل تقریبی
نیمه بی نهایت
چند بعدی

بی بعد سازی هدایت گذرا و یک بعدی



(*a*) A large plane wall

Differential equation: $\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{\partial T}{\partial t}$

Boundary conditions:

$$\frac{\partial T(0,\,t)}{\partial x} = 0 \quad \text{and} \quad -k\frac{\partial T(L,\,t)}{\partial x} = h[T(L,\,t) - T_\infty]$$

Initial condition: $T(x,\,0) = T_i$

$$\alpha = k/\rho c_p \qquad X = x/L$$

$$\theta(x,\,t) = [T(x,\,t) - T_\infty]/[T_i - T_\infty]$$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial X^2} = \frac{L^2}{\alpha}\frac{\partial\theta}{\partial t} \quad \text{and} \quad \frac{\partial\theta(1,\,t)}{\partial X} = \frac{hL}{k}\theta(1,\,t)$$

Dimensionless differential equation: $\dfrac{\partial^2\theta}{\partial X^2} = \dfrac{\partial\theta}{\partial\tau}$

Dimensionless BC's: $\dfrac{\partial\theta(0,\,\tau)}{\partial X} = 0$ and $\dfrac{\partial\theta(1,\,\tau)}{\partial X} = -\mathrm{Bi}\theta(1,\,\tau)$

Dimensionless initial condition: $\theta(X,\,0) = 1$

مقدمه
معیار تمایل
گذرا یک بعدی
بی بعد سازی
حل دقیق
حل تقریبی
نیمه بی نهایت
چند بعدی

بی بعد سازی هدایت گذرا و یک بعدی

$$\theta(X, \tau) = \frac{T(x, t) - T_i}{T_\infty - T_i} \qquad \textit{Dimensionless temperature}$$

$$X = \frac{x}{L} \qquad \textit{Dimensionless distance from the center}$$

$$\mathrm{Bi} = \frac{hL}{k} \qquad \textit{Dimensionless heat transfer coefficient} \text{ (Biot number)}$$

$$\tau = \frac{\alpha t}{L^2} = \mathrm{Fo} \qquad \textit{Dimensionless time} \text{ (Fourier number)}$$

(*a*) Original heat conduction problem:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}, \quad T(x, 0) = T_i$$

$$\frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = 0, \quad -k\frac{\partial T(L, t)}{\partial x} = h[T(L, t) - T_\infty]$$

$$T = F(x, L, t, k, \alpha, h, T_i)$$

(*b*) Nondimensionalized problem:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} = \frac{\partial \theta}{\partial \tau}; \quad \theta(X, 0) = 1$$

$$\frac{\partial \theta(0, \tau)}{\partial X} = 0, \quad \frac{\partial \theta(1, \tau)}{\partial X} = -\mathrm{Bi}\theta(1, \tau)$$

$$\theta = f(X, \mathrm{Bi}, \tau)$$

مقدمه

معیار تمایل

گذرا یک بعدی

بی بعد سازی

حل دقیق

حل تقریبی

نیمه بی نهایت

چند بعدی

حل دقیق هدایت گذرا و یک بعدی

$$\theta(X,\tau)=F(X)G(\tau) \qquad \frac{1}{F}\frac{d^2F}{dX^2}=\frac{1}{G}\frac{dG}{d\tau} \qquad \frac{d^2F}{dX^2}+\lambda^2F=0 \quad \text{and} \quad \frac{dG}{d\tau}+\lambda^2G=0$$

$$F=C_1\cos(\lambda X)+C_2\sin(\lambda X) \quad \text{and} \quad G=C_3e^{-\lambda^2\tau}$$

$$\theta=FG=C_3e^{-\lambda^2\tau}[C_1\cos(\lambda X)+C_2\sin(\lambda X)]=e^{-\lambda^2\tau}[A\cos(\lambda X)+B\sin(\lambda X)]$$

$$A=C_1C_3 \text{ and } B=C_2C_3$$

$$\frac{\partial\theta(0,\tau)}{\partial X}=0\rightarrow -e^{-\lambda^2\tau}(A\lambda\sin 0+B\lambda\cos 0)=0 \rightarrow B=0 \rightarrow \theta=Ae^{-\lambda^2\tau}\cos(\lambda X)$$

$$\frac{\partial\theta(1,\tau)}{\partial X}=-\mathrm{Bi}\theta(1,\tau) \rightarrow -Ae^{-\lambda^2\tau}\lambda\sin\lambda=-\mathrm{Bi}Ae^{-\lambda^2\tau}\cos\lambda \rightarrow \lambda\tan\lambda=\mathrm{Bi}$$

$$\lambda_n\tan\lambda_n=\mathrm{Bi} \qquad \theta=\sum_{n=1}^{\infty}A_ne^{-\lambda_n^2\tau}\cos(\lambda_nX) \qquad \theta(X,0)=1 \rightarrow 1=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(\lambda_nX)$$

$$\int_0^1\cos(\lambda_nX)dX=A_n\int_0^1\cos^2(\lambda_nX)dx \rightarrow A_n=\frac{4\sin\lambda_n}{2\lambda_n+\sin(2\lambda_n)}$$

مقدمه
معیار تمایل
گذرا یک بعدی
بی بعد سازی
حل دقیق
حل تقریبی
نیمه بی نهایت
چند بعدی

حل دقیق هدایت گذرا و یک بعدی

TABLE 4–1

Summary of the solutions for one-dimensional transient conduction in a plane wall of thickness $2L$, a cylinder of radius r_o and a sphere of radius r_o subjected to convention from all surfaces.*

Geometry	Solution	λ_n's are the roots of
Plane wall	$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \sin \lambda_n}{2\lambda_n + \sin(2\lambda_n)} e^{-\lambda_n^2 \tau} \cos(\lambda_n x/L)$	$l_n \tan l_n 5\ \mathrm{Bi}$
Cylinder	$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\lambda_n} \frac{J_1(\lambda_n)}{J_0^2(\lambda_n) + J_1^2(\lambda_n)} e^{-\lambda_n^2 \tau} J_0(\lambda_n r/r_o)$	$\lambda_n \frac{J_1(\lambda_n)}{J_0(\lambda_n)} = \mathrm{Bi}$
Sphere	$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(\sin \lambda_n - \lambda_n \cos \lambda_n)}{2\lambda_n - \sin(2\lambda_n)} e^{-\lambda_n^2 \tau} \frac{\sin(\lambda_n x/L)}{\lambda_n x/L}$	$1 - \lambda_n \cot \lambda_n = \mathrm{Bi}$

*Here $\theta = (T - T_\infty)/(T_i - T_\infty)$ is the dimensionless temperature, $\mathrm{Bi} = hL/k$ or hr_o/k is the Biot number, $\mathrm{Fo} = \tau = \alpha t / L^2$ or $\alpha\tau / r_o^2$ is the Fourier number, and J_0 and J_1 are the Bessel functions of the first kind whose values are given in Table 4–3.

مقدمه
معیار تمایل
گذرا یک بعدی
بی بعد سازی
حل دقیق
حل تقریبی
نیمه بی نهایت
چند بعدی

حل تقریبی هدایت گذرا و یک بعدی

Plane wall: $$\theta_{\text{wall}} = \frac{T(x,t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau} \cos(\lambda_1 x/L), \quad \tau > 0.2$$

Cylinder: $$\theta_{\text{cyl}} = \frac{T(r,t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau} J_0(\lambda_1 r/r_o), \quad \tau > 0.2$$

Sphere: $$\theta_{\text{sph}} = \frac{T(r,t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau} \frac{\sin(\lambda_1 r/r_o)}{\lambda_1 r/r_o}, \quad \tau > 0.2$$

Center of plane wall $(x = 0)$: $$\theta_{0,\text{ wall}} = \frac{T_0 - T_\infty}{T_i - T_\infty} = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau}$$

Center of cylinder $(r = 0)$: $$\theta_{0,\text{ cyl}} = \frac{T_0 - T_\infty}{T_i - T_\infty} = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau}$$

Center of sphere $(r = 0)$: $$\theta_{0,\text{ sph}} = \frac{T_0 - T_\infty}{T_i - T_\infty} = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau}$$

مقدمه
معیار تمایل
گذرا یک بعدی
بی بعد سازی
حل دقیق
حل تقریبی
نیمه بی نهایت
چند بعدی

حل تقریبی هدایت گذرا و یک بعدی

TABLE 4–2

Coefficients used in the one-term approximate solution of transient one-dimensional heat conduction in plane walls, cylinders, and spheres (Bi = hL/k for a plane wall of thickness $2L$, and Bi = hr_o/k for a cylinder or sphere of radius r_o)

	Plane Wall		Cylinder		Sphere	
Bi	λ_1	A_1	λ_1	A_1	λ_1	A_1
0.01	0.0998	1.0017	0.1412	1.0025	0.1730	1.0030
0.02	0.1410	1.0033	0.1995	1.0050	0.2445	1.0060
0.04	0.1987	1.0066	0.2814	1.0099	0.3450	1.0120
0.06	0.2425	1.0098	0.3438	1.0148	0.4217	1.0179
0.08	0.2791	1.0130	0.3960	1.0197	0.4860	1.0239
0.1	0.3111	1.0161	0.4417	1.0246	0.5423	1.0298
0.2	0.4328	1.0311	0.6170	1.0483	0.7593	1.0592
0.3	0.5218	1.0450	0.7465	1.0712	0.9208	1.0880
0.4	0.5932	1.0580	0.8516	1.0931	1.0528	1.1164
0.5	0.6533	1.0701	0.9408	1.1143	1.1656	1.1441
0.6	0.7051	1.0814	1.0184	1.1345	1.2644	1.1713
0.7	0.7506	1.0918	1.0873	1.1539	1.3525	1.1978
0.8	0.7910	1.1016	1.1490	1.1724	1.4320	1.2236
0.9	0.8274	1.1107	1.2048	1.1902	1.5044	1.2488
1.0	0.8603	1.1191	1.2558	1.2071	1.5708	1.2732
2.0	1.0769	1.1785	1.5995	1.3384	2.0288	1.4793
3.0	1.1925	1.2102	1.7887	1.4191	2.2889	1.6227
4.0	1.2646	1.2287	1.9081	1.4698	2.4556	1.7202
5.0	1.3138	1.2403	1.9898	1.5029	2.5704	1.7870
6.0	1.3496	1.2479	2.0490	1.5253	2.6537	1.8338
7.0	1.3766	1.2532	2.0937	1.5411	2.7165	1.8673
8.0	1.3978	1.2570	2.1286	1.5526	2.7654	1.8920
9.0	1.4149	1.2598	2.1566	1.5611	2.8044	1.9106
10.0	1.4289	1.2620	2.1795	1.5677	2.8363	1.9249
20.0	1.4961	1.2699	2.2880	1.5919	2.9857	1.9781
30.0	1.5202	1.2717	2.3261	1.5973	3.0372	1.9898
40.0	1.5325	1.2723	2.3455	1.5993	3.0632	1.9942
50.0	1.5400	1.2727	2.3572	1.6002	3.0788	1.9962
100.0	1.5552	1.2731	2.3809	1.6015	3.1102	1.9990
∞	1.5708	1.2732	2.4048	1.6021	3.1416	2.0000

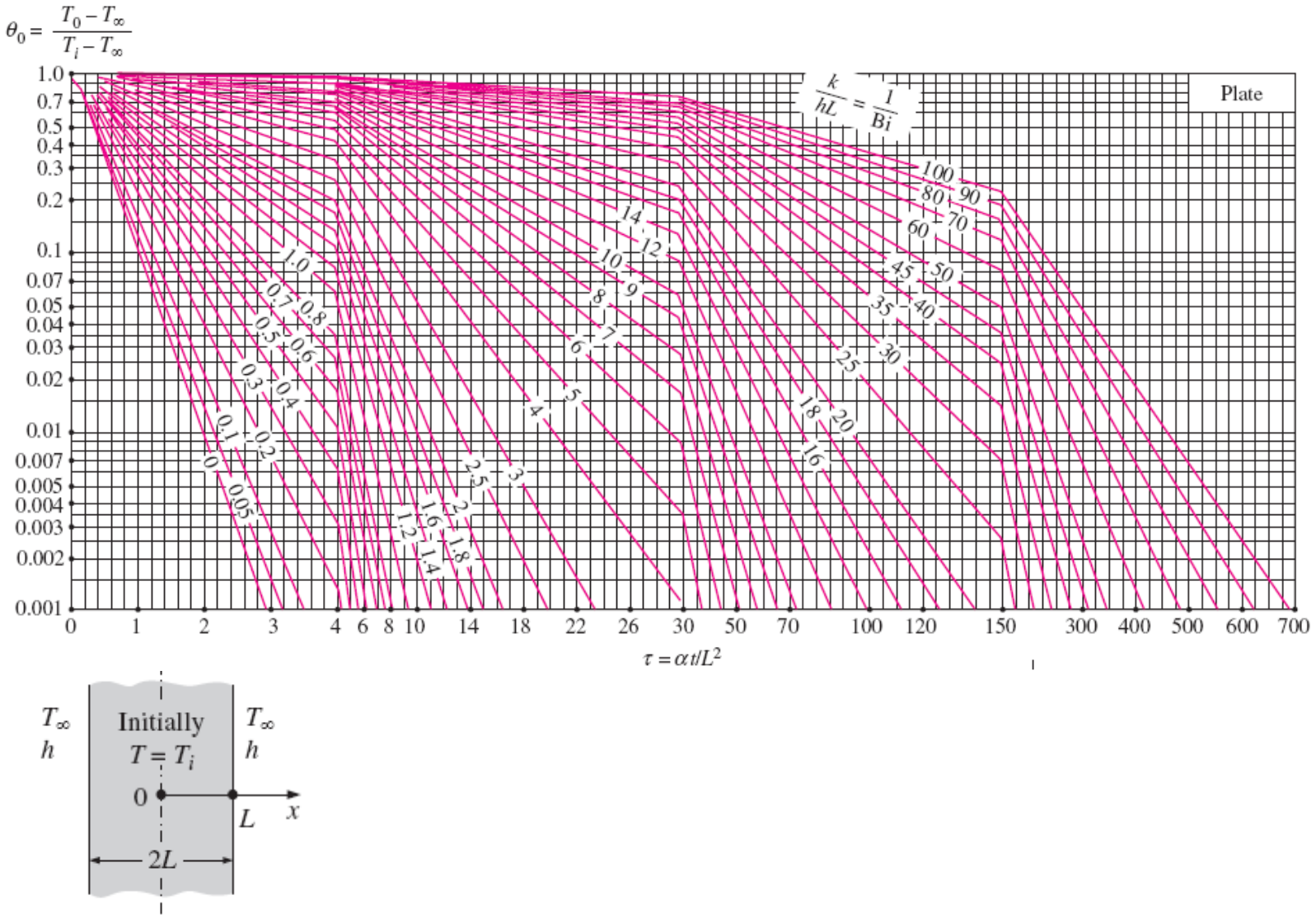
TABLE 4–3

The zeroth- and first-order Bessel functions of the first kind

η	$J_0(\eta)$	$J_1(\eta)$
0.0	1.0000	0.0000
0.1	0.9975	0.0499
0.2	0.9900	0.0995
0.3	0.9776	0.1483
0.4	0.9604	0.1960
0.5	0.9385	0.2423
0.6	0.9120	0.2867
0.7	0.8812	0.3290
0.8	0.8463	0.3688
0.9	0.8075	0.4059
1.0	0.7652	0.4400
1.1	0.7196	0.4709
1.2	0.6711	0.4983
1.3	0.6201	0.5220
1.4	0.5669	0.5419
1.5	0.5118	0.5579
1.6	0.4554	0.5699
1.7	0.3980	0.5778
1.8	0.3400	0.5815
1.9	0.2818	0.5812
2.0	0.2239	0.5767
2.1	0.1666	0.5683
2.2	0.1104	0.5560
2.3	0.0555	0.5399
2.4	0.0025	0.5202
2.6	−0.0968	−0.4708
2.8	−0.1850	−0.4097
3.0	−0.2601	−0.3391
3.2	−0.3202	−0.2613

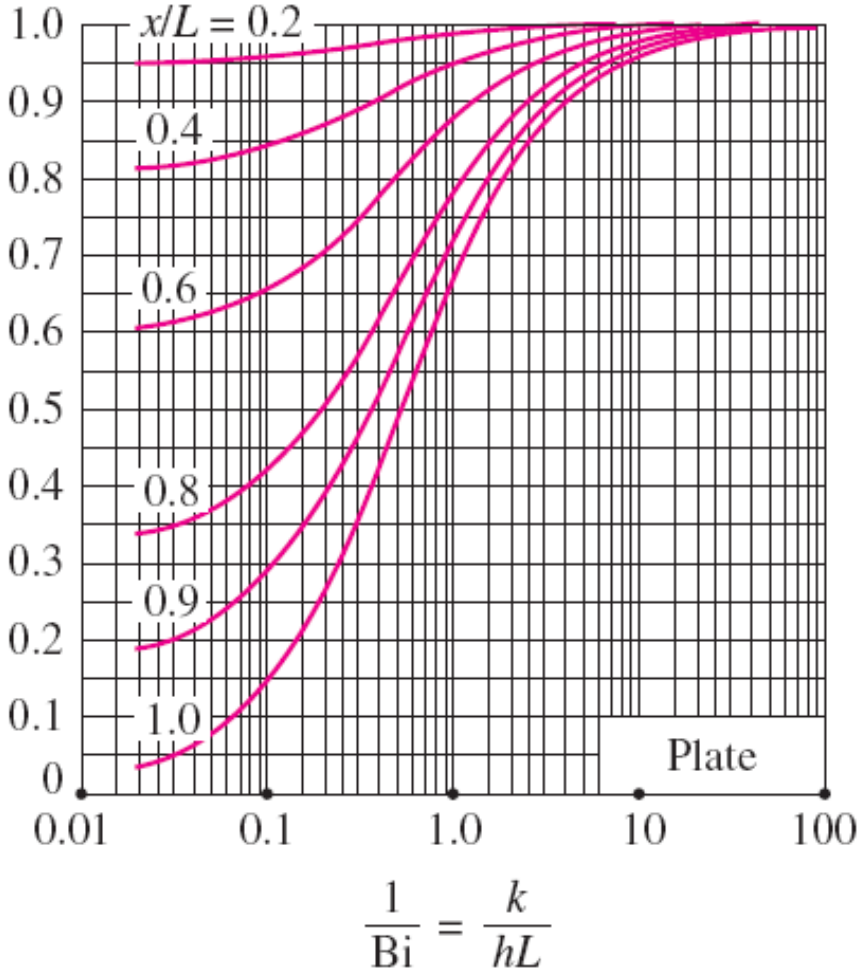
مقدمه
معیار تمایل
گذرا یک بعدی
بی بعد سازی
حل دقیق
حل تقریبی
نیمه بی نهایت
چند بعدی

حل تقریبی هدایت گذرا و یک بعدی – میان صفحه

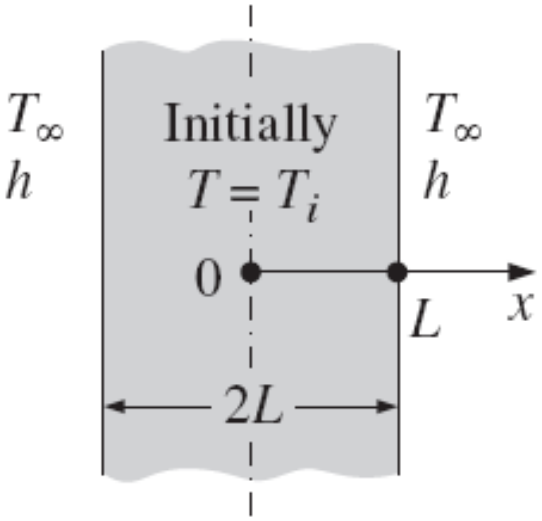


حل تقریبی هدایت گذرا و یک بعدی – توزیع دما

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty}$$

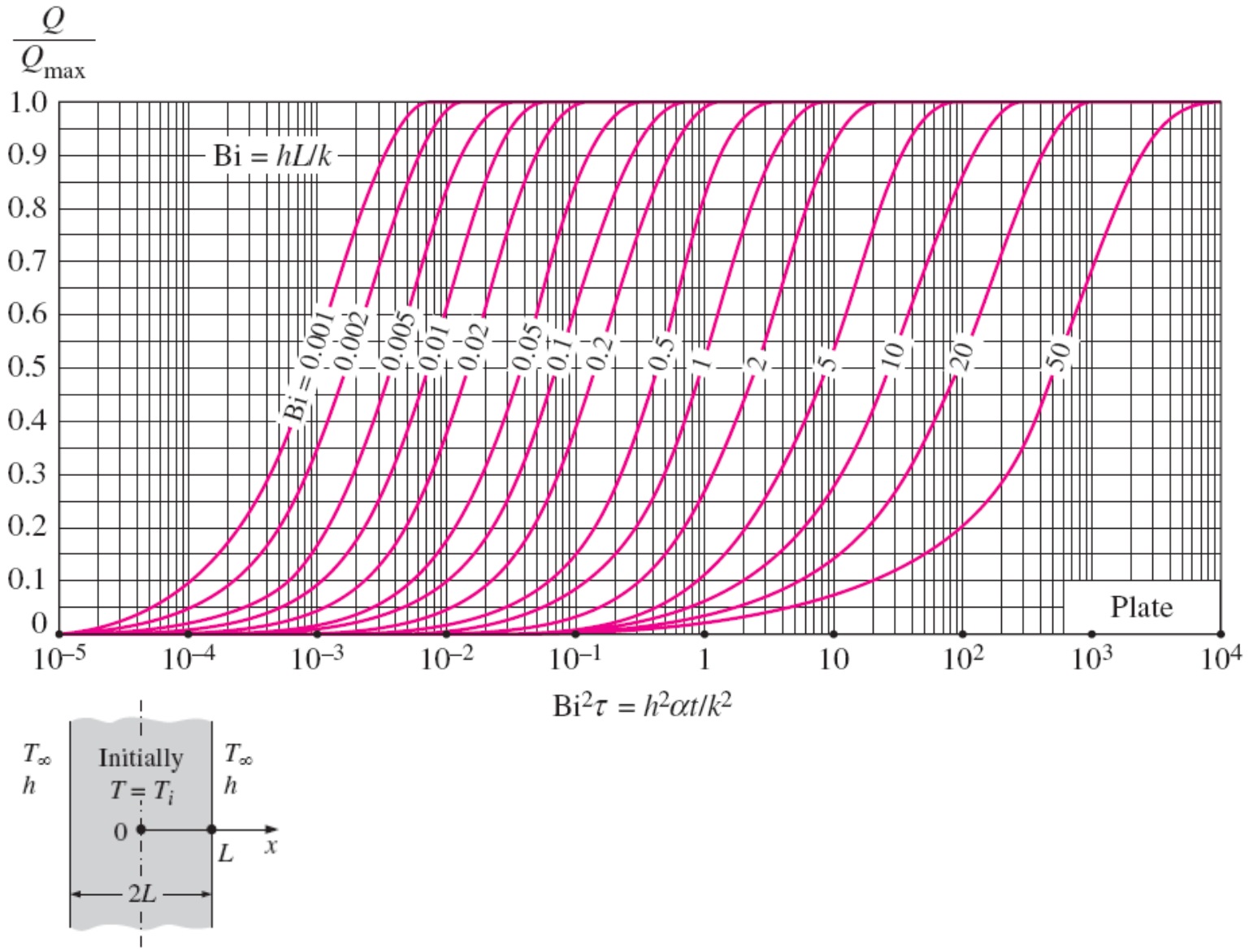


$$\frac{1}{\mathrm{Bi}} = \frac{k}{hL}$$



مقدمه
معیار تمایل
گذرا یک بعدی
بی بعد سازی
حل دقیق
حل تقریبی
نیمه بی نهایت
چند بعدی

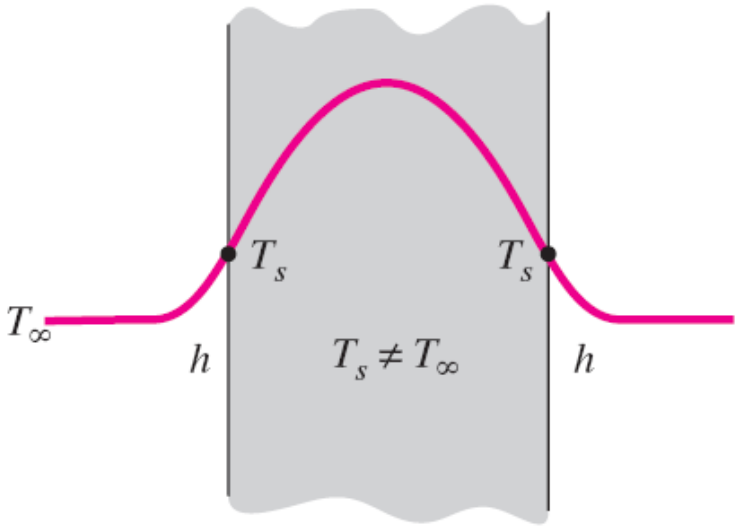
حل تقریبی هدایت گذرا و یک بعدی – انتقال حرارت



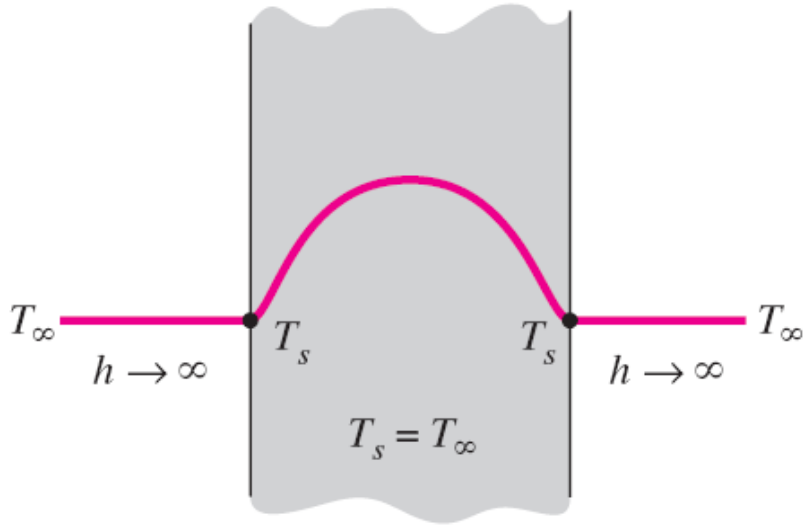
مقدمه
معیار تمایل
گذرا یک بعدی
بی بعد سازی
حل دقیق
حل تقریبی
نیمه بی نهایت
چند بعدی

حل تقریبی – توزیع دما نسبت به دمای مرکز

$$\frac{\theta_{\text{wall}}}{\theta_{0,\text{ wall}}} = \cos\left(\frac{\lambda_1 x}{L}\right), \quad \frac{\theta_{\text{cyl}}}{\theta_{0,\text{ cyl}}} = J_0\left(\frac{\lambda_1 r}{r_o}\right), \quad \text{and} \quad \frac{\theta_{\text{sph}}}{\theta_{0,\text{ sph}}} = \frac{\sin(\lambda_1 r/r_o)}{\lambda_1 r/r_o}$$



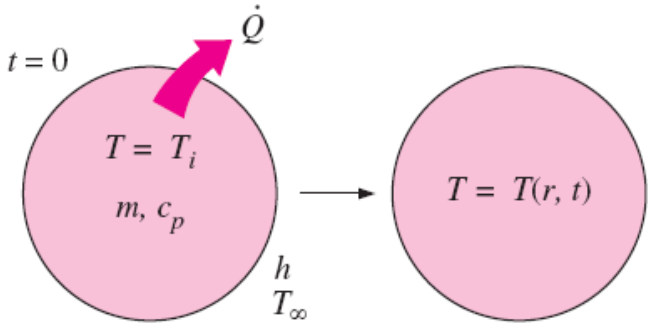
(a) Finite convection coefficient



(b) Infinite convection coefficient

مقدمه
معیار تمایل
گذرا یک بعدی
بی بعد سازی
حل دقیق
حل تقریبی
نیمه بی نهایت
چند بعدی

حل تقریبی – توزیع دما نسبت به دمای مرکز



$$Q_{\max} = mc_p(T_\infty - T_i) = \rho V c_p(T_\infty - T_i) \quad \text{(kJ)}$$

$$\frac{Q}{Q_{\max}} = \frac{\int_V \rho c_p[T(x,t) - T_i]dV}{\rho c_p(T_\infty - T_i)V} = \frac{1}{V}\int_V (1 - \theta)dV$$

$$Q = \int_V \rho c_p[T(x,t) - T_i]dV$$

$\mathrm{Bi} = \ldots$

$\frac{h^2\alpha t}{k^2} = \mathrm{Bi}^2\tau = \ldots$

$\frac{Q}{Q_{\max}} = \ldots$

(Gröber chart)

(*b*) Actual heat transfer for time t

Plane wall:
$$\left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)_{\text{wall}} = 1 - \theta_{0,\text{ wall}}\frac{\sin\lambda_1}{\lambda_1}$$

Cylinder:
$$\left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)_{\text{cyl}} = 1 - 2\theta_{0,\text{ cyl}}\frac{J_1(\lambda_1)}{\lambda_1}$$

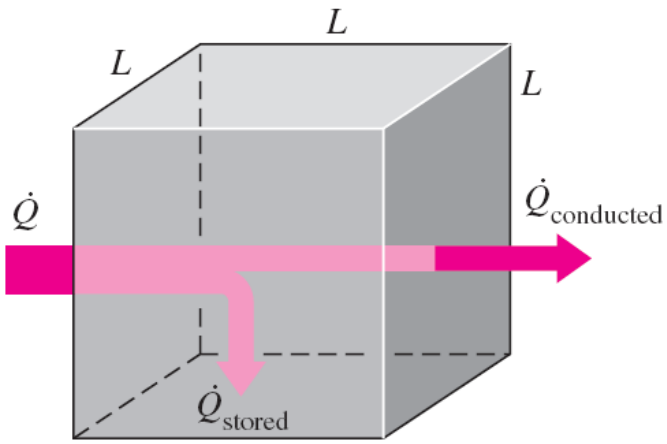
Sphere:
$$\left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)_{\text{sph}} = 1 - 3\theta_{0,\text{ sph}}\frac{\sin\lambda_1 - \lambda_1\cos\lambda_1}{\lambda_1^3}$$

مقدمه
معیار تمایل
گذرا یک بعدی
بی بعد سازی
حل دقیق
حل تقریبی
نیمه بی نهایت
چند بعدی

عدد فوریه

- عدد فوریه: حرارت هدایت شده از جسم به حرارت ذخیره شده.
- عدد فوریه بالا به معنای انتشار سریعتر حرارت در جسم است.
- عدد فوریه در t: حرارت هدایت شده به حرارت ذخیره شده در t.

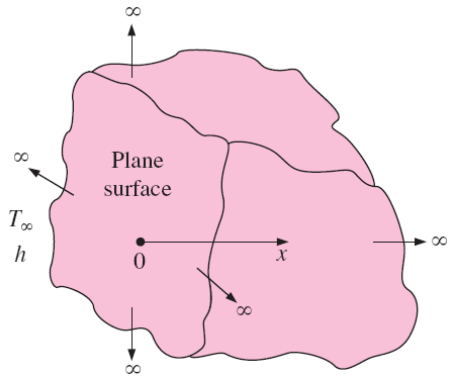
$$\tau = \frac{\alpha t}{L^2} = \frac{kL^2\,(1/L)}{\rho c_p L^3/t}\frac{\Delta T}{\Delta T} = \frac{\text{The rate at which heat is } \textit{conducted} \text{ across } L \text{ of a body of volume } L^3}{\text{The rate at which heat is } \textit{stored} \text{ in a body of volume } L^3}$$



Fourier number: $\tau = \frac{\alpha t}{L^2} = \frac{\dot{Q}_{\text{conducted}}}{\dot{Q}_{\text{stored}}}$

مقدمه
معیار تمایل
گذرا یک بعدی
بی بعد سازی
حل دقیق
حل تقریبی
نیمه بی نهایت
چند بعدی

هدایت گذرا در اجسام نیمه بی نهایت



- جسم نیمه بی نهایت: جسمی ایده ال که یک صفحه دارد و در تمام ابعاد تا بی نهایت توسعه داده می شود.

Differential equation: $\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{\partial T}{\partial t}$

Boundary conditions: $T(0, t) = T_s$ and $T(x \to \infty, t) = T_i$

Initial condition: $T(x, 0) = T_i$

Similarity variable: $\eta = \dfrac{x}{\sqrt{4\alpha t}}$

error function

$$\text{erf}(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} e^{-u^2} du$$

complementary error f

$$\text{erfc}(\eta) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} \varepsilon^{-u^2} du$$

$$\frac{d^2T}{d\eta^2} = -2\eta\frac{dT}{d\eta}$$

$T(0) = T_s$ and $T(\eta \to \infty) = T_i$

$$\frac{T - T_s}{T_i - T_s} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} e^{-u^2} du = \text{erf}(\eta) = 1 - \text{erfc}(\eta)$$

مقدمه
معیار تمایل
گذرا یک بعدی
بی بعد سازی
حل دقیق
حل تقریبی
نیمه بی نهایت
چند بعدی

هدایت گذرا در اجسام نیمه بی نهایت

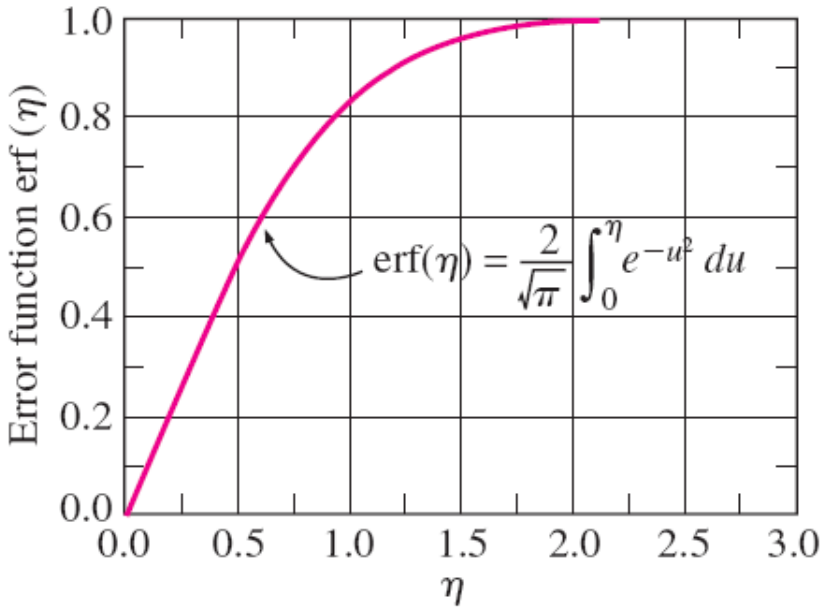


TABLE 4–4

The complementary error function

η	erfc (η)	η	erfc (η)	η	erfc (η)
0.00	1.00000	0.38	0.5910	0.76	0.2825
0.02	0.9774	0.40	0.5716	0.78	0.2700
0.04	0.9549	0.42	0.5525	0.80	0.2579
0.06	0.9324	0.44	0.5338	0.82	0.2462
0.08	0.9099	0.46	0.5153	0.84	0.2349
0.10	0.8875	0.48	0.4973	0.86	0.2239
0.12	0.8652	0.50	0.4795	0.88	0.2133
0.14	0.8431	0.52	0.4621	0.90	0.2031
0.16	0.8210	0.54	0.4451	0.92	0.1932
0.18	0.7991	0.56	0.4284	0.94	0.1837
0.20	0.7773	0.58	0.4121	0.96	0.1746
0.22	0.7557	0.60	0.3961	0.98	0.1658
0.24	0.7343	0.62	0.3806	1.00	0.1573
0.26	0.7131	0.64	0.3654	1.02	0.1492
0.28	0.6921	0.66	0.3506	1.04	0.1413
0.30	0.6714	0.68	0.3362	1.06	0.1339
0.32	0.6509	0.70	0.3222	1.08	0.1267
0.34	0.6306	0.72	0.3086	1.10	0.1198
0.36	0.6107	0.74	0.2953	1.12	0.1132

$$\dot{q}_s = -k\frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x=0} = -k\frac{dT}{d\eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\bigg|_{\eta=0} = -kC_1 e^{-\eta^2}\frac{1}{\sqrt{4\alpha t}}\bigg|_{\eta=0} = \frac{k(T_s - T_i)}{\sqrt{\pi \alpha t}}$$

مقدمه
معیار تمایل
گذرا یک بعدی
بی بعد سازی
حل دقیق
حل تقریبی
نیمه بی نهایت
چند بعدی

هدایت گذرا در اجسام نیمه بی نهایت

Case 1: Specified Surface Temperature, T_s = constant

$$\frac{T(x,\,t)-T_i}{T_s-T_i}=\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right)\quad\text{and}\quad \dot{q}_s(t)=\frac{k(T_s-T_i)}{\sqrt{\pi\alpha t}}$$

Case 2: Specified Surface Heat Flux, $\dot{q}_s$ = constant.

$$T(x,\,t)-T_i=\frac{\dot{q}_s}{k}\left[\sqrt{\frac{4\alpha t}{\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha t}\right)-x\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right)\right]$$

Case 3: Convection on the Surface, $\dot{q}_s(t)=h[T_\infty-T(0,t)]$.

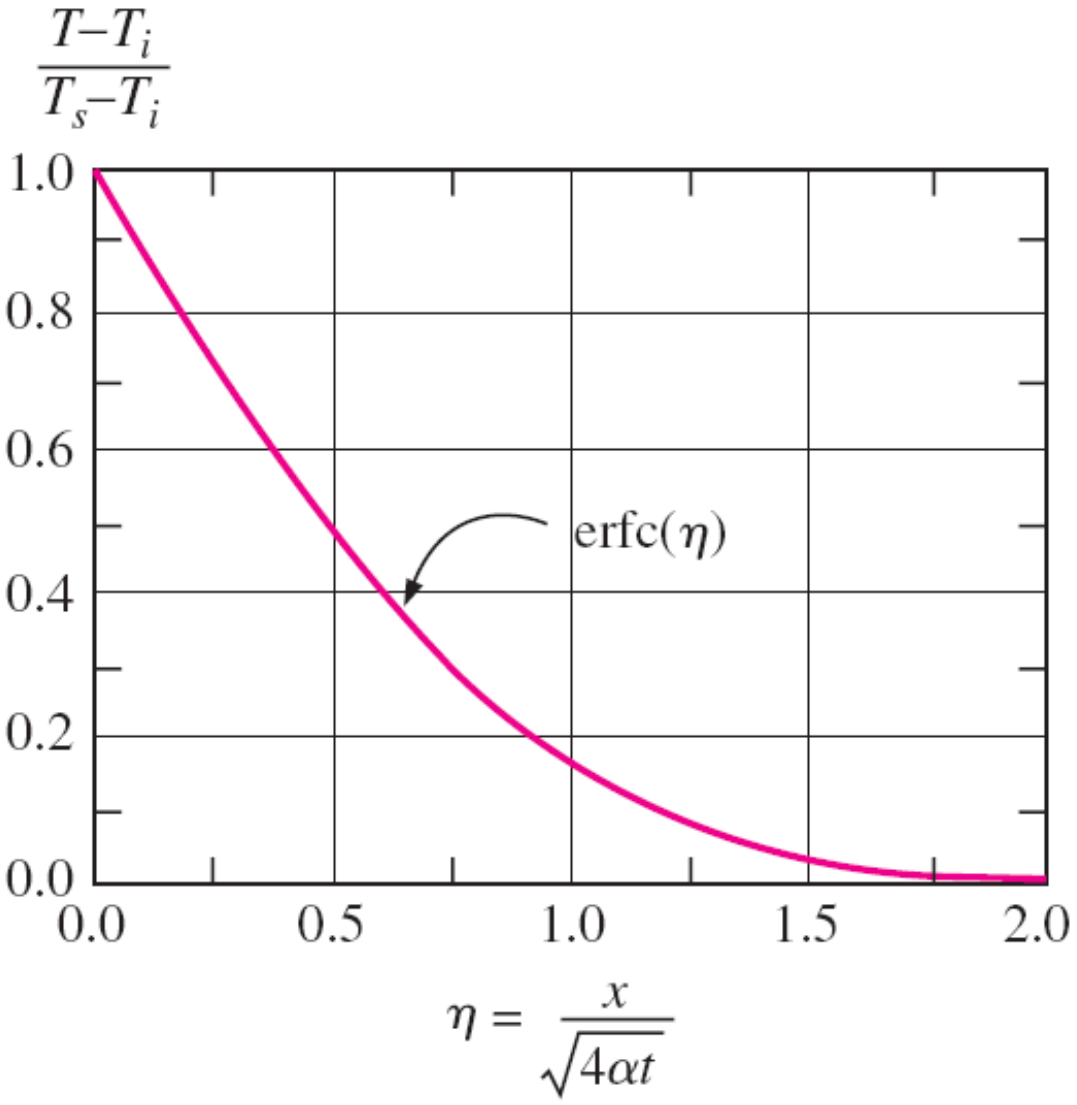
$$\frac{T(x,t)-T_i}{T_\infty-T_i}=\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right)-\exp\left(\frac{hx}{k}+\frac{h^2\alpha t}{k^2}\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}+\frac{h\sqrt{\alpha t}}{k}\right)$$

Case 4: Energy Pulse at Surface, e_s = constant.

$$T(x,\,t)-T_i=\frac{e_s}{k\sqrt{\pi t/\alpha}}\exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha t}\right)$$

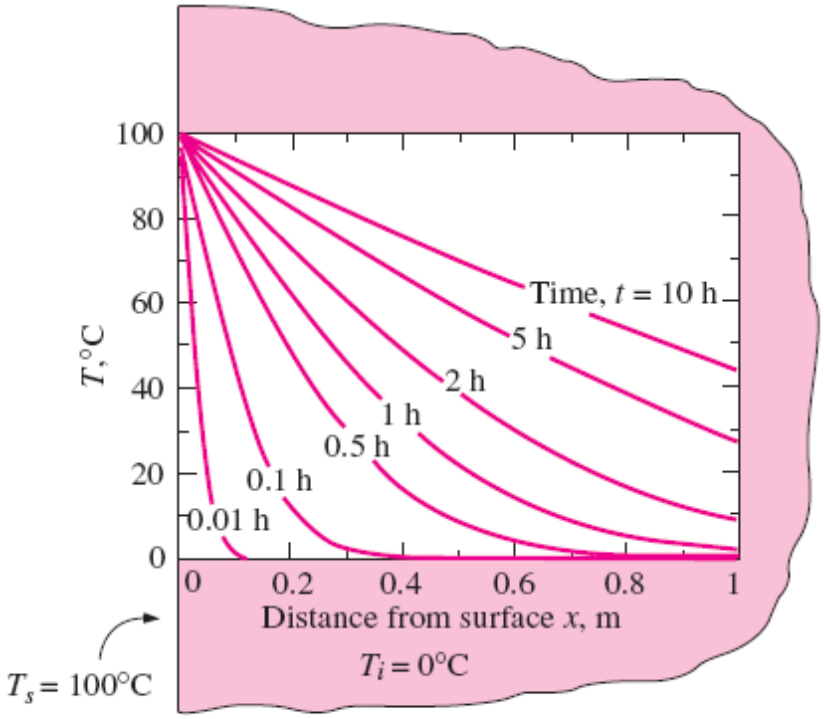
مقدمه
معیار تمایل
گذرا یک بعدی
بی بعد سازی
حل دقیق
حل تقریبی
نیمه بی نهایت
چند بعدی

هدایت گذرا در اجسام نیمه بی نهایت

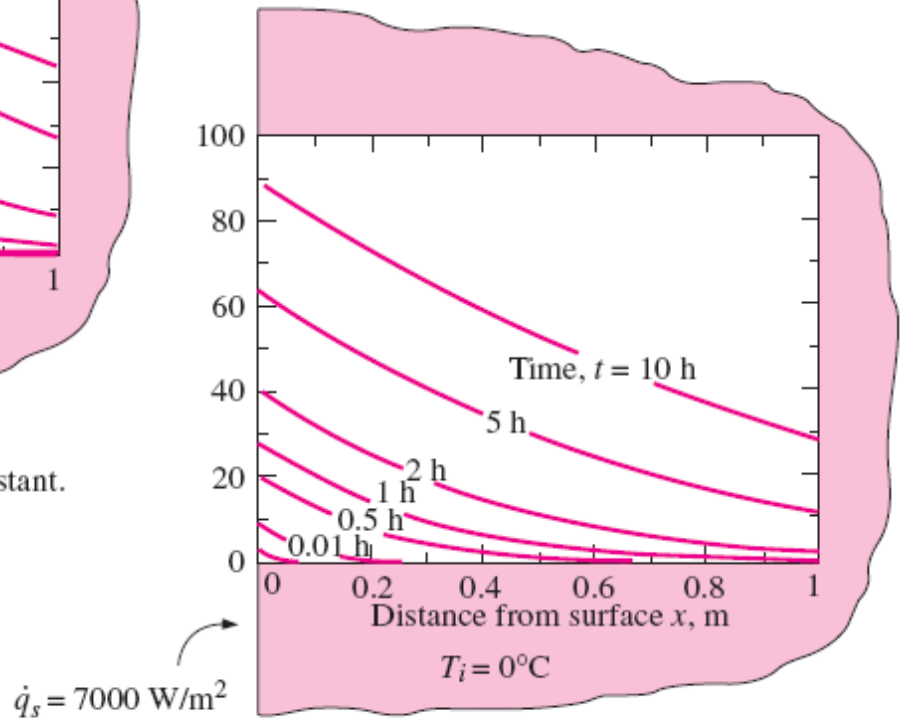


مقدمه
معیار تمایل
گذرا یک بعدی
بی بعد سازی
حل دقیق
حل تقریبی
نیمه بی نهایت
چند بعدی

هدایت گذرا در اجسام نیمه بی نهایت



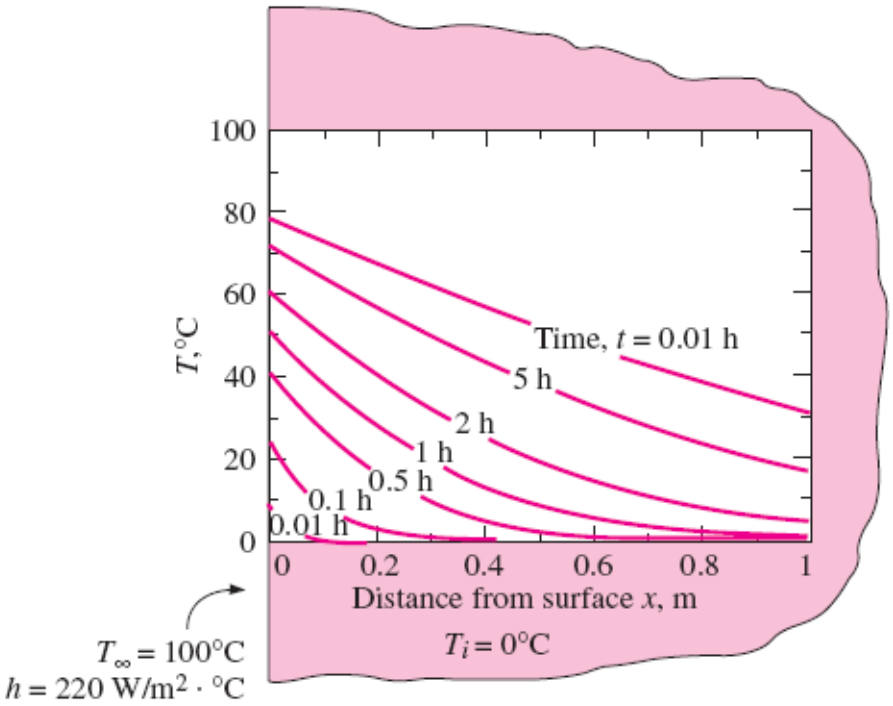
(a) Specified surface temperature, T_s = constant.



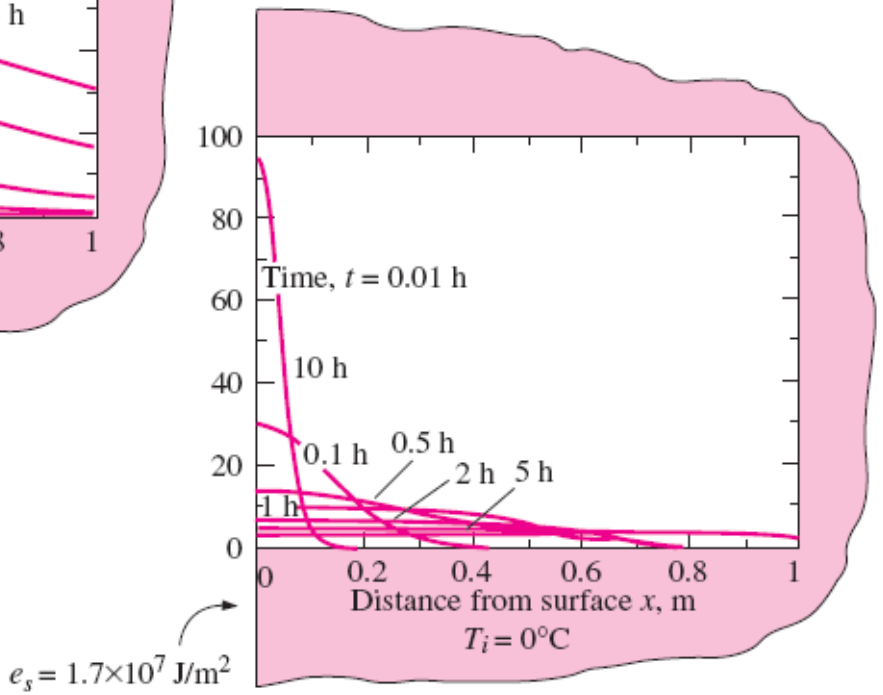
(b) Specified surface heat flux, $\dot{q}_s$ = constant.

مقدمه
معیار تمایل
گذرا یک بعدی
بی بعد سازی
حل دقیق
حل تقریبی
نیمه بی نهایت
چند بعدی

هدایت گذرا در اجسام نیمه بی نهایت



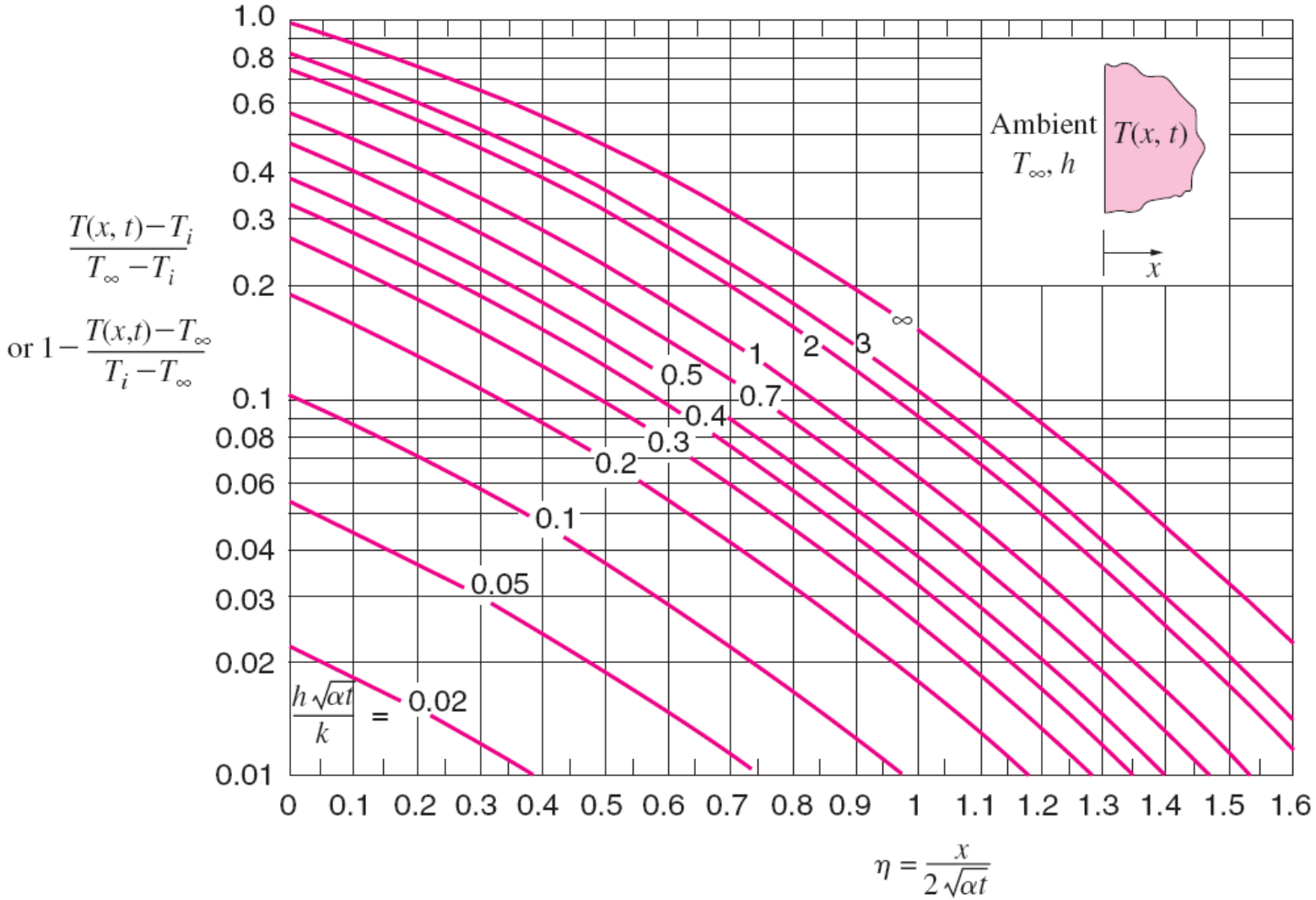
(c) Convection at the surface



(d) Energy pulse at the surface, e_s = constant

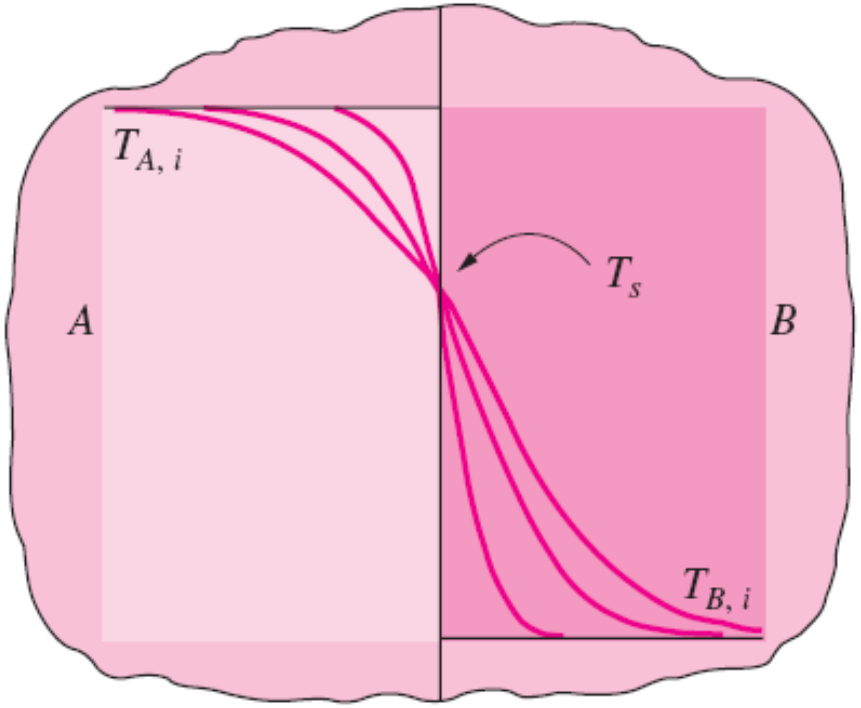
مقدمه
معیار تمایل
گذرا یک بعدی
بی بعد سازی
حل دقیق
حل تقریبی
نیمه بی نهایت
چند بعدی

هدایت گذرا در اجسام نیمه بی نهایت



مقدمه
معیار تمایل
گذرا یک بعدی
بی بعد سازی
حل دقیق
حل تقریبی
نیمه بی نهایت
چند بعدی

اتصال دو جسم نیمه بی نهایت

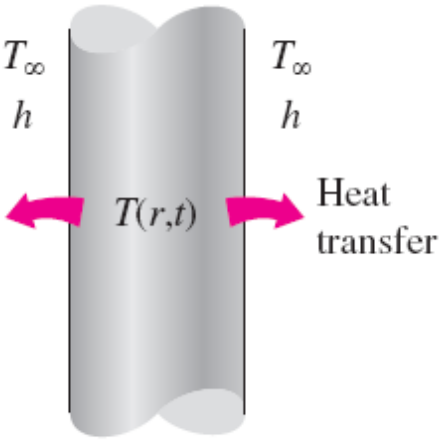


$$\dot{q}_{s,A} = \dot{q}_{s,B} \rightarrow -\frac{k_A(T_s - T_{A,i})}{\sqrt{\pi \alpha_A t}} = \frac{k_B(T_s - T_{B,i})}{\sqrt{\pi \alpha_B t}} \rightarrow \frac{T_{A,i} - T_s}{T_s - T_{B,i}} = \sqrt{\frac{(k\rho c_p)_B}{(k\rho c_p)_A}}$$

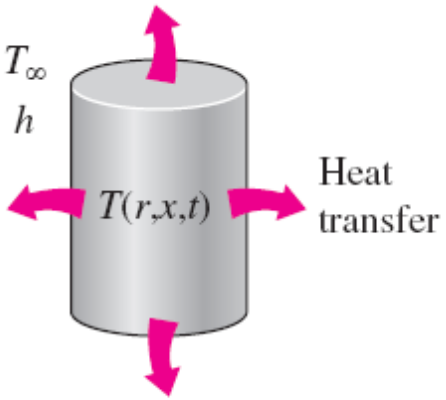
$$T_s = \frac{\sqrt{(k\rho c_p)_A}T_{A,i} + \sqrt{(k\rho c_p)_B}T_{B,i}}{\sqrt{(k\rho c_p)_A} + \sqrt{(k\rho c_p)_B}}$$

مقدمه
معیار تمایل
گذرا یک بعدی
بی بعد سازی
حل دقیق
حل تقریبی
نیمه بی نهایت
چند بعدی

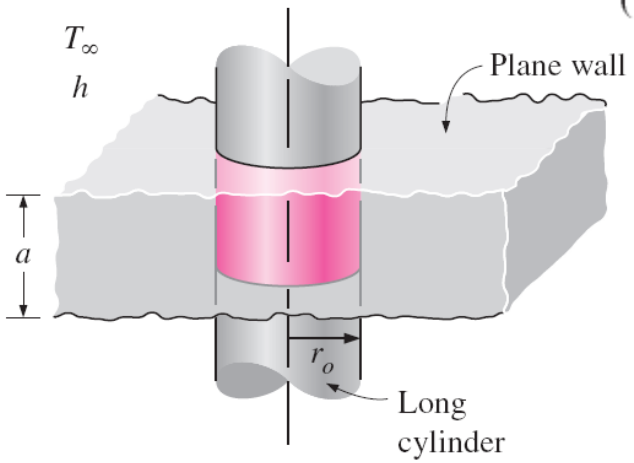
هدایت حرارتی گذرا در سیستم های چند بعدی



(a) Long cylinder



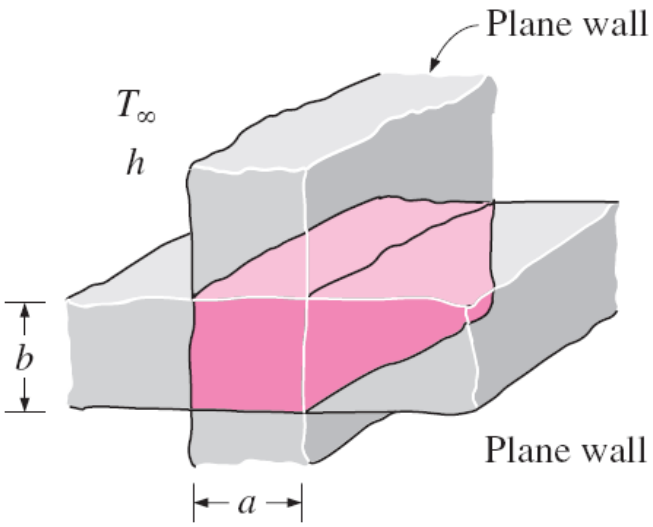
(b) Short cylinder (two-dimensional)



$$\left(\frac{T(r,x,t)-T_\infty}{T_i-T_\infty}\right)_{\text{short cylinder}} = \left(\frac{T(x,t)-T_\infty}{T_i-T_\infty}\right)_{\text{plane wall}} \left(\frac{T(r,t)-T_\infty}{T_i-T_\infty}\right)_{\text{infinite cylinder}}$$

مقدمه
معیار تمایل
گذرا یک بعدی
بی بعد سازی
حل دقیق
حل تقریبی
نیمه بی نهایت
چند بعدی

هدایت حرارتی گذرا در سیستم های چند بعدی



$$\theta_{\text{wall}}(x, t) = \left(\frac{T(x, t) - T_\infty}{T_i - T_\infty}\right)_{\substack{\text{plane}\\ \text{wall}}}$$

$$\theta_{\text{cyl}}(r, t) = \left(\frac{T(r, t) - T_\infty}{T_i - T_\infty}\right)_{\substack{\text{infinite}\\ \text{cylinder}}}$$

$$\theta_{\text{semi-inf}}(x, t) = \left(\frac{T(x, t) - T_\infty}{T_i - T_\infty}\right)_{\substack{\text{semi-infinite}\\ \text{solid}}}$$

$$\left(\frac{T(x, y, t) - T_\infty}{T_i - T_\infty}\right)_{\substack{\text{rectangular}\\ \text{bar}}} = \theta_{\text{wall}}(x, t)\theta_{\text{wall}}(y, t)$$

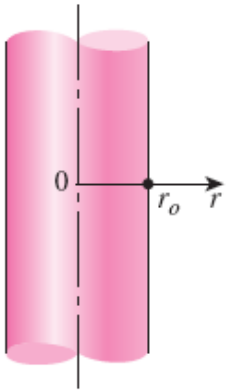
$$\left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)_{\text{total, 2D}} = \left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)_1 + \left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)_2\left[1 - \left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)_1\right]$$

$$\left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)_{\text{total, 3D}} = \left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)_1 + \left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)_2\left[1 - \left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)_1\right]$$

$$+ \left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)_3\left[1 - \left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)_1\right]\left[1 - \left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)_2\right]$$

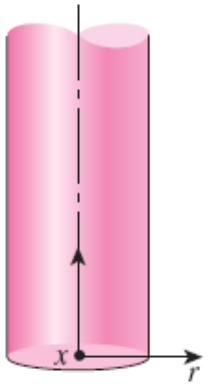
مقدمه
معیار تمایل
گذرا یک بعدی
بی بعد سازی
حل دقیق
حل تقریبی
نیمه بی نهایت
چند بعدی

هدایت حرارتی گذرا در سیستم های چند بعدی



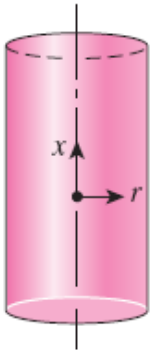
$\theta(r, t) = \theta_{cyl}(r, t)$

Infinite cylinder



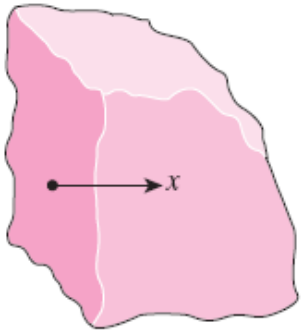
$\theta(x, r, t) = \theta_{cyl}(r, t)\ \theta_{semi\text{-}inf}(x, t)$

Semi-infinite cylinder



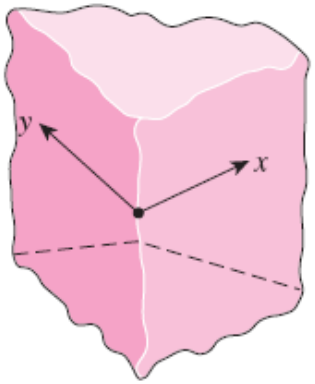
$\theta(x, r, t) = \theta_{cyl}(r, t)\ \theta_{wall}(x, t)$

Short cylinder



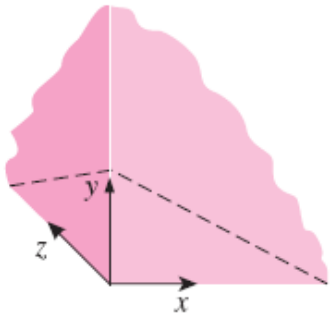
$\theta(x, t) = \theta_{semi\text{-}inf}(x, t)$

Semi-infinite medium



$\theta(x, y, t) = \theta_{semi\text{-}inf}(x, t)\ \theta_{semi\text{-}inf}(y, t)$

Quarter-infinite medium



$\theta(x, y, z, t) =$
$\theta_{semi\text{-}inf}(x, t)\ \theta_{semi\text{-}inf}(y, t)\ \theta_{semi\text{-}inf}(z, t)$

Corner region of a large medium

مقدمه

معیار تمایل

گذرا یک بعدی

بی بعد سازی

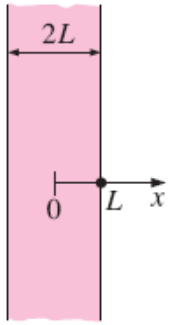
حل دقیق

حل تقریبی

نیمه بی نهایت

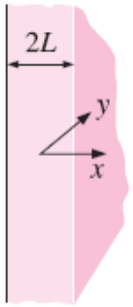
چند بعدی

هدایت حرارتی گذرا در سیستم های چند بعدی



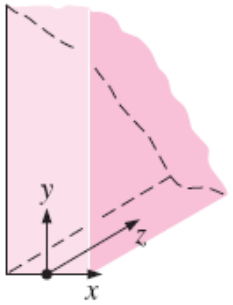
$\theta(x,t) = \theta_{\text{wall}}(x,t)$

Infinite plate (or plane wall)



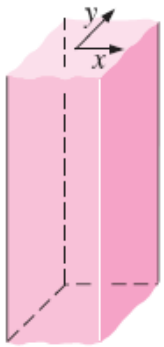
$\theta(x,y,t) = \theta_{\text{wall}}(x,t)\,\theta_{\text{semi-inf}}(y,t)$

Semi-infinite plate



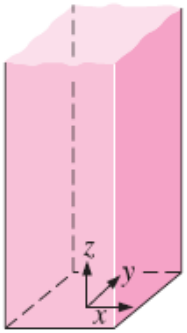
$\theta(x,y,z,t) =$
$\theta_{\text{wall}}(x,t)\,\theta_{\text{semi-inf}}(y,t)\,\theta_{\text{semi-inf}}(z,t)$

Quarter-infinite plate



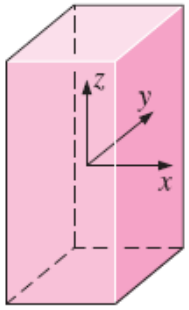
$\theta(x,y,t) = \theta_{\text{wall}}(x,t)\,\theta_{\text{wall}}(y,t)$

Infinite rectangular bar



$\theta(x,y,z,t) =$
$\theta_{\text{wall}}(x,t)\,\theta_{\text{wall}}(y,t)\,\theta_{\text{semi-inf}}(z,t)$

Semi-infinite rectangular bar



$\theta(x,y,z,t) =$
$\theta_{\text{wall}}(x,t)\,\theta_{\text{wall}}(y,t)\,\theta_{\text{wall}}(z,t)$

Rectangular parallelepiped

مقدمه

معیار تمایل

گذرا یک بعدی

بی بعد سازی

حل دقیق

حل تقریبی

نیمه بی نهایت

چند بعدی

چه زشت است

فروتنی هنگام تنگدستی

و درشتی هنگام بی نیازی

امیر مؤمنان، امام علی علیه السلام