

۹

به نام خدا

تعریف مشتق: مشتق تابع  $f$  در نقطه  $a$  به دو صورت زیر تعریف می شود

$$1) f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad 2) f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

می توان به جای  $h$  از  $x-a$  هم استفاده کرد

مثال: با استفاده از تعریف مشتق، مشتق توابع داده شده را در نقطه خواسته شده بدست آورید.

الف)  $f(x) = \sqrt[3]{2x^5} \quad (x_0 = 0)$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{2x^5}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{2x^5}}{\sqrt[3]{x^3}}$$

$$\Rightarrow f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \begin{matrix} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{0^+} = +\infty \\ \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{0^-} = -\infty \end{matrix} \Rightarrow f'(0) \text{ وجود ندارد}$$

ب)  $g(x) = x^2 + 3x - 1 \quad (x_0 = 2)$

$$g'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 + 3x - 1) - 9}{x - 2} \Rightarrow$$

$$g'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+5)}{x-2} = 2+5 = 7$$

2.)  $h(x) = \sin x \Rightarrow h'(x) = ?$

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} \Rightarrow$$

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos \Delta x + \cos x \sin \Delta x - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x (\cos \Delta x - 1)}{\Delta x} + \frac{\cos x \sin \Delta x}{\Delta x} \right)$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos x \left( \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \right) = \cos x$$

چند کاربرد مشتق

1) مشتق در هر نقطه‌ای از دامنه تابع برابر است با شیب خط مماس بر نمودار آن تابع در همان نقطه.

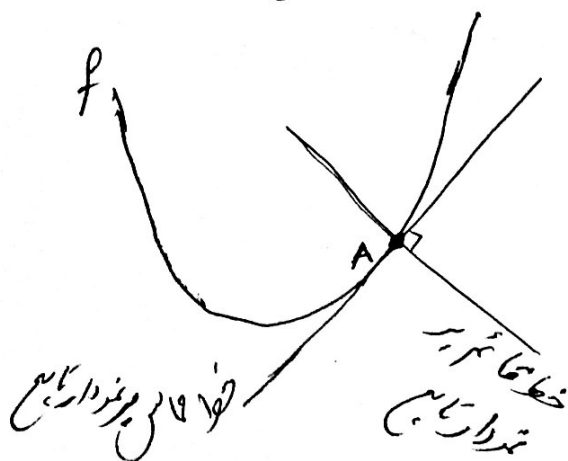
مثال: معادله خط مماس بر نمودار تابع  $y = x^2 - 3x$  را در نقطه‌ای به طول 2 بدست آورید.

حل:  $x = 2 \Rightarrow y = f(x) = 2^2 - 3(2) = 4 - 6 = -2$

پس نقطه  $A(2, -2)$  نقطه تماس خط مماس بر منحنی است

شیب خط مماس  $f'(x) = 2x - 3 \Rightarrow m = f'(2) = 2(2) - 3 = 1$

$y - y_A = m(x - x_A) \rightarrow y + 2 = 1(x - 2)$   
 $\Rightarrow y = x - 4$  معادله خط مماس



نکته: به خطی که در نقطه تماس خط مماس

بر منحنی عمودرسمی شود خط قائم بر منحنی گفته

می شود و  $m' = -\frac{1}{m}$

$m = \text{شیب خط مماس}$   
 $m' = \text{شیب خط قائم}$

۱۱

نکته: برای توابع نمایی و گسسته طبیعی داریم

$$\begin{cases} y = e^u \Rightarrow y' = u' e^u \\ y = \ln u \Rightarrow y' = \frac{u'}{u} \end{cases}$$

مثال: مشتق توابع زیر را بدست آورید.

الف)  $y = e^{\sin x} \xrightarrow{u = \sin x} y' = (\sin x)' e^{\sin x} = (\cos x) e^{\sin x}$

ب)  $y = \ln \sqrt{x} \xrightarrow{u = \sqrt{x}} \frac{(\sqrt{x})'}{\sqrt{x}} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}^2} = \frac{1}{2x}$

مثال: معادله خط مماس بر نمودار تابع  $f(x) = e^x + x + 1$  در نقطه ای به طول صفر در مختصات بنویسید.

$x = 0 \Rightarrow y = f(0) = e^0 + 0 + 1 = 1 + 1 = 2 \rightarrow A(0, 2)$   
نقطه تماس خط مماس

$f'(x) = e^x + 1 \rightarrow m = e^0 + 1 = 1 + 1 = 2 \Rightarrow m' = -\frac{1}{m}$   
شیب خط مماس

$y - y_A = m'(x - x_A) \Rightarrow y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 0) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 2$   
معادله خط مماس