طول نقاط عطف منحنی به معادله $y=x\left|x^{۲}-۴x\right|$ را بدست آورید.

حل:

$$f(x)=\begin{cases} x^{۳}-۴x^{۲} & x<۰, x>۴ \\ -x^{۳}+۴x^{۲} & ۰\le x\le ۴ \end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases} ۳x^{۲}-۸x & x<۰, x>۴ \\ -۳x^{۲}+۸x & ۰\le x<۴ \end{cases}$$

$$f''(x)=\begin{cases} ۶x-۸ & x<۰, x>۴ \\ -۶x+۸ & ۰<x<۴ \end{cases}$$

چون نمی توان در $x=۴$ بر تابع مماس رسم کرد چون تابع در این نقطه مشتق ناپذیر است پس نقطه عطف نمی باشد.

نقاط عطف: $\left\{۰,\frac{۴}{۳}\right\}$

مسائلی از ریاضیات ۱(فصل اول – اعداد و نمادها)

۱) برای چند مقدار عدد صحیح n کسر $\frac{۸n+۲}{n-۲}$ عددی صحیح می شود؟

پاسخ:

$$\frac{۸n+۲}{n-۲}=\frac{۸\left(n-۲\right)+۱۸}{n-۲}=\frac{۸\left(n-۲\right)}{n-۲}+\frac{۱۸}{n-۲}=۸+\frac{۱۸}{n-۲}$$

بنابراین لازم است $\frac{۱۸}{n-۲}$ عددی صحیح باشد و این درصورتی است که $n-۲$ مقسوم علیه های صحیح عدد۱۸ باشد که عبارتند از $\pm۱,\pm۲,\pm۳,\pm۶,\pm۹,\pm۱۸$ بنابراین به ازای ۱۲ مقدار صحیح n کسر $\frac{۸n+۲}{n-۲}$ عددی صحیح می شود.

۲) *اگر* $۳<a$ *ثابت کنید :* $۳<\frac{۵a+۶}{۷}<a$

(از این خاصیت استفاده کنید که هرگاه $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ آن گاه : $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$)

پاسخ:

می گیریم:

$$a=\frac{۵a}{۵},۳=\frac{۶}{۲}$$

$$۳<a\Rightarrow\frac{۶}{۲}<\frac{۵a}{a}\Rightarrow\frac{۶}{۲}<\frac{۵a+۶}{۲+۵}<\frac{۵a}{۵}$$

$$\Rightarrow۳<\frac{۵a+۶}{۲+۵}<a$$

حل مساله به کمک قاعده بیز

کیسه A شامل ۲ مهره ی سفید و ۴ مهره ی قرمز و کیسه B شامل یک مهره ی سفید و ۱ مهره ی قرمز است. یک مهره به تصادف از کیسه A انتخاب کرده و در کیسه ی B قرار می دهیم و بعد از کیسه B یک مهره به تصادف انتخاب می کنیم.

الف)احتمال اینکه مهره ی انتخاب شده از کیسه ی B سفید باشد، چقدر است؟

ب)احتمال اینکه مهره ی جابجا شده سفید باشد، چقدر است در صورتی که بدانیم مهره ی انتخاب شده از کیسه B سفید است؟

حل: فرض کنید E پیشامد" مهره انتخاب شده از کیسه B سفید است" و W پیشامد "مهره جابجا شده سفید است."می باشد.

الف) در این صورت یا مهره جابجا شده سفید است یا سفید نیست. در حالتی که سفید باشد احتمال آن برابر است و در حالت غیر سفید احتمالی برابر دارد پس مطابق قضیه ی احتمال کل داریم:

$$P(E)=P(E|W)P(W)+P(E|W)P(W)$$
$$=\frac{۲}{۳}\times\frac{۲}{۶}+\frac{۱}{۳}\times\frac{۴}{۶}=\frac{۴}{۹}$$

ب) در این حالت احتمال مورد نظر $P(W|E)$ می باشد که مطابق قاعده ی بیز داریم:

$$P(W|E)=\frac{P(E|W)P(W)}{P(E|W)P(W)+P(E|\overline{W})P(\overline{W})}$$

$$=\frac{\frac{۲}{۳}\times\frac{۲}{۶}}{\frac{۴}{۹}}=\frac{۱}{۲}$$

مساله

از گزاره های ذیل کدامیک درست است؟

الف)اگر $\lim_{x\to a} f(x)=0$ و تابع g کران دار باشد، آنگاه $\lim_{x\to a}(fg)(x)=0$

ب)اگر $\lim_{x\to a} f(x)=L$ و $L\geq 0$باشد آنگاه $\lim_{x\to a}\sqrt{f(x)}=\sqrt{L}$

ج)توابع f,g وجود دارند به طوریکه هر دو در $x=a$ حد دارند اما $f+g$ در $x=a$ حد ندارند.

د)اگر تابع f در $x=a$ دارای حد و تابع g در $x=a$ فاقد حد باشد آن گاه تابع $f+g$ در $x=a$ فاقد حد است.

ه)اگر تابع f در $x=a$ حد نداشته باشد و تابع g در این نقطه حدی غیر صفر ئاشته باشد آنگاه تابع fg در $x=a$ حد ندارد.

جواب:

الف)نادرست است. مثلا اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=\sin\sqrt{-x}$ آنگاه $\lim_{x\to 0} f(x)=0$ و تابع g کران دار است. اما در مورد $(fg)(x)=\sqrt{x}\times\sin\sqrt{-x}$ داریم: $D_{fg}=\{0\}$ و بنابراین تابع fg در $x=0$ شرایط بحث در مورد حد را ندارد.

ب)اگر $\lim_{x\to a} f(x)=L$ و $L>0$ آنگاه $\lim_{x\to a}\sqrt{f(x)}=\sqrt{L}$ است اگر $L=0$ باشد در این صورت باید $\sqrt{f(x)}$ حداقل در یک همسایگی راست یا چپ نقطه ی $x=a$ تعریف شده باشد تا به توان حکم داد که $\lim_{x\to a}\sqrt{f(x)}=\sqrt{L}$ مثلا $f(x)=x^4-x^2$ در $x=0$ حد دارد و $\lim_{x\to 0} f(x)=0$است تابع $y=\sqrt{f(x)}$ در همسایگی راست یا چپ نقطه ی $x=0$ تعریف نشده است لذا نمی توان صحبت از حد تابع y در $x=0$ نمود $\left(D_y=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)\cup\{0\}\right)$

ج)نادرست است زیرا اگر f,g هر دو در $x=a$ حد داشته باشد آنگاه $f+g$ در $x=a$ از لحاظ حد دو وضعیت را دارد پس شرایط بحث را ندارد یا حد دارد.

د) $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=[x]$ f در $x=0$ دارای حد است و g در $x=0$ فاقد حد است. اما $(f+g)(x)=\sqrt{x}+[x]$ در $x=0$ حد دارد

ه) $f(x)=\begin{cases}2 & x>0\\ -2 & x<0\end{cases}$ و $g(x)=\sqrt{x}+1$ تابع f در $x=0$ حد ندارد و $\lim_{x\to 0} g(x)=1\neq 0$ اما $(fg)(x)=2\left(\sqrt{x}+1\right), D_{fg}=(0,+\infty)$ در $x=0$ حد دارد.