شمارنده‌های یک عدد (مقسوم علیه)

عدد طبیعی b را شمارنده‌ی a گوییم هرگاه a بر b بخش‌پذیر باشد. (باقی مانده‌ی تقسیم a بر b مساوی صفر باشد.)

مثال:

۷ , ۱: شمارنده‌های ۷

۶ , ۳ , ۲ , ۱: شمارنده‌های ۶

۲۰ , ۱۰ , ۵ , ۴ , ۲ , ۱: شمارنده‌های ۲۰

۱,۲,۳,۴,۶,۱۲: شمارنده‌های ۱۲

عدد اول

عددی است طبیعی که فقط دو شمارنده (۱ و خودش) دارد.

مثال:

۳ , ۱: شمارنده‌های ۳

۲ , ۱: شمارنده‌های ۲

۲۳ , ۱: شمارنده‌های ۲۳

۱۱ , ۱: شمارنده‌های ۱۱

نکته هر عدد طبیعی که نتوان آن را به صورت ضرب دو عدد غیر از یک نوشت «عدد اول» می‌باشد.

۳۰ ← ۶×۵

۲۴ ← ۳×۸

۹ ← ۳×۳

۸ ← ۲×۴

بنابراین هیچ کدام از این عددها ، عدد اول نیستند.

تذکر حاصل ضرب دو عدد اول ، هیچ گاه عددی اول نیست. زیرا طبق نکته‌ی قبل می‌توان آن را به صورت ضرب دو عدد غیر از یک نوشت.

مثال:

۶۵ اول نیست ← ۶۵ = ۵ × ۱۳

۲۱ اول نیست ← ۲۱ = ۷ × ۳

تذکر در بین عددهای اول فقط «عدد ۲» زوج است و بقیه ی عددهای اول همگی فرد هستند.

۲, ۳, ۵, ۷, ۱۱, ۱۳, ۱۷, ۱۹, ...

مثال:

Scanned by CamScanner

شمارنده‌ی اول

در بین شمارنده‌های هر عدد، آن‌هایی که عدد اول هستند ، شمارنده‌ی اول آن عدد نامیده می‌شوند.

مثال:

۵ و ۲ شمارنده های اول ۱۰ هستند. → ۱,۲,۵,۱۰ : شمارنده های ۱۰

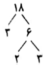
۳ و ۲ شمارنده های اول ۱۲ هستند. → ۱,۲,۳,۴,۶,۱۲ : شمارنده های ۱۲

۷ شمارنده ی اول ۴۹ است. → ۱,۷,۴۹ : شمارنده های ۴۹

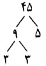
نمودار درختی

اگر هر عدد طبیعی را به صورت ضرب دو عدد طبیعی غیر از یک نوشته و این کار را تا حد ممکن انجام دهیم به شمارنده‌های اول آن عدد خواهیم رسید.

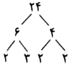
مثال:



۳ و۲شمارنده‌های اول ۱۸ هستند. → ۱۸ = ۲ × ۳ × ۳ →



۳ و ۵ شمارنده‌های اول ۴۵ هستند. → ۴۵ = ۳ × ۳ × ۵ →



۲ و۳شمارنده‌های اول ۲۴ هستند. → ۲۴ = ۲ × ۲ × ۲ × ۳ →

۲ و۳و۷شمارنده‌های اول ۴۲ هستند. → ۴۲ = ۲ × ۳ × ۷ →

نکته شمارنده‌های اول یعنی عددهای اولی که با ضرب و تکرار آن‌ها می‌توان یک عدد را به وجود آورد.

۳ شمارنده‌ی اول ۲۷ می‌باشد. → ۲۷ = ۳×۳×۳

۷ و ۵ و ۲ شمارنده‌های اول ۷۰ می‌باشند. → ۷۰ = ۲×۵×۷

۳ و ۵ شمارنده‌های اول ۷۵ می‌باشند. → ۷۵ = ۳×۵×۵

Scanned by CamScanner

درس سوم : بزرگ‌ترین شمارنده‌ی مشترک

بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک دو عدد (ب م م)

بزرگ‌ترین شمارنده‌ی مشترک بین دو عدد را بزرگ ترین مقسوم علیه مشترک آن‌ها یا به اختصار (ب م م) دو عدد می‌نامند.
بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک دو عدد a و b را به صورت (a,b) و یا به صورت $a \prod b$ نمایش می‌دهند.

روش اول (نوشتن شمارنده‌ها)

در این روش ابتدا همه‌ی شمارنده‌های دو عدد را نوشته، سپس از بین شمارنده‌های مشترک، بزرگ‌ترین آن را انتخاب می‌کنیم.

مثال: $(۱۲,۲۰) =$

پاسخ:

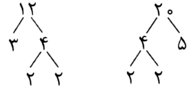
شمارنده های ۱۲ : ۱,۲,۳,۴,۶,۱۲
شمارنده های ۴۰ : ۱,۲,۴,۵,۱۰,۲۰
$\rightarrow$ شمارنده های مشترک : ۱,۲,۴ $\rightarrow$ ب م م = ۴

روش دوم (تجزیه به شمارنده‌های اول)

در این روش ابتدا دو عدد را به وسیله‌ی نمودار درختی به حاصل ضرب شمارنده‌های اول تبدیل می‌کنیم. سپس شمارنده‌های مشترک را انتخاب کرده و در هم ضرب می‌کنیم.

مثال: $(۱۲,۲۰) =$

۱۲ = ۲×۲×۳
↕ ↕
۲۰ = ۲×۲×۵
$\rightarrow$ ب م م = ۲×۲ = ۴



مثال: می‌خواهیم مستطیلی به طول ۱۸ و عرض ۱۲ سانتی متر را با کاشی‌های مربع شکل پر کنیم . ضلع این کاشی مربع شکل چه عددهایی می‌تواند باشد؟

بزرگ‌ترین ضلعی که می‌توان برای کاشی انتخاب کرد چه قدر است؟

پاسخ: ضلع کاشی باید شمارنده‌ی مشترک ۱۸ و ۱۲ باشد تا مستطیل را کامل بپوشاند. در نتیجه:

شمارنده های ۱۸ : ۱,۲,۳,۶,۹,۱۸
شمارنده های ۱۲ : ۱,۲,۳,۴,۶,۱۲
$\rightarrow$ ضلع های کاشی : ۱,۲,۳,۶ $\rightarrow$ بزرگ ترین ضلع مربع = ۶ سانتی‌متر

Scanned by CamScanner

نکته ب م م هر عدد با عدد یک، مساوی یک می‌باشد. (۱،۵۳)=۱ ، (۱۴ ، ۱) = ۱

نکته ب م م هر عدد با خودش، مساوی همان عدد می‌باشد. ۴۱ = (۴۱، ۴۱) ، ۸۳ = (۸۳، ۸۳)

نکته ب م م دو عدد اول ، همیشه عدد یک می‌باشد. ۱ = (۲۳ ، ۱۱) ، ۱ = (۷،۱۳)

نکته اگر دو عدد بر هم بخش‌پذیر باشند، ب م م آن‌ها عدد کوچک‌تر می‌باشد. ۵۰ = (۵۰ ، ۱۰۰) ، ۵ = (۲۰،۵)

نکته ب م م دو عدد متوالی (پشت سر هم) همیشه مساوی یک می‌باشد. ۱ = (۷۷،۷۸) ، ۱ = (۸،۹)

درس چهارم: کوچکترین مضرب مشترک

کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد (ک م م)

در بین مضرب‌های طبیعی دو عدد، اولین مضرب مشترک، کوچک‌ترین مضرب مشترک یا به اختصار (ک م م) دو عدد نامیده می‌شود.

کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد a و b را به صورت $[a, b]$ و یا به صورت $a \amalg b$ نمایش می‌دهند.

روش اول (نوشتن مضرب‌ها): در این روش ابتدا به ترتیب تعدادی از مضرب‌های طبیعی دو عدد را نوشته، سپس از بین مضرب‌های مشترک، کوچک‌ترین آن‌ها را انتخاب می‌کنیم.

[۸،۲۰] =

مثال:

مضرب‌های طبیعی ۸ : ۸،۱۶،۲۴،۳۲، $\boxed{۴۰}$ ،۴۸،۵۶،۶۴،۷۲، $\boxed{۸۰}$ ،...

مضرب‌های طبیعی ۲۰ : ۲۰، $\boxed{۴۰}$ ،۶۰، $\boxed{۸۰}$ ،۱۰۰،...

→ مضرب‌های مشترک = ۴۰،۸۰،... → ک م م = ۴۰

روش دوم (تجزیه به شمارنده‌های اول): در این روش ابتدا دو عدد را به وسیله‌ی نمودار درختی به حاصل ضرب شمارنده‌های اول تبدیل می‌کنیم. سپس در این دو عدد بیش‌ترین تعداد هر شمارنده را انتخاب کرده و در هم ضرب می‌کنیم. یعنی همه‌ی شمارنده‌های موجود را با بیش‌ترین تعداد در هم ضرب می‌کنیم.

[۱۲،۳۰] =

مثال:

۱۲ = ۲×۲×۳
۲۰ = ۲×۲×۵
→ ک م م = ۲×۲×۳×۵ = ۶۰

[۲۴،۲۰] =

۲۴ = ۲×۲×۲×۳
۲۰ = ۲×۲×۵
→ ک م م = ۲×۲×۲×۳×۵ = ۱۲۰

Scanned by CamScanner

مثال: حمید و مجید در یک پیست دو میدانی از یک نقطه شروع به دویدن می‌کنند. حمید هر ۳۵ دقیقه یک دور کامل و مجید هر ۲۱ دقیقه یک دور کامل می زند. پس از چند دقیقه هر دو دوباره در نقطه ی شروع به هم می‌رسند . در این صورت هر کدام چند دور دویده‌اند؟

پاسخ: اولین بار رسیدن دو عدد به هم همان ک م م آن ها می‌باشد. در نتیجه :

$$\left.\begin{array}{l}۳۵ = ۵ \times ۷ \\ ۲۱ = ۳ \times ۷\end{array}\right\} \rightarrow \text{ک م م} = ۳ \times ۵ \times ۷ = ۱۰۵ \rightarrow$$

بعد از ۱۰۵ دقیقه هر دو در نقطه ی شروع به هم می‌رسند.

$$\left\{\begin{array}{l}۱۰۵ \div ۳۵ = ۳ \text{ حمید ۳ دور می‌زند} \\ ۱۰۵ \div ۲۱ = ۵ \text{ مجید ۵ دور می‌زند}\end{array}\right.$$

مخرج مشترک دو کسر

یکی از مهم‌ترین کاربردهای ک م م، محاسبه ی مخرج مشترک دو کسر می‌باشد. یعنی کوچک‌ترین عددی که بر هر دو مخرج، بخش‌پذیر است.

مثال:

الف) $\frac{۳}{۲۰} + \frac{۷}{۲۵} = \frac{۱۵ + ۲۸}{۱۰۰} = \frac{۴۳}{۱۰۰}$

$$\left.\begin{array}{l}۲۰ = ۲ \times ۲ \times ۵ \\ ۲۵ = ۵ \times ۵\end{array}\right\} \Rightarrow \text{ک م م} = ۲ \times ۲ \times ۵ \times ۵ = ۱۰۰$$

ب) $\frac{۱۳}{۱۶} - \frac{۱۱}{۱۲} = \frac{۳۹ - ۴۴}{۴۸} = \frac{-۵}{۴۸}$

$$\left.\begin{array}{l}۱۶ = ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \\ ۱۲ = ۲ \times ۲ \times ۳\end{array}\right\} \Rightarrow \text{ک م م} = ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۳ = ۴۸$$

نکته ک م م هر عدد با عدد یک، مساوی خود آن عدد می‌باشد. $۱۹ = [۱,۱۹]$ ، $[۲۱,۱] = ۲۱$

نکته ک م م هر عدد با خودش، مساوی خود همان عدد می‌باشد $۱۳ = [۱۳,۱۳]$ ، $[۳۴,۳۴] = ۳۴$

نکته ک م م دو عدد اول ، همیشه حاصل ضرب آن‌ها می باشد. $۵۵ = ۵ \times ۱۱ = [۱۱,۵]$ ، $[۳,۷] = ۳ \times ۷ = ۲۱$

نکته اگر دو عدد بر هم بخش پذیر باشند ، ک م م آن ها عدد بزرگ‌تر می‌باشد. $۹۱ = [۹۱,۱۳]$ ، $[۸,۲۴] = ۲۴$

نکته ب م م دو عدد، شمارنده‌ی ک م م آن دو عدد می‌باشد.

$$\left.\begin{array}{l}(۱۵,۹) = ۳ \\ [۱۵,۹] = ۴۵\end{array}\right\} \rightarrow \text{۳ شمارنده‌ی ۴۵ می‌باشد}$$

نکته حاصل ضرب دو عدد، همیشه با حاصل ضرب ب م م آن‌ها در ک م م آن‌ها مساوی است.

$$\left.\begin{array}{l}(۲۰,۸) = ۴ \\ [۲۰,۸] = ۴۰\end{array}\right\} \rightarrow ۲۰ \times ۸ = ۴ \times ۴۰ \rightarrow ۱۶۰ = ۱۶۰$$

Scanned by CamScanner