

# بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ

## سی امین المپیاد ریاضی ایران مرحله اول – پنجم اسفند ماه نود

### ویرایش و پاسخ :

### سیامک احمدپور – مهدی بهزادی

### محمد شریفی

- تذکرات آزمون: ضمن آرزوی موفقیت برای شما داوطلب گرامی، خواهشمند است قبل از آزمون به موارد زیر توجه کنید:
- این آزمون شامل ۱۰ سؤال کوتاه پاسخ و ۱۵ سؤال پنج گزینه‌ای است که باید در مدت ۱۸۰ دقیقه پاسخ داده شوند.
- جواب درست هر سؤال کوتاه پاسخ ۴ نمره‌ی مثبت دارد. جواب اشتباه به سؤالات این بخش نمره‌ی منفی ندارد.
- جواب درست هر سؤال پنج گزینه‌ای ۴ نمره‌ی مثبت دارد و به ازای هر جواب اشتباه، ۱ نمره‌ی منفی تعلق خواهد گرفت.
- همراه داشتن ماشین حساب و تلفن همراه در این آزمون مجاز نیست. حتی اگر از آن استفاده نکنید، متخلف محسوب می شوید.
- آزمون مرحله‌ی دوم برای دانش آموزان سال اول دبیرستان تنها جنبه‌ی تشویق و آمادگی برای سال آینده دارد و شرکت کنندگان در دوره‌ی تابستانی از بین دانش آموزان دوم و سوم دبیرستان انتخاب می شوند.

**توضیح:** متن تمام سؤالات حروف چینی مجدد، ویرایش و بازبینی شده است، اما امکان اشتباه وجود دارد و لذا از تمام اساتید محترم و دانش آموزان عزیز درخواست می شود اشتباهات این متن را از طریق قسمت «تماس با ما» در سایت [www.IRYSC.com](http://www.IRYSC.com) یا ایمیل [info@iryse.com](mailto:info@iryse.com) اعلام فرمایند تا در اسرع وقت تصحیح شود.

## بخش اول: پرسش های کوتاه جوابی

دانش آموز عزیز، در این بخش شما باید به ۱۰ سؤال پاسخ دهید. جواب این سؤالات یک عدد حداکثر پنج رقمی است و شما باید ارقام آن را جداگانه در پاسخ نامه بنویسید. به عنوان مثال اگر پاسخ سؤالی ۶۹۵۰ بود، شما باید در مقابل شماره‌ی سؤال در پاسخ نامه چنین چیزی بنویسید:

۰	۵	۹	۶
---	---	---	---

خوانا بنویسید، چون پاسخ شما توسط ماشین خوانده خواهد شد. البته لازم نیست کاملاً شبیه نمونه‌ی بالا بنویسید؛ حتی نوشتن رقم ۶ به شکل ۶ هم ایرادی ندارد ولی به هیچ وجه از ارقام انگلیسی استفاده نکنید. پاسخ درست به هر سؤال در این قسمت ۴ نمره‌ی مثبت دارد. در مورد این ۱۰ سؤال پاسخ نادرست نمره‌ی منفی ندارد.

(۱) **IRYSC.COM** فرض کنید  $a$ ،  $b$  و  $c$  اعدادی طبیعی باشند که  $ac = 2012$ ، بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک  $a$  و  $b$  برابر ۱ و کوچک‌ترین مضرب مشترک  $b$  و  $c$  برابر ۱۳۹۰ است. مقدار  $a + b + c$  چند است؟

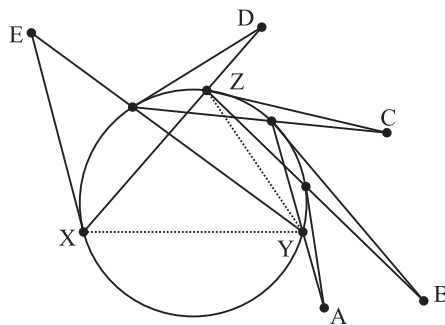
(۲) **IRYSC.COM** اخیراً سه شهر نمکستان، سماقستان و فلفلستان که از توابع شکرستان هستند از طریق خط راه‌آهن مستقیماً به شکرستان متصل شده‌اند. جهان‌گردی سفر خود را از نمکستان شروع کرده و ۱۲ بلیط قطار دارد و می‌خواهد از همه‌ی بلیط‌های خود استفاده کند. اگر او بخواهد دقیقاً یک بار به سماقستان وارد شود، به چند طریق می‌تواند سفر خود را انجام دهد؟ (توجه کنید که بین نمکستان، سماقستان و فلفلستان مسیر مستقیم وجود ندارد.)

(۳) **IRYSC.COM** مجموع اعداد حقیقی نامنفی  $a$ ،  $b$  و  $c$  برابر ۳۰ است. بیش‌ترین مقدار ممکن  $3ab + 4bc$  چه قدر است؟

(۴) **IRYSC.COM** به چند حالت می‌توان در عبارت  $7 \pm \dots \pm 3 \pm 2 \pm 1$  مثبت‌ها و منفی‌ها را تعیین کرد که حاصل مثبت باشد؟

(۵) **IRYSC.COM** در دو طرف خیابان اصلی شهر هجده چراغ برق در دو ردیف نه تایی مقابل هم نصب شده‌اند. فاصله‌ی بین دو چراغ متوالی پنجاه متر و عرض خیابان ده متر است. بعضی از چراغ‌ها خاموش شده‌اند اما در فاصله‌ی کم‌تر از شصت متر از هر چراغ خاموش، حداکثر سه چراغ دیگر وجود دارد. تعداد چراغ‌های خاموش حداکثر چند تا است؟

(۶) **IRYSC.COM** شش نقطه روی یک دایره قرار دارند و با رسم برخی خطوط مماس و خطوط داخل آن‌ها، شکل زیر حاصل شده است. اگر زوایای  $\angle A$ ،  $\angle B$ ،  $\angle C$ ،  $\angle D$  و  $\angle E$  به ترتیب برابر با ۴، ۷، ۱۰، ۱۳ و ۱۶ درجه باشند، اندازه‌ی زاویه‌ی  $\angle XYZ$  را برحسب درجه بنویسید. (اگر پاسخ عدد صحیح نیست، جزء صحیح آن را بنویسید.)



(۷) **IRYSC.COM** فرض کنید  $a$  و  $b$  اعدادی طبیعی باشند که تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت  $a$ ،  $b$  و  $ab$  به ترتیب برابر با ۳، ۴ و ۸ باشد. عدد  $b^2$  چند مقسوم‌علیه مثبت دارد؟

(۸) **IRYSC.COM** به چند طریق می توان ۴ مهره در یک جدول  $4 \times 4$  قرار داد که در هر سطر و در هر ستون دست کم یک مهره وجود داشته باشد؟

(۹) **IRYSC.COM** در مثلث  $\triangle ABC$  داریم  $\angle BAC = 60^\circ$ ،  $AB = 7\sqrt{3}$  و  $AC = 14\sqrt{3}$ . نقطه‌ی متغیر  $X$  را روی پاره‌خط  $BC$  در نظر می گیریم. از نقطه‌ی  $X$  دو خط به موازات  $AB$  و  $AC$  رسم می کنیم تا به ترتیب  $AC$  و  $AB$  را در نقاط  $Y$  و  $Z$  قطع کنند. طول پاره‌خط  $BX$  چه قدر باشد تا پاره‌خط  $YZ$  کم‌ترین طول ممکن را داشته باشد؟

(۱۰) **IRYSC.COM** چند جمله‌ای  $P(x)$  برابر است با مجموع  $x^n$  هایی که  $1 \leq n \leq 120$  و  $n$  بر دست کم یکی از اعداد ۲ یا ۳ بخش پذیر باشد. این چند جمله‌ای چند ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد؟

## بخش دوم: پرسش های پنج گزینه ای

دانش آموز عزیز، در این بخش شما باید به ۱۵ سؤال پنج گزینه ای پاسخ دهید. در این قسمت پاسخ درست به هر سؤال ۴ نمره ای مثبت و پاسخ نادرست ۱ نمره ای منفی دارد.

(۱) **IRYSSC.COM** یک جسم به شکل مکعب مستطیل با ارتفاع ۳ و قاعده  $۶ \times ۴$  روی زمین قرار دارد. نقطه ای  $A$  روی ضلعی از قاعده که طول آن ۶ است قرار دارد. جسم را حول ضلع مقابل آن روی زمین می غلطانیم و این کار را در همان جهت آن قدر ادامه می دهیم تا جسم یک دور کامل بچرخد. نقطه ای  $A$  چه مسافتی را در فضای طی کرده است؟

(الف)  $۳\pi$  (ب)  $۴\pi$  (ج)  $۶\pi$  (د)  $۸\pi$  (ه)  $۱۲\pi$

(۲) **IRYSSC.COM** سه مجموعه ای  $A$ ،  $B$  و  $C$  را در نظر بگیرید. کدام یک از گزینه ها، برابر مجموعه ای اعضایی است که دست کم عضو دو تا از این سه مجموعه است؟

(الف)  $(A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C)$   
 (ب)  $A \cup B \cup C \cup (A \cap B \cap C)$   
 (ج)  $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C)$   
 (د)  $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (A \cup C)$   
 (ه) گزینه های «ج» و «د» هر دو صحیح هستند.

(۳) **IRYSSC.COM** به چند روش می توان مجموعه ای  $\{1, 2, \dots, 30\}$  را دو قسمت کرد که حاصل ضرب اعضای آنها با یک دیگر برابر باشد؟

(الف) این کار ممکن نیست.  
 (ب) بین ۱ و ۱۰ روش  
 (ج) بین ۱۱ و ۱۰۰ روش  
 (د) بین ۱۰۱ و ۱۰۰۰ روش  
 (ه) بیش از ۱۰۰۰ روش

(۴) **IRYSSC.COM** مثلث قائم الزاویه ای متساوی الساقین  $ABC$  به زاویه رأس  $A$  و طول ساق ۱۰ مفروض است. نقطه ای دلخواه  $D$  در صفحه مفروض است به طوری که، نقطه ای  $A$  داخل مثلث  $BCD$  قرار می گیرد. نیم سازه های داخلی زوایای  $\angle CAD$  و  $\angle BAD$  را رسم می کنیم تا اضلاع  $BD$  و  $CD$  را به ترتیب در نقاط  $E$  و  $F$  قطع کنند. اگر مرکز ثقل مثلث  $BCD$  واقع بر پاره خط  $EF$  باشد، طول پاره خط  $AD$  چه قدر است؟

(الف) ۱۰ (ب) ۱۵ (ج) ۲۰ (د) ۳۰ (ه) بستگی به مکان  $D$  دارد.

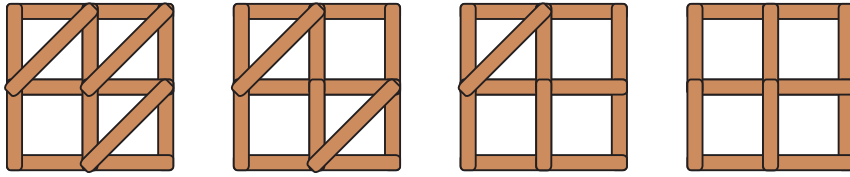
(۵) **IRYSSC.COM** چند جمله ای  $x^4 - x^2 - 2x - 1$  را در نظر بگیرید. مجموعه ای  $x$  هایی که به ازای آنها این چند جمله ای نامنفی است، چه شکلی دارد؟

(الف) یک پاره خط  
 (ب) دو پاره خط  
 (ج) یک پاره خط و یک نیم خط  
 (د) یک پاره خط و دو نیم خط  
 (ه) دو نیم خط

(۶) **IRYSSC.COM** به چند طریق می توان دو عدد طبیعی  $a$  و  $b$  را از بین اعداد ۱ تا ۱۰ انتخاب کرد که کسر  $\frac{a+b}{a-b}$  عددی طبیعی باشد؟

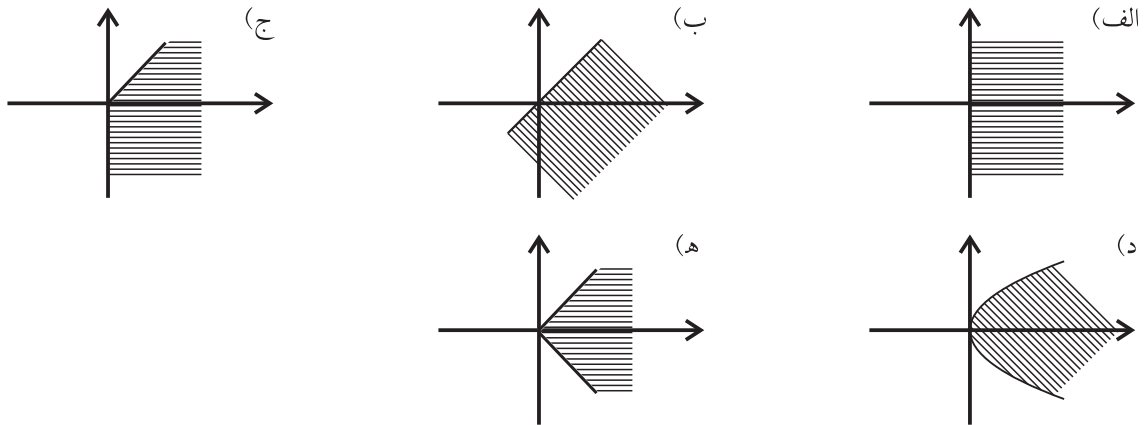
(الف) ۱۹ (ب) ۲۴ (ج) ۲۸ (د) ۲۹ (ه) ۳۴

(۷) IRYSSC.COM فرض کنید با لولا کردن تعدادی قطعه‌ی چوبی به طول‌های یک متر و  $\sqrt{2}$  متر چهار شکل زیر را ساخته‌ایم به طوری که قطعات می‌توانند آزادانه در صفحه، دور لولاها بچرخند. چند تا از این شکل‌ها می‌توانند با حرکت قطعه‌ی چوب‌ها تغییر شکل دهند؟



الف) هیچ کدام      ب) ۱      ج) ۲      د) ۳      ه) ۴

(۸) IRYSSC.COM مجموعه‌ی نقاطی از صفحه که دارای نمایشی به شکل  $(x^2 + y^2, xy)$  هستند، که  $x$  و  $y$  اعدادی حقیقی هستند، کدام گزینه است؟ (شکل‌ها تقریبی هستند.)



(۹) IRYSSC.COM یک وزغ و یک ملخ در فاصله‌ی ۲ متری یک‌دیگر قرار دارند. وزغ در هر ثانیه ۲۵ یا ۵۰ سانتی‌متر به سمت ملخ، روی زمین، حرکت می‌کند و ملخ نیز در هر ثانیه ۲۵ یا ۵۰ سانتی‌متر به سمت وزغ می‌پرد. در صورتی که این دو روی زمین به هم برسند، وزغ ملخ را می‌خورد و می‌ایستد. به چند روش ممکن است ملخ خورده شود؟

الف) ۸      ب) ۱۷      ج) ۱۸      د) ۲۴      ه) ۳۲

(۱۰) IRYSSC.COM فرض کنید چهار خط در فضا داده شده‌اند که دو تا از آن‌ها متقاطع‌اند و به جز آن دو، نه هیچ دو خطی متقاطع هستند و نه موازی. حداکثر چند خط در فضا وجود دارد که هر چهار تای آن‌ها را قطع کند؟

الف) ۱

ب) ۲

ج) ۳

د) بی‌نهایت

ه) هیچ خطی نمی‌تواند هر چهار تا را قطع کند.

(۱۱) IRYSSC.COM بزرگ‌ترین عدد حقیقی  $a$  که برای دو عدد حقیقی  $x$  و  $y$  که  $xy^2 + 4x^2y + 5 = 0$  و  $x > 0$ ، داشته باشیم  $ax < y$  کدام است؟

الف)  $\sqrt{80}$

ب) ۴

ج) ۰

د) -۴

ه)  $-\sqrt{80}$

(۱۲) **IRYSC.COM** به چند طریق می توان سه عدد طبیعی  $x$ ،  $y$  و  $z$  را انتخاب کرد که  $x + y + 2z = xyz$ ؟

الف) ۷ (ب) ۴ (ج) ۲ (د) ۱ (ه) ممکن نیست.

(۱۳) **IRYSC.COM** رستوران «مرغ تخم طلا» هر روز تنها یکی از غذاهای نیمرو، املت و تخم مرغ آب پز را ارائه می کند! مدیر رستوران می خواهد برنامه‌ی هفتگی را طوری تنظیم کند که غذای هیچ دو روز متوالی یکی نباشد. این کار به چند روش مختلف ممکن است؟ (توجه کنید که روز بعد از جمعه، شنبه است!)

الف) ۷۸ (ب) ۸۴ (ج) ۱۲۶ (د) ۱۶۸ (ه) ۱۹۲

(۱۴) **IRYSC.COM** چند زوج مرتب  $(x, y)$  از اعداد حقیقی، در دستگاه معادلات زیر صدق می کند؟

$$\begin{cases} x^2 + y = xy^2 \\ y^2 + x = yx^2 \end{cases}$$

الف) ۱ (ب) ۲ (ج) ۳ (د) ۴ (ه) ۵

(۱۵) **IRYSC.COM** فرض کنید چهارضلعی محدب  $ABCD$  محیطی نیست؛ یعنی دایره‌ای وجود ندارد که بر هر چهار ضلع آن مماس باشد. دایره‌هایی را در نظر بگیرید که بر سه ضلع این چهارضلعی مماس هستند. چند تا از این دایره‌ها کاملاً داخل چهارضلعی قرار می گیرند؟

الف) بسته به چهارضلعی، گاهی دو تا، گاهی سه تا و گاهی چهار تا

ب) گاهی دو تا و گاهی سه تا

ج) گاهی یکی و گاهی دو تا

د) همواره دو تا

ه) همواره یکی

# کلید سی امین المپیاد ریاضی ایران

## مرحله اول – پنجم اسفند نود

### کوتاه پاسخ

<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	۷	۵	۶	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	۱
<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	۹	۷	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	۲
<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	۲	۴	۸	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	۳
<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	۶	۹	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	۴
<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	۱	۱۰	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	۵

### پنج گزینه ای

۱۱	الف) <input type="radio"/>	ب) <input type="radio"/>	ج) <input type="radio"/>	د) <input type="radio"/>	ه) <input type="radio"/>	۶	الف) <input type="radio"/>	ب) <input type="radio"/>	ج) <input type="radio"/>	د) <input type="radio"/>	ه) <input type="radio"/>	۱	الف) <input type="radio"/>	ب) <input type="radio"/>	ج) <input type="radio"/>	د) <input type="radio"/>	ه) <input type="radio"/>
۱۲	الف) <input type="radio"/>	ب) <input type="radio"/>	ج) <input type="radio"/>	د) <input type="radio"/>	ه) <input type="radio"/>	۷	الف) <input type="radio"/>	ب) <input type="radio"/>	ج) <input type="radio"/>	د) <input type="radio"/>	ه) <input type="radio"/>	۲	الف) <input type="radio"/>	ب) <input type="radio"/>	ج) <input type="radio"/>	د) <input type="radio"/>	ه) <input type="radio"/>
۱۳	الف) <input type="radio"/>	ب) <input type="radio"/>	ج) <input type="radio"/>	د) <input type="radio"/>	ه) <input type="radio"/>	۸	الف) <input type="radio"/>	ب) <input type="radio"/>	ج) <input type="radio"/>	د) <input type="radio"/>	ه) <input type="radio"/>	۳	الف) <input type="radio"/>	ب) <input type="radio"/>	ج) <input type="radio"/>	د) <input type="radio"/>	ه) <input type="radio"/>
۱۴	الف) <input type="radio"/>	ب) <input type="radio"/>	ج) <input type="radio"/>	د) <input type="radio"/>	ه) <input type="radio"/>	۹	الف) <input type="radio"/>	ب) <input type="radio"/>	ج) <input type="radio"/>	د) <input type="radio"/>	ه) <input type="radio"/>	۴	الف) <input type="radio"/>	ب) <input type="radio"/>	ج) <input type="radio"/>	د) <input type="radio"/>	ه) <input type="radio"/>
۱۵	الف) <input type="radio"/>	ب) <input type="radio"/>	ج) <input type="radio"/>	د) <input type="radio"/>	ه) <input type="radio"/>	۱۰	الف) <input type="radio"/>	ب) <input type="radio"/>	ج) <input type="radio"/>	د) <input type="radio"/>	ه) <input type="radio"/>	۵	الف) <input type="radio"/>	ب) <input type="radio"/>	ج) <input type="radio"/>	د) <input type="radio"/>	ه) <input type="radio"/>