به‌نام خدا

آزمون نهایی ریاضی عمومی ۱

وقت: ۳ ساعت

تنها به پاسخ‌هایی نمره کامل تعلق می‌گیرد که دلایل و توضیحات بطور کامل ذکر شده باشد.

سوال اول. (۵ نمره)

اگر وارون تابع f توسط ضابطه $\frac{x-1}{x+1}$ داده شده باشد و واون تابع g توسط ضابطه $\frac{2x-1}{x-1}$ داده شده باشد، دامنه و برد تابعهای f و g را مشخص کنید و سپس وارون تابع $f \circ g$ که از ترکیب توابع f و g حاصل شده است را به‌دست آورید.

سوال دوم. (۱۰ نمره)

مطلوب است محاسبه دو حد زیر

.۱

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{t^3+4}-2}{t^3}$$

.۲

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)-x}{x^3}$$

سوال سوم. (۵ نمره)

مطلوب است محاسبه y'' در تابع ضمنی $xy+e^y=e$ وقتی $x=0$ است.

سوال چهارم. (۱۰ نمره)

به داخل مخزن آبی به شکل یک مخروط وارونه با مقطع دایره‌ای به شعاع ۳ متر و ارتفاع ۶ متر بطور پیوسته آب با نرخ ۴ مترمکعب در دقیقه پمپ می‌شود. وقتی ارتفاع آب ۵ متر است نرخ تغییر ارتفاع آب بر حسب متربر دقیقه چقدر است؟

Scanned with CamScanner

سوال پنجم. (۱۶ نمره)

مطلوب است محاسبه انتگرال‌های نامعین زیر

.۱

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+x^3}dx$$

.۲

$$\int \arctan(x)dx$$

.۳

$$\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx$$

.۴

$$\int \frac{x^3+2x}{x^4+4x^2+3}dx$$

سوال ششم. (۹ نمره)

مقدار انتگرال ناسره زیر را محاسبه کنید

$$\int_0^1 (\ln x)^2 dx.$$

سوال هفتم. (۱۵ نمره)

در مورد همگرایی و یا واگرایی هر کدام از سری‌های زیر با ذکر دلیل تصمیم بگیرید.

.۱

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+2n+5}$$

.۲

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2+3n-1}{\sqrt{n^4+2}}$$

.۳

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\ln n}$$

Scanned with CamScanner

.۴

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$$

.۵

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-4}{5n+1}\right)^n.$$

سوال هشتم. (۱۰ نمره)

مطلوب‌است محاسبه شعاع همگرایی و دامنه همگرایی سری توانی زیر

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{\sqrt{2n-1}} (x-5)^n.$$

سوال نهم. (۵ نمره)

با استفاده از مشتق گیری از سری هندسی $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ مقدار دقیق سری زیر را بدست آورید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}.$$

سوال دهم. (۱۵ نمره)

سری مک‌لوران تابع $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{3}}$ راپیدا کنید. شعاع همگرایی آنرا محاسبه کنید. با تخمین خطا با استفاده از نامساوی تیلور نشان دهید داخل شعاع همگرایی این سری با $f(x)$ برابر است.

موفق باشید.

Scanned with CamScanner

سوال یک – می‌دانیم دامنه و برد f برابر برد و دامنه f^{-1} است پس

$R_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$R_g = \mathbb{R} - \{1\}$

$$f^{-1}(x) = y = \frac{x-1}{x+1} \Rightarrow yx + y = x - 1 \qquad x(1-y) = y+1$$

$$f(x) = \frac{x+1}{1-x}$$

$D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

$$g^{-1}(x) = y = \frac{2x-1}{x-1} \Rightarrow yx - y = 2x - 1 \qquad x(2-y) = 1-y$$

$$g(x) = \frac{1-x}{2-x}$$

$D_g = \mathbb{R} - \{2\}$

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1} = \frac{2\left(\frac{x-1}{x+1}\right) - 1}{\frac{x-1}{x+1} - 1} = \frac{\frac{2x-2-x-1}{x+1}}{\frac{-2}{x+1}} = \frac{x-3}{-2}$$

سوال ۲ – هر قسمت ۵ نمره

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^3+4} - 2}{t^3} \times \frac{\sqrt{t^3+4}+2}{\sqrt{t^3+4}+2} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{\sqrt{t^3+4}+2} = \infty$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - x}{x^3} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{هوپیتال}} \lim_{x \to 0} \frac{1 + \tan^2 x - 1}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{3x^2} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = 1/3$$

سوال ۳ –

$$x = 0 \Rightarrow 0 \times y(0) + e^{y(0)} = e \Rightarrow y(0) = 1$$

از معادله نسبت به x مشتق می‌گیریم.

$$y + xy' + y'e^{y} = 0 \xrightarrow{x=0} 1 + y'(1)\, e^{1} = 0$$

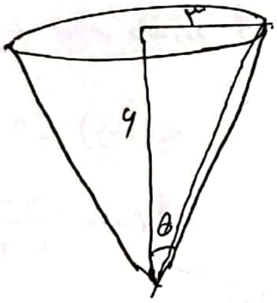
$$y'(1) = -e^{-1}$$

مشتق نسبت به x

$$2y' + xy'' + y''e^{y} + (y')^2 e^{y} = 0 \xrightarrow{x=0} -2e^{-1} + 0 + y''(0)\, e + e^{-2}e^{1} = 0$$

$$y''(0) = 1$$

سوال ٤ -



$$\tan\theta = \frac{3}{6}$$

چون زاویه مخروط عوض نمی‌شود در هر لحظه داریم

$$\frac{r(t)}{h(t)} = \frac{1}{2}$$

$$r(t) = \frac{1}{2} h(t)$$

$$V(t) = \frac{h(t)\,\pi\, r^2(t)}{3} \Longrightarrow V(t) = \frac{\pi}{12} h^3(t)$$

مشتق نسبت به زمان

$$\dot V(t) = \frac{\pi}{4} h^2(t)\, \dot h(t) \quad \xrightarrow{h(t)=5} \quad \dot h(t) = \frac{16}{25\pi}$$

$$\dot V(t) = 4$$

سوال ۵) هر قسمت ٤ نمره

① $$\int \frac{\sqrt{x}}{1+x^3}\,dx \qquad x^{3/2} = u$$

$$\frac{3}{2} x^{1/2}\,dx = du \rightarrow x^{1/2}\,dx = \frac{2}{3}\,du$$

$$= \int \frac{2}{3} \frac{du}{1+u^2} = \frac{2}{3} \operatorname{arctg} u = \frac{2}{3} \operatorname{arctg}\left(x^{3/2}\right)$$

② $$= \int \underbrace{\operatorname{arctg}(x)}_{u} \cdot \underbrace{1}_{v'} = x \operatorname{arctg}(x) - \underbrace{\int \frac{x}{1+x^2}}_{-\frac{1}{2} \operatorname{Ln}(1+x^2)}$$

③ $$\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\,dx \xrightarrow[dx = 2\cos t\,dt]{x = 2\sin t} \int \frac{2\cos t \cdot 2\cos t}{4\sin^2 t}\,dt$$

$$\int \cot^2 t + 1 - 1\,dt = -\cot t - t \xrightarrow{t = \sin^{-1}(x/2)} -\cot\left(\sin^{-1} x/2\right) - \sin^{-1}(x/2)$$

④ $$\int \frac{x^3+2x}{x^4+4x^2+3} \times \frac{4}{4}\,dx = \frac{1}{4} \operatorname{Ln}\left(x^4+4x^2+3\right)$$

CamScanner

سوال ۶) انتگرال فوق در نقطه $x=0$ ناسره دارد . طبق ترتیب داریم

$$\int_0^1 (\ln x)^2 dx = \lim_{c\to 0^+} \int_c^1 (\ln x)^2 dx = \lim_{\substack{c\to 0^+\\ \text{جزء به جزء}}} \left(x(\ln x)^2 \Big|_c^1 - \underbrace{\int 2x\cdot\frac{1}{x}\cdot \ln x\, dx}_{-2\int \ln x\, dx}\right)$$

$$= \lim_{c\to 0^+} \left(0 - \frac{(\ln c)^2}{\frac{1}{c}} - 2x\ln x\Big|_c^1 + 2x\Big|_c^1 \right)$$

جملات اول و دوم هوپیتال

$$= \lim_{c\to 0^+} \frac{2\ln c\cdot \frac{1}{c}}{\frac{1}{c^2}} + 2c\ln c + 2 - 2c$$

$$= \underbrace{\lim_{c\to 0} 4\frac{\ln c}{\frac{1}{c}}}_{\text{هوپیتال}} + 2 = 0 + 2$$

انتگرال ناسره برابر ۲ است

سوال ۷) هر قسمت ۳ نمره

① $\sum \frac{1}{n^3+2n+5} =$ همگرا

زیرا سری مثبت

$$\frac{1}{n^3+2n+5} \le \underbrace{\frac{1}{n^3}}_{\text{همگرا به خاطر } 3>1} \rightarrow$$ طبق آزمون مقایسه سری همگراست

---

② $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2+3n-1}{\sqrt{n^4+2}} =$ واگرا

شرط لازم همگرایی را ندارد زیرا

$$\lim_{n\to\infty} \left| (-1)^n \frac{2n^2+3n-1}{\sqrt{n^4+2}} \right| = 2 \neq 0$$

③ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\ln n}$

دنباله $\frac{1}{\sqrt{n}\ln n}$ نزولی است و به صفر میل می‌کند و جملات سری یک در میان مثبت و منفی اند

پس طبق آزمون لایب نیتز سری همگراست

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$$

از آزمون انتگرال استفاده می‌کنیم. همگرایی این سری معادل با همگرایی انتگرال

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx \xrightarrow[\frac{1}{x}dx = du]{\ln x = u} = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u}\Big|_{\ln 2}^{\infty} < \infty$$

پس سری همگراست

⑤ $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-4}{5n+1}\right)^n$$ $$\lim_{n\to\infty} \left|\left(\frac{3n-4}{5n+1}\right)^n\right|^{1/n} = 3/5 < 1$$ از آزمون ریشه استفاده می‌کنیم

همگرا

سوال ۸-

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{\sqrt{2n-1}} (x-5)^n$$ از آزمون ریشه استفاده می‌کنیم

$$\lim_{n\to\infty} \left|\left((-1)^n \frac{2^n}{\sqrt{2n-1}} (x-5)^n\right)^{1/n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|2(x-5)|}{1} < 1$$

$$|x-5| < 1/2$$

پس شعاع همگرایی $1/2$ حول $x=5$ است باید دو نقطه ابتدا و انتها را بررسی کنیم. در $x = 5+1/2$ همگرایی

داریم به علت آزمون لایب نیتز در $x = 5-1/2$ واگرایی داریم (به علت آزمون سری $\sum \frac{1}{n^p}$ با $(p=1/2$

سوال ۹) $\sum x^n = \frac{1}{1-x}$ از دو طرف نسبت به x مشتق می‌گیریم

$$|x|<1$$

$$\sum n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \xrightarrow{\text{ضرب در } x} \sum n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } x} \sum n^2 x^{n-1} = \frac{(1-x)^2 + 2(1-x)x}{(1-x)^4} = \frac{1-x+2x}{(1-x)^3} = \frac{1+x}{(1-x)^3}$$

در x ضرب می‌کنیم و به جای $x = 1/2$ قرار دهیم داریم

$$\sum n^2/2^n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1-1/2)^3} = 1/16$$

سوال ۱۰ - در اینجا از بسط سری دو جمله ای استفاده می کنیم. می دانیم شعاع همگرایی این سری یک است. به ازای $|x|<1$ داریم

$$(1+x)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}x + \frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)}{3!}x^3 + \dots$$

حال می دانیم اگر $f(x)=P_n(x)+R_{n+1}(x)$ آنگاه اگر $\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x)=0$ آنگاه در بازه همگرایی $f(x)$ با سری مک لورن برابر است.

$$|R_{n+1}(x)| \leq \frac{M_{n+1}(x-1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$f(x)=(1+x)^{1/3} \qquad f^{(n)}(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\dots\left(\frac{1}{3}-(n-1)\right)(1+x)^{\frac{1}{3}-n}$$

$$|R_{n+1}(x)| \leq \left|\frac{\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}-1\right)\dots\left(\frac{1}{3}-(n-1)\right)(1+x)^{\frac{1}{3}-n}(x-1)^{n+1}}{(n+1)!}\right|$$

$|x|<1$

صورت از جنس $\left(\frac{n}{3}\right)!$ و مخرج $(n!)$ پس حد مورد نظر صفر است و $f(x)$ در این بازه با سری برابر است. حال چون $k=\frac{1}{3}>0$ در دو سر بازه یعنی $x=1$ و $x=-1$ نیز سری با $f(x)$ برابر است.