فصل ۳

قضیه‌ی شارکوفسکی

قضیه‌ی شارکوفسکی یکی از قابل‌توجه‌ترین قضایای قرن بیستم است. صد سال پیش، ریاضیدانان تمایل داشتند فکر کنند که بیشتر آنچه می‌توان در مورد توابع پیوسته روی یک بازه نشان داد، شناخته شده است. اما اشتباه می کردند! در این فصل، قضیه‌ی شارکوفسکی را بیان می‌کنیم و حالت خاصی از آن که گاهاً قضیه‌ی لی‌یورک نامیده می‌شود را اثبات خواهیم کرد. (اثبات قضیه شارکوفسکی در فصل 12 ارائه شده است). در فصل‌های 1 و 2، موقعیت‌های مختلفی را دیدیم که در آن نگاشت‌ها دارای نقاط ثابت، ۲-دور و نقاطی از دوره‌ی تناوب بالاتر بودند. در این فصل، خواهیم دید که چگونه داشتن نقاطی از دوره‌ی تناوب سه به درجه قابل توجهی از پیچیدگی در نگاشت به‌عنوان یک دستگاه دینامیکی منتهی می‌شود. نگاشت‌هایی که فقط ۲-دور دارند معمولاً چنین پیچیدگی‌هایی را تجربه نمی‌کنند.

دوره‌ی تناوب سه، آشوب را نتیجه می‌دهد !

در سال 1975 در مقاله ای با عنوان "دوره‌ی تناوب سه، آشوب را نتیجه می‌دهد"، تین ین لی و جیمز یورک قضیه‌ی شگفت‌انگیزی را اثبات کردند :

قضیه. فرض کنیم $f : I \longrightarrow I$ تابعی پیوسته تعریف شده بر بازه‌ی $I \subseteq \mathbb{R}$ باشد. اگر $f(x)$ یک نقطه از دوره‌ی تناوب 3 داشته باشد، آنگاه این نگاشت برای هر $k = 1, 2, 3, \cdots$ نقطه‌ای از دوره‌ی تناوب k خواهد داشت.

این مقاله اشتیاق قابل توجهی را در جامعه ریاضی برانگیخت. اندکی پس از چاپ این مقاله، توسط شخصی به نام استفان به این موضوع اشاره شد که یک ریاضیدان اوکراینی به نام شارکوفسکی، در سال 1964، یک قضیه‌ی کلی‌تر را (به زبان روسی) در یک مجله اوکراینی منتشر کرده است. قضیه‌ی او تا زمان اثبات قضیه‌ی لی‌یورک در غرب ناشناخته بود.

برای بیان قضیه‌ی شارکوفسکی ابتدا باید ترتیب جدیدی از اعداد صحیح مثبت $\mathbb{Z}^+$ را تعریف کنیم. در "ترتیب شارکوفسکی"، 3 بزرگترین عدد است، به دنبال آن 5، سپس 7 و به همین ترتیب همه‌ی اعداد صحیح فرد، سپس 2.3، 2.5 و به همین ترتیب دو برابر همه‌ی اعداد صحیح فرد، ... سپس 2^n برابر همه‌ی اعداد صحیح فرد و ... این ترتیب با توان‌های عدد 2 به‌صورت نزولی تمام می‌شود:

$$3 \rhd 5 \rhd 7 \rhd \cdots \rhd 2.3 \rhd 2.5 \rhd \cdots \rhd 2^2.3 \rhd 2^2.5 \rhd \cdots \rhd 2^n.3 \rhd 2^n.5 \rhd \cdots \rhd 2^n \rhd 2^{n-1} \rhd \cdots \rhd 2^3 \rhd 2^2 \rhd 2 \rhd 1.$$

قضیه‌ی شارکوفسکی می‌گوید که اگر یک نگاشت پیوسته نقطه‌ای از دوره‌ی تناوب k داشته باشد، آنگاه نقاط متناوب دیگری با تمام دوره تناوب‌هایی که در ترتیب شارکوفسکی کمتر از k هستند، نیز خواهد داشت. بالعکس این قضیه نیز که منسوب به شارکوفسکی است، درست می‌باشد به این معنا که برای هر $k \in \mathbb{Z}^+$ یک نگاشت پیوسته با نقاطی از دوره‌ی تناوب k وجود دارد، که هیچ نقطه‌ی متناوبی از دوره‌ی بزرگتر از k در ترتیب شارکوفسکی نداشته باشد.

قضیه. (قضیه‌ی شارکوفسکی، 1964) فرض کنیم $f : I \longrightarrow I$ نگاشتی پیوسته تعریف شده بر بازه‌ی I است (که I می‌تواند هر زیربازه‌ی کراندار یا بی‌کران از $\mathbb{R}$ باشد). اگر f یک نقطه از دوره‌ی تناوب k داشته باشد، آنگاه این نگاشت برای هر $r \in \mathbb{Z}^+$ با این ویژگی که $k \triangleright r$، نقاطی از دوره‌ی تناوب r خواهد داشت.

به‌عنوان مثال، این قضیه می‌گوید که اگر f دارای یک 4−دور باشد، آنگاه یک ۲−دور و یک 1−دور (نقطه‌ی ثابت) نیز دارد. اگر f دارای یک ۳−دور باشد، آنگاه دارای تمام دورهای ممکن دیگر نیز خواهد بود. اگر f دارای یک 6−دور باشد، آنگاه از آنجایی که $6 = 2.3$، f دارای $1, 2, 2^2, \cdots, 2^2.5, 2^2.3, \cdots, 2.7, 2.5$−دور نیز خواهد بود.

در این فصل قضیه‌ی شارکوفسکی را برای $k = 3$ اثبات خواهیم کرد که اغلب به دلیل اثبات مستقل در سال 1975، به‌عنوان قضیه‌ی لی‌یورک شناخته می‌شود. اثبات حالت کلی قضیه‌ی شارکوفسکی در فصل 12 ارائه شده است و گرچه به سبب استفاده از قضیه‌ی مقدار میانی، اثباتی مقدماتی است اما همچنان یک قضیه‌ی بسیار دشوار است. از آنجا که اثبات اصلی شارکوفسکی بسیار فنی و دنبال کردن آن سخت است، چندین اثبات جدید در طول سال‌های متمادی برای این قضیه ارائه شده است که اولین مورد از چنین اثبات‌هایی به استفان نسبت داده شده است، وی در سنین جوانی در یک سانحه‌ی کوهنوردی درگذشت.

جیمز یورک استاد دانشگاه مریلند در کالج پارک و لی دانشجوی وی بود. چند سال پیش، یورک و ماندلبروت جایزه ژاپن (معادل ژاپنی جایزه نوبل) را برای کار بر دستگاه‌های دینامیکی و فراکتال‌ها دریافت کردند. ماندلبروت به‌عنوان «پدر» فراکتال‌ها شناخته می‌شود و در ادامه در کتاب به بررسی برخی از آثار او خواهیم پرداخت. برای اثبات قضیه لی‌یورک، به چند لم اولیه نیاز داریم که اولین مورد از آن‌ها در فصل 1 اثبات شد :

یادآوری. فرض کنیم $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ نگاشتی پیوسته بر بازه‌ی I باشد به طوری‌که $I \subseteq f(I)$. در این صورت $f(x)$ یک نقطه‌ی ثابت در I دارد.

یادآوری. فرض کنیم $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ نگاشتی پیوسته بر I باشد. اگر $J \subseteq f(I)$ یک بازه‌ی بسته‌ی کراندار باشد، آنگاه یک بازه‌ی بسته‌ی کراندار مانند $K \subseteq I$ چنان وجود دارد که $f(K) = J$.

اثبات. برای برخی $a, b \in \mathbb{R}$ با شرط $a < b$، قرار می‌دهیم $J = [a, b]$. از آنجا که $J \subseteq f(I)$، می‌توان گفت $p, q \in I$ چنان موجودند که $f(p) = a$ و $f(q) = b$. ایده اثبات این است که p و q را تا حد امکان نزدیک به هم انتخاب کنیم (بدون هیچ نقطه‌ی c بین p و q با $f(c) = a$ یا $f(c) = b$) و سپس نتیجه‌گیری کنیم که $f([p, q]) = J$ یا $f([q, p]) = J$.

فرض کنیم که $p < q$ و α نزدیکترین نقطه در I به q با این ویژگی باشد که $f(\alpha) = a$، یعنی $\alpha = \max\{x : p \leq x \leq q,\ \ f(x) = a\}$.

به طور مشابه، فرض کنیم β نقطه‌ای بین α و q است با این خصوصیت که نزدیکترین نقطه به α است که $f(\beta) = b$، یعنی

$$\beta = \min\{x : \alpha \leq x \leq q,\ \ f(x) = b\}.$$

از طرف دیگر، اگر $p > q$، قرار می‌دهیم $\alpha = \max\{x : q \le x \le p, \ \ f(x) = b\}$ و $\beta = \min\{x : \alpha \le x \le p, \ \ f(x) = a\}$. در هر دوحالت قرار می‌دهیم $K = [\alpha, \beta]$.

با توجه به این حقیقت که تصویر پیوسته‌ی بازه‌ای به فرم $K = [\alpha, \beta]$ خود بازه‌ای به همین فرم است، نشان خواهیم داد که $f(K) = J$.
فرض کنیم که اینطور نیست، پس از آنجایی که $a, b \in f(K)$ داریم $[a, b] \subset f(K)$. فرض کنیم $w \in f(K) \setminus J$، آنگاه برای برخی $z \in K$ باید داشته باشیم $w = f(z)$. از آنجا که $w \notin J = [a, b]$، اگر $w > b$، آنگاه بنا به قضیه‌ی مقدار میانی، c بین α و β وجود دارد به طوریکه $f(c) = b$، که با انتخاب β در تضاد است. برای حالتی که $w < a$ به طور مشابه می‌توان عمل کرد. $\square$

اثبات قضیه‌ی شارکوفسکی برای $k = 3$:

اثبات. فرض می‌کنیم که f یک نقطه از دوره تناوب 3 و بنابراین یک ۳-دور مانند $\{a, b, c\}$ با شرط $a < b < c$ داشته باشد. توجه داریم که ۳-دورها در دو نسخه ارائه می‌شوند که آینه‌ی یکدیگرند و به‌صورت $f(a) = b$، $f(b) = c$ و $f(c) = a$ و یا $f(a) = c$، $f(c) = b$ و $f(b) = a$ در نظر گرفته می‌شوند. در نتیجه، تنها لازم است نسخه‌ی اول را بررسی کنیم.
با نشان دادن اینکه چرا باید نقاطی از دوره‌ی تناوب یک، دو و چهار وجود داشته باشد، ایده اثبات را ارائه می‌کنیم. فرض کنیم :

$$[a, b] = L_0 \qquad \text{و} \qquad [b, c] = L_1.$$

مشاهده خواهیم کرد که :

$$L_1 \subseteq f(L_0) \qquad \text{و} \qquad L_0 \cup L_1 \subseteq f(L_1).$$

حالت 1. f نقطه‌ی ثابت دارد :

از آنجا که $L_1 \subseteq L_0 \cup L_1 \subseteq f(L_1)$، از لم ۳ نتیجه می‌شود که f یک نقطه‌ی ثابت در L_1 دارد.

حالت 2. f نقطه‌ای از دوره‌ی تناوب 2 دارد :

این بار از آنجا که $L_0 \subseteq L_0 \cup L_1 \subseteq f(L_1)$، از لم ۳ نتیجه می‌شود که بازه‌ی $B \subseteq L_1$ چنان موجود است که $f(B) = L_0$. در این صورت خواهیم داشت :

$$B \subseteq L_1 \subseteq f(L_0) = f^2(B),$$

حال بنا بر لم ۳، B شامل یک نقطه‌ی ثابت c از f^2 است. c نقطه‌ای از دوره‌ی تناوب دو برای f است (و نقطه‌ی ثابت f نیست)، چون

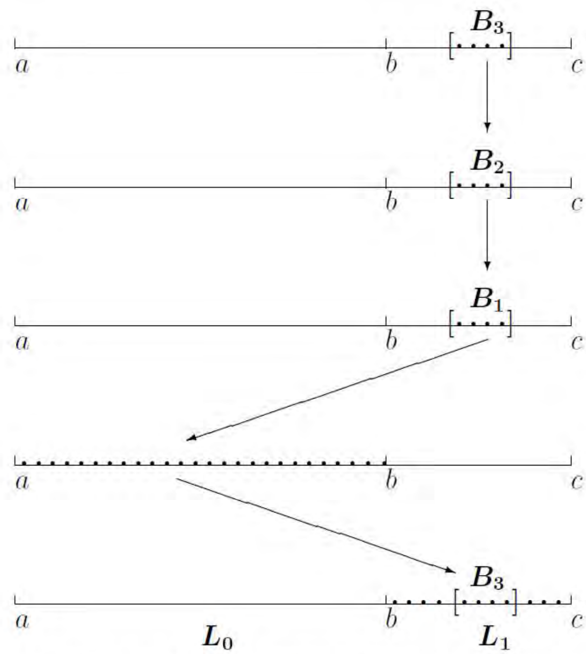
$$c \in B \implies f(c) \in f(B) = L_0 \qquad \text{و} \qquad c \in L_1 \xrightarrow{L_0 \cap L_1 = \emptyset} f(c) \neq c.$$

حالت 3. f نقطه‌ای از دوره‌ی تناوب 4 دارد :

دو ساختار فوق روش کلی را نشان نمی‌دهند، اما ساختار زیر به راحتی می‌تواند به منظور اینکه نشان دهد نقاط ثابتی از هر دوره‌ی بزرگتر از 3 وجود دارد، تعمیم یابد. هدف این است که نشان دهیم بازه‌ای چون B درون L_1 وجود دارد به طوری که ابتدا توسط f به L_1، سپس دوباره به L_1، پس از آن به L_0 و آنگاه به L_1 نگاشته شده است، به طوری که $B \subseteq f^4(B)$. بنابراین f^4 یک نقطه‌ی ثابت c در B دارد، که

نمی‌تواند نقطه‌ای با دوره تناوب کمتر باشد چون $f(c) \in L_1$، $f^2(c) \in L_1$ ، $f^3(c) \in L_0$ و $f^4(c) \in B$ (بنابراین نمی‌توان $f(c) = c$، $f^2(c) = c$ یا $f^3(c) = c$ را داشت).

در نظر گرفتن 5 کپی از $L_0 \cup L_1$ با نگاشت f که اولی را به دومی و ... می‌نگارد، مفید است :



Five copies of $L_0 \cup L_1$, where $f(a) = b$, $f(b) = c$ and $f(c) = a$.

بازه‌های B_1، B_2 و B_3 را به‌صورت زیر می‌یابیم، می‌دانیم :

$$L_1 \subseteq f(L_0), \qquad L_1 \cup L_0 \subseteq f(L_1),$$

بنابراین $B_1 \subseteq L_1$ چنان موجود است که $f(B_1) = L_0$ و $B_2 \subseteq L_1$ چنان موجود است که $f(B_2) = B_1$ و $B_3 \subseteq L_1$ چنان موجود است که $f(B_3) = B_2$. قرار می‌دهیم $B = B_3$، در این صورت :

$$f^2(B_3) = f(B_2) = B_1 \implies f^3(B) = L_0, \quad B_3 \subseteq L_1 \subseteq f^4(B).$$

به عبارت دیگر $B \subseteq f^4(B)$، بنابراین $c \in B$ وجود دارد که نقطه‌ی ثابتی از f^4 است و نقطه‌ای از دوره‌ی تناوب 3 یا کمتر نیست، بنابراین باید نقطه‌ای از دوره‌ی تناوب 4 برای f باشد. □

به طور کلی، اگر تابعی دارای نقاطی از دوره‌ی تناوب 4 باشد، بیشترین چیزی که می‌توانیم استنباط کنیم این است که نقاطی از دوره تناوب 2 و نقاط ثابت نیز خواهد داشت. با این حال، موارد زیر نیز صادق است:

گزاره ۵. اگر $f : I \longrightarrow I$ نگاشتی پیوسته بر بازه‌ی I باشد و

$$f(a) = b, \quad f(b) = c, \quad f(c) = d, \quad f(d) = a, \qquad a < b < c < d,$$

آنگاه $f(x)$ نقطه‌ای از دوره‌ی تناوب 3 و بنابراین نقاطی از دیگر تناوب‌ها نیز خواهد داشت.

اثبات. می‌توانیم فرض کنیم :

$$f([a, b]) = [b, c], \ f([b, c]) = [c, d], \ \ f([c, d]) = [a, d].$$

به ویژه، از آنجا که $[c, d] \subseteq [a, d] = f([c, d])$، یک بازه‌ی $B_1 \subseteq [c, d]$ با $f(B_1) = [c, d]$ و از آنجا که $[b, c] \subseteq [a, d] = f([c, d])$ یک بازه‌ی $B_2 \subseteq [c, d]$ با $f(B_2) = [b, c]$ وجود دارد.

دوباره چون $B_2 \subseteq [c, d] = f(B_1)$، می‌توانیم بازه‌ی $K_1 \subseteq B_1$ با $f(K_1) = B_2$ را بیابیم، به طوری که

$$K_1 \subseteq [c, d] = f([b, c]) = f^2(B_2) = f^3(K_1),$$

و f^3 یک نقطه‌ی ثابت در K_1 دارد که یک نقطه ثابت $f(x)$ نیست و نقطه‌ای با دوره‌ی تناوب 3 برای f خواهد بود. □

شواهد فوق را می‌توان در نتیجه‌ی زیر خلاصه کرد:

گزاره ۶. فرض کنیم I یک بازه و $f : I \longrightarrow I$ نگاشتی پیوسته باشد. همچنین فرض کنیم I_1 و I_2 زیر بازه‌های بسته‌ای از I با حداکثر یک نقطه‌ی مشترک باشند. اگر $I_2 \subset f(I_1)$ و $I_1 \cup I_2 \subset f(I_2)$، آنگاه f یک ۳-دور دارد.

اثبات. اثبات را به‌عنوان تمرین رها می‌کنیم. □

عکس قضیه‌ی شارکوفسکی :

همانطور که اشاره کردیم، شارکوفسکی برای هر $m \in \mathbb{Z}^+$ در ترتیب شارکوفسکی، نشان داد که نگاشت پیوسته‌ی $f : I \longrightarrow I$ (که در آن I یک بازه است) موجود است به طوری که $f(x)$نقطه ای از دوره‌ی تناوب m دارد، اما نقطه‌ای از دوره‌ی تناوب k برای $k \triangleright m$ ندارد. قضایای زیر توسط شارکوفسکی اثبات شد (I محور اعداد حقیقی و یا یک زیربازه است):

قضیه. برای هر $k \in \mathbb{Z}^+$، نگاشت پیوسته‌ی $f : I \longrightarrow I$ وجود دارد که دارای یک k-دور است، اما هیچ دوری از تناوب n برای هر n که قبل از k در ترتیب شارکوفسکی ظاهر می‌شود، ندارد.

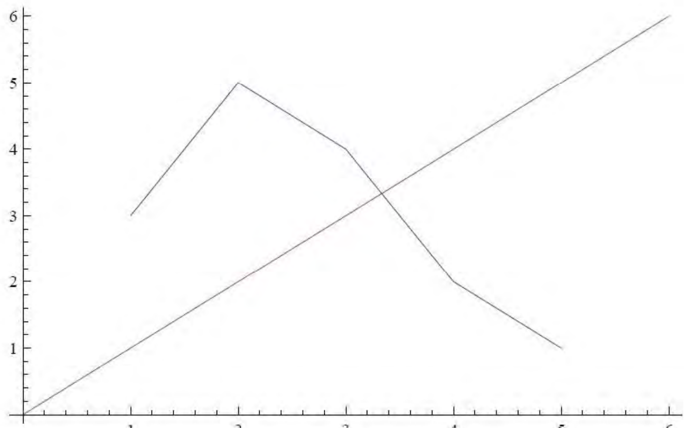
قضیه. نگاشت پیوسته‌ی $f : I \longrightarrow I$ وجود دارد به طوری که برای هر $n \in \mathbb{Z}^+$ یک 2^n-دور دارد و هیچ دور دیگری از هیچ دوره‌ی تناوب دیگری ندارد.

به بیان دقیق، قضیه شارکوفسکی ترکیبی از قضیه‌ی ۳، قضیه‌ی ۳ و قضیه‌ی ۳ است. گاهی اوقات از دو قضیه‌ی اخیر به‌عنوان عکس قضیه‌ی شارکوفسکی یاد می‌شود. حال مثال زیر را در نظر می‌گیریم :

مثال. تابع $f:[1,5]\longrightarrow[1,5]$ را همانطور که در نمودار زیر نشان داده شده است، تعریف می‌کنیم. بنابراین :

$$f(1)=3,\quad f(2)=5,\quad f(3)=4,\quad f(4)=2,\quad f(5)=1,$$

و f تابعی قطعه‌ای خطی بین این نقاط است. در این صورت f نقطه‌ای از دوره‌ی تناوب 5 دارد اما هیچ نقطه‌ای از دوره‌ی تناوب 3 ندارد.



A function having points of period 5, but no points of period 3.

اثبات. واضح است که هیچ عضوی از مجموعه‌ی $\{1,2,3,4,5\}$ از دوره‌ی تناوب 3 نیست، اما این مجموعه یک 5–دور برای f است. می‌دانیم که اگر $f(x)$ یک نقطه‌ی ثابت c داشته باشد، آنگاه c یک نقطه‌ی ثابت برای f^3 نیز هست. نشان خواهیم داد که f^3 هیچ نقطه‌ی ثابت دیگری ندارد. برای این منظور، فرض کنیم که f^3 یک نقطه‌ی ثابت دیگر مانند α دارد. به سادگی می‌توان دید :

$$f^3([1,2])=[2,3],\quad f^3([2,3])=[3,5],\quad f^3([4,5])=[1,4],$$

بنابراین f^3 نمی‌تواند یک نقطه‌ی ثابت در بازه‌های $[1,2]$، $[2,3]$ یا $[4,5]$ داشته باشد، بنابراین α باید در بازه‌ی $[3,4]$ قرار گیرد. در واقع، $f^3([3,4])=[1,5]\supseteq[3,4]$. پس باید نشان دهیم که f^3 نمی‌تواند نقطه‌ی ثابت دیگری در $[3,4]$ داشته باشد.

اگر $\alpha\in[3,4]$، آنگاه $f(\alpha)\in[2,4]$، پس یا $f(\alpha)\in[2,3]$ و یا $f(\alpha)\in[3,4]$. اگر حالت اول برقرار باشد، آنگاه $f^2(\alpha)\in[4,5]$ و $f^3(\alpha)\in[1,2]$ که غیرممکن است زیرا باید داشته باشیم $f^3(\alpha)=\alpha\in[3,4]$.

بنابراین، باید داشته باشیم $f(\alpha)\in[3,4]$ که بنابراین $f^2(\alpha)\in[2,4]$. دوباره دو احتمال وجود دارد: اگر $f^2(\alpha)\in[2,3]$، آنگاه $f^3(\alpha)\in[4,5]$ که یک تناقض دیگر است، بنابراین $f^2(\alpha)\in[3,4]$.

پس نشان دادیم که مدار $\{\alpha,f(\alpha),f^2(\alpha)\}$ در بازه $[3,4]$ قرار دارد. در بازه‌ی $[3,4]$، می‌توانیم $f(x)$ را خط راست گذرا از $(3,4)$ و $(4,2)$ در نظر بگیریم :

$$f(x)=10-2x,\qquad f(10/3)=10/3,$$

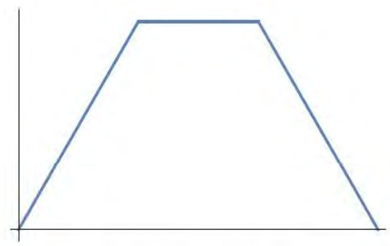
بنابراین $c=10/3$ نقطه‌ی ثابت یکتای f است. بعلاوه

$$f^2(x)=-10+4x,\qquad f^3(x)=30-8x,$$

نقطه ثابت منحصربه فرد $c=10/3$ را دارند. بنابراین f نمی‌تواند هیچ نقطه‌ای از دوره تناوب 3 داشته باشد. □

تذکر. مثال بالا را می‌توان به روشی طبیعی برای نگاشت‌هایی تعمیم داد که نقاطی از دوره‌ی تناوب $2n+1$ دارند اما نقاطی از دوره‌ی تناوب $2n-1$ برای $n = 2, 3, \cdots$ ندارند.

مثال. عکس قضیه شارکوفسکی را نیز می‌توان با استفاده از یک ایده خوب ارائه شده در یکی از مراجع کتاب، نشان داد : فرض کنید T نقشه چادر (چادر یا خیمه) و $h \in [0,1]$ باشد. نگاشت چادر بریده شده $T_h : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ با $T_h(x) = \min\{h, T(x)\}$ تعریف می‌شود. در تمرینات این فصل، مثال‌هایی از T_h آورده شده که دارای یک نقطه ثابت است، اما هیچ نقطه‌ای از هیچ دوره دیگری ندارد و T_h دارای یک ۲-دور هست اما 4-دور ندارد. در فصل 12 نحوه‌ی اثبات عکس قضیه‌ی شارکوفسکی با استفاده از این نگاشت‌های چادر بریده، نشان داده شده است.



A trucated tent map.

فصل چهارم : دینامیک در فضاهای متریک

در دستگاه‌های دینامیکی، مثال‌های متنوع بر مجموعه‌های مختلف، می‌توانند ویژگی‌های مشابهی داشته باشند. تا اینجا، در مثال‌هایی که دیدیم مجموعه‌ی مورد بررسی زیر بازه‌ای از $\mathbb{R}$ بود. در دیگر حالت‌ها، مجموعه‌ی زیربنایی ممکن است زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^2$، یا دایره واحد در صفحه‌ی مختلط، یا نوعی از فضاهای دنباله‌ای باشد. از آنجا که تعریفی از آشوب که در فصل‌های بعدی ارائه خواهد شد بر مبنای مثال‌هایی است که بر روی انواع مختلف فضای متریک عمل می‌کنند، در این فصل قصد داریم به معرفی چنین فضاهایی بپردازیم. فضاهای متریک به نوعی کم‌انتزاعی‌ترین نوع فضاهای توپولوژیکی هستند. مثال‌هایی که در این فصل می‌آوریم معمولاً دستگاه‌های دینامیکی هستند که بر روی فضاهای متریک فشرده یا کامل اثر می‌کنند. ابزارهای توسعه‌یافته در این فصل از آنجا که مفاهیم فصل‌های بعدی بر اساس آن‌ها ساخته خواهند شد، حائز اهمیت هستند.

ویژگی‌های اساسی فضای متریک :

در این بخش، ایده فضای متریک را معرفی می‌کنیم. فضای متریک به سادگی دوتایی (X, d) است که در آن X یک مجموعه و d فاصله‌ی تعریف شده روی مجموعه X است و متریک نامیده می‌شود. d باید ویژگی‌های طبیعی خاصی را که از یک تابع فاصله انتظار می‌رود، برآورده کند.