



زمان آزمون :

نام و نام خانوادگی :

نام درس : ریاضی ۱

پایه تحصیلی :

نام آموزشگاه : شهید حقانی (سمپاد)

نام دبیر : حامد نوردی

عنوان آزمون : کار برگ ۱۵ - نامعادله تشریحی تاریخ برگزاری ۱۴۰۱/۱۱/۱۲

نامعادله‌ی زیر را حل کنید و مجموعه جواب آن را به صورت بازه نمایش دهید.

۱

$$\frac{x-3}{x^2-9x+20} < 0$$

نامعادله زیر را حل کنید.

۲

$$\frac{2x+1}{x+4} < 1$$

تعداد ضربان قلب، پس از x دقیقه کار سنگین بدنی، طبق رابطه‌ی $y = \frac{15}{8}x^2 - 30x + 200$ به دست می‌آید. در چه زمان‌هایی پس از یک کار سنگین بدنی، تعداد ضربان قلب از ۱۱۰ بیش‌تر است؟ آیا تمام جواب‌های به دست آمده قابل قبول‌اند؟

۳

یک جسم از بالای یک ساختمان که ۱۳ متر ارتفاع دارد، به هوا پرتاب می‌شود. اگر ارتفاع این جسم از سطح زمین در ثانیه‌ی t از رابطه‌ی $h = -5t^2 + 18t + 13$ محاسبه شود، در چه فاصله‌ی زمانی، ارتفاع توپ از سطح زمین بیش‌تر از ۱۳ متر خواهد بود؟

۴



$$\frac{16 - x^2}{x^2 - 6x - 7} \leq 0.$$

نامعادله روبه‌رو را حل کنید و جواب را به صورت بازه بنویسید.

۵

نامعادله‌ی $\frac{x^3 - x}{x^2 - 2x + 2} \leq 0$ را حل کنید.

۶

اگر جواب نامعادله $-2x^2 + ax + b \geq 0$ برابر $\{3, 2c - 1\}$ باشد، a و b و c را حساب کنید.

۷

به ازای چه محدوده از x سهمی $y = 2x^2 - 7x + 5$ پایین‌تر از سهمی $y = x^2 - 5$ قرار ندارد؟

۸

به ازای چه محدوده از x سهمی $y = x^2 - 11x + 30$ بالاتر از خط $y = 2x - 6$ قرار ندارد؟

۹

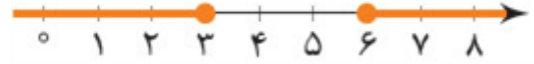
به ازای چه محدوده از x عبارت $\frac{2x+1}{x+1}$ بیش‌تر از $1 + \frac{4x}{x-2}$ نیست؟

۱۰



۱۱ به ازای چه محدوده از x عبارت $\frac{2x+1}{x-2}$ کوچکتر از ۶ - $\frac{2x+1}{x}$ نیست؟

۱۲ یک نامعادله‌ی قدرمطلق بنویسید که مجموعه جواب آن $(-\infty, 3] \cup [6, +\infty)$ باشد.



۱۳ یک نامعادله‌ی قدرمطلق بنویسید که مجموعه جواب آن بازه‌ی $(1, 9)$ باشد.



۱۴ در هریک از نامعادله‌های زیر، مجموعه جواب را با نماد بازه به دست آورید؛ سپس آن را روی محور نشان دهید.

الف) $\left| \frac{x}{3} + 1 \right| < \frac{2}{3}$ ب) $|5 - 2x| \geq 1$

۱۵ نامعادله قدرمطلق بنویسید که حاصل آن بازه‌ی $[-1, 5)$ باشد.

۱۶ نامعادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $x^2 - 11|x| + 18 < 0$ ب) $\frac{1}{|x+20|} > 0.01$



۱۷ نامعادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $x^2 - 7|x| + 12 < 0$

ب) $\frac{1}{|x+3|} > 7$

۱۸

هریک از نامعادله‌های زیر را به کمک یک نامعادله قدرمطلقى نمایش دهید.

الف) $7 < x < 13$

ب) $x < -2$ یا $x > 14$

۱۹

جواب نامعادله $|x + |x - 2|| < 10$ را حساب کنید.

۲۰

حدود x را حساب کنید.

الف) $1 < |x - 4| < 11$

ب) $0 < |x + 1| < 4$



$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$x^2 - 9x + 20 = 0 \Rightarrow (x - 4)(x - 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 5 \end{cases}$$

X	$-\infty$	3	4	5	$+\infty$
$x - 3$	-	•	+	+	+
$x^2 - 9x + 20$	+	+	•	-	+
$\frac{x - 3}{x^2 - 9x + 20}$	-	•	+	-	+
$\frac{x - 3}{x^2 - 9x + 20} < 0$	ج		ج		

$$\text{مجموعه جواب} = (-\infty, 3) \cup (4, 5)$$

$$\frac{2x+1}{x+4} < 1 \Rightarrow \frac{2x+1}{x+4} - 1 < 0 \Rightarrow \frac{2x+1-x-4}{x+4} < 0 \Rightarrow \frac{x-3}{x+4} < 0$$

$$\begin{cases} x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \\ x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4 \end{cases}$$

X	$-\infty$	-4	3	$+\infty$
$x - 3$	-	-	•	+
$x + 4$	-	•	+	+
$\frac{x - 3}{x + 4}$	+	•	-	+
$\frac{x - 3}{x + 4} < 0$		ج		

$$\text{مجموعه جواب} = (-4, 3)$$

$$\frac{15}{\Delta} x^2 - 30x + 200 > 110 \Rightarrow \frac{15}{\Delta} x^2 - 30x + 90 > 0 \xrightarrow{\times \Delta} 15x^2 - 240x + 720 > 0$$

$$15x^2 - 240x + 720 = 0 \xrightarrow{\Delta=14400} x = 12, x = 4 \Rightarrow x < 4 \text{ یا } x > 12$$

		4	12	
$15x^2 - 240x + 720$	+	•	•	+

از بین جواب‌های به دست آمده آن‌هایی که مثبت هستند قابل قبول‌اند. واضح است که جواب‌های صفر و منفی قابل قبول نیستند.

$$h > 13 \Rightarrow -5t^2 + 18t + 13 > 13 \Rightarrow -5t^2 + 18t > 0$$

$$\frac{-5t^2 + 18t}{-5} \Rightarrow \left(0, \frac{18}{5}\right)$$

$$\frac{16 - x^2}{x^2 - 6x - 7} \leq 0 \Rightarrow \frac{(4 - x)(4 + x)}{(x - 7)(x + 1)} \leq 0 \Rightarrow \left(-\infty, -1\right] \cup \left(4, 7\right) \cup (7, +\infty)$$

$$\frac{x^2 - x}{x^2 - 2x + 2} \leq 0 \Rightarrow \frac{x(x^2 - 1)}{x^2 - 2x + 2} \leq 0, x = 0, x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$x^2 - 2x + 2 \Rightarrow \Delta = 4 - 8 = -4 \text{ ریشه ندارد}$$

X	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
X	-	-	0	+	+
$x^2 - 1$	+	0	-	-	+
$x^2 - 2x + 2$	+	+	+	+	+
$P \leq 0$	-	0	+	-	+

$$\text{مجموعه جواب نامعادله} = (-\infty, -1] \cup [0, 1]$$

جواب نامعادله درجه ۲ تنها می تواند یک نقطه باشد. بنابراین:

$$2c - 1 = 3 \Rightarrow 2c = 4 \Rightarrow c = 2$$

$$x = 3 \Rightarrow x - 3 = 0 \xrightarrow{\text{به توان می رسانیم}} x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$\xrightarrow{\times(-2)} -2x^2 + 12x - 18 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 12 \\ b = -18 \end{cases}$$

باید سهمی اول را بزرگتر یا مساوی سهمی دوم قرار دهیم. بنابراین:

$$2x^2 - 7x + 5 \geq x^2 - 5 \Rightarrow x^2 - 7x + 10 \geq 0 \Rightarrow x \geq 5 \text{ یا } x \leq 2$$

X	2	5
P(x)	+	-
$P[x] \geq 0$	ج	ج

$$\text{مجموعه جواب} = (-\infty, 2] \cup [5, +\infty)$$



باید ضابطه سهمی را کوچکتر یا مساوی خط قرار داد.

$$x^2 - 11x + 30 \leq 2x - 6 \Rightarrow x^2 - 13x + 36 \leq 0 \Rightarrow 4 \leq x \leq 9$$

X	4	9
P(x)	+	-
P(x) ≤ 0	✓	✓

مجموعه جواب = [4, 9]

باید عبارت اول کوچکتر یا مساوی عبارت دوم قرار دهیم.

$$\begin{aligned} \frac{2x+1}{x+1} &\leq \frac{2x}{x-2} + 1 \Rightarrow \frac{2x+1}{x+1} - \frac{2x}{x-2} - 1 \leq 0 \\ &\Rightarrow \frac{(2x+1)(x-2) - 2x(x+1) - (x+1)(x-2)}{(x+1)(x-2)} \leq 0 \\ &\Rightarrow \frac{2x^2 - 4x + x - 2 - 2x^2 - 2x - x^2 + x + 2}{x^2 - x - 2} \leq 0 \Rightarrow \frac{-3x^2 - 6x}{x^2 - x - 2} \leq 0 \end{aligned}$$

$$-3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow -3x(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

X	-2	-1	0	2
$-3x^2 - 6x$	-	+	+	-
$x^2 - x - 2$	+	+	-	+
P(x)	-	+	-	-
P(x) ≤ 0	✓	✓	✓	✓

مجموعه جواب = $(-\infty, -2] \cup (-1, 0] \cup (2, +\infty)$



$$\frac{2x+1}{x-2} \geq \frac{2x+1}{x} - 6 \Rightarrow \frac{2x+1}{x-2} \geq \frac{2x+1-6x}{x} \Rightarrow \frac{2x+1}{x-2} \geq \frac{1-4x}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{2x+1}{x-2} - \frac{1-4x}{x} \geq 0 \Rightarrow \frac{2x^2+x-(1-4x)(x-2)}{x(x-2)} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{2x^2+x+4x^2-8x-x+2}{x(x-2)} \geq 0 \Rightarrow \frac{6x^2-8x+2}{x(x-2)} \geq 0 \Rightarrow 6x^2-8x+2=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$x^2-2x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$$

x	0	$\frac{1}{3}$	1	2
$6x^2-8x+2$	+	+	-	+
x^2-2x	+	-	-	+
P(x)	+	-	+	-
P(x) ≥ 0	ج	ج	ج	ج

$$\text{مجموعه جواب} = (-\infty, 0) \cup \left[\frac{1}{3}, 1\right] \cup (2, +\infty)$$

با توجه به این که $\frac{9}{2}$ وسط فاصله $[3, 6]$ است، شکل مجموعه نقاطی است که فاصله‌شان از $\frac{9}{2}$ بیش‌تر از $\frac{3}{2}$ می‌باشد

$$\text{بنابراین } \left|x - \frac{9}{2}\right| \geq \frac{3}{2} \text{ جواب است.}$$

توجه: در حالت کلی، مجموعه $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$ را می‌توان به صورت $\left|x - \frac{b+a}{2}\right| \geq \frac{b-a}{2}$ نوشت.

با توجه به این که ۵ وسط بازه‌ی $(1, 9)$ است این بازه مجموعه نقاطی است که فاصله‌شان از ۵ کم‌تر از ۴ می‌باشد

$$\text{بنابراین } |x - 5| < 4 \text{ جواب است.}$$

توجه: در حالت کلی بازه (a, b) را می‌توان به صورت $\left|x - \frac{b+a}{2}\right| < \frac{b-a}{2}$ نوشت.

$$\text{الف)} -\frac{2}{3} < \frac{x}{3} + 1 < \frac{2}{3} \Rightarrow -\frac{5}{3} < \frac{x}{3} < -\frac{1}{3} \xrightarrow{\times 3} -5 < x < -1 \Rightarrow (-5, -1)$$



$$\text{ب)} |5-2x| \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} 5-2x \geq 1 \Rightarrow -2x \geq -4 \Rightarrow x \leq 2 \\ 5-2x \leq -1 \Rightarrow -2x \leq -6 \Rightarrow x \geq 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$$



مرکز بازه برابر ۲ و شعاع بازه برابر ۳ است، بنابراین داریم:

$$|x-2| < 3 \xrightarrow[\text{تعریف نشده باشد}]{\text{باید نامعادله در } x=5} \frac{|x-2|}{|x-5|} < \frac{3}{|x-5|}$$

در این حالت حاصل نامعادله $[-1, 5)$ است.



$$\text{الف)} \quad x^2 - 11|x| + 18 < 0 \xrightarrow{x^2 = |x|^2} |x|^2 - 11|x| + 18 < 0 \Rightarrow (|x| - 9)(|x| - 2) < 0$$

$$\Rightarrow 2 < |x| < 9 \Rightarrow \begin{cases} 2 < x < 9 \\ \text{یا} \\ -9 < x < -2 \end{cases} \Rightarrow \text{مجموعه جواب} = (-9, -2) \cup (2, 9)$$

$$\text{ب)} \quad \frac{1}{|x+20|} > \frac{1}{100} \xrightarrow[\text{معکوس می کنیم}]{x \neq -20} |x+20| < 100 \Rightarrow -100 < x+20 < 100$$

$$\xrightarrow{-20} -120 < x < 80 \Rightarrow \text{مجموعه جواب} = (-120, 80) - \{-20\}$$

$$\text{الف)} \quad x^2 - 7|x| + 12 < 0 \xrightarrow{x^2 = |x|^2} |x|^2 - 7|x| + 12 < 0 \Rightarrow (|x| - 4)(|x| - 3) < 0$$

$$\Rightarrow 3 < |x| < 4 \Rightarrow \begin{cases} -4 < x < -3 \\ \text{یا} \\ 3 < x < 4 \end{cases} \Rightarrow \text{مجموعه جواب} = (-4, -3) \cup (3, 4)$$

$$\text{ب)} \quad \frac{1}{|x+3|} > 7 \xrightarrow[\text{معکوس می کنیم}]{x \neq -3} |x+3| < \frac{1}{7} \Rightarrow -\frac{1}{7} < x+3 < \frac{1}{7} \xrightarrow{-3} -\frac{22}{7} < x < -\frac{20}{7}$$

$$\text{مجموعه جواب} = \left(-\frac{22}{7}, -\frac{20}{7}\right) - \{-3\}$$

$$a < x < b \Rightarrow \left| x - \frac{a+b}{2} \right| < \frac{b-a}{2}$$

$$x < a \text{ یا } x > b \Rightarrow \left| x - \frac{a+b}{2} \right| > \frac{b-a}{2}$$

$$\text{الف)} \quad 7 < x < 13 \Rightarrow \left| x - \frac{7+13}{2} \right| < \frac{13-7}{2} \Rightarrow |x-10| < 3$$

$$\text{ب)} \quad x < -2 \text{ یا } x > 14 \Rightarrow \left| x - \frac{-2+14}{2} \right| > \frac{14-(-2)}{2} \Rightarrow |x-6| > 8$$

x	$x < 2$	2	$x \geq 2$
$x-2$	-	•	+

$$x \geq 2 \Rightarrow |x+x-2| < 10 \Rightarrow |2x-2| < 10 \Rightarrow -10 < 2x-2 < 10 \xrightarrow{+2} -8 < 2x < 12$$

$$\xrightarrow{\div 2} -4 < x < 6 \xrightarrow[\text{اشتراک با شرط } x \geq 2]{} 2 \leq x < 6 \quad (1)$$

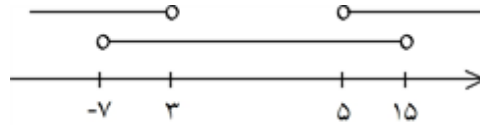
$$x < 2 \Rightarrow |x-x+2| < 10 \Rightarrow 2 < 10 \xrightarrow[\text{همواره درست بنابراین کل بازه جواب است}]{} x < 2 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1) \cup (2)} (-\infty, 6)$$



$$\text{الف) } 1 < |x - 2| < 11 \Rightarrow \begin{cases} |x - 2| < 11 \Rightarrow -11 < x - 2 < 11 \Rightarrow -9 < x < 13 \quad (1) \\ |x - 2| > 1 \Rightarrow x - 2 > 1 \text{ يا } x - 2 < -1 \Rightarrow x > 3 \text{ يا } x < 1 \quad (2) \end{cases}$$

(1) ∩ (2)

→ مجموعه جواب $(-9, 1) \cup (3, 13)$ 

$$\text{ب) } 0 < |x + 1| < 2 \Rightarrow \begin{cases} |x + 1| < 2 \Rightarrow -2 < x + 1 < 2 \Rightarrow -3 < x < 1 \quad (1) \\ |x + 1| > 0 \Rightarrow x \neq -1 \quad (2) \end{cases}$$

(1) ∩ (2)

→ مجموعه جواب $(-3, 1) - \{-1\}$ 