



سردشاخ شدن با کنکور

- خلاصه مطالب دروس
- جزوات بهترین اساتید
- آرایه نکات کنکوری
- مشاوره کنکور
- اخبار کنکوری ها

« همه و همه در سردشاخ شدن با کنکور »

www.konkoori.blog.ir



فصل دوم

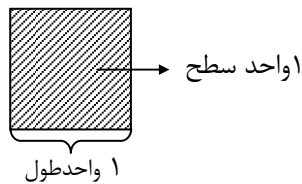
مساحت - رابطه ی فیثاغورس

تهیه کننده : جابر عامری دبیر ریاضی
شهرستان باوی

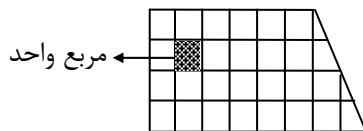
www.mathtower.org

✓ سطح و واحد آن

تعریف: هر مربع که اندازه ی طول ضلع آن یک واحد طول باشد را مربع واحد (واحد سطح) می نامند.

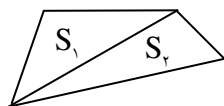


معمولاً مساحت هر شکل با تقسیم آن به تعدادی مربع واحد اندازه گیری می شود. به عبارت دیگر مساحت یک ناحیه، مقدار فضایی از صفحه است که آن ناحیه اشغال می کند.



✓ اصول مساحت

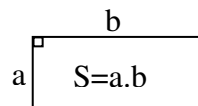
- ۱- مساحت هر شکل در صفحه یک عدد حقیقی مثبت است.
- ۲- اگر یک شکل از بخش های مجزایی تشکیل شده باشد، مساحت آن برابر مجموع مساحت های آن بخش ها است.



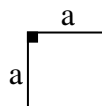
$$S_t = S_1 + S_2 \text{ (اصل مجموع مساحت ها)}$$

۳- شکل های همنهشت مساحت های مساوی دارند.

۴- مساحت مستطیل برابر حاصل ضرب طول در عرض آن است.

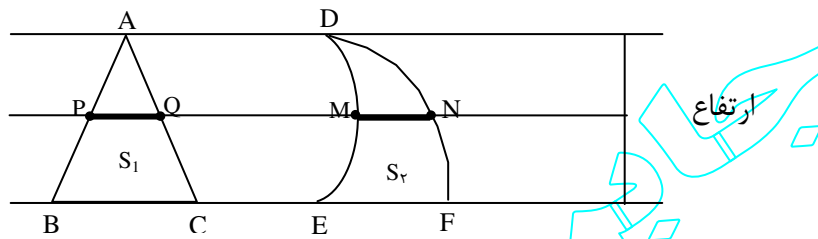


نتیجه: مساحت هر مربع برابر مجذور اندازه یک ضلع آن است.



$$S = a^2$$

۵- هرگاه قاعده‌های دو شکل بر روی یک خط قرار گرفته باشند و هر خط که موازی قاعده‌های دو شکل رسم شود در آنها قطعه‌های با طول‌های مساوی ایجاد کند مساحت آن دو شکل برابر است. (اصل کاوالیری در مساحت)



$$PQ = MN \rightarrow S_1 = S_2$$

نتیجه: از اصل کاوالیری برابری قاعده‌ها و برابری ارتفاع‌های دو شکل نیز نتیجه می‌شود.
تمرین: مساحت مستطیلی به طول ۹ برابر مساحت مربعی به ضلع ۱۲ است. عرض مستطیل را بیابید.

حل: اگر عرض مستطیل x باشد. در این صورت داریم.

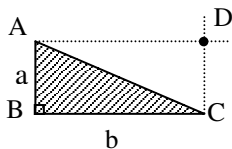
$$\text{مساحت مربع} = \text{مساحت مستطیل}$$

$$9x = (12)^2$$

$$\rightarrow 9x = 144 \rightarrow x = 16$$

☑ مساحت اشکال هندسی مهم

قضیه ی ۳۵) مساحت مثلث قائم‌الزاویه برابر نصف حاصل ضرب دو ضلع زاویه قائمه آن است.

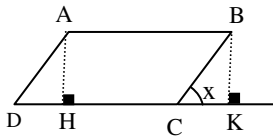


اثبات: ابتدا از رأس A خطی موازی ضلع BC و از رأس C خطی موازی ضلع AB رسم می‌بینیم واضح است که چهارضلعی حاصل مستطیل است و از دو مثلث همنهشت و مجزای ABC و ADC تشکیل شده است لذا

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times \text{مساحت مستطیل} = \frac{1}{2} a \cdot b$$

قضیه ی ۳۶ مساحت هر متوازی الاضلاع، با حاصل ضرب اندازه ی قاعده در ارتفاع نظیر

آن برابر است.



اثبات: از رأس B خطی بر امتداد ضلع DC عمود می‌کنیم
آنگاه داریم:

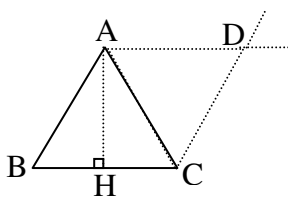
$$\left. \begin{array}{l} AB \parallel DC \text{ و } DC \text{ مورب} \rightarrow \hat{D} = \hat{x} \\ AD = BC \end{array} \right\} \rightarrow \triangle ADH \cong \triangle BCK \rightarrow S_{\triangle ADH} = S_{\triangle BCK}$$

(وتر و یک زاویه حاده)

از طرفی

$$\begin{aligned} \text{مساحت متوازی الاضلاع } ABCD &= \text{مساحت مثلث } ADH + \text{مساحت چهارضلعی } ABCH \\ &= \text{مساحت مثلث } BCK + \text{مساحت چهارضلعی } ABCH \\ &= \text{مساحت مستطیل } ABKH = AB \cdot AH = AH \cdot DC \end{aligned}$$

قضیه ی ۳۷ مساحت هر مثلث برابر نصف حاصل ضرب ارتفاع در قاعده نظیر آن است.



اثبات: از رأس A خطی موازی ضلع BC و از رأس C خطی موازی ضلع AB رسم می‌کنیم پس چهارضلعی حاصل متوازی الاضلاع است و از دو مثلث همنهشت و مجزا تشکیل شده است.

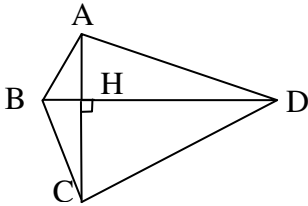
$$\left. \begin{array}{l} AB = DC \\ AC = AC \text{ مشترک} \\ BC = AD \end{array} \right\} \rightarrow \triangle ABC \cong \triangle ADC$$

(ض ض ض)

لذا

$$\text{مساحت مثلث } ABC = \text{نصف مساحت متوازی الاضلاع} = \frac{1}{2} AH \times BC$$

قضیه ی ۳۸ اگر در یک چهارضلعی دو قطر بر هم عمود باشند، مساحت آن چهارضلعی برابر نصف حاصل ضرب قطرهای آن است.

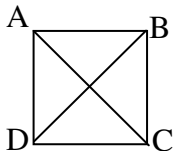


اثبات : با توجه به شکل می توان نوشت

$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= S_{\triangle ABD} + S_{\triangle CBD} \\ &= \frac{1}{2} AH \cdot BD + \frac{1}{2} HC \cdot BD \\ &= \frac{1}{2} BD (AH + HC) = \frac{1}{2} BD \times AC \end{aligned}$$

نتیجه :

(۱) مساحت هر کایت و هر لوزی با نصف حاصل ضرب قطرهای آن برابر است چون قطرهای آنها بر هم عمودند.



(۲) مساحت هر مربع با نصف مجذور اندازه قطر آن برابر است.

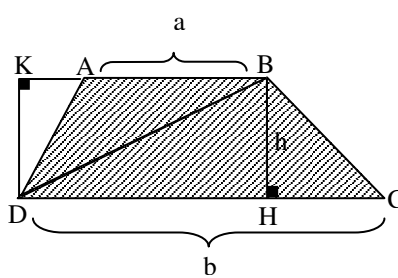
$$\begin{aligned} AC &= BD = r \\ AC \perp BD &\rightarrow S = \frac{1}{2} AC \cdot BD \\ &= \frac{1}{2} r \cdot r = \frac{1}{2} r^2 \end{aligned}$$

قضیه ی ۳۹ مساحت دوزنقه برابر نصف حاصل ضرب مجموع دو قاعده در ارتفاع آن برابر است.

اثبات : چون $AB \parallel DC$ پس بدیهی است که $DK = BH = h$

پس

مساحت ذوزنقه ABCD = $S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BDC}$

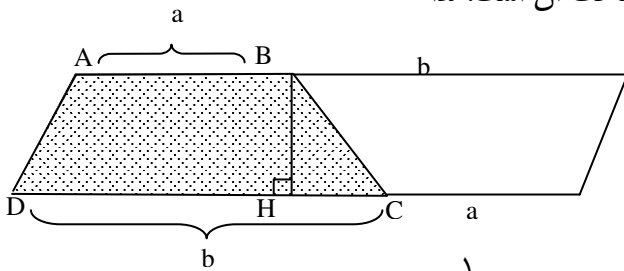


$$= \frac{1}{2} DK \cdot AB + \frac{1}{2} BH \cdot DC$$

$$= \frac{1}{2} h \cdot a + \frac{1}{2} h \cdot b$$

$$= \frac{1}{2} (a + b) h$$

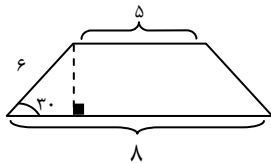
روش دوم: قاعده ی AB را از طرف نقطه ی B به اندازه ی DC و قاعده ی DC را از طرف نقطه ی C به اندازه ی AB امتداد می دهیم. بدیهی است که در چهار ضلعی بدست آمده دو ضلع مقابل موازی و مساویند. پس این چهار ضلعی متوازی الاضلاع می باشد و مساحت ذوزنقه نصف مساحت آن است. لذا



$$S = \frac{1}{2} (a + b) h$$

تمرین

۱- مساحت ذوزنقه شکل مقابل را حساب کنید.



۲- ثابت کنید که در هر مثلث قائم الزاویه حاصل ضرب دو ضلع زاویه قائمه با حاصل ضرب وتر در ارتفاع وارد بر وتر برابر است.

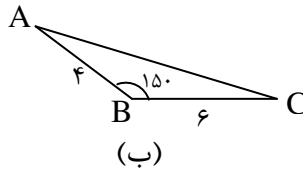
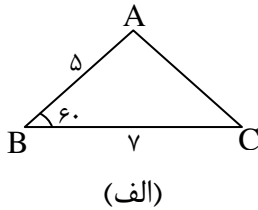
۳- احکام زیر را ثابت کنید.

الف- اگر قاعده‌های دو مثلث برابر باشند نسبت مساحت‌های آنها برابر نسبت ارتفاع‌های متناظر آنها است.

ب- اگر ارتفاع‌های دو مثلث برابر باشند نسبت مساحت‌های آنها برابر نسبت قاعده‌های متناظر آنها است.

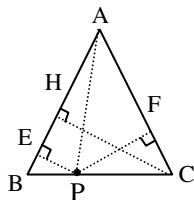
۴- ثابت کنید که مساحت هر مثلث با نصف حاصل ضرب هر دو ضلع در سینوس زاویه بین آن دو ضلع برابر است.

۵- مساحت مثلث‌های زیر را حساب کنید.



۶- مساحت مربعی را حساب کنید که طول قطر آن $2\sqrt{7}$ باشد.

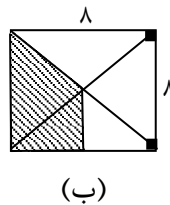
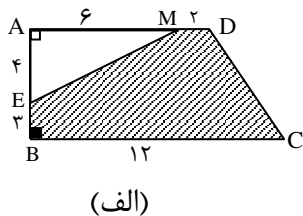
۷- ثابت کنید که مجموع فاصله‌های هر نقطه واقع بر قاعده ی یک مثلث متساوی الساقین از دو ساق آن با ارتفاع وارد بر یک ساق آن برابر است.



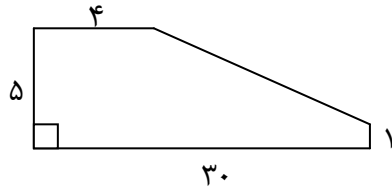
$$PE + PF = CH$$

۸- مساحت مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین ۴۰ است، اندازه ی هر کدام از ساقها را پیدا کنید.

۹- در هر مورد مساحت قسمت رنگی را به دست آورید.

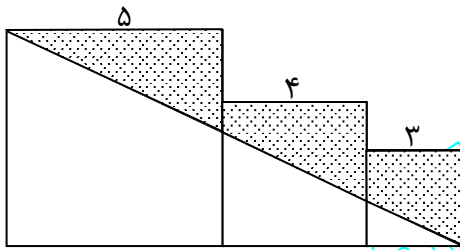


۱۰ - مساحت شکل مقابل را حساب کنید.



۱۱ - مساحت مربعی به قطر $6\sqrt{2}$ با مساحت مستطیلی به طول ۹ برابر است. اندازه ی عرض مستطیل را بدست آورید.

۱۲ - با توجه به شکل مقابل مساحت قسمت رنگی را به دست آورید. (هر سه چهارضلعی مربع هستند.)



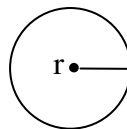
کار تحقیقی: چگونه می توان مساحت مثلث را فقط با داشتن اندازه ی سه ضلع آن محاسبه نمود؟

☑ مساحت و محیط دایره

مساحت و محیط هر دایره به شعاع r را می توان به صورت زیر محاسبه نمود.

$$S = \pi r^2 \text{ مساحت}$$

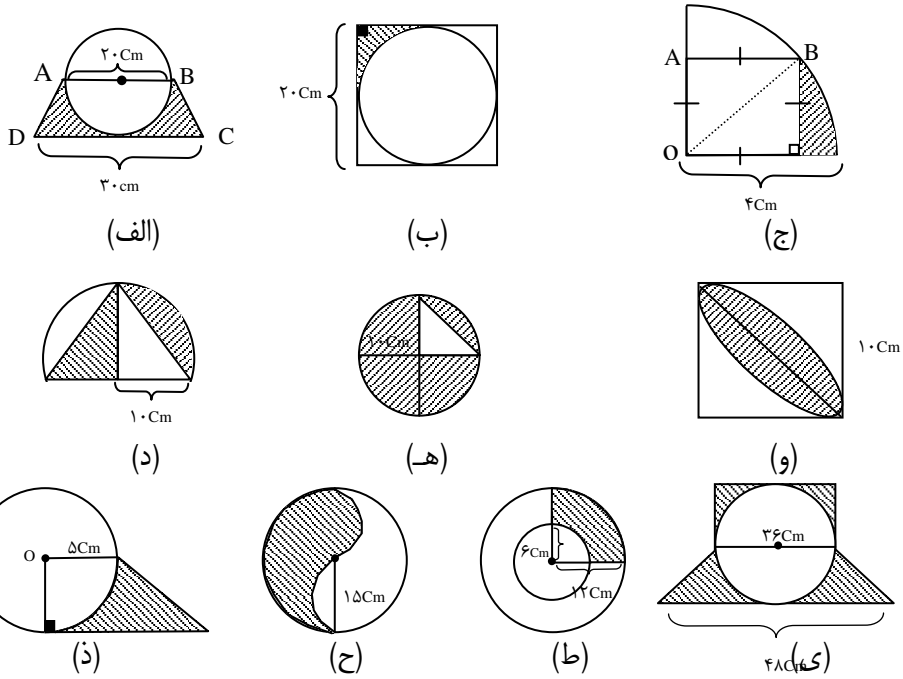
$$P = 2\pi r \text{ محیط}$$



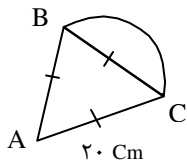
این دو رابطه را اینجا بدون اثبات می پذیریم.

تمرین

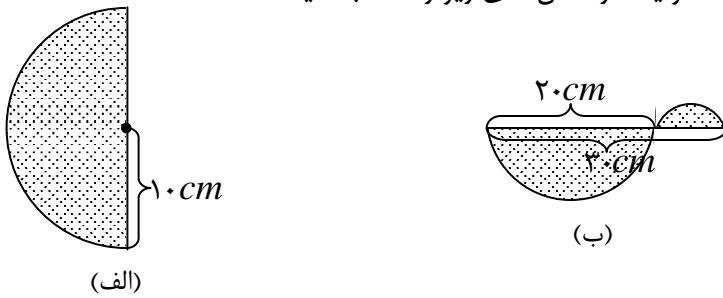
۱۳: مساحت و محیط دایره‌ای را حساب کنید که اندازه قطر آن ۱۰ سانتی‌متر باشد.
 ۱۴: با توجه به شکل‌های زیر در هر مورد مساحت قسمت رنگی را به دست آورید.



۱۵: در شکل مقابل مثلث ABC متساوی‌الاضلاع و BC قطر نیم دایره است محیط و مساحت شکل را محاسبه کنید.



۱۶: مساحت و محیط هر یک از شکل‌های زیر را حساب کنید.

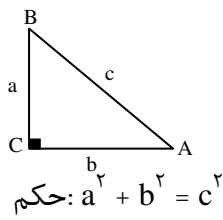


☑ قضیه ی فیثاغورس و کاربردهایی از آن

در ادامه یکی از قضیه های اساسی در مورد مثلث قائم الزاویه را بیان و اثبات می کنیم و در نهایت کاربرد هایی برای آن معرفی می نماییم.

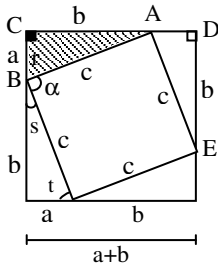
قضیه ی ۴۰ (قضیه ی فیثاغورس):

در هر مثلث قائم الزاویه مجموع وتر با مجموع مربعهای دو ضلع دیگر آن برابر است.



اثبات:

مرحله ی ۱) مربعی به ضلع $a + b$ رسم می کنیم سپس در این مربع چهار مثلث قائم الزاویه با اضلاع a و b تشکیل می دهیم.
مرحله ی ۲) بنا به حالت (ضضض) این چهار مثلث با همدیگر و با مثلث اصلی همنهشت هستند.



$$\left. \begin{array}{l} BC = AD \\ \hat{C} = \hat{D} = 90^\circ \\ AC = DE \end{array} \right\} \rightarrow \triangle ABC \cong \triangle ADE \text{ (ضضض)}$$

پس دارای وترهای برابر c می باشند.

مرحله ی ۳) چهارضلعی حاصل از چهار وتر مربع است. زیرا الف- چهارضلع مساوی دارد. ب- یک زاویه قائمه دارد.

$$\left. \begin{array}{l} \hat{S} + \hat{t} = 90^\circ \\ \hat{r} = \hat{t} \end{array} \right\} \rightarrow \hat{S} + \hat{r} = 90^\circ \xrightarrow[\text{(اصل زاویه نیم صفحه)}]{\hat{r} + \hat{\alpha} + \hat{S} = 180^\circ} \hat{\alpha} = 90^\circ$$

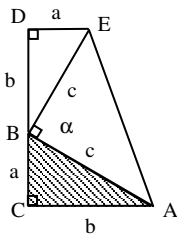
مرحله ی ۴) طبق اصل مجموع مساحت ها می توان نوشت:

مساحت ۴ مثلث همنهشت + مساحت مربع کوچک = مساحت مربع بزرگ

$$(a + b)^2 = c^2 + 4\left(\frac{1}{2}ab\right)$$

$$\rightarrow a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab \rightarrow a^2 + b^2 = c^2$$

تذکر ۱: می‌توان قضیه فیثاغورس را به روش زیر نیز ثابت کرد:
 با توجه به شکل مقابل واضح است که چهارضلعی دوزنقه است و مساحت آن با مجموع مساحت‌های مثلث‌های تشکیل دهنده آن مساوی است از طرفی مانند اثبات قبلی زاویه \hat{A} قائمه است لذا می‌توان نوشت



مجموع مساحت‌های سه مثلث = مساحت دوزنقه

$$\frac{1}{2}(a+b)(a+b) = \frac{1}{2}a.b + \frac{1}{2}c.c + \frac{1}{2}a.b$$

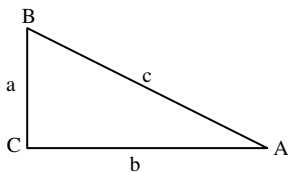
$$\frac{1}{2}(a+b)^2 = \frac{1}{2}(ab + c^2 + ab)$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

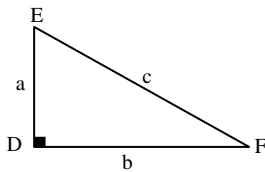
قضیه ی ۴۱ (عکس قضیه ی فیثاغورس):

اگر در مثلثی مربع بزرگترین ضلع با مجموع مربع‌های دو ضلع دیگر برابر باشد آن مثلث قائم‌الزاویه و زاویه روبرو به ضلع بزرگتر قائمه است.



$$a^2 + b^2 = c^2 \text{ : فرض}$$

اثبات: مثلثی قائم‌الزاویه به نام DEF طوری رسم می‌کنیم که اضلاع زاویه ی قائمه ی آن a و b باشند. آنگاه داریم



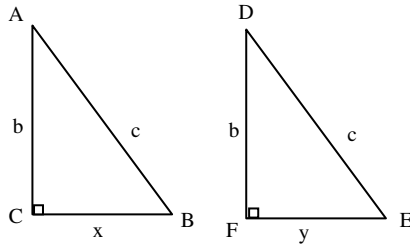
$$a^2 + b^2 = x^2$$

و با مقایسه با فرض قضیه می‌توان نوشت

$$x^2 = c^2 \rightarrow x = a$$

لذا مثلث‌های ABC و DEF بنا به حالت (ضضض) همیشه هستند و چون زاویه D قائمه است پس زاویه متناظر آن یعنی زاویه C نیز قائمه است.

قضیه ی ۴۲ هرگاه وتر و یک ضلع از یک مثلث قائم‌الزاویه با وتر و یک ضلع از مثلث قائم‌الزاویه دیگری برابر باشند آن دو مثلث همنهشت هستند.



فرض : $AB = DE$ و $AC = DF$

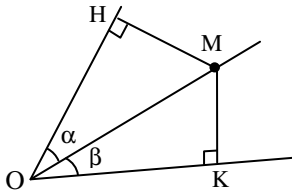
حکم : $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

اثبات : چون هر دو مثلث قائم‌الزاویه هستند پس رابطه فیثاغورس را برای هر مثلث می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$\left. \begin{array}{l} \triangle ABC : x^2 + b^2 = c^2 \\ \triangle DEF : y^2 + b^2 = c^2 \end{array} \right\} \rightarrow x^2 = y^2 \rightarrow x = y$$

و لذا دو مثلث به حالت (ضضض) همنهشت هستند.

قضیه ی ۴۳ هرگاه نقطه‌ای از دو ضلع زاویه‌ای به یک فاصله باشد آن نقطه روی نیمساز زاویه قرار دارد.



فرض : $MH = MK$

حکم : $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$

اثبات : دو مثلث $\triangle OMH$ و $\triangle OMK$ قائم‌الزاویه هستند پس

$$\left. \begin{array}{l} MH = MK \\ \text{مشترك} \quad OM = OM \end{array} \right\} \rightarrow \triangle OMH \cong \triangle OMK \rightarrow \hat{\alpha} = \hat{\beta}$$

(وتر و یک ضلع)

☑ چندضلعی منتظم

تعریف : هر چند ضلعی را منتظم گویند، هرگاه تمام اضلاع آن برابر و تمام زاویه‌های آن نیز برابر باشند.

مثلاً: مثلث متساوی الاضلاع که سه ضلعی منتظم و مربع که چهارضلعی منتظم است.

نتیجه: اندازه هر زاویه داخلی n ضلعی منتظم برابر $\frac{(n-2) \times 180}{n}$ درجه است.

تمرین

۱۷- طول قطر مربعی به ضلع a را حساب کنید

۱۸- اندازه y هر زاویه داخلی یک 10 ضلعی منتظم را به دست آورید.

۱۹- الف- ثابت کنید که مساحت هر مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع a برابر $\frac{\sqrt{3}}{4} a^2$ است.

ب- طول ارتفاع و مساحت مثلث متساوی الاضلاعی را حساب کنید که طول ضلع آن 10 cm باشد.

نتیجه: اندازه ارتفاع مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع a برابر $\frac{\sqrt{3}}{2} a$ است.

۲۰- ثابت کنید که هر شش ضلعی منتظم به طول ضلع a توسط قطرهای آن به شش مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع α تبدیل می‌شود.

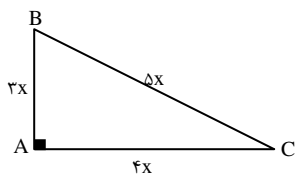
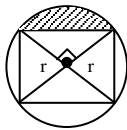
۲۱- الف- ثابت کنید که مساحت هر شش ضلعی منتظم به ضلع a برابر $\frac{3\sqrt{3}}{2} a^2$ است.
ب- مساحت یک شش ضلعی منتظم را حساب کنید که طول ضلع آن 10 cm باشد.

۲۲- مطابق شکل مقابل مربعی در دایره‌ای به شعاع r محاط شده است.

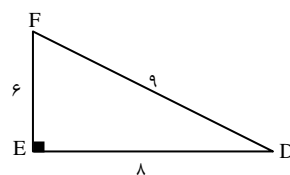
الف - اندازه ضلع مربع را بر حسب r به دست آورید.

ب - مساحت قسمت رنگی را بر حسب r به دست آورید.

۲۳- کدامیک از مثلث‌های زیر قائم الزاویه است، زاویه قائمه آن را پیدا کنید.

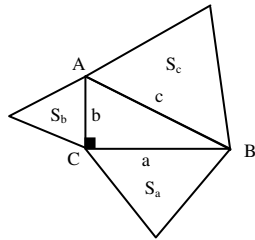


(الف)

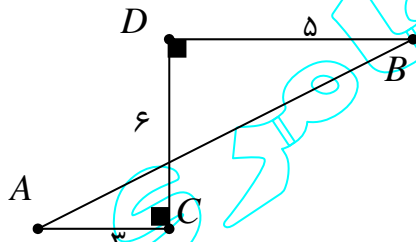


(ب)

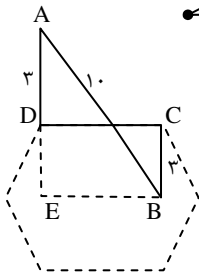
۲۴- مطابق شکل روی هر ضلع مثلث قائم الزاویه $\triangle ABC$ مثلث متساوی الاضلاعی ساخته شده است، چه رابطه‌ای بین مساحت‌های این سه مثلث وجود دارد.



۲۵- با توجه به شکل مقابل اندازه‌ی پاره خط AB را تعیین کنید.



۲۶- با توجه به شکل مقابل مساحت شش ضلعی منتظم را حساب کنید.



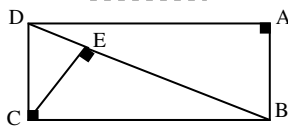
$$AB = 10$$

$$AD = 5$$

$$BC = 3$$

۲۷- در شکل مقابل ثابت کنید که

$$AD^2 - AB^2 = BE^2 - DE^2$$

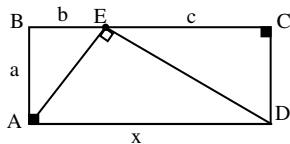


۲۸- نسبت طول ضلع‌های زاویه قائمه در مثلث قائم الزاویه‌ای ۲ به ۳ است. اگر مساحت

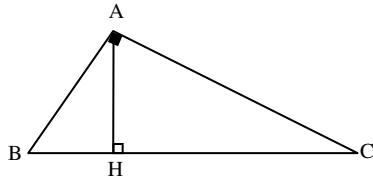
مثلث ۲۷ باشد طول وتر آن چقدر است؟

۲۹- با توجه به شکل مقابل ثابت کنید که

$$x^2 = 2a^2 + b^2 + c^2 \quad \text{الف}$$



ب - $a^2 = bc$



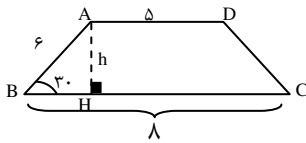
۳۰- با توجه به شکل مقابل ثابت کنید که

الف - $AH^2 = BH \cdot CH$

ب - $AB^2 = BH \cdot BC$

پاسخ تمرین‌های فصل ۲

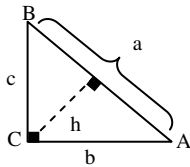
۱-



$\triangle ABH: h = \frac{AB}{2} = 3$

واحد سطح $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(5+8) \times 3 = 19.5$

۲-



$$\left. \begin{aligned} S &= \frac{1}{2}bc \\ S &= \frac{1}{2}ah \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{1}{2}bc = \frac{1}{2}ah \rightarrow bc = ah$$

۳-

	مساحت	ارتفاع	قاعده
مثلث اول	S_1	h	a
مثلث دوم	S_2	k	b

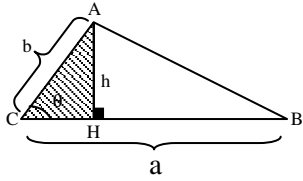
الف - $a = b$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2}ah}{\frac{1}{2}bk} = \frac{h}{k}$$

$$h = k \text{ -ب}$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2}ah}{\frac{1}{2}bk} = \frac{a}{b}$$

-٤



$$\triangle ACH: \sin \theta = \frac{AH}{AC}$$

$$\sin \theta = \frac{h}{b} \rightarrow h = b \sin \theta$$

$$S = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}a(b \sin \theta) = \frac{1}{2}ab \sin \theta$$

(٥- الف)

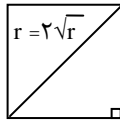
$$S = \frac{1}{2} \times 5 \times 6 \times \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times 5 \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15}{2} \sqrt{3} \text{ واحد سطح}$$

(ب)

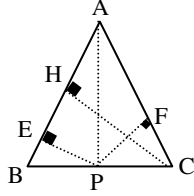
$$\sin 150^\circ = \sin(\pi - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$S = \frac{1}{2} \times 4 \times 6 \times \sin(150^\circ) = \frac{1}{2} \times 4 \times 6 \times \frac{1}{2} = 6 \text{ واحد سطح}$$

-٦



$$S = \frac{1}{2}r^2 = \frac{1}{2}(2\sqrt{7})^2 = 4 \times 7 = 28 \text{ واحد سطح}$$



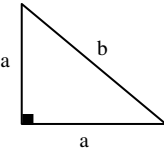
$AB = AC$ -٧

$S_t = S_{ABP} + S_{ACP}$

$\frac{1}{2} CH \cdot AB = \frac{1}{2} PE \cdot AB + \frac{1}{2} PF \cdot AC$

$\frac{1}{2} CH \cdot AB = \frac{1}{2} AB (PE + PF)$

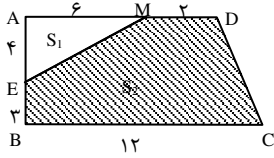
$CH = PE + PF$



-٨

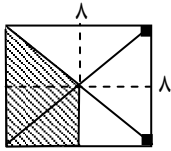
$S = \frac{1}{2} a^2 = 40 \rightarrow a^2 = 80 \rightarrow a = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$

(الف-٩)



$S_r = S_t - S_1$

$S_r = \frac{1}{2} (12 + 12)(7) - \frac{1}{2} (4)(6) = 70 - 12 = 58$ واحد سطح



(ب)

$S = \left(\frac{S_t}{8}\right) \times 3 = \frac{8 \times 8}{8} \times 3 = 24$ واحد سطح

- ١٠

- ١١

- ١٢

$r = \frac{d}{2} = \frac{10}{2} = 5$ شعاع دایره و $d = 10$ قطر دایره -١٣

واحد سطح $S = \pi r^2 = \pi(5)^2 = 25\pi$ مساحت

واحد طول $P = 2\pi r = 2\pi(5) = 10\pi$ محیط

$S =$ نصف مساحت دایره - مساحت لوزی (الف-١٤)

$$S = \frac{1}{2}(20+30)(10) - \frac{1}{2}\pi(10)^2$$

$$= 250 - 50\pi \text{ cm}^2$$

(ب)

$$S = \frac{\text{مساحت دایره} - \text{مساحت مربع}}{4} = \frac{(20)^2 - \pi(10)^2}{4}$$

$$= \frac{400 - 100\pi}{4} = 100 - 25\pi \text{ cm}^2$$

(ج)

$$S = \frac{\text{مربع مساحت} - \text{دایره ربع مساحت}}{2} = \frac{\frac{1}{4}\pi r^2 - \frac{1}{2}r^2}{2} = \frac{1}{8}\pi r^2 - \frac{1}{4}r^2$$

$$S = \frac{1}{8}\pi(4)^2 - \frac{1}{4}(4)^2 = 2\pi - 4 \text{ cm}^2$$

(د)

$$S = \frac{\text{مساحت نیم دایره}}{2} = \frac{\frac{1}{2}\pi r^2}{2} = \frac{1}{4}\pi r^2 = \frac{1}{4}\pi(10)^2 = 25\pi$$

(هـ)

مساحت مثلث - مساحت ربع دایره

$$S = \frac{1}{2}\pi r^2 - \frac{1}{2}r^2 = \frac{1}{2}\pi(10)^2 - \frac{1}{2}(10)^2 = 25\pi - 50 \text{ cm}^2$$

(و)

مساحت مربع - (مساحت ربع دایره) ۲

$$S = 2\left(\frac{1}{4}\pi r^2\right) - r^2 = \frac{1}{2}\pi(10)^2 - 10^2 = 50\pi - 100 \text{ cm}^2$$

(ز)

مساحت ربع دایره - مساحت ذوزنقه

$$S = \frac{1}{2}(\delta + \gamma)(\delta) - \frac{1}{4}\pi(\delta)^2$$

$$= 30 - \frac{25}{4}\pi = \frac{120 - 25\pi}{4} \text{ cm}^2$$

$$S = \text{مساحت نیم دایره} = \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi(15)^2 = \frac{225}{2}\pi \text{ cm}^2 \quad (\text{ح})$$

$$S = \frac{\text{مساحت دایره کوچک} - \text{مساحت دایره بزرگ}}{4} \quad (\text{ط})$$

$$S = \frac{\pi(12)^2 - \pi(6)^2}{4} = \frac{144\pi - 36\pi}{4} = 36\pi - 9\pi = 27\pi \text{ cm}^2$$

(ی)

مساحت دایره - (مساحت ذوزنقه + مساحت مستطیل)

$$S = [(18 \times 36) + \frac{1}{2}(36 + 48)(18)] - \pi(18)^2$$

$$= (648 + 756) - 324\pi$$

$$= 1404 - 324\pi \text{ cm}^2$$

طول ضلع مثلث a = مساحت -۱۵

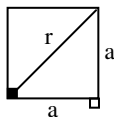
مساحت نیم دایره + مساحت مثلث متساوی الاضلاع

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 - \frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (20)^2 - \frac{1}{2}\pi\left(\frac{20}{2}\right)^2 = 100\sqrt{3} - 50\pi \text{ cm}^2$$

محیط نیم دایره + طول دو ضلع مثلث P = محیط

$$P = 2a + 2\pi\left(\frac{a}{2}\right) = 2(20) + \pi(20) = 40 + 20\pi \text{ cm}^2$$

: ۱۶



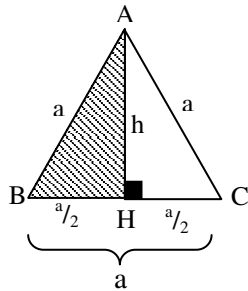
$$r^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \quad -17$$

$$r = \sqrt{2}a$$

$$n = 10 \quad -18$$

$$\frac{(n-2) \times 180}{n} = \frac{(10-2)(180)}{10} = 144^\circ$$

۱۹- در مثلث متساوی الاضلاع ارتفاع وارد بر هر ضلع میانه وارد بر آن نیز می باشد پس



$$BC = a \rightarrow BH = HC = \frac{a}{2} \quad (\text{الف})$$

$$\triangle ABH: \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 = a^2$$

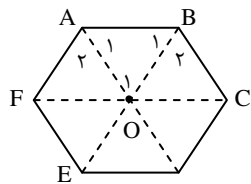
$$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$

$$h = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} a \quad \text{اندازه ارتفاع}$$

$$S = \frac{1}{2} ah = \frac{1}{2} a \times \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 10 = 5\sqrt{3} \text{ cm} \quad (\text{ب})$$

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} (10)^2 = 25\sqrt{3} \text{ cm}^2$$



۲۰- بدیهی است که هر قطر شش ضلعی منتظم محور تقارن آن است پس BC نیمساز زاویه B است. از طرفی اندازه هر زاویه شش ضلعی منتظم برابر

$$\hat{B}_1 = 60^\circ \quad \text{پس} \quad \frac{(n-2) \times 180}{6} = 4 \times 30 = 120^\circ$$

به همین ترتیب نشان داده می شود که $\hat{A}_1 = 60^\circ$ پس $\hat{O}_1 = 60^\circ$ یعنی مثلث AOB سه زاویه مساوی دارد لذا متساوی الاضلاع است.

۲۱- الف) طبق تمرین قبل واضح است که هر شش ضلعی منتظم به ضلع a از شش مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a تشکیل شده است پس

$$S = 6 \times S_{\triangle AOB} = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2$$

$$S = \frac{3\sqrt{3}}{2} (10)^2 = 150\sqrt{3} \text{ cm}^2 \quad (\text{ب})$$

$$a^2 = r^2 + r^2 = 2r^2 \quad (\text{الف-۲۲})$$

$$a = \sqrt{2}r$$

$$S = \frac{\text{مساحت مربع} - \text{مساحت دایره}}{4} = \frac{\pi r^2 - a^2}{4} = \frac{\pi r^2 - (\sqrt{2}r)^2}{4} \quad (\text{ب})$$

$$= \frac{\pi r^2 - 2r^2}{4} = \frac{\pi - 2}{4} r^2$$

۲۳- با استفاده از خاصیت عکس نقیض قضیه فیثاغورس اگر در یک مثلث رابطه $a^2 = b^2 + c^2$ برقرار نباشد آن مثلث قائم الزویه نیست.

$$(5X)^2 = (3X)^2 + (4X)^2 \quad (\text{الف})$$

$$25X^2 = 9X^2 + 16X^2$$

مثلث ABC قائم الزویه است $\rightarrow 25X^2 = 25X^2$

$$9^2 = 6^2 + 8^2 \quad (\text{ب})$$

$$81 = 36 + 64$$

مثلث DEF قائم الزویه نیست $\rightarrow 81 = 100$

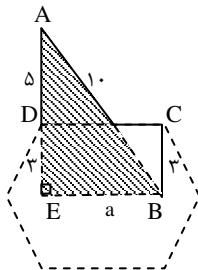
-۲۴

$c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow$ مثلث ABC قائم الزویه است

$$\times \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ دوطرف} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4} c^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} b^2$$

$$\rightarrow S_c = S_a + S_b$$

- ۲۵



$$\triangle AEB: a^2 + 8^2 = 10^2 \rightarrow a^2 = 36 \rightarrow a = 6$$

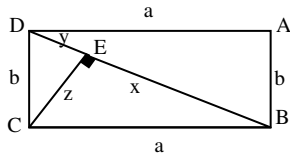
-۲۶

$$S = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \times 36 = 54\sqrt{3}$$

واحد سطح $54\sqrt{3}$

-٢٧

حکم : $a^2 - b^2 = x^2 - y^2$

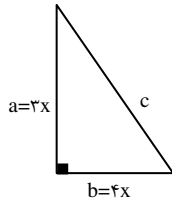


$$\left. \begin{array}{l} \Delta BEC: a^2 = x^2 + z^2 \\ \Delta DEC: b^2 = y^2 + z^2 \end{array} \right\}$$

$$\rightarrow a^2 - b^2 = (x^2 + z^2) - (y^2 + z^2) = x^2 - y^2$$

-٢٨

$$S = 27$$



$$\frac{1}{2} (2x)(3x) = 27$$

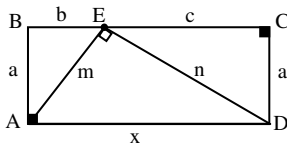
$$3x^2 = 27 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = 3$$

$$a = 2x = 2(3) = 6$$

$$b = 3x = 3(3) = 9$$

$$c^2 = a^2 + b^2 = 36 + 81 = 117 \rightarrow c = \sqrt{117}$$

(٢٩- الف)



$$\Delta ABE: m^2 = a^2 + b^2$$

$$\Delta CDE: n^2 = a^2 + c^2$$

$$\Delta ADE: x^2 = m^2 + n^2$$

$$x^2 = (a^2 + b^2) + (a^2 + c^2)$$

$$x^2 = 2a^2 + b^2 + c^2$$

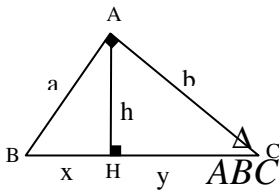
$$x = b + c \rightarrow x^2 = (b + c)^2 \rightarrow x^2 = b^2 + 2bc + c^2 \quad \text{ب-}$$

$x^2 = 2a^2 + b^2 + c^2$ با توجه به تمرین الف

$$2a^2 + b^2 + c^2 = b^2 + 2bc + c^2$$

$$2a^2 = 2bc \Rightarrow a^2 = bc$$

-۳۰



$$\triangle ABH: a^2 = x^2 + h^2$$

(الف)

$$\triangle ACH: b^2 = y^2 + h^2$$

$$\begin{aligned} \triangle ABC: AB^2 + AC^2 &= BC^2 \rightarrow a^2 + b^2 = (x + y)^2 \\ &\rightarrow (x^2 + h^2) + (y^2 + h^2) = x^2 + 2xy + y^2 \\ &\rightarrow 2h^2 = 2xy \rightarrow h^2 = xy \rightarrow AH^2 = BH \cdot CH \end{aligned}$$

$$\triangle ABH: a^2 = x^2 + h^2$$

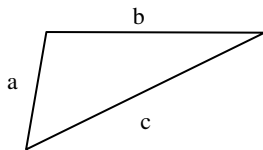
(ب)

طبق تمرین الف $a^2 = x^2 + xy$

$$a^2 = x(x + y)$$

$$AB^2 = BH \cdot BC$$

کار تحقیقی: اگر اندازه سه ضلع مثلث معلوم باشد ابتدا محیط مثلث یعنی $a + b + c$ را به دست آورده و نصف آن را به دست می‌آوریم.



$$P = \frac{a + b + c}{2} \text{ نصف محیط}$$

$$S = \sqrt{P(P - a)(P - b)(P - c)}$$

این رابطه به عنوان دستور Heron در تعیین مساحت اراضی موارد استعمال فراوان دارد. مثال ۱- مساحت مثلث را که اندازه ضلع‌های آن ۷ و ۵ و ۶ سانتی‌متر است و ارتفاع‌های

نظیر این ضلعها را حساب کنید.

$$P = \frac{۷ + ۵ + ۶}{۲} = ۹$$

$$S = \sqrt{۹(۹-۷)(۹-۶)(۹-۵)} = ۶\sqrt{۶} \text{ cm}^۲$$

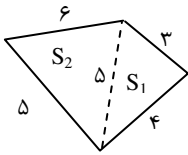
$$S = \frac{۱}{۲} a h_a \rightarrow ۶\sqrt{۶} = \frac{۱}{۲} (۷) h_a \rightarrow h_a = \frac{۱۲\sqrt{۶}}{۷}$$

$$S = \frac{۱}{۲} b h_b \rightarrow ۶\sqrt{۶} = \frac{۱}{۲} (۵) h_b \rightarrow h_b = \frac{۱۲\sqrt{۶}}{۵}$$

$$S = \frac{۱}{۲} c h_c \rightarrow ۶\sqrt{۶} = \frac{۱}{۲} (۶) h_c \rightarrow h_c = ۲\sqrt{۶}$$

$$h_a = \frac{۲}{a} \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} \quad \text{نتیجه :}$$

مثال ۲- مساحت شکل مقابل را حساب کنید.



$$P_1 = \frac{۳ + ۴ + ۵}{۲} = ۶$$

$$S_1 = \sqrt{۶(۶-۳)(۶-۴)(۶-۵)} = \sqrt{۶ \times ۳ \times ۲ \times ۱} = ۶$$

$$P_2 = \frac{۶ + ۵ + ۵}{۲} = ۸$$

$$S_2 = \sqrt{۸(۸-۶)(۸-۵)(۸-۵)} = \sqrt{۸ \times ۲ \times ۳ \times ۳} = ۱۲$$

$$S_t = S_1 + S_2 = ۶ + ۱۲ = ۱۸ \text{ واحد سطح}$$

مثال ۳- با استفاده از دستور Heron مساحت و ارتفاع مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a را حساب کنید.

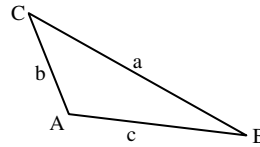
$$P = \frac{a+a+a}{۲} = \frac{۳a}{۲} \rightarrow S = \sqrt{\frac{۳a}{۲} \left(\frac{۳a}{۲} - a\right)} = \frac{\sqrt{۳} a^۲}{۴}$$

$$S = \frac{۱}{۲} a h_a \rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۴} a^۲ = \frac{۱}{۲} a h_a \rightarrow h_a = \frac{\sqrt{۳}}{۲} a$$

✓ جهت مطالعه

قضیه (قضیه کسینوس‌ها): در هر مثلث مربع هر ضلع با مجموع مربعات دو ضلع دیگر منهای دو برابر حاصل ضرب همین دو ضلع در کسینوس زاویه بین آنها برابر است.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$



اثبات: حالت الف- اگر زاویه \hat{A} حاده باشد

$$\triangle ABH: c^2 = BH^2 + AH^2$$

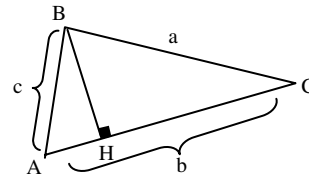
$$\triangle BCH: a^2 = BH^2 + CH^2$$

$$\rightarrow a^2 = BH^2 + (b - AH)^2$$

$$\rightarrow a^2 = \underbrace{BH^2 + AH^2}_{c^2} + b^2 - 2b \cdot AH$$

$$\rightarrow a^2 = c^2 + b^2 - 2b \cdot AH$$

$$\rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$



$$\cos A = \frac{AH}{c} \rightarrow AH = c \cos \hat{A}$$

حالت ب- اگر زاویه \hat{A} منفرجه باشد

$$\triangle ABH: c^2 = BH^2 + AH^2$$

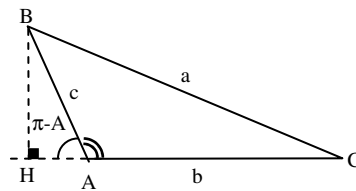
$$\triangle BCH: a^2 = BH^2 + CH^2$$

$$\rightarrow a^2 = BH^2 + (b + AH)^2$$

$$\rightarrow a^2 = \underbrace{BH^2 + AH^2}_{c^2} + b^2 + 2b \cdot AH$$

$$\rightarrow a^2 = c^2 + b^2 + 2b \cdot AH$$

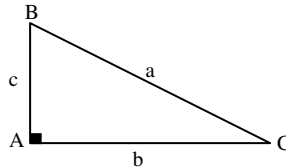
$$\rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$



$$\cos(\pi - A) = \frac{AH}{c} \rightarrow -\cos A = \frac{AH}{c} \rightarrow AH = -c \cos A \quad \triangle ABH \text{ در مثلث}$$

حالت ج- اگر زاویه \hat{A} قائم باشد آنگاه $\cos A = 0$ و لذا قضیه فیثاغورس به دست می‌آید که حالت خاصی از قضیه کسینوس‌ها است.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

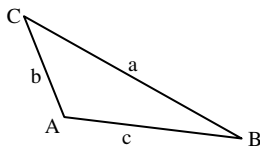


☑ جهت مطالعه

قضیه (قضیه سینوس‌ها) : در هر مثلث نسبت‌های اندازه‌ی هر ضلع بر سینوس زاویه

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \text{ : یعنی مساویند.}$$

اثبات:



$$S = \frac{1}{2}bc \sin A$$

$$S = \frac{1}{2}ac \sin B$$

$$S = \frac{1}{2}ab \sin C$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C \xrightarrow{\times \frac{2}{abc}} \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

☑ نکته

مساحت چند ضلعی منتظم با معلوم بودن اندازه‌ی ضلع آن اگر اندازه‌ی ضلع یک n منتظم برابر a باشد. در این صورت مساحت آن به صورت زیر است.

$$S = \frac{na^2}{4} \cot \frac{\pi}{n}$$

برای مثال مساحت شش ضلعی منتظم به کمک این فرمول به شکل زیر است.

$$S = \frac{na^2}{4} \cot \frac{\pi}{n} \rightarrow S = \frac{6a^2}{4} \cot \frac{\pi}{6} = \frac{3a^2}{2} \times \sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2}$$
