مرحله دوم بیست و نهمین المپیاد ریاضی ایران

هشتم و نهم اردیبهشت نود

ویرایش و پاسخ:

محمد شریفی

سیامک احمدپور

مرتضی محمدآبادی

سوالات روز اول

۱) ۱۳۹۰ مورچه روی زمین در اطراف یک خط راست طوری قرار گرفته‌اند که فاصلهٔ سر هر کدام تا خط کمتر از یک سانتی‌متر است. ثابت کنید اگر فاصلهٔ سر هر دو مورچه بیش از دو سانتی‌متر باشد، فاصلهٔ سر دست‌کم دو مورچه بیش از ۱۰ متر است. (فرض کنید سر هر مورچه یک نقطه است!)

۲) در مثلث ABC داریم $\angle ABC = 60^\circ$. از رأس B عمودی بر ضلع AB رسم می‌کنیم تا نیم‌ساز زاویه‌ی BAC را در نقطه‌ی D قطع کند. هم‌چنین از C عمودی بر ضلع BC رسم می‌کنیم تا نیم‌ساز زاویه‌ی ABC را در نقطه‌ی E قطع کند. ثابت کنید $\angle BED \leq 30^\circ$.

۳) همه‌ی دنباله‌های صعودی $a_1, a_2, a_3, \ldots$ از اعداد طبیعی را بیابید که برای هر $i, j \in \mathbb{N}$، تعداد مقسوم‌علیه‌های $i+j$ با تعداد مقسوم‌علیه‌های $a_i + a_j$ برابر باشد. (صعودی بودن دنباله یعنی اگر $i \leq j$، آن‌گاه $a_i \leq a_j$.)

پاسخ سوالات روز اول

۱) ۱۳۹۰ مورچه روی زمین در اطراف یک خط راست طوری قرار گرفته‌اند که فاصلهٔ سر هر کدام تا خط کمتر از یک سانتی‌متر است. ثابت کنید اگر فاصلهٔ سر هر دو مورچه بیش از دو سانتی‌متر باشد، فاصلهٔ سر دست‌کم دو مورچه بیش از ۱۰ متر است. (فرض کنید سر هر مورچه یک نقطه است!)

راه‌حل اول. طبق اصل لانه کبوتری حداقل $۶۹۵ = \frac{۱۳۹۰}{۲}$ تا از مورچه‌ها در یک طرف این خط راست قرار دارند. حال دستگاه محور مختصات را طوری در نظر بگیرید که این خط راست محور x ها باشد. فرض کنید مختصات سر مورچهٔ i اُم ($۱ \leq i \leq ۶۹۵$)، (x_i, y_i) باشد. بدون اینکه به کلیت مسأله لطمه‌ای بخورد می‌توان فرض کرد $x_۱ \leq x_۲ \leq x_۳ \leq \cdots \leq x_{۶۹۵}$. از آنجایی که فاصلهٔ سر هر دو مورچه بیش از دو سانتی‌متر است و $۰ \leq y_i, y_{i+۱} \leq ۱$، بنابراین

$$\sqrt{(x_{i+۱} - x_i)^۲ + (y_{i+۱} - y_i)^۲} > ۲ \quad \Rightarrow \quad x_{i+۱} - x_i > \sqrt{۳}$$
$$\Rightarrow \quad x_{۶۹۵} - x_۱ > ۶۹۴\sqrt{۳}$$

بنابراین فاصلهٔ سر مورچهٔ اول و ۶۹۵ ام بیش از ۱۰ متر است.

راه‌حل دوم. باز دستگاه محور مختصات را طوری در نظر بگیرید که این خط راست محور x ها باشد. همچنین فرض کنید مختصات سر مورچهٔ i ام ($۱ \leq i \leq ۱۳۹۰$)، (x_i, y_i) باشد. بدون اینکه به کلیت مسأله لطمه‌ای بخورد می‌توان فرض کرد $x_۱ \leq x_۲ \leq x_۳ \leq \cdots \leq x_{۱۳۹۰}$. حال ۱۳۹۰ دایره به مرکز سر هر یک از این مورچه‌ها و به شعاع ۱ رسم کنید. از آنجایی که فاصلهٔ سر هر دو مورچه بیش از دو سانتی‌متر است، پس این دایره‌ها با هم هیچ اشتراکی ندارند. حال مستطیلی که طول آن موازی این خط راست و همه این دایره‌ها داخل آن قرار دارند در نظر بگیرید. عرض این مستطیل حداکثر ۴ می‌باشد. چرا؟ همچنین اگر $x_{۱۳۹۰} - x_۱ = m$ باشد، طول آن حداکثر برابر $m + ۲$ سانتی‌متر می‌باشد. چرا؟ پس مجموع مساحت مستطیل‌ها کمتر از مساحت این مستطیل است. یعنی

$$۱۳۹۰\pi \leq ۴(m + ۲) \Rightarrow m \geq \frac{۱۳۹۰\pi}{۴} - ۲ > ۱۰۸۹$$

یعنی فاصلهٔ افقی مورچهٔ اول و آخر بیش از ۱۰ متر است، پس فاصلهٔ آن دو بیش از ۱۰ متر است.

توجه. سعی کنید سؤال فوق را در حالتی که مورچه‌ها در فضا قرار دارند حل کنید. در این‌صورت حکم به وجود دو نقطه با فاصلهٔ حداقل ۴۶۱ سانتی‌متر از یکدیگر تغییر می‌کند. به نظر می‌رسد اصل سؤال پیشنهادی به کمیته این سؤال بوده است که بنا به دلایلی به سؤال فوق تغییر کرده است.

۲) در مثلث ABC داریم $\angle ABC = ۶۰^\circ$. از رأس B عمودی بر ضلع AB رسم می‌کنیم تا نیم‌ساز زاویه‌ی BAC را در نقطه‌ی D قطع کند. هم‌چنین از C عمودی بر ضلع BC رسم می‌کنیم تا نیم‌ساز زاویه‌ی ABC را در نقطه‌ی E قطع کند. ثابت کنید $\angle BED \leq ۳۰^\circ$.

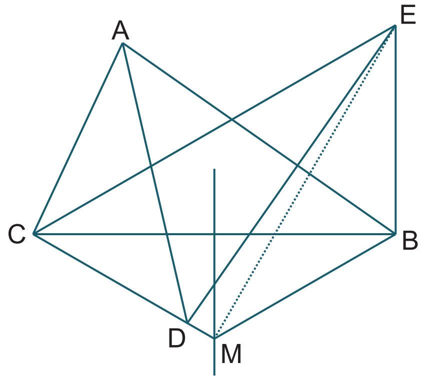
راه‌حل.

لم. نقاط A, B, C در صفحه مفروضند. در این صورت $AB < AC$ اگر و فقط اگر A و B در یک طرف عمود منصف پاره‌خط BC باشند.

اثبات لم به خواننده واگذار می‌شود.

اثبات مسئله. می‌دانیم D نقطه‌ای روی نیم‌ساز زاویه‌ی $\angle BAC$ است. بنابراین فاصله‌ی نقطه‌ی D از خط AC برابر است با BD. در نتیجه $CD \geq BD$ (تساوی تنها زمانی برقرار می‌شود که زاویه‌ی DCA قائمه باشد). پس طبق لم، نقاط B و D در یک طرف عمود منصف پاره‌خط BC قرار دارند. پاره‌خط BD را از طرف D امتداد می‌دهیم تا عمود منصف پاره‌خط BC را در نقطه‌ی M قطع کند. داریم

$$\left.\begin{array}{l} MB = MC \\ \angle MCB = \angle MBC = ۳۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \angle BMC = ۱۲۰^\circ$$



پس $\angle BMC + \angle BEC = ۱۲۰^\circ + ۶۰^\circ = ۱۸۰^\circ$، یعنی چهارضلعی $EBMC$ محاطی است و

$$\angle BED \leq \angle BEM = \angle BCM = ۳۰^\circ$$

تساوی تنها زمانی برقرار می‌شود که مثلث ABC متساوی‌الاضلاع باشد.

۳) همه‌ی دنباله‌های صعودی $a_۱, a_۲, a_۳, \ldots$ از اعداد طبیعی را بیابید که برای هر $i, j \in \mathbb{N}$، تعداد مقسوم‌علیه‌های $i+j$ با تعداد مقسوم‌علیه‌های $a_i + a_j$ برابر باشد. (صعودی بودن دنباله یعنی اگر $i \leq j$، آن‌گاه $a_i \leq a_j$.)

راه‌حل اول. ابتدا نشان می‌دهیم تابع اکیدا صعودی است. برای این منظور با توجه به صعودی بودن تابع، کافی‌است نشان دهیم برای هر n، $f(n) \neq f(n+۱)$. برای این منظور فرض کنید عددی طبیعی مانند n وجود دارد که $f(n) = f(n+۱)$. در این صورت از فرض مسئله نتیجه می‌گیریم برای هر عدد طبیعی و دلخواه k، $d(n+k) = d(n+۱+k)$. حال k را طوری انتخاب می‌کنیم که $n+k$ عددی اول و بزرگ‌تر از ۲ شود. در این صورت $n+k+۱$ قطعا مرکب است و لذا $۲ = d(n+k) = d(n+k+۱) > ۲$ که تناقض است. بنابراین تابع، اکیداً صعودی است.
فرض کنید p عددی اول و دلخواه است. با جایگذاری $(i,j) = (۲^{p-۲}, ۲^{p-۲})$ در مسئله نتیجه می‌گیریم $p = d(۲^{p-۱}) = d(۲a_{۲^{p-۲}})$ بنابراین $۲a_{۲^{p-۲}}$ باید توان $p-۱$ ام عددی اول باشد. واضح است که در این صورت، $a_{۲^{p-۲}} = ۲^{p-۲}$. مجموعه‌ی نامتناهی اعداد اول را به ترتیب صعودی $\{p_۱, p_۲, p_۳, \ldots\}$ در نظر بگیرید. فرض کنید n عددی طبیعی و دلخواه است. در این صورت اعداد اول p_i و $p_{i+۱}$ وجود دارند که $۲^{p_i-۲} \leq n \leq ۲^{p_{i+۱}-۲}$. ضمن این‌که با توجه به اکیداً صعودی بودن تابع،

$$۲^{p_i-۲} = a_{۲^{p_i-۲}} < a_{۲^{p_i-۲}+۱} < \ldots < a_{n-۱} < a_n < a_{n+۱} < \cdots < a_{۲^{p_{i+۱}-۲}} = ۲^{p_{i+۱}-۲}$$

بنابراین با توجه به برابر بودن تعداد اعداد i و مقادیر a_i در بازه‌ی $[۲^{p_i-۲}, ۲^{p_{i+۱}-۲}]$ بلافاصله نتیجه می‌گیریم $f(n) = n$ و تابع، همانی است.

راه‌حل دوم. (بدون استفاده از صعودی بودن دنباله). برای راحتی کار فرض می‌کنیم $a_i = f(i)$، $d(i)$ را تعداد مقسوم‌علیه‌های عدد طبیعی i در نظر می‌گیریم و مجموعه‌ی اعداد اول را $\mathbb{P}$ می‌نامیم. ابتدا مقادیر $f(۱), f(۲), \ldots, f(۱۷)$ را به‌دست می‌آوریم:

- $f(۱) = ۱$: کافی‌است در رابطه‌ی $d(i+j) = d(f(i)+f(j))$ (رابطه‌ی (۱)) قرار دهیم $i = j = ۱$.
- $f(۲) = ۲$: در رابطه‌ی (۱) قرار می‌دهیم $i = j = ۲$.
- $f(۳) = ۳$: دقت کنید که اگر p عددی اول باشد، $f(p)$ نیز اول است (قرار دهید $i = j = p$). ضمن این‌که $d(f(۳)+۱) = ۳$، یعنی $p = q^۲ - ۱ = f(۳)$، به‌ازای دو عدد $p, q \in \mathbb{P}$. از این معادله به راحتی نتیجه می‌گیریم $f(۳) = ۳$.
- $f(۴) = ۴$: از جایگذاری $i = j = ۴$ نتیجه می‌گیریم $f(۴) = ۲p$، که $p \in \mathbb{P}$. ضمن این که با جایگذاری $(i,j) = (۴,۲)$ نتیجه می‌گیریم $d(۲(p+۱)) = ۴$، یعنی $p+۱ = ۴$ و یا $p+۱ \in \mathbb{P}$. حالت اول با توجه به این‌که $۲p+۳ \in \mathbb{P}$ ($(i,j) = (۴,۳)$) غیر ممکن است. بنابراین $p+۱ \in \mathbb{P}$ و لذا $p = ۲$.
- $f(۵) = ۵$: با جایگذاری $(i,j) = (۵,۴)$ نتیجه می‌گیریم

$$f(۵) = q^۲ - ۴ = p \Rightarrow p = ۵ \Rightarrow f(۵) = ۵$$

- $f(۶) = ۶$: با جایگذاری‌های $(i,j) = (۶,۱), (۶,۵)$ نتیجه می‌گیریم

$$f(۶) = p_۱ - ۵ = p_۲^۲ - ۳, \quad p_۱, p_۲ \in \mathbb{P}$$

با بررسی باقی‌مانده‌های $p_۱, p_۲$ بر ۳ نتیجه می‌گیریم $p_۲ = ۳$ و لذا $f(۶) = ۶$.
- $f(۷) = ۷$: با جایگذاری‌های $(i,j) = (۶,۱), (۶,۵)$ نتیجه می‌گیریم

$$f(۷) = p_۱ = p_۲^۳ - ۱, \quad p_۱, p_۲ \in \mathbb{P}$$

بنابراین $p_۲ = ۲$ و $f(۷) = p_۱ = ۷$.
- $f(۸) = ۸$: با جایگذاری $(i,j) = (۸,۸)$ نتیجه می‌گیریم $d(۲f(۸)) = ۵$، یعنی $f(۸) = ۸$.

• $f(۹) = ۹$: با جایگذاری $(i,j) = (۹,۹)$ نتیجه می‌گیریم $d(۲f(۹)) = ٦$. ضمن این‌که با جایگذاری $(i,j) = (۹,۲)$ نتیجه می‌گیریم

$$f(۹) = p_۱ - ۲ = p_۲^۲, \qquad p,p_۲ \in \mathbb{P}$$

با بررسی باقی‌مانده‌ی این معادله بر ۳ بلافاصله نتیجه می‌گیریم $p_۲ = ۳$، یعنی $f(۹) = ۹$.

• $f(۱۰) = ۱۰$: با توجه به زوج بودن $f(۱۰)$ ($(i,j) = (۱۰,۱)$) و جایگذاری‌های $(i,j) = (۱۰,٦)$ نتیجه می‌گیریم $d(f(۱۰) + ٦) = ۵$ و لذا $f(۱۰) = ۲^۴ - ٦ = ۱۰$.

• $f(۱۱) = ۱۱$: دقت کنید که $f(۱٦)$ را در ادامه بدون نیاز به $f(۱۱)$ به دست آورده‌ایم. حال با جایگذاری‌های $(i,j) = (۱۱,۱٦),(۱۱,۸)$ نتیجه می‌گیریم

$$f(۱۱) = p_۱^۳ - ۱٦ = p_۲ - ۸, \quad (p_۱ - ۲)(p_۱^۲ + ۲p_۱ + ۴) = p_۲, \qquad p_۱,p_۲ \in \mathbb{P}$$

از این معادله بلافاصله نتیجه می‌گیریم $(p_۱,p_۲) = (۳,۱۹)$ و لذا $f(۱۱) = ۱۱$.

• $f(۱۲) = ۱۲$: با جایگذاری‌های $(i,j) = (۱۲,۴)$ نتیجه می‌گیریم $f(۱۲) + ۴ = x^۲$. ضمن این که $f(۱۲)$ زوج است (چرا؟). پس $۴ \mid f(۱۲)$. هم‌چنین از جایگذاری $(i,j) = (۱۲,۱۲)$ نتیجه می‌گیریم $d(۲f(۱۲)) = ۸$. بنابراین

$$x^۲ - ۴ = (x-۲)(x+۲) = ۴p \text{ یا } ۲^۷, \qquad p \in \mathbb{P}$$

بنابراین $p = ۳$ و نتیجتاً $f(۱۲) = ۱۲$.

• $f(۱۳) = ۱۳$: با جایگذاری‌های $(i,j) = (۱۳,۳),(۱۳,۱۲)$ نتیجه می‌گیریم

$$f(۱۳) = x^۲ - ۳ = y^۲ - ۱۲ \Rightarrow y^۲ - x^۲ = ۹ \Rightarrow (x,y) = (۴,۵) \Rightarrow f(۱۳) = ۱۳$$

• $f(۱۴) = ۱۴$: با جایگذاری‌های $(i,j) = (۱۴,۲),(۱۴,۱۱)$ نتیجه می‌گیریم

$$f(۱۴) = x^۲ - ۲ = y^۲ - ۱۱ \Rightarrow y^۲ - x^۲ = ۹ \Rightarrow (x,y) = (۴,۵) \Rightarrow f(۱۴) = ۱۴$$

• $f(۱۵) = ۱۵$: با جایگذاری‌های $(i,j) = (۱۵,۱),(۱۵,۱۰)$ نتیجه می‌گیریم

$$f(۱۴) = x^۲ - ۱ = y^۲ - ۱۰ \Rightarrow y^۲ - x^۲ = ۹ \Rightarrow (x,y) = (۴,۵) \Rightarrow f(۱۵) = ۱۵$$

• $f(۱٦) = ۱٦$: با جایگذاری‌های $(i,j) = (۱٦,۹),(۱٦,۱٦)$ و با توجه به زوج بودن $f(۱٦)$ نتیجه می‌گیریم نتیجه می‌گیریم

$$f(۱٦) = x^۲ - ۹ = (x-۳)(x+۳) = ۲p \text{ یا } p^۲ \text{ یا } ۱٦, \qquad p \in \mathbb{P}$$

دو حالت اول با توجه به این‌که $۸ \mid x^۲ - ۹$ بلافاصله رد می‌شوند. بنابراین $f(۱٦) = ۱٦$.

• $f(۱۷) = ۱۷$: با جایگذاری‌های $(i,j) = (۱۷,۲),(۱۷,۱۰)$ نتیجه می‌گیریم

$$f(۱۷) = p_۱^۳ - ۱۰ = p_۲ - ۲ \Rightarrow (p_۱ - ۲)(p_۱^۲ + ۲p_۱ + ۴) = p_۲, \qquad p_۱,p_۲ \in \mathbb{P}$$

بنابراین $(p_۱,p_۲) = (۳,۱۹)$ و در نتیجه $f(۱۷) = ۱۷$.

حال فرض کنید $n \geq ۱۸$. اگر $۱۸ \leq n \leq ۲۴$، به راحتی می‌توان بررسی کرد که اعداد $۱ \leq a < b \leq n$ وجود دارند که $n+a = ۲۵$ و $n+b = ۳۶$. بنابراین از جایگذاری $(i,j) = (n,a),(n,b)$ نتیجه می‌گیریم

$$۱۱ = (f(n)+b) - (f(n)+a) = x^۲ - y^۲ = (x-y)(x+y)$$

بنابرین $(x,y) = (۶,۵)$ و لذا $f(n) = ۳۶ - b = n$.
هم‌چنین اگر $n \geq ۲۵$، ابتدا یک‌به‌یک بودن تابع را ثابت می‌کنیم. توجه کنید که اگر به ازای دو عدد طبیعی متمایز مانند a و b، $f(a) = f(b)$، در این صورت برای هر عدد طبیعی مانند k، $d(k+a) = d(k+b)$. حال کافیست برای رد این نتیجه، k را عددی در نظر بگیریم که $k+b$ اول شود ولی $k+a$ عددی مرکب باشد. برای این منظور فاصله‌ای به طول حداقل $b-a$ ز اعداد طبیعی متوالی مرکب بزرگ‌تر از a انتخاب می‌کنیم (مثلا $a(b-a+۱)!+۲,\ldots,a(b-a+۱)!+b-a+۱$) و اولین عدد اول بعد از این فاصله را برابر $k+b$ قرار می‌دهیم. واضح است که در این صورت، $k+a$ مرکب می‌شود، که با رابطه‌ی $d(k+a) = d(k+b)$ در تناقض است.
بنابراین تابع، یک‌به‌یک است. در ادامه با استقرا نشان می‌دهیم $f(n) = n$. فرض کنید برای هر $i = ۱,۲,\ldots,n-۱$، $f(i) = i$ و $k^۲ \leq n < (k+۱)^۲$. در این صورت از آن‌جایی‌که $k \geq ۵$ و

$$(k+۲)^۲ - n \leq (k+۲)^۲ - k^۲ = ۴k+۴ \leq k^۲$$

پس اعداد $۱ \leq a < b \leq n$ وجود دارند که

$$n+a = (k+۱)^۲ \quad \text{و} \quad n+b = (k+۲)^۲$$

در نتیجه از جایگذاری $(i,j) = (n,a),(n,b)$ نتیجه می‌گیریم اعدادی طبیعی مانند x و y وجود دارند که $f(n)+b = x^۲$، $f(n)+a = y^۲$ و لذا

$$۲k+۳ = (f(n)+b) - (f(n)+a) = x^۲ - y^۲ \geq ۲y+۱$$

یعنی $y \leq k+۱$ و درنتیجه $f(n) = y^۲ - a \leq (k+۱)^۲ - a = n$. از طرف با توجه به یک‌به‌یک بودن تابع، باید داشته باشیم $f(n) \geq n$. بنابراین $f(n) = n$ و تابع، همانی است.

سوالات روز دوم

۱) کوچک‌ترین عدد طبیعی n را بیابید که n عدد حقیقی در بازه‌ی $(-1, 1)$ وجود داشته باشند که مجموع آن‌ها برابر صفر و مجموع مربعات آن‌ها ۲۰ باشد.

۲) رنگین‌کمان نام پرنده‌ای کمیاب است. این پرنده زیبا می‌تواند به n رنگ مختلف درآید و هر روز رنگی متفاوت از روز قبل دارد. دانشمندان حقیقت جدیدی دربارهٔ این پرنده کشف کرده‌اند: هیچ چهار روزی در طول عمر این پرنده وجود ندارد مثل روزهای i اُم، j اُم، k اُم و l اُم، که $i < j < k < l$، و این پرنده در روزهای i اُم و k اُم همرنگ باشد و در روزهای j اُم و l اُم نیز همرنگ و به رنگی متفاوت از روزهای i اُم و k اُم باشد. حداکثر طول عمر این پرنده برحسب n چندر روز است؟

۳) اضلاع AB و AC از مثلث ABC را به ترتیب از طرف B و C امتداد داده‌ایم تا خط داده شده‌ی l را به ترتیب در نقاط D و E قطع کند. فرض کنید قرینه‌ی l نسبت به عمود منصف BC نیز امتدادهای مذکور را به ترتیب در نقاط D' و E' قطع کند. ثابت کنید اگر $BD + CE = DE$، آن‌گاه $BD' + CE' = D'E'$.

پاسخ سوالات روز دوم

۱) کوچک‌ترین عدد طبیعی n را بیابید که n عدد حقیقی در بازه‌ی $(-۱,۱)$ وجود داشته باشند که مجموع آن‌ها برابر صفر و مجموع مربعات آن‌ها ۲۰ باشد.

راه‌حل اول. فرض کنید حداکثر ۲۱ عدد با ویژگی مسئله وجود داشته باشد. اعداد را $x_۱,x_۲,\dots,x_n$ در نظر می‌گیریم. بدون از دست دادن کلیت مسئله، فرض می‌کنیم $x_۱,x_۲,\dots,x_k \geq ۰$ و بقیه‌ی اعداد منفی‌اند. در این صورت

$$x_۱^۲+x_۲^۲+\cdots+x_k^۲ \leq x_۱+x_۲+\cdots+x_k = |x_{k+۱}|+\cdots+|x_n| < n-k$$

بنابراین $x_۱^۲+x_۲^۲+\cdots+x_{۲۰}^۲ < ۲(n-k)$. به همین ترتیب، $x_۱^۲+x_۲^۲+\cdots+x_{۲۰}^۲ < ۲k$. در نتیجه

$$x_۱^۲+x_۲^۲+\cdots+x_{۲۰}^۲ < \min\{۲k,۲(n-k)\} \leq ۲\times ۱۰ = ۲۰$$

بنابراین $n \geq ۲۲$. این حالت امکان‌پذیر است، به عنوان مثال قرار دهید

$$x_۱=x_۲=\cdots=x_{۱۱}=-\sqrt{\frac{۱۰}{۱۱}} \qquad \text{و} \qquad x_{۱۱}=x_{۱۲}=\cdots=x_{۲۰}=\sqrt{\frac{۱۰}{۱۱}}$$

راه‌حل دوم. از آن‌جایی که $x_۱^۲+\cdots+x_n^۲=۲۰ < n$، بنابراین $n \geq ۲۱$. اگر $n=۲۱$، نشان می‌دهیم بیش‌ترین مقدار عبارت $x_۱^۲+\cdots+x_{۲۱}^۲$ با فرض

$$x_۱+x_۲+\cdots+x_{۲۱}=۰, \qquad x_i\in[-۱,۱]$$

برابر ۲۰ است و این حداکثر، تنها زمانی اتفاق می‌افتد که دقیقا ۱۰ تا از x_i ها برابر -۱ و ده تا برابر ۱ شوند.
برای این منظور فرض کنید به‌ازای $y_۱,\dots,y_{۲۱}$ عبارت، حداکثر شده است. اگر اندیس‌های $i\neq j$ ای وجود داشته باشند که $-۱<y_i\leq y_j<۱$، در این صورت عدد مثبت t را طوری در نظر می‌گیریم که $t<\min\{۱-y_j,y_i+۱\}$. دقت کنید که

$$(y_i-t)^۲+(y_j+t)^۲ = y_i^۲+y_j^۲+۲(y_j-y_i)+۲t^۲ > y_i^۲+y_j^۲$$

یعنی با جایگزین کردن y_i,y_j با y_i-t,y_j+t، مجموع مربعات افزایش می‌یابد که خلاف فرض ماست. بنابراین همه‌ی اعداد به جز حداکثر یکی، باید برابر -۱ یا ۱ شوند. در این حالت، به وضوح با توجه به صفر بودن مجموع و فرد بودن ۲۱، تعداد هریک از ۱ ها و -۱ ها ۱۰ تاست و عدد دیگر برابر صفر است و لذا اگر $x_۱,x_۲,\dots,x_{۲۱}\in(-۱,۱)$، با توجه به یکتا بودن حالت تساوی،

$$x_۱^۲+x_۲^۲+\cdots+x_{۲۱}^۲ < y_۱^۲+y_۲^۲+\cdots+y_{۲۱}^۲ = ۲۰$$

بنابراین $n \geq ۲۲$. این حالت امکان‌پذیر است، به عنوان مثال قرار دهید

$$x_۱=x_۲=\cdots=x_{۱۱}=-\sqrt{\frac{۱۰}{۱۱}} \qquad \text{و} \qquad x_{۱۱}=x_{۱۲}=\cdots=x_{۲۰}=\sqrt{\frac{۱۰}{۱۱}}$$

۲) رنگین‌کمان نام پرنده‌ای کمیاب است. این پرنده زیبا می‌تواند به n رنگ مختلف درآید و هر روز رنگی متفاوت از روز قبل دارد. دانشمندان حقیقت جدیدی دربارهٔ این پرنده کشف کرده‌اند: هیچ چهار روزی در طول عمر این پرنده وجود ندارد مثل روزهای i اُم، j اُم، k اُم و l اُم، که $i < j < k < l$، و این پرنده در روزهای i اُم و k اُم همرنگ باشد و در روزهای j اُم و l اُم نیز همرنگ و به رنگی متفاوت از روزهای i اُم و k اُم باشد. حداکثر طول عمر این پرنده برحسب n چندر روز است؟

با استقرا روی n ثابت می‌کنیم که طول عمر این پرنده حداکثر $۲n - ۱$ روز است. حکم برای $n = ۱$ (پایه‌ی استقرا) که برقرار است.

راه‌حل اول. فرض کنید رنگین‌کمان در روز اول به رنگ آبی باشد و اولین روزی که دوباره این پرنده به رنگ آبی در می‌آید روز i اُم باشد. اگر چنین روزی وجود نداشته باشد، از آنجایی که این پرنده در روزهای باقیمانده به حداکثر $n - ۱$ رنگ مختلف می‌تواند دربیاید، پس طبق فرض استقرا حداکثر $۲(n - ۱) - ۱ = ۲n - ۳$ روز دیگر عمر خواهد کرد. یعنی در مجموع $۲n - ۲$ روز!

حال فرض کنید در روزهای دوم تا $i - ۱$ اُم این پرنده به m رنگ مختلف دربیاید. پس طبق فرض استقرا حداکثر $۲m - ۱$ روز در این دوره زندگی می‌کند. یعنی $i - ۱ \leq ۲m - ۱ + ۱ = ۲m$. همچنین این پرنده نمی‌تواند در روزهای i اُم به بعد به این m رنگ دربیاید. چرا؟ پس طبق فرض استقرا حداکثر $۲(n - m) - ۱$ روز دیگر بعد از روز $i - ۱$ اُم زندگی کند. چرا؟ پس طول عمر این پرنده حداکثر $۲(n - m) - ۱ + ۲m = ۲n - ۱$ روز است.

راه‌حل دوم. فرض کنید آبی اولین رنگی باشد که این پرنده به آن رنگ درمی‌آید. در زمانی که این پرنده بیشترین طول عمر خود را دارد، در آخرین روز عمر خود نیز به رنگ آبی بوده است. زیرا اگر آخرین روز عمر خود به رنگ آبی نباشد، اگر یک روز دیگر نیز به رنگ آبی زندگی کند، دارای طول عمر بیشتری خواهد بود و هیچ چهار روزی در طول عمر این پرنده وجود ندارد مثل روزهای i اُم، j اُم، k اُم و l اُم، که $i < j < k < l$، و این پرنده در روزهای i اُم و k اُم همرنگ باشد و در روزهای j اُم و l اُم نیز همرنگ و به رنگی متفاوت از روزهای i اُم و k اُم باشد. چرا؟

فرض کنید این پرنده در طول عمر خود در روزهای $i_۱, i_۲, \dots, i_k$ به رنگ آبی درآید. بدون اینکه به کلیت مسأله لطمه‌ای بخورد فرض کنید $i_۱ < i_۲ < \cdots < i_k$. همچنین فرض کنید این پرنده در روزهای $i_j + ۱$ اُم تا $i_{j+۱} - ۱$ اُم $(۱ \leq j \leq k - ۱)$ به a_j رنگ مختلف باشد و در این مدت b_j روز عمر کرده باشد. طبق فرض مسأله این رنگ‌ها از هم متمایزند. چرا؟ بنابراین

$$a_۱ + a_۲ + \cdots + a_{k-۱} \leq n - ۱ \qquad (۱)$$

بنابراین طبق فرض استقرا $b_j \leq ۲a_j - ۱$. پس طول عمر این پرنده حداکثر برابر است با

$$\begin{aligned} b_۱ + b_۲ + \cdots + b_{k-۱} + k &\leq ۲(a_۱ + a_۲ + \cdots + a_{k-۱}) - (k - ۱) + k \\ &\leq ۲(n - ۱) + ۱ = ۲n - ۱ \end{aligned}$$

حال برای کامل شدن هر دو راه‌حل کافی است یک مثال بزنیم که طول عمر رنگین کمان $۲n - ۱$ روز باشد. مثال زیر یک نمونه از طول عمر $۲n - ۱$ روزه این پرنده است.

$$T_n = ۱, ۲, ۳, \dots, n - ۲, n - ۱, n, n - ۱, n - ۲, \dots, ۳, ۲, ۱$$

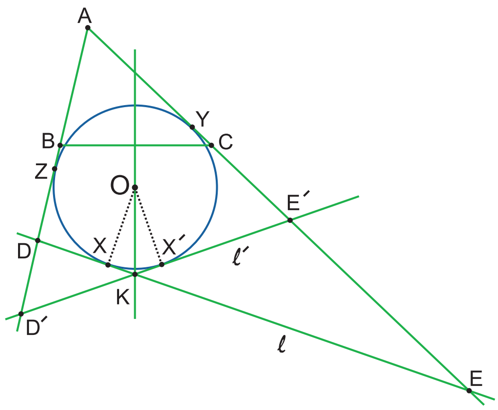
مثال دوم:

$$T_n = ۱, ۲, ۱, ۳, ۱, \dots, ۱, n - ۱, ۱, n, ۱$$

۳) اضلاع AB و AC از مثلث ABC را به ترتیب از طرف B و C امتداد داده‌ایم تا خط داده شده‌ی l را به ترتیب در نقاط D و E قطع کند. فرض کنید قرینه‌ی l نسبت به عمود منصف BC نیز امتدادهای مذکور را به ترتیب در نقاط D' و E' قطع کند. ثابت کنید اگر $BD+CE=DE$، آن‌گاه $BD'+CE'=D'E'$.

راه‌حل. فرض می‌کنیم O مرکز دایره‌ی محاطی داخلی مثلث ADE باشد و این دایره در نقاط X، Y و Z به‌ترتیب بر اضلاع DE، EA و AD مماس است. داریم

$$\left.\begin{array}{l} DX=DZ \\ EX=EY \end{array}\right\} \Rightarrow DE=DZ+EY \Rightarrow DB+EC=DZ+EY \Rightarrow BZ=CY$$



هم‌چنین

$$\left.\begin{array}{l} BZ=CY \\ OZ=OY=r \\ \angle OZB=\angle OYC=۹۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow OB=OC$$

در نتیجه نقطه‌ی O روی عمود منصف پاره‌خط BC قرار دارد.
چون دو خط l و l' نسبت به عمود منصف پاره‌خط BC متقارن‌اند، بنابراین این سه خط در یک نقطه مثل K همرس‌اند و عمود منصف پاره‌خط BC نیم‌ساز زاویه‌ی بین دو خط l و l' است. اگر X' قرینه‌ی نقطه‌ی X نسبت به عمود منصف پاره‌خط BC باشد، در نتیجه خط l' در نقطه‌ی X' بر دایره‌ی مزبور مماس است. در نتیجه

$$D'E'=D'X'+E'X'=D'Z+E'Y=(D'B-BZ)+(E'C+CY)=D'B+E'C$$