math-teacher.blog.ir

پاسخنامه پایانی «ریاضی ۲» «دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی» ابراهیم شاه ابراهیمی - دی ۹۷

---

1) $\iint_D \frac{e^{2x-y}}{1-2x+4y}\,dA \qquad D: (0,0)\ (1,2)\ (2,1)\ (3,3)$

تغییر متغیر کلی

$$\begin{cases} 2x-y=u \\ x-2y=v \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{c} x,y \\ (0,0) \\ (1,2) \\ (2,1) \\ (3,3) \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} u,v \\ (0,0) \\ (0,-3) \\ (3,0) \\ (3,-3) \end{array} \qquad J=\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3$$

$$\frac{1}{|J|}=\frac{1}{3}$$

$$\longrightarrow \iint_D \frac{e^{2x-y}}{1-2x+4y}\,dA = \int_{v=-3}^{0}\int_{u=0}^{3} \frac{e^u}{1-2v}\cdot\frac{1}{3}\,du\,dv$$

$$=\left(\frac{1}{3}\right)\left(\int_0^3 e^u\,du\right)\left(\int_{-3}^{0}\frac{dv}{1-2v}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{3}\right)\left(e^u\Big|_0^3\right)\left(-\frac{1}{2}\ln|1-2v|\Big|_{-3}^{0}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{3}\right)\left(e^3-e^0\right)\left(-\frac{1}{2}\left(\ln(1)-\ln(7)\right)\right) = \boxed{\frac{1}{6}\left(e^3-1\right)\left(\ln 7\right)}$$

ابراهیم شاه ابراهیمی - دی ۹۷

۲) $\underbrace{\int_{0}^{\pi/4}\int_{0}^{\sec\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,dr\,d\theta}_{(\mathrm{I})} + \underbrace{\int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_{0}^{\csc\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,dr\,d\theta}_{(\mathrm{II})}$

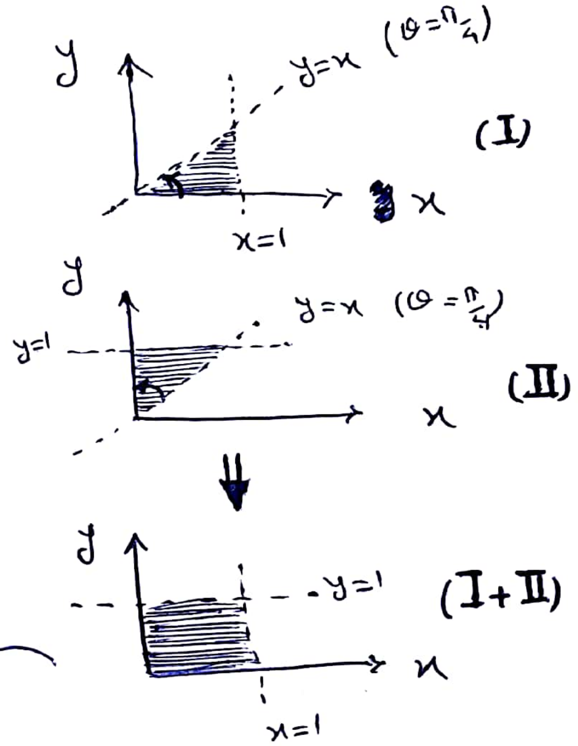
$x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$ $\longrightarrow$ $dA = r\,dr\,d\theta$

$r = \sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta} \longrightarrow r\cos\theta = 1 \longrightarrow x = 1$

$r = 0 \longrightarrow x^2 + y^2 = 0 \longrightarrow x = 0\ ,\ y = 0$

$r = \csc\theta = \dfrac{1}{\sin\theta} \longrightarrow r\sin\theta = 1 \longrightarrow y = 1$

فرم دکارتی $\longrightarrow$ $\boxed{\displaystyle\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1} f(x,y)\, dA}$



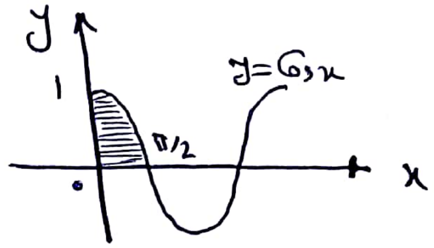
ابراهیم شاه ابراهیمی - دی ۹۷

کارشناس ارشد مهندسی عمران
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
مدرس تخصصی ریاضیات دانشگاه
- ریاضی۱و۲ ، معادلات دیفرانسیل
- ریاضیات مهندسی ، محاسبات عددی

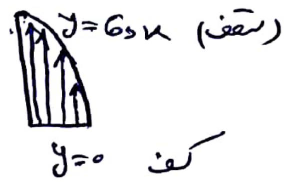
3) $\int_0^1 \int_0^{\cos^{-1} y} e^{\sin x}\, dx\, dy$

$x = \cos^{-1} y \longrightarrow \underline{y = \cos x}$

$\underline{x = 0}$



تعویض کران $\longrightarrow \int_{x=0}^{\pi/2} \boxed{\int_{y=0}^{\cos x} e^{\sin x}\, dy}\, dx$



$e^{\sin x} \cdot y \Big|_{y=0}^{\cos x} = \cos x \cdot e^{\sin x} - 0$

$= \int_{x=0}^{\pi/2} \cos x \cdot e^{\sin x}\, dx \xrightarrow{\text{تغییر متغیر}} \begin{cases} \sin x = t \\ \cos x\, dx = dt \end{cases} = \int e^t\, dt = e^t$

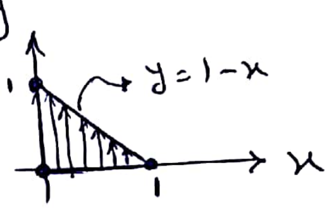
$= e^{\sin x} \Big|_{x=0}^{\pi/2} = e^1 - e^0 = \boxed{e-1}$

ابراهیم شاه‌ابراهیمی - دی ۹۷

کارشناس ارشد مهندسی عمران
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
مدرس تخصصی ریاضیات دانشگاه
ریاضی۱و۲ ، معادلات دیفرانسیل
ریاضیات مهندسی ، محاسبات عددی

$$4)\quad \oint_C xy\,dx + (x^2+y^2)\,dy \qquad C: (0,0)\ (1,0)\ (0,1)$$

قضیه گرین $\longrightarrow \oint F\cdot dr = \iint_C \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$



$$\begin{cases} P = xy \rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = x \\ Q = x^2+y^2 \rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x \end{cases} \rightarrow \iint (2x-x)\,dA = \iint x\,dA$$

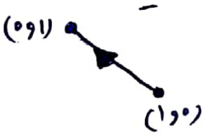
$$= \int_{x=0}^{1} \boxed{\int_{y=0}^{1-x} x\,dy}\,dx = \int_0^1 (x-x^2)\,dx$$

$$xy\Big|_{y=0}^{1-x} = x-x^2$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

C_1 مسیر: $(y=0) \rightarrow r=(t,0)$ $\begin{cases} dr = (1,0)\,dt \\ F = (0, t^2) \end{cases} \rightarrow \int_{C_1} F\cdot dr = 0$

C_2 مسیر: $y = 1-x \rightarrow r = (t, 1-t)$ $\begin{cases} dr = (1,-1)\,dt \\ F = (t(1-t), t^2+(1-t)^2) \end{cases}$



$$\rightarrow \int_{C_2} F\cdot dr = \int_{t=1}^{t=0} (t - t^2 - t^2 - 1 - t^2 + 2t)\,dt = \int_1^0 (-3t^2+3t-1)\,dt$$

$$= -t^3 + \frac{3}{2}t^2 - t\Big|_1^0 = \frac{1}{2}$$

C_3 مسیر: $(x=0) \rightarrow r = (0,t)$ $\begin{cases} dr = (0,1)\,dt \\ F = (0, t^2) \end{cases} \rightarrow \int_{C_3} F\cdot dr = \int_{t=1}^{t=0} t^2\,dt = \frac{t^3}{3}\Big|_1^0 = \frac{-1}{3}$

$$\oint_C F\cdot dr = \int_{C_1} F\cdot dr + \int_{C_2} F\cdot dr + \int_{C_3} F\cdot dr = 0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

ابراهیم شاه‌ابراهیمی - ۹۷(س)

۵) انتگرال داده شده همان انتگرال $\iint \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds$ است.

$$\longrightarrow \vec{F} = \left(y\sin z\,,\ 3xy\,,\ \operatorname{tg}(x^2)\right)$$

و با توجه به اینکه s که محدود و بسته است می‌توان از قضیه دیورژانس استفاده کرد:

$$\longrightarrow \operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial(y\sin z)}{\partial x} + \frac{\partial(3xy)}{\partial y} + \frac{\partial(\operatorname{tg}(x^2))}{\partial z} = 0 + 3x + 0 = \underline{3x}$$

$$\longrightarrow \iint \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds = \iiint (\operatorname{div}\vec{F})\cdot dv$$

$$= 3\iiint x\,dv \xrightarrow{\text{مختصات استوانه‌ای}} 3\int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{r=0}^{2}\int_{z=0}^{3} (r\cos\theta)\,\overset{dz}{r}\,dr\,d\theta$$

$$= 3\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{2}\int_{z=0}^{3} dz\,r^2\,dr\cdot\cos\theta\,d\theta$$

$$= (3)\left(\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta\right)\left(\int_{r=0}^{2} r^2\,dr\right)\left(\int_{z=0}^{3} dz\right)$$

$$= (3)\left(\sin\theta\Big|_0^{\pi/2}\right)\left(\frac{r^3}{3}\Big|_0^2\right)\left(z\Big|_0^3\right)$$

$$= (3)(1-0)\left(\frac{8}{3}-0\right)(3-0) = \boxed{24}$$

ابراهیم شاه‌ابراهیمی - دی ۹۷

کارشناس ارشد مهندسی عمران
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
مدرس تخصصی ریاضیات دانشگاه
• ریاضی۱و۲ ، معادلات دیفرانسیل
• ریاضیات مهندسی ، محاسبات عددی

4) $\oint_C (xz - y^3\cos z)\,dx + x^3e^z\,dy + xyz\,e^{x^2+y^2+z^2}\,dz$

$C:\ z=0 \quad , \quad x^2+y^2+2(z-1)^2=6$

$\xrightarrow{\text{قضیه استوکس}} \oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint \overrightarrow{\mathrm{curl}F}\cdot \vec{n}\,ds$

$x^2+y^2+2(z-1)^2=6 \xrightarrow{z=0} x^2+y^2=4 \xrightarrow{\text{پارامتر}} \begin{cases} x=2\cos t \\ y=2\sin t \end{cases}$

$\to r=(2\cos t, 2\sin t, 0) \quad \begin{cases} dr=(-2\sin t,\ 2\cos t,\ 0)\,dt \\ F=(-8\sin^3 t,\ 8\cos^3 t,\ 0) \end{cases}$

$\to \oint F\cdot dr = \int_0^{2\pi} (16\sin^4 t + 16\cos^4 t)\,dt = 16\int_0^{2\pi} (\sin^2 t+\cos^2 t)^2 - 2\sin^2 t\cos^2 t\,dt$

$= 16\int_0^{2\pi}\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2t\right)dt = 16\int_0^{2\pi}\left(1-\frac{1}{4}(1-\cos 4t)\right)dt$

$= 16\left(\frac{3}{4}t + \frac{1}{16}\sin 4t\right)\Big|_{t=0}^{2\pi} = \boxed{24\pi}$

$\iint_{g_1} \mathrm{curl}F\cdot n\,ds \xrightarrow{} = \iint_{g_2} \mathrm{curl}F\cdot n\,ds \xrightarrow{} g: z=0 \to \nabla g=(0,0,1)$

$\to \vec{n\,ds} = \frac{(0,0,1)}{1}\,dA$

$\overrightarrow{\mathrm{curl}F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = (\alpha, \alpha, 3x^2e^z + 3y^2\cos z)$

$\to \iint \overrightarrow{\mathrm{curl}F}\cdot\vec{n\,ds} = \iint (\alpha, \alpha, 3x^2e^z+3y^2\cos z)(0,0,1)\,dA$

$= \iint (3x^2e^z + 3y^2\cos z)\,dA$

$\xrightarrow{z=0} 3\iint (x^2+y^2)\,dA \overset{\text{قطبی}}{=} 3\int_{\theta=0}^{2\pi}\underbrace{\int_{r=0}^{2} r^2\cdot r\,dr}_{\frac{r^4}{4}\Big|_0^2=4}\,d\theta = 12\int_0^{2\pi} d\theta$

$= 12\times 2\pi = \boxed{24\pi}$

۹۷ دی - اصلاحی

ابراهیم