

## فصل پنجم

### اصول انتقال حرارت ناپایدار

#### ۵-۱ به دست آوردن معادله اساسی

##### ۵-۱A مقدمه

در فصل چهارم سیستمهای انتقال حرارت مختلفی را که در آنها دما در هر نقطه معلوم و شار گرمایی با زمان ثابت بود، یعنی حالت پایدار، مورد بررسی قرار دادیم. در این فصل می‌خواهیم فرآیندهایی را که در آنها دما در هر نقطه از سیستم با زمان تغییر می‌کند یعنی انتقال حرارت ناپایدار است، مطالعه کنیم.

قبل از این‌که در یک فرایند به حالت پایدار برسیم، پس از شروع انتقال حرارت مدت زمانی باید سپری شود تا حالت ناپایدار انتقال حرارت از بین برود. برای مثال، در بخش ۴A-۲ شار گرمایی را از طریق یک دیوار در حالت پایدار تعیین کردیم اما زمانی را که در طول آن یک طرف دیوار تا دمای مورد نظر گرم می‌شود، مورد بررسی قرار ندادیم.

انتقال حرارت ناپایدار به دلیل مشکلات زیادی که در صنعت در مسائل مربوط به گرمایش و سرمایش اتفاق می‌افتد، اهمیت دارد. در فرایندهای مربوط به استخراج و ذوب فلزات، پیش‌بینی سرعتهای گرم شدن و سرد شدن اشکال هندسی مختلف فلزات به منظور پیش‌بینی زمان لازم برای رسیدن به دماهای مشخص، ضروری است. در فرایندهای آماده‌سازی غذاهای کنسرو شده فاسد شدنی، این کنسروها به وسیله فرو بردن در حمامهای بخار گرم می‌شوند یا با فرو بردن در آب سرد، سرد می‌شوند. در صنعت کاغذسازی در شروع، چوبهای الوار شده در حمامهای بخار فرو برده می‌شوند. در

بیشتر این فرایندها ماده به طور ناگهانی در یک سیال با دماهای خیلی بالا یا پایین فرو برده می‌شود.

### ۵-۱B به دست آوردن معادله هدایت ناپایدار

برای به دست آوردن معادله حالت ناپایدار در یک جهت در یک جامد، به شکل ۵-۱-۱ رجوع می‌کنیم. گرما در جهت  $x$  در مکعبی به ابعاد  $\Delta x$ ،  $\Delta y$ ،  $\Delta z$  هدایت می‌شود. برای هدایت در جهت  $x$  داریم،

$$q_x = -kA \frac{\partial T}{\partial x} \quad (5-1-1)$$

عبارت  $\partial T / \partial x$  یعنی مشتق جزئی  $T$  نسبت به  $x$  همراه با متغیرهای دیگر  $y$  و  $z$  و زمان  $t$ ، که ثابت نگهداشته می‌شوند. سپس با نوشتن موازنه گرمایی برای مکعب می‌توانیم بنویسیم،

$$\text{نرخ تجمع گرما} + \text{نرخ گرمای خروجی} = \text{نرخ تولید} + \text{نرخ گرمای ورودی} \quad (5-1-2)$$

نرخ گرمای ورودی به مکعب،

$$\text{نرخ گرمای ورودی} = q_{x|x} = -k(\Delta y \Delta z) \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_x \quad (5-1-3)$$

همچنین،

$$\text{نرخ گرمای خروجی} = q_{x|x+\Delta x} = -k(\Delta y \Delta z) \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x+\Delta x} \quad (5-1-4)$$

نرخ تجمع گرما در حجم  $\Delta x \Delta y \Delta z$  در زمان  $\partial T$  برابر است با،

$$\text{نرخ تجمع گرما} = (\Delta x \Delta y \Delta z) \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (5-1-5)$$

نرخ تولید گرما در حجم  $\Delta x \Delta y \Delta z$  برابر است با،

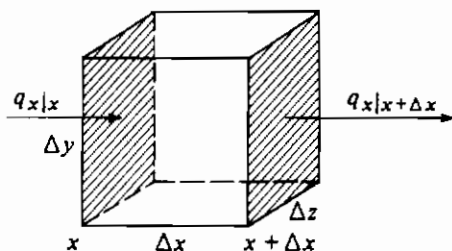
$$\text{نرخ تولید گرما} = (\Delta x \Delta y \Delta z) \dot{q} \quad (5-1-6)$$

با جانشین کردن معادلات (۵-۱-۳) تا (۵-۱-۶) در (۵-۱-۲) و تقسیم آن بر  $\Delta x \Delta y \Delta z$

$$\dot{q} + \frac{-k \left( \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_x - \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x+\Delta x} \right)}{\Delta x} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (5-1-7)$$

وقتی  $\Delta x$  را به سمت صفر میل دهیم مشتق دوم جزئی  $T$  نسبت به  $x$  یا  $\partial^2 T / \partial x^2$  را در طرف دوم معادله خواهیم داشت. سپس با مرتب کردن دوباره،

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\dot{q}}{\rho c_p} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\dot{q}}{\rho c_p} \quad (5-1-8)$$



شکل ۵-۱-۱. هدایت ناپایدار در یک جهت

که  $\alpha$  یا ضریب نفوذگرمایی برابر با  $k/\rho c_p$  است. در این مشتق‌گیری  $k$ ،  $\rho$  و  $c_p$  ثابت فرض می‌شوند. در سیستم واحدهای SI،

$$c_p = \text{J/kg}\cdot\text{K}, q = \text{W/m}^2, \rho = \text{kg/m}^3, k = \text{W/m}\cdot\text{K}, t = \text{s}, T = \text{K}, \alpha = \text{m}^2/\text{s}$$

و در سیستم واحدهای انگلیسی،

$$c_p = \text{Btu/lb}_m\cdot^\circ\text{F}, q = \text{Btu/hr}\cdot\text{ft}^2, \rho = \text{lb}_m/\text{ft}^3, k = \text{Btu/hr}\cdot\text{ft}\cdot^\circ\text{F}, t = \text{hr}, T = ^\circ\text{F}, \alpha = \text{ft}^2/\text{hr}$$

برای هدایت در سه بُعد به طریق مشابه داریم،

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{\dot{q}}{\rho c_p} \quad (5-1-9)$$

در بسیاری از حالات هدایت گرمایی ناپایدار اتفاق می‌افتد اما نرخ تولید گرما صفر است. بنابراین معادلات (۵-۱-۸) و (۵-۱-۹) به صورت زیر در می‌آیند،

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (5-1-10)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (5-1-11)$$

معادلات (۵-۱-۱۰) و (۵-۱-۱۱) دمای  $T$  را به  $\alpha$ ،  $y$ ،  $z$  و زمان ارتباط می‌دهند. حل معادلات (۵-۱-۱۰) و (۵-۱-۱۱) برای حالت‌های خاص و حالت‌های عمومی‌تر در ادامه مورد بررسی قرار می‌گیرد.

## ۵-۲ حالت ساده شده برای سیستمهای با مقاومت داخلی ناچیز

## ۵-۲A معادله اساسی

بحث خود را در بارهٔ هدایت گرمایی ناپایدار به وسیلهٔ تجزیه و تحلیل یک حالت ساده شروع می‌کنیم. در این جا جامدی را بررسی می‌کنیم که قابلیت هدایت گرمایی خیلی بالا یا مقاومت هدایت داخلی خیلی پایین در مقایسه با مقاومت سطحی خارجی دارد، که در آن جابه‌جایی از سطح یک سیال خارجی به سطح جامد اتفاق می‌افتد. چون مقاومت داخلی خیلی کم است، بنابراین دما در درون جامد در هر زمان معین اساساً یکنواخت است.

به عنوان مثال، یک مکعب داغ و کوچک از فولاد در  $T_\infty$  (K) در زمان  $t = 0$  به طور ناگهانی در یک حمام بزرگ آب سرد که دمای آن نسبت به زمان ثابت و برابر با  $T_\infty$  است فرو برده می‌شود. فرض کنید که ضریب انتقال حرارت  $h$  بر حسب  $W/m^2.K$  با زمان ثابت است. با نوشتن موازنهٔ گرمایی روی جسم جامد برای یک فاصلهٔ زمانی  $dt$  ثانیه، گرمای منتقل شده از حمام به جسم باید مساوی با تغییر در انرژی داخلی جسم باشد،

$$hA(T_\infty - T) dt = c_p \rho V dT \quad (5-2-1)$$

که  $A$  سطح مفید جسم بر حسب  $m^2$ ،  $T$  دمای میانگین جسم در زمان  $t$  ثانیه،  $\rho$  دانسیتهٔ جسم بر حسب  $kg/m^3$  و  $V$  حجم بر حسب  $m^3$  است. با مرتب کردن معادله و انتگرال‌گیری بین حدود  $T = T_0$  وقتی که  $t = 0$  و  $T = T$  وقتی که  $t = t$  داریم:

$$\int_{T=T_0}^{T=T} \frac{dT}{T_\infty - T} = \frac{hA}{c_p \rho V} \int_{t=0}^{t=t} dt \quad (5-2-2)$$

$$\frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = e^{-(hA/c_p \rho V)t} \quad (5-2-3)$$

این معادله تغییرات دما را با زمان در جسم جامد توضیح می‌دهد. عبارت  $c_p \rho V$  غالباً ظرفیت گرمایی یک تکه<sup>(۱)</sup> سیستم نامیده می‌شود. این نوع تحلیل غالباً روش ظرفیت یک تکه<sup>(۲)</sup> یا روش گرمایش یا سرمایش نیوتونی<sup>(۳)</sup> نامیده می‌شود.

## ۵-۲B معادله‌های شکلهای هندسی مختلف

در استفاده از معادله (۵-۲-۳) نسبت  $\frac{\text{سطح}}{\text{حجم}}$  باید معلوم باشد. فرض اساسی ناچیز بودن مقاومت داخلی

1. lumped thermal capacitance

2. lumped capacity method

3. Newtonian heating or cooling method

در به دست آوردن معادله به کار گرفته می شود. منطقاً این فرض وقتی صحیح است که:

$$N_{Bi} = \frac{hx_1}{k} < 0.1 \quad (5-2-4)$$

که  $hx_1/k$  عدد بدون بعد بایوت ( $N_{Bi}$ ) نامیده می شود و  $x_1$  بعد مشخصه جسم است که از  $V/A = x_1$  به دست می آید. عدد بایوت<sup>(۱)</sup> مقادیر نسبی مقاومت هدایت داخلی و مقاومت جابه جایی سطح را با هم مقایسه می کند. برای یک کره،

$$x_1 = \frac{V}{A} = \frac{4\pi r^3/3}{4\pi r^2} = \frac{r}{3} \quad (5-2-5)$$

برای یک استوانه طویل،

$$x_1 = \frac{V}{A} = \frac{\pi D^2 L/4}{\pi DL} = \frac{D}{4} = \frac{r}{2} \quad (5-2-6)$$

و برای یک میله طویل یا مقطع مربع،

$$x_1 = \frac{V}{A} = \frac{(2x)^2 L}{4(2x)L} = \frac{x}{2} \quad (x = \frac{1}{2} \text{ thickness}) \quad (5-2-7)$$

### مثال ۵-۲-۱ سرد کردن یک گلوله فولادی

یک گلوله فولادی با شعاع  $1 \text{ in}$  ( $25/4 \text{ mm}$ ) در دمای یکنواخت  $800^\circ \text{F}$  ( $699/9 \text{ K}$ ) قرار دارد. این گلوله به طور ناگهانی در محیطی که دمای ثابت آن  $250^\circ \text{F}$  ( $394/3 \text{ K}$ ) است قرار می گیرد. با فرض ضریب جابه جایی  $h = 2 \text{ Btu/hr}$  ( $11/36 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ ) دمای گلوله را بعد از گذشت یک ساعت ( $3600$  ثانیه) محاسبه کنید. خواص فیزیکی میانگین،  $k = 25 \text{ Btu/hr} \cdot \text{ft} \cdot ^\circ \text{F}$  ( $43/3 \text{ W/m} \cdot \text{K}$ )،  $\rho = 480 \text{ lb}_m/\text{ft}^3$  ( $784 \text{ kg/m}^3$ ) و  $c_p = 0.11 \text{ Btu/lb}_m \cdot ^\circ \text{F}$  ( $0.4606 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K}$ ) واحدهای SI و انگلیسی را به کار ببرید.

حل: برای یک کره از معادله (۵-۲-۵) داریم،

$$x_1 = \frac{V}{A} = \frac{r}{3} = \frac{1/12}{3} = \frac{1}{36} \text{ ft}$$

$$= \frac{25/4}{1000 \times 3} = 8/47 \times 10^{-3} \text{ m}$$

از معادله (۵-۲-۴) برای عدد بایوت،

فرایندهای انتقال و عملیات واحدها

$$N_{Bi} = \frac{h x_1}{k} = \frac{2 \times (1/36)}{25} = 0.00222$$

$$N_{Bi} = \frac{11/36 \times (8/47 \times 10^{-3})}{43/3} = 0.00222$$

این مقدار کوچکتر از ۰/۱ است بنابراین روش ظرفیت یک تکه می تواند استفاده شود. پس،

$$\frac{h A}{c_p \rho V} = \frac{2}{0.11 \times 490 \times (1/36)} = 1/335 \text{ h}^{-1}$$

$$\frac{h A}{c_p \rho V} = \frac{11/36}{0.4606 \times 1000 \times 7849 \times (8/47 \times 10^{-3})} = 3/71 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1} \quad (1/335 \text{ h}^{-1})$$

با جایگزینی در معادله (۵-۲-۳) برای  $t = 1 \text{ hr}$  و حل معادله نسبت به  $T$ ,

$$\frac{T - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} = \frac{T - 250^{\circ}\text{F}}{800 - 250} = \exp[-(h A/c_p \rho V)t] = \exp[-1/335 \times 1]$$

$$T = 395^{\circ}\text{F}$$

$$\frac{T - 394/3 \text{ K}}{699/9 - 394/3} = \exp[-3/71 \times 10^{-4} \times 3600]$$

$$T = 474/9 \text{ K}$$

### ۵-۲C مقدار کل گرمای منتقل شده

دمای هر جامدی در زمان  $t$  از معادله (۵-۲-۳) می تواند محاسبه شود. در زمان  $t$  نرخ انتقال حرارت لحظه ای  $q(t)$  بر حسب  $W$  از جامدی با مقاومت داخلی ناچیز از رابطه زیر محاسبه می شود،

$$q(t) = hA(T - T_{\infty}) \quad (5-2-8)$$

با جایگزینی دمای لحظه ای  $T$  از معادله (۵-۲-۳) در معادله (۵-۲-۸)،

$$q(t) = hA(T_0 - T_{\infty})e^{-(hA/c_p \rho V)t} \quad (5-2-9)$$

برای تعیین مقدار کل گرمای منتقل شده بر حسب  $W.s$  یا  $J$  در زمان  $t = 0$  تا  $t = t$  می توانیم

انتگرال معادله (۵-۲-۹) را بگیریم،

$$Q = \int_{t=0}^{t=t} q(t)dt = \int_{t=0}^{t=t} hA(T_0 - T_{\infty})e^{-(hA/c_p \rho V)t} dt \quad (5-2-10)$$

$$Q = c_p \rho V(T_0 - T_{\infty})[1 - e^{-(hA/c_p \rho V)t}] \quad (5-2-11)$$

مثال ۵-۲-۲ مقدار کل گرما در فرآیند سرد کردن

برای شرایط مثال ۵-۲-۱ مجموع مقدار گرمای خارج شده تا  $t = ۳۶۰۰$  s را محاسبه کنید.

حل: از مثال ۵-۲-۱ داریم،  $V = ۳/۷۱ \times ۱۰^{-۴} \text{ s}^{-۱}$  h A/cp ρ همچنین،

$$V = ۴\pi r^3 / ۳ = ۴\pi (۰/۰۲۵۴)^3 / ۳ = ۶/۸۶۴ \times ۱۰^{-۵} \text{ m}^3$$

با جایگزینی در معادله (۵-۲-۱۱)،

$$Q = ۰/۴۶۰۶ \times ۱۰۰۰۰ \times ۷۸۴۹ \times (۶/۸۶۴ \times ۱۰^{-۵}) \times (۶۹۹/۹ - ۳۹۴/۳)$$

$$\times [ ۱ - \exp[-۳/۷۱ \times ۱۰^{-۴} \times ۳۶۰۰] ]$$

$$= ۵/۵۸۹ \times ۱۰^۴ \text{ J}$$

### ۵-۳ هدایت گرمایی ناپایدار در اشکال هندسی مختلف

#### ۵-۳A مقدمه و روشهای تحلیلی

در بخش ۵-۲ حالت ساده‌ای را با مقاومت داخلی ناچیز مورد بحث قرار دادیم که جسم ضریب هدایت گرمایی خیلی بالا داشت. اکنون می‌خواهیم حالت عمومی‌تری که مقاومت داخلی کوچک نیست را مورد بررسی قرار دهیم که در این حالت دما در جامد ثابت نیست. اولین حالتی که بررسی خواهیم کرد سطحی است که مقاومت جابه‌جایی آن در مقایسه با مقاومت داخلی اش ناچیز است. این مورد به خاطر ضریب انتقال حرارت خیلی بزرگ در سطح یا به خاطر مقاومت هدایتی نسبتاً زیاد در جسم، می‌تواند اتفاق بیفتد.

برای تشریح یک روش تحلیلی حل این حالت، ابتدا معادله را برای هدایت ناپایدار در جهت  $x$

فقط در یک صفحه مسطح با ضخامت  $2H$  (مطابق شکل ۵-۳-۱) به دست خواهیم آورد. توزیع اولیه

دما در صفحه در  $t = 0$  ثابت و به صورت  $T = T_0$  است. در  $t = 0$  دمای محیط به طور ناگهانی به  $T_1$

تغییر می‌کند و ثابت نگهداشته می‌شود. چون مقاومت جابه‌جایی نداریم دمای سطح در  $T_1$  ثابت

می‌ماند. وقتی که این هدایت در جهت  $x$  باشد معادله (۵-۱-۱۰) برقرار خواهد بود،

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (۵-۱-۱۰)$$

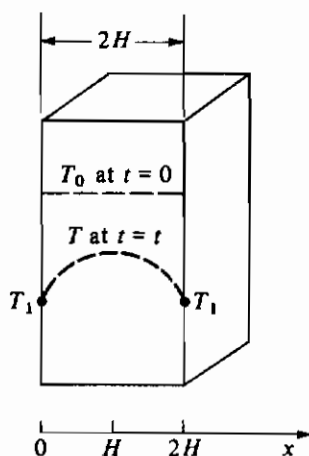
شرایط مرزی و اولیه به صورت زیر هستند،

$$T = T_0, \quad t = 0, \quad x = x$$

$$T = T_1, \quad t = t, \quad x = 0$$

$$(۵-۳-۱)$$

$$T = T_1, \quad t = t, \quad x = 2H$$



شکل ۱-۳-۵. هدایت ناپایدار در یک صفحه صاف با مقاومت سطحی ناچیز

معمولاً بهتر است که یک دمای بدون بُعد  $Y$  تعریف کنیم به طوری که بین ۰ و ۱ تغییر کند، بنابراین،

$$Y = \frac{T_1 - T}{T_1 - T_0} \quad (5-3-2)$$

با جایگزینی معادله (۵-۳-۲) در (۵-۱-۱۰) داریم،

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \quad (5-3-3)$$

با تعریف مجدد شرایط مرزی و اولیه،

$$Y = \frac{T_1 - T_0}{T_1 - T_0} = 1, \quad t = 0, \quad x = x$$

$$Y = \frac{T_1 - T_1}{T_1 - T_0} = 0, \quad t = t, \quad x = 0 \quad (5-3-4)$$

$$Y = \frac{T_1 - T_1}{T_1 - T_0} = 0, \quad t = t, \quad x = 2H$$

روش مناسب مورد استفاده برای حل معادله (۵-۳-۳) روش جداسازی متغیرهاست که

حاصل ضرب زیر را می دهد،

$$Y = e^{-a^2 \alpha t} (A \cos ax + B \sin ax) \quad (5-3-5)$$

که  $A$  و  $B$  ثابت هستند و  $a$  یک پارامتر است. با به کار بردن شرایط مرزی و شرایط اولیه معادله (۵-۳-۴)

برای حل ثابتهای معادله (۵-۳-۳) حل نهایی یک سری نامتناهی فوریه خواهد بود،



$$\frac{T_1 - T}{T_1 - T_0} = \frac{4}{\pi} \left( \frac{1}{1} \exp \frac{-1^2 \pi^2 \alpha t}{4H^2} \sin \frac{1\pi x}{2H} + \frac{1}{3} \exp \frac{-3^2 \pi^2 \alpha t}{4H^2} \sin \frac{3\pi x}{2H} + \frac{1}{5} \exp \frac{-5^2 \pi^2 \alpha t}{4H^2} \sin \frac{5\pi x}{2H} + \dots \right) \quad (5-3-6)$$

بنابراین از معادله (۵-۳-۶) دمای  $T$  در هر نقطه  $x$  و زمان  $t$  می‌تواند تعیین شود. اما استفاده از این نوع معادلات خیلی وقت‌گیر است. منحنیهای مناسبی براساس این معادلات به دست آمده‌اند که در بخشهای ۵-۳B، ۵-۳C، ۵-۳D و ۵-۳E مورد بحث قرار می‌گیرند و در آنها مقاومت سطحی نیز به حساب آمده است.

### ۵-۳B هدایت ناپایدار در یک جامد نیمه بی‌نهایت<sup>(۱)</sup>

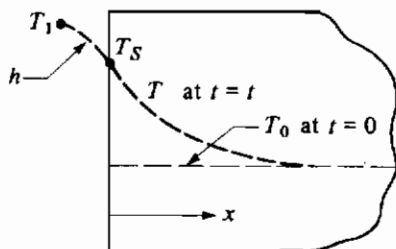
در شکل ۵-۳-۲ یک جامد نیمه بی‌نهایت نشان داده شده است که تا  $\infty$  در جهت  $x$  مثبت توسعه یافته است. هدایت گرما فقط در جهت  $x$  اتفاق می‌افتد. در ابتدا دمای جامد در  $T_0$  ثابت است. در زمان  $t = 0$  جامد به طور ناگهانی در معرض سیالی با دمای ثابت قرار می‌گیرد یا در یک سیال با دمای ثابت  $T_1$  فرو برده می‌شود. ضریب جابه‌جایی  $h$  بر حسب  $W/m^2.K$  یا  $Btu/hr.ft^2.F$  وجود دارد یعنی مقاومت سطحی موجود است. بنابراین دمای  $T_s$  در سطح با  $T_1$  مساوی نیست.

حل معادله (۵-۱-۱۰) برای این شرایط به دست آمده است و به صورت زیر است،

$$\frac{T - T_0}{T_1 - T_0} = 1 - Y = \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} - \exp \left[ \frac{h\sqrt{\alpha t}}{k} \left( \frac{x}{\sqrt{\alpha t}} + \frac{h\sqrt{\alpha t}}{k} \right) \right] \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} + \frac{h}{k} \sqrt{\alpha t} \right) \quad (5-3-7)$$

که  $x$  فاصله از سطح جامد بر حسب  $m$ ،  $t$  زمان بر حسب ثانیه،  $\alpha = k/\rho c_p$  بر حسب  $m^2/s$  است و در سیستم واحدهای انگلیسی،  $t = hr$  و  $\alpha = ft^2/hr$  است. تابع  $\operatorname{erfc}$  به صورت  $(1 - \operatorname{erf})$  است که  $\operatorname{erf}$  تابع خطاست و مقادیر عددی آن در جداول و کتابها موجود هستند.  $Y$  جزء تغییرات انجام نشده است.  $1 - Y$  جزء تغییرات است.  $(T_1 - T)/(T_1 - T_0)$

شکل ۵-۳-۳ که به وسیله معادله (۵-۳-۷) محاسبه شده، منحنی مناسبی برای هدایت گرمایی ناپایدار در جامد نیمه بی‌نهایت با جابه‌جایی در سطح است. اگر هدایت در جامد به اندازه کافی آهسته باشد با  $h$  خیلی بزرگ باشد از بالاترین خط با  $h\sqrt{\alpha t}/k = \infty$  استفاده می‌شود.



شکل ۲-۳-۵. هدایت ناپایدار در یک جامد نیمه بی نهایت

### مثال ۱-۳-۵ دمای انجماد در زیر زمین

عمقی از خاک که در آن دماهای انجماد نفوذ می کند غالباً در کشاورزی و ساختمان سازی با اهمیت است. در طول یک روز پاییزی دمای زمین در  $15/6^{\circ}\text{C}$  ( $60^{\circ}\text{F}$ ) تا عمق چندین متر ثابت است. یک توده هوای سرد دمای هوا را از  $15/6^{\circ}\text{C}$  به  $17/8^{\circ}\text{C}$  ( $5^{\circ}\text{F}$ ) کاهش می دهد. ضریب جابه جایی بالای خاک  $11/36 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$  ( $2 \text{ Btu/hr}\cdot\text{ft}^2$ ) است. خواص خاک به صورت زیر است:

$$k = 0.865 \text{ W/m}\cdot\text{K} \quad (0.5 \text{ Btu/hr}\cdot\text{ft}\cdot^{\circ}\text{F}) \quad \alpha = 4/65 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s} \quad (0.018 \text{ ft}^2/\text{hr})$$

از اثرات گرمای نهان صرف نظر کنید. واحدهای SI و انگلیسی را استفاده کنید.

الف) دمای سطح بعد از ۵ ساعت چیست؟

ب) در مدت ۵ ساعت تا چه عمقی از خاک دمای  $5^{\circ}\text{C}$  ( $32^{\circ}\text{F}$ ) نفوذ می کند؟

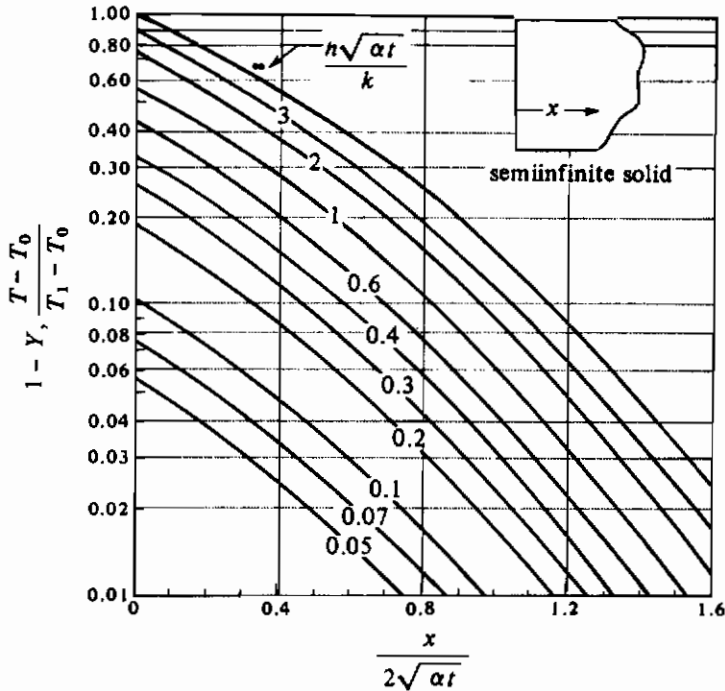
حل: این حالت، هدایت ناپایدار در جامد نیمه بی نهایت است. برای قسمت الف)، مقدار  $x$  که فاصله از سطح می باشد، صفر است ( $x = 0$ ). سپس مقدار  $x/2\sqrt{\alpha t}$  به صورت زیر برای  $t = 5 \text{ hr}$  و  $k = 11/36 \text{ W/m}^2\cdot^{\circ}\text{C}$  و  $\alpha = 4/65 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$  محاسبه می شود. با استفاده از واحدهای SI و انگلیسی،

$$\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} = \frac{0}{2\sqrt{(4.65 \times 10^{-7})(5 \times 3600)}} \quad \frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} = \frac{0}{2\sqrt{0.018(5)}}$$

همچنین،

$$\frac{h\sqrt{\alpha t}}{k} = \frac{11.36\sqrt{(4.65 \times 10^{-7})(5 \times 3600)}}{0.865} \quad \frac{h\sqrt{\alpha t}}{k} = \frac{2\sqrt{0.018(5)}}{0.5}$$

$$= 1.2 \quad = 1.2$$



شکل ۳-۳-۵. هدایت ناپایدار در یک جامد نیمه بی نهایت با جابه جایی در سطح.  
محاسبه شده از معادله (۵-۳-۷) (S1).

با استفاده از شکل ۳-۳-۵ برای  $x/2\sqrt{\alpha t} = 0$  و  $h\sqrt{\alpha t}/k = 1/2$  مقدار  $1 - Y = 0/63$  از منحنی خوانده می شود. با تبدیل دماها به کلونین،

$$T_0 = 15/6^\circ\text{C} + 273/2 = 288/8 \text{ K } (60^\circ\text{F})$$

$$T_1 = -17/8^\circ\text{C} + 273/2 = 255/4 \text{ K } (0^\circ\text{F})$$

سپس،

$$1 - Y = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0} = 0/63 = \frac{T - 288/8}{255/4 - 288/8}$$

با حل معادله نسبت به  $T$  در سطح پس از ۵ ساعت،

$$T = 267/76 \text{ K } (-5/44^\circ\text{C}) \text{ یا } (22/2^\circ\text{F})$$

برای قسمت (ب)،  $T = 273/2 \text{ K}$  یا  $0^\circ\text{C}$  و فاصله  $x$  مجهول است. با جایگذاری مقادیر معلوم،

$$\frac{T - T_0}{T_1 - T_0} = \frac{273/2 - 288/8}{255/4 - 288/8} = 0.467$$

از شکل ۳-۳-۵ برای  $0.467 = (T - T_0)/(T_1 - T_0)$  و  $h\sqrt{at}/k = 1/2$  مقدار  $0.16$  از منحنی برای  $x/2\sqrt{at}$  خوانده می شود. بنابراین،

$$\frac{x}{2\sqrt{at}} = \frac{x}{2\sqrt{(4.65 \times 10^{-7})(5 \times 3600)}} = 0.16 \quad \frac{x}{2\sqrt{at}} = \frac{x}{2\sqrt{0.018(5)}} = 0.16$$

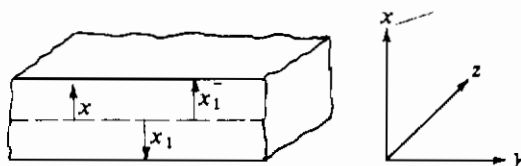
با حل معادله نسبت به  $x$  طولی که دمای انجماد در ۵ ساعت نفوذ می کند به دست می آید،

$$x = 0.293 \text{ m } (0.96 \text{ ft})$$

### ۳-۵ هدایت ناپایدار در یک صفحه مسطح بزرگ

یک شکل هندسی که اغلب در مسائل هدایت گرما استفاده می شود، صفحه مسطحی با ضخامت  $2x_1$  در جهت  $x$  و با ابعادی بزرگ یا بی نهایت در جهت های  $y$  و  $z$  مطابق شکل ۳-۳-۲ است. گرما فقط از دو سطح موازی و صاف در جهت  $x$  هدایت می شود. دمای ثابت اولیه صفحه در لحظه  $t = 0$  برابر با  $T_0$  است. جسم جامد در معرض محیطی با دمای  $T_1$  قرار می گیرد و هدایت ناپایدار اتفاق می افتد. مقاومت سطحی هم وجود دارد.

نتایج عددی این حالت به صورت گرافیکی در شکل های ۳-۳-۵ و ۳-۳-۶ نشان داده شده است. شکل ۳-۳-۵ که توسط Gurney و Lurie (G2) ارائه شده است یک منحنی مناسب برای تعیین دماها در هر موقعیت در صفحه و در هر زمان  $t$  است. گروه های بدون بعدی که در این منحنی و منحنی های دیگر حالت ناپایدار در این بخش استفاده می شوند در جدول ۳-۳-۱ داده شده اند ( $x$  فاصله از مرکز صفحه مسطح، شعاع استوانه و یا شعاع کره است.  $x$  برای یک جامد نیمه بی نهایت فاصله از سطح است). در شکل ۳-۳-۵ هنگامی که  $n = 0$  موقعیت در مرکز صفحه است. غالباً دانستن دمای قبلی در مرکز صفحه مهم است. منحنی دقیق تر برای تعیین دمای مرکز، شکل ۳-۳-۶ یا منحنی Heisler است. Heisler همچنین نمودارهای چندگانه ای برای تعیین دما در موقعیتهای دیگر ارائه کرده است.



شکل ۳-۴-۵. هدایت ناپایدار در یک صفحه مسطح بزرگ

جدول ۱-۳-۵. پارامترهای بدون بعد برای استفاده در منحنیهای هدایت ناپایدار

$$Y = \frac{T_1 - T}{T_1 - T_0} \quad m = \frac{k}{hx_1}$$

$$1 - Y = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0} \quad n = \frac{x}{x_1}$$

$$X = \frac{\alpha t}{x_1^2}$$

SI units:  $\alpha = \text{m}^2/\text{s}$ ,  $T = \text{K}$ ,  $t = \text{s}$ ,  $x = \text{m}$ ,  $x_1 = \text{m}$ ,  $k = \text{W}/\text{m} \cdot \text{K}$ ,  $h = \text{W}/\text{m}^2 \cdot \text{K}$   
 English units:  $\alpha = \text{ft}^2/\text{h}$ ,  $T = ^\circ\text{F}$ ,  $t = \text{h}$ ,  $x = \text{ft}$ ,  $x_1 = \text{ft}$ ,  $k = \text{btu}/\text{h} \cdot \text{ft} \cdot ^\circ\text{F}$ ,  
 $h = \text{btu}/\text{h} \cdot \text{ft}^2 \cdot ^\circ\text{F}$   
 Cgs units:  $\alpha = \text{cm}^2/\text{s}$ ,  $T = ^\circ\text{C}$ ,  $t = \text{s}$ ,  $x = \text{cm}$ ,  $x_1 = \text{cm}$ ,  $k = \text{cal}/\text{s} \cdot \text{cm} \cdot ^\circ\text{C}$ ,  
 $h = \text{cal}/\text{s} \cdot \text{cm}^2 \cdot ^\circ\text{C}$

### مثال ۲-۳-۵ هدایت گرمایی در قالب کره

یک قالب مکعب مستطیلی کره که ضخامت آن  $46/2 \text{ mm}$  و در دمای اولیه  $277/6 \text{ K}$  ( $4/4 ^\circ\text{C}$ ) است، از یک سردکننده خارج می شود و در محیطی با دمای  $297/1 \text{ K}$  ( $23/9 ^\circ\text{C}$ ) قرار می گیرد. اضلاع و کف قالب کره را می توانیم به وسیله دیواره های جانبی ظرف، عایق فرض کنیم. سطح بالای کره در معرض محیط قرار دارد. ضریب جابه جایی ثابت و برابر  $8/52 \text{ W}/\text{m}^2 \cdot \text{K}$  است. دما را در سطح کره در فاصله  $25/4 \text{ mm}$  زیر سطح و در  $46/2 \text{ mm}$  زیر سطح (در کف عایق بندی شده) بعد از ۵ ساعت قرار گرفتن در محیط محاسبه کنید.

حل: کره را می توان به عنوان یک صفحه مسطح بزرگ با هدایت عمودی در جهت  $x$  فرض کرد. نظر به این که گرما فقط از سطح بالا وارد می شود و سطح پایین عایق بندی شده است، ضخامت  $46/2 \text{ mm}$  از قالب کره معادل با یک نیم صفحه با ضخامت  $x_1 = 46/2 \text{ mm}$  است. در صفحه ای با دو سطح در معرض محیط مطابق شکل ۴-۳-۵، مرکز در  $x = 0$  مثل یک صفحه عایق بندی شده عمل می کند و دو صفحه با یکدیگر قرینه اند.

خواص فیزیکی کره از ضمیمه A.4 به این صورت هستند،

$$\rho = 998 \text{ kg}/\text{m}^3, \quad c_p = 2/30 \text{ kJ}/\text{kg} \cdot \text{K} = 2300 \text{ J}/\text{kg} \cdot \text{K}, \quad k = 0/197 \text{ W}/\text{m} \cdot \text{K}$$

و ضریب نفوذ گرمایی برابر است با:

$$\alpha = \frac{k}{\rho c_p} = \frac{0/197}{998 \times 2300} = 8/58 \times 10^{-8} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$x_1 = \frac{46/2}{1000} = 0.0462 \text{ m}$$

پارامترهای مورد نیاز برای استفاده در شکل ۵-۳-۵ به صورت زیر هستند،

$$m = \frac{k}{h x_1} = \frac{0.197}{1.52 \times 0.0462} = 0.5$$

$$X = \frac{\alpha l}{x_1} = \frac{(1.58 \times 10^{-4}) \times 5 \times 3600}{0.0462} = 0.72$$

برای سطح بالایی که  $x = x_1 = 0.0462 \text{ m}$  است،

$$n = \frac{x}{x_1} = \frac{0.0462}{0.0462} = 1$$

سپس با استفاده از شکل ۵-۳-۵،

$$Y = 0.25 = \frac{T_1 - T}{T_1 - T_s} = \frac{297/1 - T}{297/1 - 277/6}$$

پس از حل،  $T = 292/9 \text{ K} (19^\circ \text{C})$ .

در نقطه‌ای به فاصله  $25/4 \text{ mm}$  از سطح بالایی یا  $20/8 \text{ mm}$  از مرکز،  $x = 0.0208 \text{ m}$  و،

$$n = \frac{x}{x_1} = \frac{0.0208}{0.0462} = 0.45$$

از شکل ۵-۳-۵،

$$Y = 0.45 = \frac{T_1 - T}{T_1 - T_s} = \frac{297/1 - T}{297/1 - 277/6}$$

پس از حل،  $T = 288/3 \text{ K} (15/1^\circ \text{C})$ .

برای نقطه پایینی یا  $0.0462 \text{ m}$  از بالا،  $x = 0$  و،

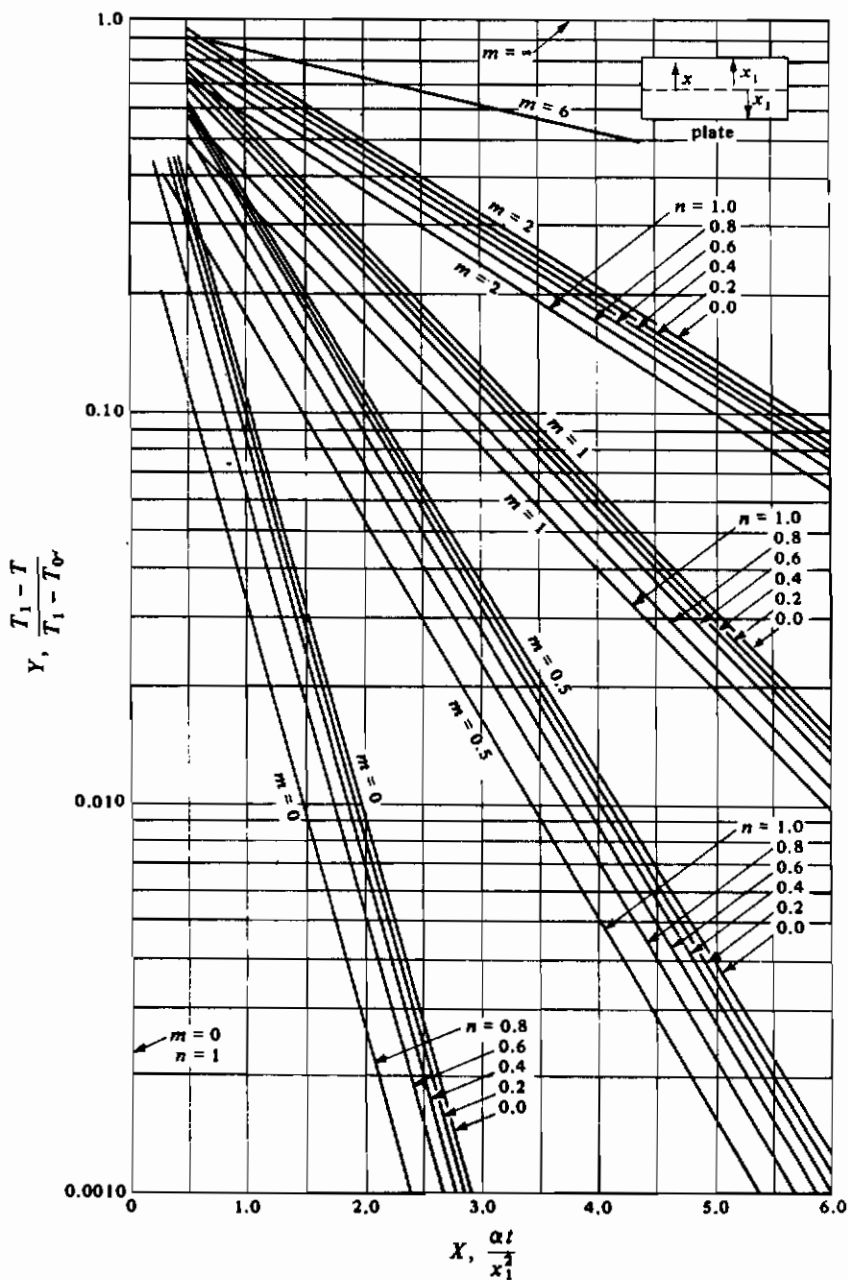
$$n = \frac{x}{x_1} = \frac{0}{x_1} = 0$$

سپس از شکل ۵-۳-۵،

$$Y = 0.50 = \frac{T_1 - T}{T_1 - T_s} = \frac{297/1 - T}{297/1 - 277/6}$$

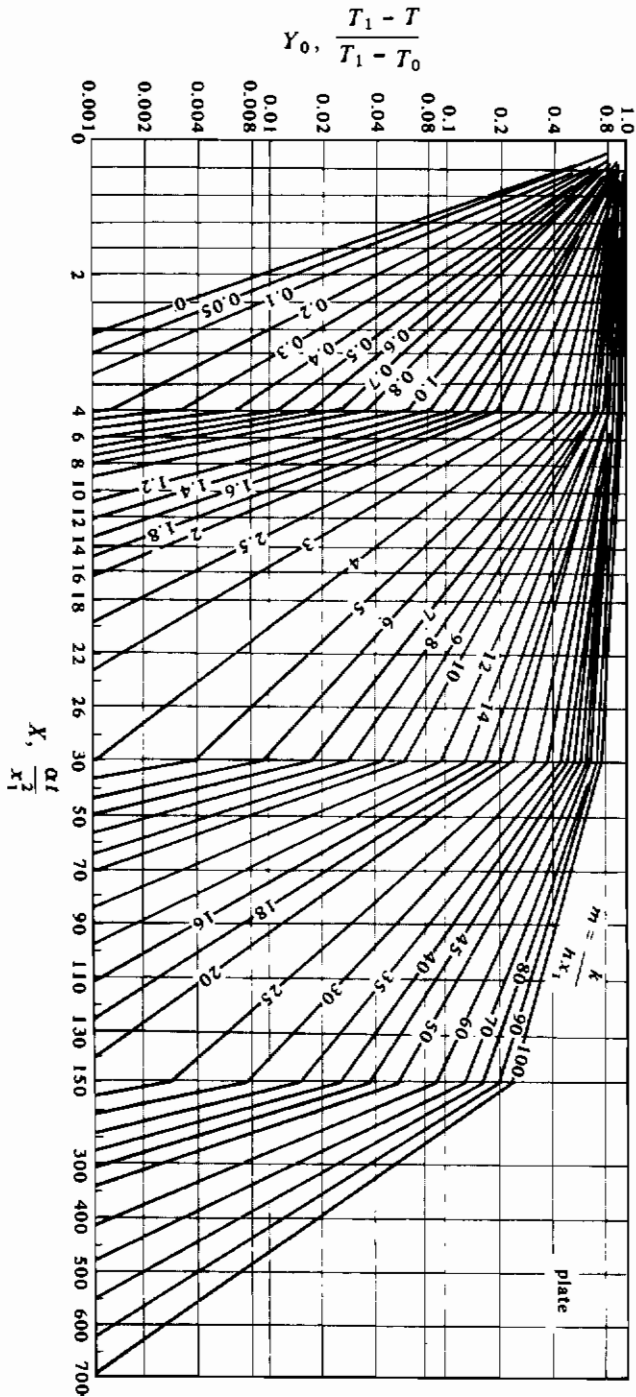
با حل معادله،  $T = 287/4 \text{ K} (14/2^\circ \text{C})$  به طریق دیگر، با به کار بردن شکل ۵-۳-۶ که فقط

برای مرکز است،  $Y = 0.53$  و  $T = 286/8 \text{ K} (13/6^\circ \text{C})$  به دست می‌آید.



شکل ۵-۳-۵. هدایت ناپایدار در یک صفحه مسطح بزرگ (گرفته شده از

(H. P. Gurney and J. Lurie, Ind. Eng. Chem., 15, 1170 (1923))



شکل ۵-۳-۵ منحنی تعیین دما در مرکز یک صفحه مسطح بزرگ در هدایت گرمایی ناپایدار (گرفته شده از: H. P. Heisler, Trans. ASME, 69, 227 (1947))



## ۵-۳D هدایت ناپایدار در یک استوانه بلند

در این بخش هدایت ناپایدار را در یک استوانه بلند در حالی در نظر می‌گیریم که هدایت فقط در جهت شعاعی اتفاق می‌افتد. استوانه بلند است، به طوری که هدایت در دو انتهای آن قابل صرفنظر کردن است و یا این‌که دو انتهای آن عایق هستند. منحنیهای این حالت، در شکل ۵-۳-۷ برای تعیین دما در هر موقعیت مکانی و در شکل ۵-۳-۸ برای تعیین دما در مرکز، ارائه شده است.

## مثال ۵-۳-۳ هدایت ناپایدار گرمایی در یک قوطی کنسرو

یک قوطی کنسرو استوانه‌ای شکل به قطر  $68/1 \text{ mm}$  و ارتفاع  $101/6 \text{ mm}$  در ابتدا در دما  $29/4^\circ\text{C}$  قرار دارد. مجموعه‌ای از قوطی‌های کنسرو در یک محفظه به طور عمودی روی هم قرار گرفته‌اند و بخار آب در  $115/6^\circ\text{C}$  وارد این محفظه می‌شود. در صورتی که محفظه مدت  $0/75 \text{ hr}$  در دمای  $115/6^\circ\text{C}$  قرار گیرد، دمای مرکز قوطی را محاسبه کنید. فرض کنید قوطی مورد نظر در وسط قوطی‌های دیگر است و دو طرف آن توسط قوطیهای دیگر عایق شده است. ظرفیت گرمایی دیواره قلزی قوطی ناچیز است. ضریب انتقال حرارت بخار آب حدود  $4540 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$  است. خواص فیزیکی،  $k = 0/83 \text{ W/m}\cdot\text{K}$  و  $\alpha = 2/007 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$  است.

حل: چون قوطی از دو طرف عایق شده است می‌توانیم آن را به عنوان یک استوانه بلند در نظر

بگیریم. شعاع آن برابر با  $x_1 = \frac{0/0681}{2} = 0/03405 \text{ m}$  است. در مرکز با  $x = 0$

$$\eta = \frac{x}{x_1} = \frac{0}{x_1} = 0$$

همچنین،

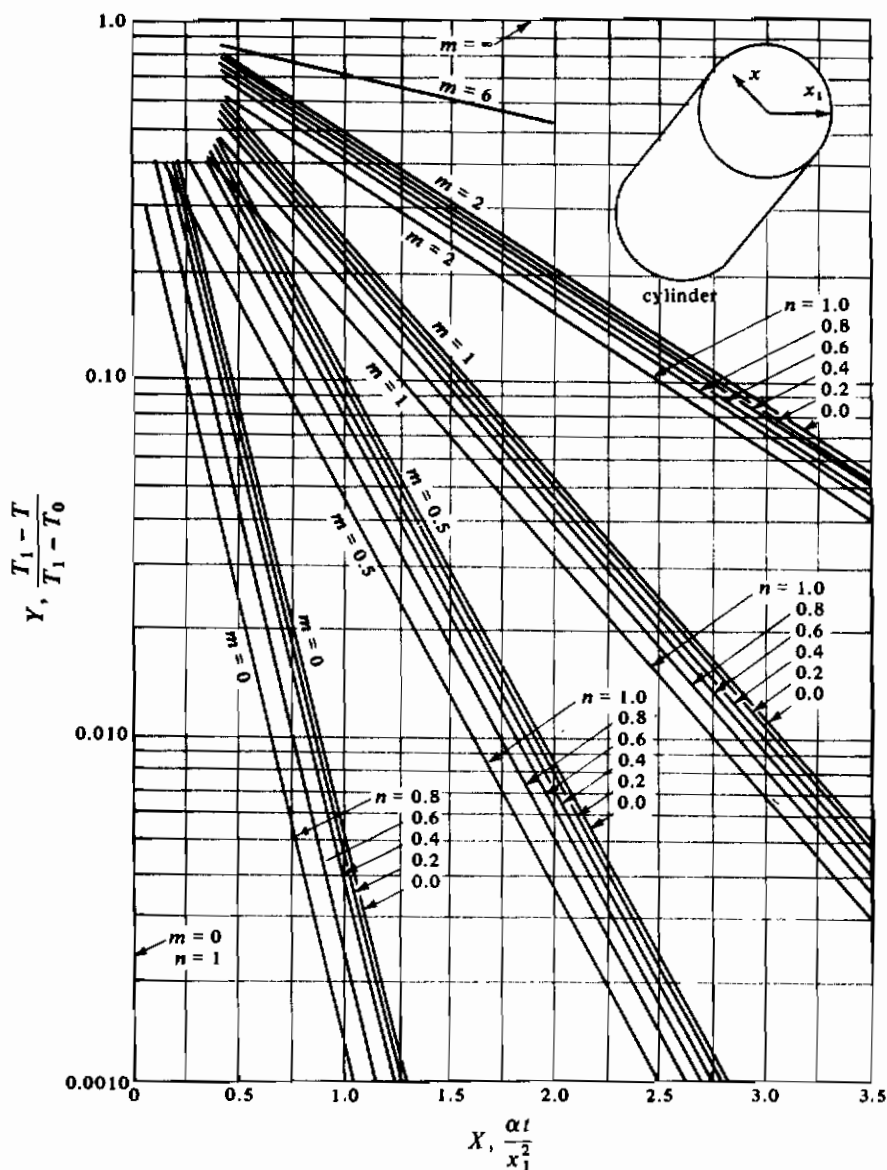
$$m = \frac{k}{h x_1} = \frac{0/83}{4540 \times 0/03405} = 0/00537$$

$$X = \frac{\alpha t}{x_1^2} = \frac{(2/007 \times 10^{-7}) \times 0/75 \times 3600}{0/03405^2} = 0/468$$

با استفاده از شکل ۵-۳-۸ (منحنی Heister) دمای مرکز برابر خواهد بود با:

$$Y = 0/13 = \frac{T_1 - T}{T_1 - T_0} = \frac{115/6 - T}{115/6 - 29/4}$$

و با حل معادله،  $T = 104/4^\circ\text{C}$ .

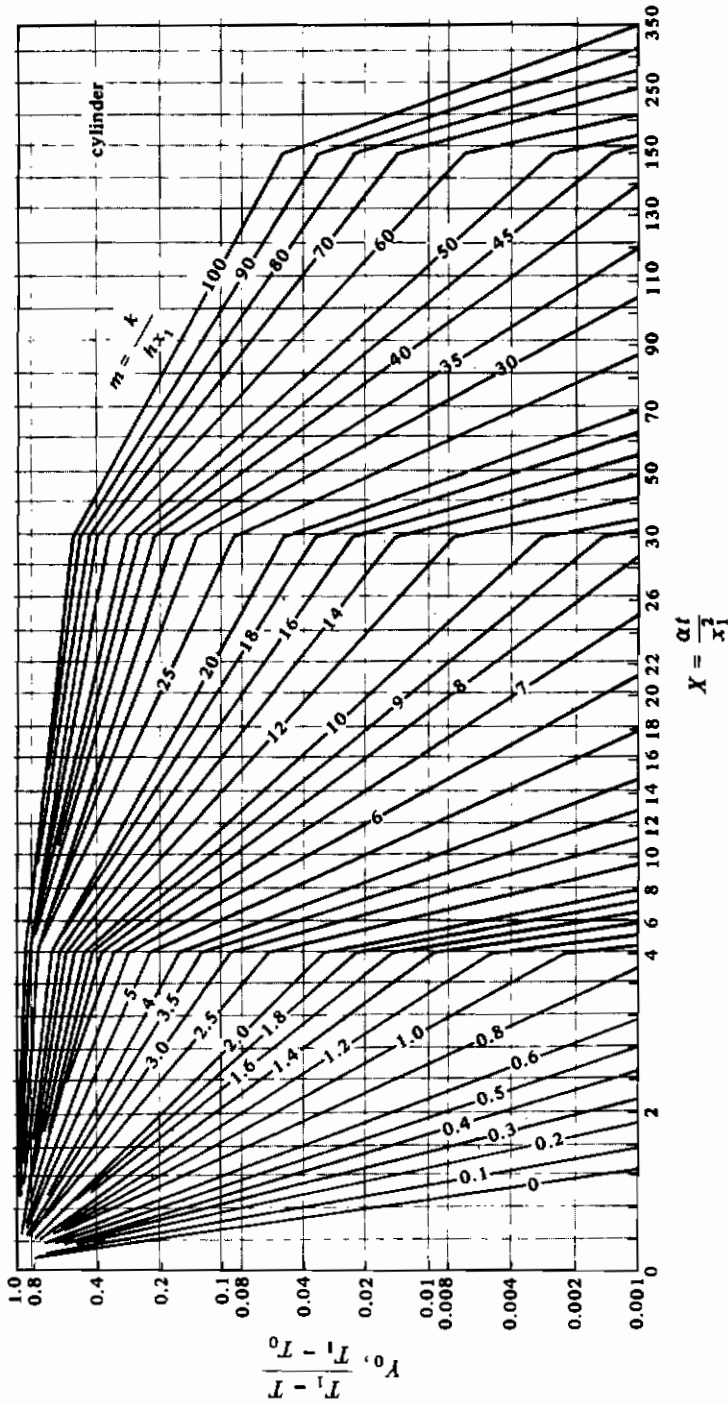


شکل ۷-۳-۵. هدایت ناپایدار در یک استوانه بلند (گرفته شده از:

(H. P. Gurney and J. Lurie, Ind. Eng. Chem., 15, 1170 (1923))

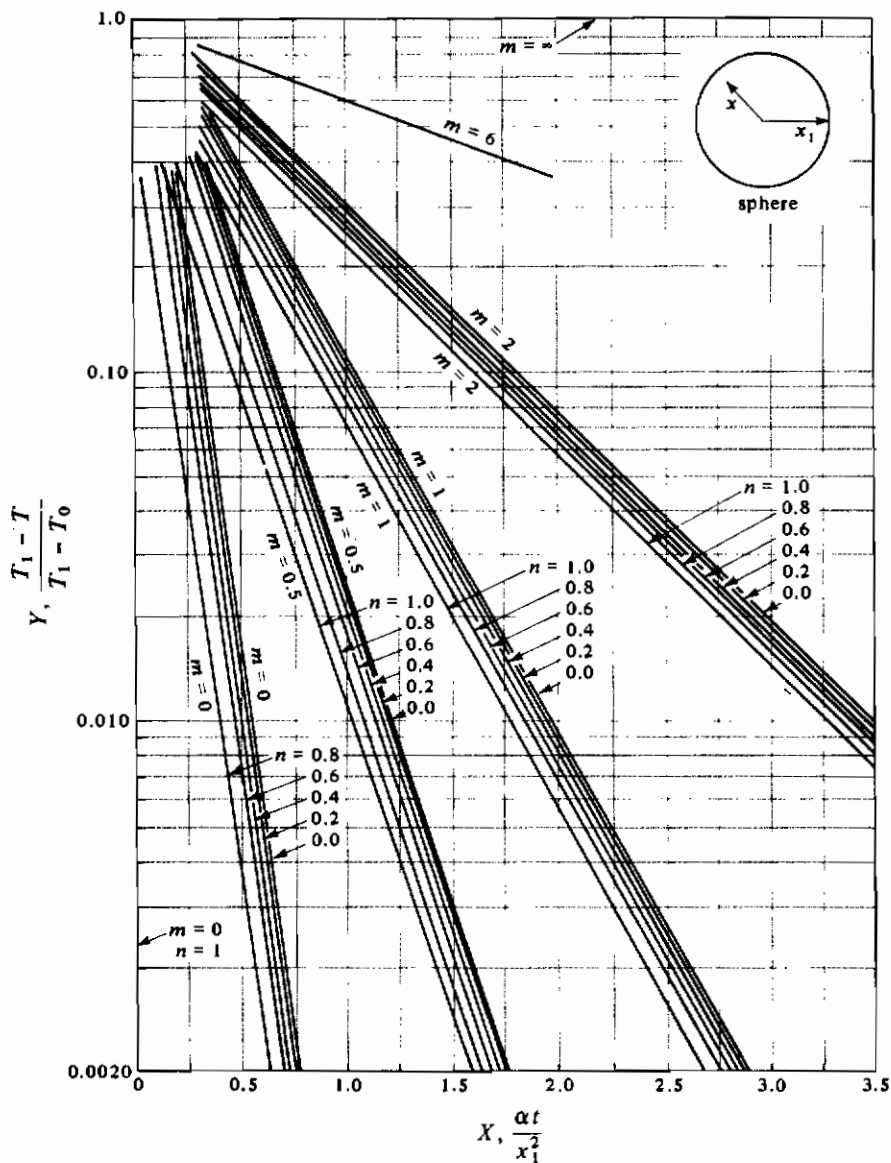
۵-۳E هدایت ناپایدار در یک کره

در شکل ۹-۳-۵ یک منحنی توسط Gurney و Lurie برای تعیین دما در هر موقعیت مکانی در یک کره داده شده است. در شکل ۱۰-۳-۵ یک منحنی توسط Heister برای تعیین دمای مرکز یک کره ارائه شده است.



شکل ۸-۳.۵. منحنی تعیین دمای مرکزی استوانه بلند در هدایت ناپایدار (گرفته شده از:

(H. P. Heisler, Trans. ASME, 69,227 (1947)

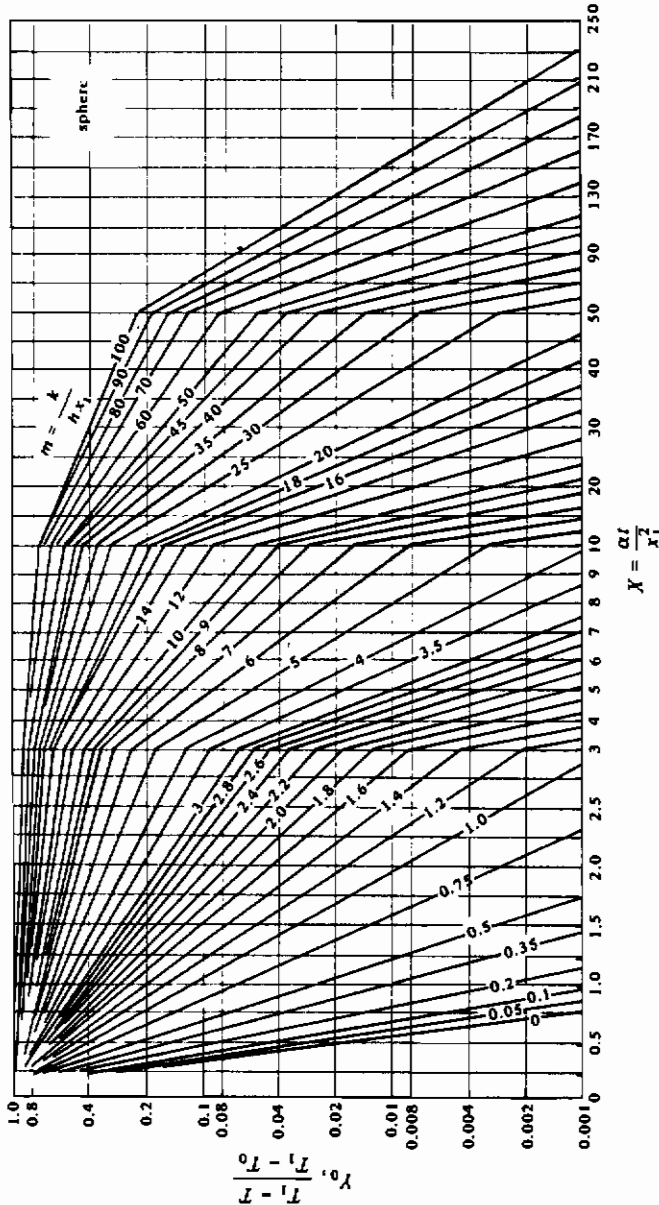


شکل ۹-۳-۵. هدایت ناپایدار در یک کره (گرفته شده از:

(H. P. Gurney and J. Lurie, Ind. Eng. Chem., 15, 1170 (1923))

۵-۳۴ هدایت ناپایدار در سیستمهای دو بُعدی و سه بُعدی

مسائل هدایت که تاکنون مطرح شد مربوط به سیستمهای یک بُعدی بود. اما بسیاری از مسائل واقعی با هدایت ناپایدار در دو و یا سه جهت رو به رو هستند. در این بخش چگونگی ترکیب روشهای یک بُعدی برای به دست آوردن راه‌حلهای مناسب برای سیستمهای چند بُعدی را تشریح خواهیم کرد.



شکل ۱۰-۳-۵. منحنی تعیین دمای مرکز یک کره در هدایت ناپایدار (گرفته شده از:

(H. P. Heister, Trans. ASME, 69, 227 (1947)

Newman با استفاده از اصل جمع آثار<sup>(۱)</sup> به صورت ریاضی نحوه ترکیب روشهای هدایت یک بُعدی به صورت جداگانه در جهت های  $x$ ,  $y$ ,  $z$  را برای به دست آوردن یک راه حل کلی برای هدایت همزمان در هر سه جهت، نشان داد. به عنوان مثال، یک قطعه مکعب مستطیل شکل به ابعاد  $2x_1$ ,  $2y_1$ ,  $2z_1$  در شکل ۵-۳-۱۱ نشان داده شده است. مقدار  $Y$  در جهت  $x$  مانند قبل به صورت زیر است،

$$Y_x = \frac{T_1 - T_x}{T_1 - T_0} \quad (5-3-8)$$

که  $T_x$  همانند قبل دما در زمان  $t$  و فاصله  $x$  از خط مرکزی است. همچنین  $m = k/hx_1$ ,  $n = x/x_1$  و  $X_x = \alpha t/x_1^2$  است. سپس برای جهت  $y$

$$Y_y = \frac{T_1 - T_y}{T_1 - T_0} \quad (5-3-9)$$

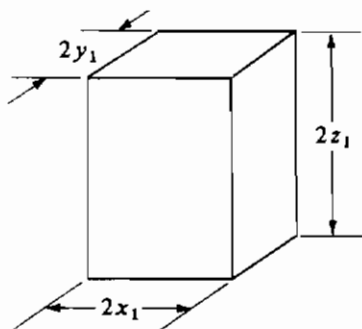
و  $m = k/hy_1$ ,  $n = y/y_1$  و  $X_y = \alpha t/y_1^2$  به طور مشابه برای جهت  $z$

$$Y_z = \frac{T_1 - T_z}{T_1 - T_0} \quad (5-3-10)$$

سپس برای انتقال همزمان در هر سه جهت،

$$Y_{x,y,z} = (Y_x)(Y_y)(Y_z) = \frac{T_1 - T_{x,y,z}}{T_1 - T_0} \quad (5-3-11)$$

که در این جا  $T_{x,y,z}$  دما در نقطه ای به مختصات  $x$ ,  $y$ ,  $z$  از مرکز جسم مکعب مستطیل شکل است. مقدار  $Y_x$  برای دو صفحه موازی از شکلهای ۵-۳-۵ و ۵-۳-۶ برای هدایت در یک صفحه صاف به دست می آید. مقادیر  $Y_y$ ,  $Y_z$  به طریق مشابه از همان شکل به دست می آیند.



شکل ۵-۳-۱۱. هدایت ناپایدار در سه بُعد در یک بلوک مکعب مستطیل شکل

برای یک استوانه کوتاه با شعاع  $x_1$  و طول  $2y_1$ ، این روش به کار برده می‌شود: ابتدا  $Y_x$  برای هدایت شعاعی از شکل‌های مربوط به استوانه بلند به دست می‌آید. سپس  $Y_y$  برای هدایت بین دو صفحه موازی از شکل ۵-۳-۵ یا ۵-۳-۶ مربوط به هدایت در یک صفحه صاف به دست می‌آید و پس از آن،

$$Y_{x,y} = (Y_x)(Y_y) = \frac{T_1 - T_{x,y}}{T_1 - T_0} \quad (5-3-12)$$

#### مثال ۵-۳-۴ هدایت دوبعدی در یک استوانه کوتاه

مثال ۵-۳-۳ را برای هدایت ناپایدار در یک قوطی کنسرو با این فرض که هدایت از دو صفحه انتهایی نیز اتفاق بیفتد، تکرار کنید.

حل: قوطی که قطر آن  $68/1 \text{ mm}$  و ارتفاع آن  $101/6 \text{ mm}$  است در شکل ۵-۳-۱۲ نشان داده شده است. مقادیر داده شده از مثال ۵-۳-۳ به صورت زیر می‌باشند،

$$\alpha = 2/0007 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}, k = 0/83 \text{ W/m.K}, y_1 = \frac{0/1016}{2} = 0/0508 \text{ m}, x_1 = 0/03405 \text{ m}$$

$$t = 0/75 \times 3600 = 2700 \text{ s}, h = 4540 \text{ W/m}^2.\text{K}$$

برای هدایت (شعاعی) در جهت  $x$  هم چنان که قبلاً محاسبه شد،

$$n = \frac{x}{x_1} = \frac{0}{x_1} = 0$$

$$m = \frac{k}{h x_1} = \frac{0/83}{4540 \times 0/03405} = 0/00537$$

$$X = \frac{\alpha t}{x_1^2} = \frac{(2/0007 \times 10^{-7}) \times 2700}{0/03405^2} = 0/468$$

از شکل ۵-۳-۸ برای محاسبه دمای مرکز،

$$Y_x = 0/13$$

با هدایت در جهت (محوری)  $y$ ، برای محاسبه دمای مرکز،

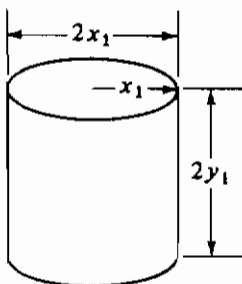
$$n = \frac{y}{y_1} = \frac{0}{0/0508} = 0$$

$$m = \frac{k}{h y_1} = \frac{0/83}{4540 \times 0/0508} = 0/0036$$

$$X = \frac{\alpha t}{y_1^2} = \frac{(2/0007 \times 10^{-7}) \times 2700}{0/0508^2} = 0/210$$

با به کار بردن شکل ۵-۳-۶ برای مرکز یک صفحه بزرگ (دو صفحه موازی مقابل هم) داریم:

$$Y_y = 0/80$$



شکل ۵-۳-۱۲. هدایت دو بُعدی در یک استوانه کوتاه در مثال ۵-۳-۴

با جایگزینی در معادله (۵-۳-۱۲) خواهیم داشت،

$$Y_{x,y} = Y_x \times Y_y = 0/13 \times 0/80 = 0/104$$

بنابراین:

$$\frac{T_1 - T_{x,y}}{T_1 - T_0} = \frac{115/6 - T_{x,y}}{115/6 - 29/4} = 0/104$$

$$T_{x,y} = 106/6^\circ\text{C}$$

این دما باید با دمای  $104/4^\circ\text{C}$  در مثال ۵-۳-۳ که فقط هدایت شعاعی در نظر گرفته شده بود مقایسه شود.

### ۵-۳G منحنیهای دمای میانگین در صفحه، استوانه و کره با مقاومت سطحی ناچیز

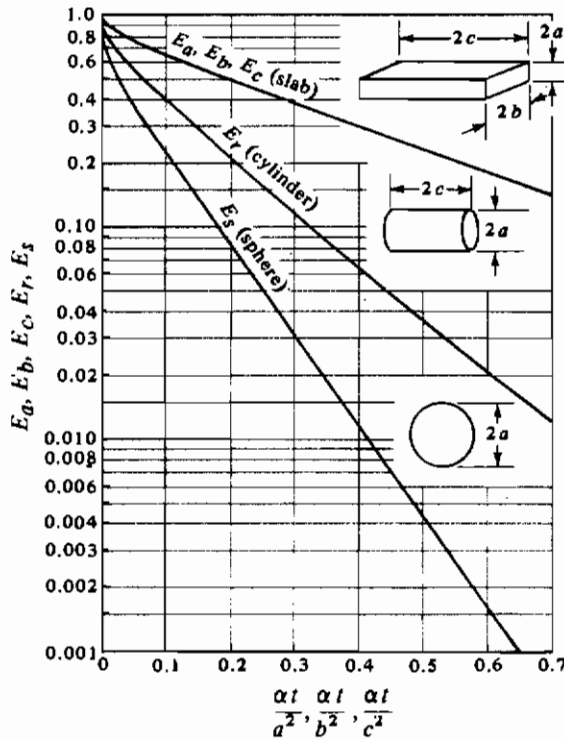
اگر مقاومت سطحی ناچیز باشد، منحنیهای شکل ۵-۳-۱۳، مقدار کل تغییر انجام نشده  $E$  را برای صفحات، استوانه‌ها و کره‌ها و در هدایت ناپایدار خواهد داد. مقدار  $E$  به صورت زیر است:

$$E = \frac{T_1 - T_{av}}{T_1 - T_0} \quad (5-3-13)$$

که در این جا  $T_0$  دمای یکنواخت اولیه،  $T_1$  دمای محیط که جامد به طور ناگهانی در معرض آن قرار می‌گیرد و  $T_{av}$  دمای میانگین جامد بعد از  $t$  ساعت است. مقادیر  $E_a$  و  $E_b$  و  $E_c$  برای هدایت بین یک جفت صفحه موازی نیز به کار می‌روند. به عنوان مثال برای هدایت در جهتهای  $a$  و  $b$  در یک میله با مقطع مستطیل داریم:

$$E = E_a E_b \quad (5-3-14)$$





شکل ۱۳-۳-۵. هدایت ناپایدار و دماهای میانگین برای مقاومت سطحی ناچیز (با کسب مجوز گرفته شده از: R.E. Treybal, Mass Transfer Operations, 2nd ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1968)

برای هدایت در هر سه جهت  $a$  و  $b$  و  $c$  همچنین داریم:

$$E = E_a E_b E_c \quad (۵-۳-۱۵)$$

و برای هدایت در استوانه‌های کوتاه به طول  $2c$  و شعاع  $a$  داریم:

$$E = E_c E_r \quad (۵-۳-۱۶)$$

#### ۵-۴ روشهای عددی تفاضل محدود برای هدایت ناپایدار

##### ۵-۴A هدایت ناپایدار در یک اسلب

۱- مقدمه: همان‌طور که در بخشهای قبلی این فصل بحث شد، معادلات دیفرانسیل جزئی مربوط به هدایت ناپایدار در اجسام مختلف با شکلهای هندسی ساده را در صورتی که شرایط مرزی در  $T = T_1$

نسبت به زمان ثابت باشند، می‌توان با روشهای تحلیلی حل کرد. همچنین در این راه حلها، توزیع اولیه دما در  $t = 0$  و  $T = T_0$  یکنواخت است. منحنیهای حالت ناپایدار نیز که برای حل استفاده می‌شوند، شرایط مرزی و اولیه مشابهی دارند. اما وقتی که شرایط مرزی نسبت به زمان یا مکان ثابت نباشند، باید از روشهای عددی استفاده کرد.

روشهای محاسبه عددی برای هدایت گرمایی ناپایدار مشابه روشهای عددی برای حالت پایدار که در بخش ۱۵-۴ بحث شد، می‌باشند. سطح جامد به قسمتها یا اسلبهای با طول مساوی تقسیم می‌شود و در مرکز هر قسمت یک گره فرضی قرار می‌گیرد. سپس برای هر گره موازنه گرمایی نوشته می‌شود. تفاوت این روش با حالت پایدار در این است که در این حالت تجمع گرمایی در هر گره داریم. ۲- معادلات برای اسلب: معادله حالت ناپایدار برای هدایت در جهت  $x$  در یک اسلب به صورت زیر است،

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (5-1-10)$$

این معادله می‌تواند مبنای حل عددی باشد، به این صورت که هر کدام از مشتقات جزئی به صورت یک تفاضل محدود برحسب  $\Delta T$  و  $\Delta t$  و  $\Delta x$  نوشته شود. اما برای رسیدن به نتیجه نهایی از موازنه گرمایی استفاده می‌شود. شکل ۱-۴-۵ یک اسلب را نشان می‌دهد که مرکز آن نقطه  $n$  است و به وسیله ناحیه خط چین نشان داده شده است. عرض اسلب  $m$   $\Delta x$  و سطح مقطع آن  $A \text{ m}^2$  است. گرهی که در نقطه  $n$  است با دمای  $T_n$ ، در مرکز قسمت هاشور زده قرار گرفته است و این گره نشاندنده کل جرم و ظرفیت گرمایی آن بخش یا اسلب است. فرض می‌شود که هر گره توسط یک میله کوچک فرضی به گره مجاور وصل شده است. (برای مثال شکل ۳-۱۵-۴ را ببینید).

این شکل، توزیع دما را در فاصله زمانی معلوم  $t$  ثانیه نشان می‌دهد. با نوشتن موازنه گرمایی روی این گره یا اسلب، به صورت: (نرخ گرمای ورودی - نرخ گرمای خروجی = نرخ تجمع گرما)، در فاصله زمانی  $\Delta t$  ثانیه داریم:

$$\frac{kA}{\Delta x} (T_{n-1} - T_n) - \frac{kA}{\Delta x} (T_n - T_{n+1}) = \frac{(A \Delta x) \rho c_p}{\Delta t} (T_{n+\Delta t} - T_n) \quad (5-4-1)$$

که در این رابطه  $T_n$  دمای نقطه  $n$  در زمان  $t$  و  $T_{n+\Delta t}$  دمای نقطه  $n$  در زمان  $t + \Delta t$  است. با مرتب کردن رابطه و حل آن نسبت به  $T_{n+\Delta t}$  داریم:

$$T_{n+\Delta t} = \frac{1}{M} [T_{n+1} + (M-2)T_n + T_{n-1}] \quad (5-4-2)$$

که در این جا

$$M = \frac{(\Delta x)^2}{\alpha \Delta t} \quad (5-4-3)$$

توجه کنید که در معادله (۵-۴-۲) دمای  $T_n$  در گره  $n$  در زمان جدید  $t + \Delta t$  با استفاده از سه نقطه دیگر که دمای آنها در زمان  $t$  (زمان شروع) معلوم بوده، محاسبه شده است. به این روش، روش صریح<sup>(۱)</sup> می‌گویند، به دلیل این که دما در یک زمان جدید به طور صریح با استفاده از دماهای زمان قبل محاسبه می‌شود. در این روش، محاسبه به طور مستقیم از یک زمان تا فاصله زمانی بعدی پیش می‌رود تا هنگامی که توزیع نهایی دما در مدت زمان مطلوب به دست آید. البته توزیع دما در زمان اولیه و شرایط مرزی باید معلوم باشند.

هنگامی که مقدار  $\Delta x$  انتخاب شد، از معادله (۵-۴-۳) مقدار  $M$  یا  $\Delta t$  مشخص می‌شود. برای یک مقدار مشخص  $M$ ،  $\Delta x$  های کوچکتر به معنای  $\Delta t$  های کوچکتر است. مقدار  $M$  باید به صورت زیر باشد،

$$M \geq 2 \quad (5-4-4)$$

اگر  $M$  کوچکتر از ۲ باشد، قانون دوم ترمودینامیک نقض می‌شود. همچنین ثابت می‌شود که برای همگرایی و پایداری روش تفاضل محدود،  $M$  باید از ۲ بزرگتر یا مساوی آن باشد.

پایداری به این معناست که با پیشرفت حل مسأله، خطاها ناپیوستگی به صورت نمایی رشد نکنند، بلکه باید میرا شوند. همگرایی به این معناست که با میل کردن  $\Delta x$  و  $\Delta t$  به سمت صفر با  $M$  ثابت، حل معادله تفاضل باید به سمت حل دقیق معادله دیفرانسیل جزئی میل کند. بنا کوچکتر کردن اندازه‌های  $\Delta x$  و  $\Delta t$  دقت افزایش پیدا می‌کند. اما به صورت قابل توجهی، نرخ محاسبات لازم افزایش خواهد یافت. بنابراین غالباً برای این محاسبات نیاز به کامپیوتر است.

۳- روش ساده شده اشمیت برای یک اسلب: اگر  $M = 2$  باشد معادله (۵-۴-۲) با استفاده از روش اشمیت تا حد زیادی ساده می‌شود،

$${}_{t+\Delta t}T_n = \frac{{}_tT_{n-1} + {}_tT_{n+1}}{2} \quad (5-4-5)$$

این رابطه به این معناست که، هنگامی که زمان  $\Delta t$  ۱ سپری شد، دمای جدید در نقطه  $n$  در زمان  $t + \Delta t$  میانگین حسابی دماهای دو گره مجاور  $n + 1$  و  $n - 1$  در زمان  $t$  می‌باشد.

## ۵-۴B شرایط مرزی برای حل عددی مربوط به یک اسلب

۱- جابه‌جایی در مرز: در حالتی که یک مقاومت جابه‌جایی محدود در مرز وجود دارد و دمای محیط یا سیال خارجی به‌طور ناگهانی به  $T_a$  تغییر می‌کند، رابطه‌ای به صورتی که بیان می‌شود می‌توانیم برای اسلب به دست آوریم. باتوجه به شکل ۵-۴-۱، یک موازنه گرمایی روی نیمه بیرونی المان می‌نویسیم، نرخ گرمای ورودی به وسیله جابه‌جایی منهای نرخ گرمای خروجی به وسیله هدایت مساوی با نرخ تجمع گرما در زمان  $\Delta t$  ثانیه است،

$$hA({}_i T_a - {}_i T_1) - \frac{kA}{\Delta x} ({}_i T_1 - {}_i T_2) = \frac{(A \Delta x / 2) \rho c_p}{\Delta t} ({}_{i+\Delta t} T_{1.25} - {}_i T_{1.25}) \quad (5-4-6)$$

که  ${}_i T_{1/2}$  دمای نقطه وسط در فاصله  $\Delta x / 2$  بیرون از اسلب است. به عنوان یک تقریب، دمای  $T_1$  سطح با دمای  ${}_i T_{1/2}$  مساوی در نظر گرفته می‌شود، در نتیجه با مرتب کردن معادله داریم:

$${}_{i+\Delta t} T_1 = \frac{1}{M} [2N {}_i T_a + [M - (2N + 2)] {}_i T_1 + 2 {}_i T_2] \quad (5-4-7)$$

که،

$$N = \frac{h \Delta x}{k} \quad (5-4-8)$$

توجه کنید که مقدار  $M$  باید به صورت زیر باشد،

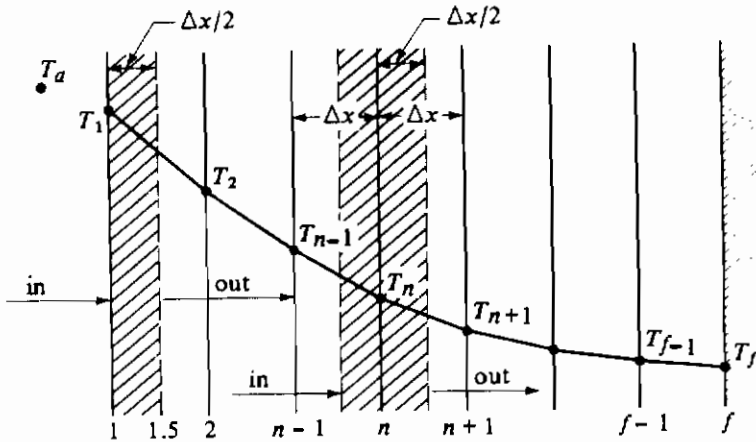
$$M \geq 2N + 2 \quad (5-4-9)$$

۲- شرط مرزی عایق: در حالتی که شرط مرزی برای جسمی است که صفحه انتهایی آن عایق شده است، موازنه گرمایی روی  $\Delta x / 2$  انتهایی اسلب و روی  $\Delta x / 2$  ابتدایی اسلب در شکل ۵-۴-۱ نوشته می‌شود. معادله نهایی مشابه بنا معادلات (۵-۴-۶) و (۵-۴-۷) است، اما بنا  $h = 0$  یا  $N = 0$  و  ${}_{i+\Delta t} T_1 = {}_i T_{i+1}$  که به دلیل تقارن می‌باشد.

$${}_{i+\Delta t} T_f = \frac{1}{M} [(M - 2) {}_i T_f + 2 {}_i T_{f-1}] \quad (5-4-10)$$

۳- شرط جابه‌جایی جایگزین: برای به کار بردن معادلات فوق در یک مسأله باید از مقادیر یکسان  $M$  و  $\Delta x$  استفاده شود. اگر  $N$  خیلی بزرگ شود، به طوری که  $M$  نیز به طور غیر معمول بزرگ شود، شکل دیگری از معادله (۵-۴-۷) می‌تواند به دست آید. با صرف نظر کردن از تجمع گرما در نیمه جلویی اسلب در معادله (۵-۴-۶) داریم،

$${}_{i+\Delta t} T_1 = \frac{N}{N+1} {}_{i+\Delta t} T_a + \frac{1}{N+1} {}_{i+\Delta t} T_2 \quad (5-4-11)$$



شکل ۵-۴-۱. هدایت ناپایدار در یک اسلب

که در اینجا، مقدار  $M$  توسط  $N$  محدود نمی‌شود. این تقریب موقعی که تعداد فواصل  $\Delta x$  خیلی زیاد باشد، به طوری که مقدار گرمای اغماض شده در مقابل کل گرما ناچیز باشد، به خوبی کارآیی خواهد داشت.

۴- روشهای استفاده از دمای اولیه مرزی: هنگامی که دمای محیط بیرون به طور ناگهانی به  $T_a$  تغییر کند، روش زیر باید به کار رود:

۱- هنگامی که  $M = 2$  و محاسبه برای تعداد محدودی از فواصل زمانی به صورت دستی انجام شود، روال بخصوصی در معادلات (۵-۴-۵) و (۵-۴-۷) یا (۵-۴-۱۱) باید عمل شود. برای اولین فاصله زمانی مقدار میانگین  $T_a$  به صورت  $(T_a + T_1)/2$  به دست می‌آید، که  $T_1$  دمای اولیه در نقطه ۱ است. برای تمام  $\Delta t$  های بعدی، مقدار  $T_a$  باید استفاده شود ( $D1, K1$ ). این روش خاص استفاده از  $T_a$  برای اولین فاصله زمانی، دقت روش عددی را خصوصاً بعد از چند فاصله زمانی، افزایش می‌دهد. اگر  $T_a$  با زمان تغییر کند، برای هر فاصله زمانی، مقدار جدید به کار می‌رود.

۲- هنگامی که  $M = 2$  و فواصل زمانی زیاد هستند و همچنین محاسبه با کامپیوتر انجام می‌شود، در این حالت به روش بخصوصی نیاز نیست و  $T_a$  برای تمام فواصل زمانی به کار می‌رود.

۳- هنگامی که  $M = 3$  یا بیشتر باشد و فواصل زمانی کم باشند، محاسبه دستی و یا برای تعداد زیادی از فواصل زمانی محاسبات کامپیوتری انجام شود، از مقدار  $T_a$  برای تمام فواصل زمانی استفاده می‌شود. توجه داشته باشید که وقتی  $M = 3$  یا بیشتر باشد، لازم است بسیاری از محاسبات با حالت  $M = 2$  مقایسه شود. دقیق‌ترین نتایج وقتی به دست می‌آید که  $M = 4$  باشد، که مناسب‌ترین روش است و دقت نتایج در حالت  $M = 3$  مختصری کمتر است ( $K2, K1, D1$ ).

## مثال ۵-۴-۱ هدایت ناپایدار و روش عددی اشمیت

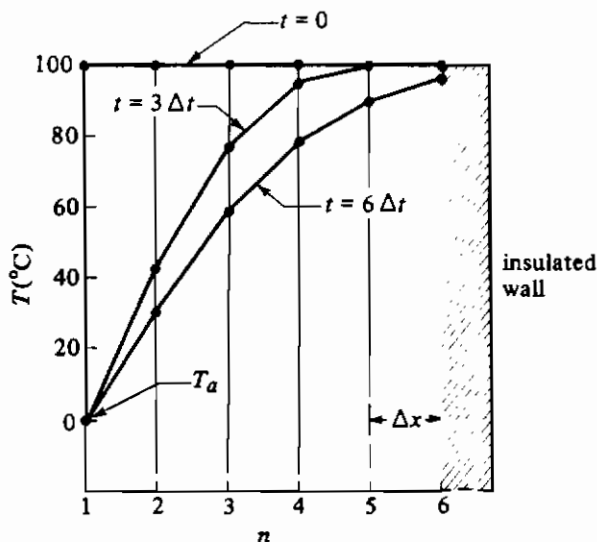
یک اسلب به ضخامت ۱ m در دمای یکنواخت  $100^\circ\text{C}$  قرار دارد. صفحه جلویی به طور ناگهانی در معرض محیطی با دمای ثابت  $0^\circ\text{C}$  قرار می‌گیرد. مقاومت جابه‌جایی صفر است ( $h = \infty$ ). صفحه انتهایی اسلب عایق است. ضریب نفوذ گرمایی  $\alpha = 2 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$  است. با استفاده از پنج اسلب هر کدام به ضخامت  $0.2 \text{ m}$  و روش عددی اشمیت با  $M = 2$  توزیع دما را در  $t = 6000 \text{ s}$  به دست آورید. برای اولین فاصله زمانی از روش مخصوص استفاده کنید.

حل: شکل ۵-۴-۲ توزیع دما را در  $t = 0$  و دمای محیط  $T_a = 0^\circ\text{C}$  با استفاده از پنج اسلب نشان می‌دهد. در روش اشمیت  $M = 2$  با جایگزینی در معادله (۵-۴-۳) با  $\alpha = 2 \times 10^{-5}$  و  $\Delta x = 0.2$  و حل معادله نسبت به  $\Delta t$  داریم،

$$M = 2 = \frac{(\Delta x)^2}{\alpha \Delta t} = \frac{0.2^2}{(2 \times 10^{-5}) \times \Delta t} \quad \Delta t = 1000 \text{ s} \quad (5-4-3)$$

این بدین معناست که، تعداد فاصله  $\frac{6000 \text{ s}}{1000 \text{ s}} = 6$  یا شش فاصله زمانی باید در نظر گرفته شود تا به  $6000 \text{ s}$  برسیم. برای سطح جلویی که  $n = 1$  است، همانطور که قبلاً بیان شد، دمای  $T_a$  برای اولین فاصله زمانی به کار می‌رود، لذا داریم،

$$T_a = \frac{T_a + T_1}{2} = T_1 \quad n = 1 \quad (5-4-12)$$



شکل ۵-۴-۲. دماها در روش عددی، مثال ۵-۴-۱

که  $T_1$ . دمای اولیه در نقطه ۱ است. برای بقیه فواصل زمانی داریم،

$$T_1 = T_a \quad n = 1 \quad (5-4-13)$$

برای محاسبه دماها در تمام فواصل زمانی برای اسلبهای  $n = 2$  تا  $5$  با استفاده از معادله (5-4-5) داریم،

$$t + \Delta t T_n = \frac{t T_{n-1} + t T_{n+1}}{2} \quad n = 2, 3, 4, 5 \quad (5-4-14)$$

برای انتهای عایق در تمام فواصل زمانی در  $n = 6$  با جایگزینی  $M = 2$  و  $f = 6$  در معادله (5-4-12) داریم،

$$t + \Delta t T_6 = \frac{(2 - 2) \times t T_7 + 2 \times t T_5}{2} = t T_5 \quad (5-4-15)$$

برای اولین فاصله زمانی  $t + \Delta t$  و با محاسبه دما در  $n = 1$  بر اساس معادله (5-4-12) داریم،

$$t + \Delta t T_1 = \frac{T_a + {}_0 T_1}{2} = \frac{0 + 100}{2} = 50 \text{ } ^\circ\text{C} = {}_1 T_a$$

برای  $n = 2$  با استفاده از معادله (5-4-14)،

$$t + \Delta t T_2 = \frac{t T_1 + t T_3}{2} = \frac{50 + 100}{2} = 75$$

و با ادامه دادن برای  $5$  و  $4$  و  $3$   $n$  داریم،

$$t + \Delta t T_3 = \frac{t T_2 + t T_4}{2} = \frac{100 + 100}{2} = 100$$

$$t + \Delta t T_4 = \frac{t T_3 + t T_5}{2} = \frac{100 + 100}{2} = 100$$

$$t + \Delta t T_5 = \frac{t T_4 + t T_6}{2} = \frac{100 + 100}{2} = 100$$

برای  $n = 6$  با استفاده از معادله (5-4-15) داریم،

$$t + \Delta t T_6 = t T_5 = 100$$

پس از گذشت زمان  $2 \Delta t$  با استفاده از معادله (5-4-13) برای  $n = 1$  و با ادامه محاسبه برای  $6$  تا  $n = 2$  و با استفاده از معادلات (5-4-14) و (5-4-15) داریم،

فرایندهای انتقال و عملیات واحدها

$$t+2 \Delta t T_1 = T_a = 0$$

$$t+2 \Delta t T_r = \frac{t+\Delta t T_1 + t+\Delta t T_f}{2} = \frac{0 + 100}{2} = 50$$

$$t+2 \Delta t T_f = \frac{t+\Delta t T_r + t+\Delta t T_e}{2} = \frac{50 + 100}{2} = 87.5$$

$$t+2 \Delta t T_e = \frac{t+\Delta t T_f + t+\Delta t T_b}{2} = \frac{100 + 100}{2} = 100$$

$$t+2 \Delta t T_b = \frac{t+\Delta t T_e + t+\Delta t T_1}{2} = \frac{100 + 100}{2} = 100$$

$$t+2 \Delta t T_1 = t+\Delta t T_b = 100$$

برای  $\Delta t$  ۳،

$$t+3 \Delta t T_1 = 0$$

$$t+3 \Delta t T_r = \frac{0 + 87.5}{2} = 43.75$$

$$t+3 \Delta t T_f = \frac{50 + 100}{2} = 75$$

$$t+3 \Delta t T_e = \frac{87.5 + 100}{2} = 93.75$$

$$t+3 \Delta t T_b = \frac{100 + 100}{2} = 100$$

$$t+3 \Delta t T_1 = 100$$

برای  $\Delta t$  ۴،

$$t+4 \Delta t T_1 = 0$$

$$t+4 \Delta t T_r = \frac{0 + 75}{2} = 37.5$$

$$t+4 \Delta t T_f = \frac{43.75 + 93.75}{2} = 68.75$$

$$t+4 \Delta t T_e = \frac{75 + 100}{2} = 87.5$$

$$t+4 \Delta t T_b = \frac{93.75 + 100}{2} = 96.875$$

$$t+4 \Delta t T_1 = 100$$

برای  $\Delta t$  ۵،



$$t+5 \Delta t T_1 = 0$$

$$t+5 \Delta t T_2 = \frac{0 + 68/75}{2} = 34/38$$

$$t+5 \Delta t T_3 = \frac{37/5 + 87/5}{2} = 62/50$$

$$t+5 \Delta t T_4 = \frac{68/75 + 96/88}{2} = 82/81$$

$$t+5 \Delta t T_5 = \frac{87/5 + 100}{2} = 93/75$$

$$t+5 \Delta t T_6 = 96/88$$

و برای  $6 \Delta t$  (زمان نهایی)،

$$t+6 \Delta t T_1 = 0$$

$$t+6 \Delta t T_2 = \frac{0 + 62/5}{2} = 31/25$$

$$t+6 \Delta t T_3 = \frac{34/38 + 82/81}{2} = 58/59$$

$$t+6 \Delta t T_4 = \frac{62/5 + 93/75}{2} = 78/13$$

$$t+6 \Delta t T_5 = \frac{82/81 + 96/88}{2} = 89/84$$

$$t+6 \Delta t T_6 = 93/75$$

توزیع دما برای  $3 \Delta t$  و دمای نهایی  $6 \Delta t$  در شکل ۲-۴-۵ رسم شده است. این مثال چگونگی انجام یک محاسبه دستی را نشان می‌دهد. برای افزایش دقت، تعداد بیشتری از اسلها و فواصل زمانی بیشتر نیاز است. برای انجام محاسبات دقیق‌تر و مفصل‌تر استفاده از کامپیوتر ضروری است.

#### مثال ۲-۴-۵ هدایت ناپایدار با استفاده از محاسبات کامپیوتری

مثال ۱-۴-۵ را با استفاده از کامپیوتر تکرار کنید.  $\Delta x = 0.05 \text{ m}$ . یک برنامه فورتن بنویسید و دماهای نهایی را با مقادیر به دست آمده در مثال ۱-۴-۵ مقایسه کنید. از روش صریح اشمیت با  $M = 2$  استفاده کنید. گرچه با به کار بردن کامپیوتر نیاز به فاصله‌های زمانی زیاد نیست، اما از روش مخصوص برای به دست آوردن  $T_2$ ، در اولین فاصله زمانی استفاده کنید. بنابراین اثر تعداد فواصل روی دقت نتایج مربوط به مثال ۱-۴-۵ مشخص خواهد شد.

حل: تعداد اسلبها در اینجا  $20 = \frac{1}{0.05}$  است. با جایگزینی در معادله (۵-۴-۳) با  $M = 2$  و  $\Delta x = 0.05 \text{ m}$  و  $\alpha = 2 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$  و حل معادله نسبت به  $\Delta t$  داریم،

$$M = 2 = \frac{(\Delta x)^2}{\alpha \Delta t} = \frac{0.05^2}{(2 \times 10^{-5}) \times \Delta t}$$

$$\Delta t = 62/5 \text{ s}$$

بنابراین،  $96 = \left(\frac{6000}{62/5}\right)$  فاصله زمانی لازم است. مقدار  $n$  از ۱ تا ۲۱ ادامه پیدا می‌کند.

معادلاتی که برای محاسبه استفاده می‌شوند، معادلات (۵-۴-۱۲) تا (۵-۴-۱۵) هستند. تنها اختلاف این است که در معادله (۵-۴-۱۴)  $n$  از ۲ تا ۲۰ است و در معادله (۵-۴-۱۵)،  $n = 21$  است. به طوری که  $T_{21} = T_0 + \Delta t T_{21}$ .

برنامه فرترن برای این معادلات به راحتی قابل نوشتن است و به خواننده واگذار می‌شود. نتایج در جدول ۵-۴-۱ آورده شده تا با مثال ۵-۴-۱ که در آنجا فقط پنج اسلب وجود داشت مقایسه شود. جدول نشان می‌دهد که نتایج با پنج اسلب خیلی نزدیک به نتایج با بیست اسلب است و نرخ انحراف آنها از یکدیگر حدود ۰.۲٪ است.

جدول ۵-۴-۱. مقایسه نتایج مثالهای ۵-۴-۱ و ۵-۴-۲

Distance from Front Face	Results Using $\Delta x = 0.20 \text{ m}$		Results Using $\Delta x = 0.05 \text{ m}$	
	Temperature		Temperature	
	$m$	$n$	$^{\circ}\text{C}$	$n$
0	1	0.0	1	0.0
0.20	2	31.25	5	31.65
0.40	3	58.59	9	58.47
0.60	4	78.13	13	77.55
0.80	5	89.84	17	88.41
1.00	6	93.75	21	91.87

به عنوان یک تخمین سرانگشتی در مورد محاسبات دستی، با به کار بردن حداکثر ۵ اسلب و در نهایت هشت تا ده فاصله زمانی، نتایج در بیشتر موارد دقت لازم را خواهند داشت. در مواردی که به دقت زیادتر نیاز داریم و یا حالت‌های مختلف وجود دارد، استفاده از کامپیوتر بهتر خواهد بود. در بعضی موارد، خواص فیزیکی با دقت مناسب برای استفاده در برنامه‌های کامپیوتری در دسترس نیست.

### مثال ۳-۴-۵ هدایت ناپایدار با شرط مرزی جابه‌جایی

شرایط مثال ۱-۴-۵ موجود است، علاوه بر آن ضریب جابه‌جایی  $h = 25 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$  نیز در سطح وجود دارد. ضریب هدایت گرمایی:  $k = 10 \text{ W/m} \cdot \text{K}$ .

حل: معادلات (۷-۴-۵) و (۸-۴-۵) برای جابه‌جایی در سطح به کار می‌روند. از معادله (۸-۴-۵)،  $N = h \Delta x / k = (25 \times 0.02) / 10 = 0.1$  سپس  $2N + 2 = 2 \times 0.1 + 2 = 2.2$ . اما براساس معادله (۹-۴-۵) مقدار  $M$  باید مساوی یا بزرگتر از  $2N + 2$  باشد. این به آن معناست که  $M$  مساوی با  $2$  نمی‌تواند باشد. مقدار مناسب  $M = 4$  را انتخاب می‌کنیم. (روش دیگر که دقت کمتری دارد این است که معادله (۱۱-۴-۵) را برای جابه‌جایی به کار ببریم، در این صورت مقدار  $M$  محدود به مقدار  $N$  نخواهد بود).

با جایگزینی در معادله (۳-۴-۵) و حل آن نسبت به  $\Delta t$

$$M = 2 = \frac{(\Delta x)^2}{\alpha \Delta t} = \frac{0.05^2}{(2 \times 10^{-5}) \times \Delta t} \Rightarrow \Delta t = 62/5 \text{ s}$$

بنابراین،  $12 (= \frac{6000}{500})$  فاصله زمانی باید در نظر گرفته شود.

برای اولین فاصله زمانی و برای همه فواصل زمانی، مقدار دمای محیطی  $T_a$  برابر  $0^\circ \text{C}$  است، زیرا  $M > 3$ . برای جابه‌جایی در گره یا نقطه  $n = 1$  از معادله (۷-۴-۵) استفاده می‌کنیم که در آن جا  $M = 4$  و  $N = 0.1$  است،

$$1 + \Delta t T_1 = \frac{1}{F} [2 \times 0.1 \times T_a + [4 - (2 \times 0.1 + 2)] T_1 + 2 T_1] \quad (5-4-16)$$

$$= 0.25 T_a + 0.25 T_1 + 0.5 T_1 \quad n = 1$$

برای ۲ و ۳ و ۴ و ۵، از معادله (۲-۴-۵) استفاده می‌کنیم.

$$1 + \Delta t T_n = \frac{1}{F} [T_n + 1 + (4 - 2) n T_1 + T_n - 1] \quad (5-4-17)$$

$$= 0.25 T_n + 1 + 0.5 T_n + 0.25 T_n - 1 \quad n = 2, 3, 4, 5$$

برای  $n = 6$  (مرز عایق‌بندی شده) معادله (۵-۴-۱۰) را با  $f = 6$  به کار می‌بریم.

$$t + \Delta t T_1 = \frac{1}{f} [ (f - 2)t T_1 + 2t T_5 ] \quad (5-4-18)$$

$$= 0/5 t T_1 + 0/5 t T_5$$

در اولین فاصله زمانی  $t + \Delta t$ ،  $T_5 = 0$  است. با به کار بردن معادله (۵-۴-۱۶) برای محاسبه دما در گره ۱ داریم،

$$t + \Delta t T_1 = 0/25 \times 0 + 0/25 \times 100 + 0/5 \times 100 = 75$$

برای ۵ و ۴ و ۳ و ۲ با استفاده از معادله (۵-۴-۱۷) داریم،

$$t + \Delta t T_2 = 0/25 \times t T_2 + 0/5 \times t T_2 + 0/25 \times t T_1$$

$$= 0/25 \times 100 + 0/5 \times 100 + 0/25 \times 100 = 100$$

همچنین در یک محاسبه مشابه  $T_2 = T_3 = T_4 = 100$ . در  $n = 6$  با استفاده از معادله (۵-۴-۱۸) داریم،  $T_1 = 100$ .

برای زمان  $2 \Delta t$ ،  $T_5 = 0$ . با استفاده از معادله (۵-۴-۱۶) داریم،

$$t + 2 \Delta t T_1 = 0/25 \times 0 + 0/25 \times 75 + 0/5 \times 100 = 68/75$$

با به کار بردن معادله (۵-۴-۱۷) برای ۵ و ۴ و ۳ و ۲،  $n = 6$ .

$$t + 2 \Delta t T_2 = 0/25 \times 100 + 0/5 \times 100 + 0/25 \times 75 = 93/75$$

$$t + 2 \Delta t T_3 = 0/25 \times 100 + 0/5 \times 100 + 0/25 \times 100 = 100$$

همچنین  $T_4 = T_5 = 100$ .

برای  $n = 6$  با استفاده از معادله (۵-۴-۱۸)،  $T_1 = 100$ .

برای زمان  $3 \Delta t$ ،  $T_5 = 0$ . با استفاده از معادله (۵-۴-۱۶) داریم،

$$t + 3 \Delta t T_1 = 0/25 \times 0 + 0/25 \times 68/75 + 0/5 \times 93/75 = 64/07$$

از معادله (۵-۴-۱۷) برای ۵ و ۴ و ۳ و ۲،  $n = 6$  داریم،

$$t + 3 \Delta t T_2 = 0/25 \times 100 + 0/5 \times 93/75 + 0/25 \times 68/75 = 89/07$$

$$i+3 \Delta t T_r = 0/25 \times 100 + 0/5 \times 100 + 0/25 \times 93/75 = 98/44$$

$$i+3 \Delta t T_f = 0/25 \times 100 + 0/5 \times 100 + 0/25 \times 100 = 100$$

$$T_1 = 100, T_0 = 100 \text{ همچنین}$$

به همین ترتیب محاسبات تا  $\Delta t$  ۱۲ ادامه پیدا می‌کند.

#### ۴-۵ روشهای عددی دیگر برای هدایت ناپایدار

۱- هدایت ناپایدار در یک استوانه: برای به دست آوردن معادلات عددی هدایت ناپایدار در یک اسلب صاف، سطح مقطع ثابت بود. در یک استوانه، سطحی که در معرض هدایت است به طور شعاعی تغییر می‌کند. برای به دست آوردن معادلهٔ مربوط به استوانه، به شکل ۳-۴-۵ توجه کنید که در آن استوانه به تعدادی استوانه‌های توخالی هم مرکز به ضخامت دیوارهٔ  $\Delta x$  متر تقسیم شده است. با فرض این‌که طول استوانه  $m$  باشد و با نوشتن موازنهٔ گرمایی روی اسلب در نقطهٔ  $n$  داریم، نرخ گرمای ورودی منهای نرخ گرمای خروجی مساوی است با نرخ تجمع گرما،

$$\frac{k[2\pi(n+1/2)\Delta x]}{\Delta x} (T_{n+1} - T_n) - k \frac{[2\pi(n-1/2)\Delta x]}{\Delta x} (T_n - T_{n-1}) \quad (5-4-19)$$

$$= \frac{2\pi m(\Delta x)^2 \rho c_p}{\Delta t} (T_{n+\Delta t} - T_n)$$

با مرتب کردن معادله فوق، معادلهٔ نهایی به صورت زیر است:

$$T_{n+\Delta t} = \frac{1}{M} \left[ \frac{2n+1}{2n} T_{n+1} + (M-2) T_n + \frac{2n-1}{2n} T_{n-1} \right] \quad (5-4-20)$$

که در اینجا همانند قبل  $M = (\Delta x)^2 / (\alpha \Delta t)$ . همچنین در مرکز که  $n = 0$  است داریم،

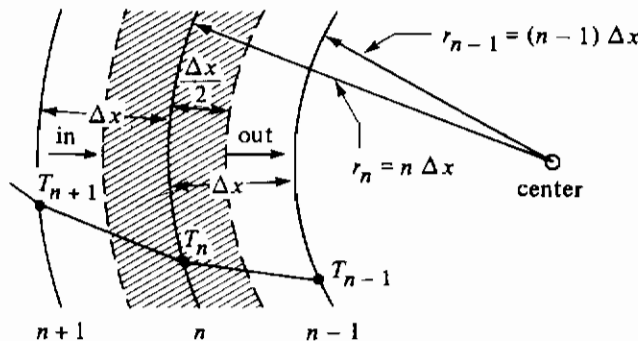
$$T_{\Delta t} = \frac{4}{M} T_1 + \frac{M-4}{M} T_0 \quad (5-4-21)$$

برای استفاده از معادلات (۵-۴-۲۰) و (۵-۴-۲۱) داریم،

$$M \geq 4 \quad (5-4-22)$$

معادلاتی برای حالت جابه‌جایی در سطح بیرونی استوانه به دست آمده‌اند (D1). اگر از ظرفیت گرمایی نیمهٔ بیرونی اسلب صرف‌نظر شود، داریم:

$$T_{n+\Delta t} = \frac{nN}{\frac{2n-1}{2} + nN} T_{n+\Delta t} + \frac{(2n-1)/2}{\frac{2n-1}{2} + nN} T_{n-1} \quad (5-4-23)$$



شکل ۳-۴-۵. هدایت ناپایدار در یک استوانه

که در اینجا  $T_n$  دمای سطح و  $T_{n-1}$  در نقطه‌ای (در قسمت جامد) به فاصله  $\Delta x$  زیر سطح است. معادلات مربوط به روشهای عددی برای هدایت ناپایدار دو بعدی در مراجع مختلف گزارش شده‌اند (K2,D1).

۲- هدایت ناپایدار و روش عددی ضمنی<sup>(۱)</sup>: در برخی مسائل عملی محدودیتهایی که روی شرط پایداری  $M > 2$  وجود دارد، این روش را برای حل مسائل نامناسب می‌کند. همچنین برای به حداقل رساندن مشکلات مربوط به پایداری روشهای ضمنی فرمولهای تفاضل محدود مختلفی دارند. یکی از مهمترین این فرمولها مربوط به روش کرانک-نیکلسون<sup>(۲)</sup> است که در زیر به بررسی آن می‌پردازیم. در به دست آوردن معادلات (۵-۴-۱) و (۵-۴-۲)، نرخ گرمای وارد شده به اسلب شکل ۵-۴-۱ در مدت زمان  $t$  در نظر گرفته شده بود،

$$\text{Rate of heat in at } t = \frac{kA}{\Delta x} ({}_t T_{n-1} - {}_t T_n) \quad (5-4-24)$$

سپس فرض شده بود که این نرخ در کل فاصله زمانی  $t$  تا  $t + \Delta t$  وجود دارد. اما این یک تقریب است، زیرا نرخ گرما در طول این فاصله زمانی تغییر می‌کند. مقدار مناسب تر، میانگین نرخ گرما در زمانهای  $t$  و  $t + \Delta t$  است.

$$\text{average rate of heat in} = \frac{kA}{\Delta x} \left[ \frac{({}_t T_{n-1} - {}_t T_n) + ({}_{t+\Delta t} T_{n-1} - {}_{t+\Delta t} T_n)}{2} \right] \quad (5-4-25)$$

همچنین، برای گرمای خروجی، از میانگینی به همین شکل استفاده می‌شود. بنابراین معادله نهایی می‌شود،

$${}_{t+\Delta t}T_{n+1} - (2M + 2) {}_{t+\Delta t}T_n + {}_{t+\Delta t}T_{n-1} = - {}_tT_{n+1} + (2 - 2M) {}_tT_n - {}_tT_{n-1} \quad (5-4-26)$$

این بدین معناست که در این جا همانند معادله (۵-۴-۲) مقدار  ${}_{t+\Delta t}T_n$  را نمی توان برحسب دماها در زمان  $t$  محاسبه کرد، بلکه همه مقادیر جدید  $T$  در زمان  $t+\Delta t$  در همه نقاط بایستی به طور همزمان محاسبه شوند. برای انجام اینکار یک معادله مشابه معادله (۵-۴-۲۶) برای هر نقطه داخلی نوشته می شود. هر یک از این معادلات و معادلات مرزی، به شکل معادلات جبری خطی هستند. سپس این معادلات به طور همزمان توسط روشهایی مانند گوس - سایدل، ماتریس معکوس و مانند آن (K1,G1) حل می شوند.

یک مزیت مهم معادله (۵-۴-۲۶) این است که به ازای تمام مقادیر مثبت  $M$  همگراست و این بدین معناست که  $M$  مقادیر کمتر از ۲ نیز می تواند داشته باشد. یک عیب روش ضمنی این است که برای یک فاصله زمانی مشخص نرخ محاسبات بیشتری نسبت به روش صریح لازم است. روشهای صریح ساده تر هستند اما به دلیل مشکل همگرایی و پایداری خصوصاً در سیستمهای پیچیده تر، روشهای ضمنی بیشتر ترجیح داده می شوند.

## ۵-۵ سرد کردن و انجماد مواد غذایی و بیولوژیکی

### ۵-۵A مقدمه

بر خلاف بسیاری از مواد آلی و غیر آلی که نسبتاً مقاوم هستند، مواد غذایی و بیولوژیکی در دمای اطاق به مرور زمان با سرعتهای متفاوت تخریب و یا فاسد می شوند. این تخریب و یا فساد عوامل مختلفی دارد. بافتهای مواد غذایی مانند میوه ها و سبزیها، بعد از جمع آوری و چیدن، هنوز به تنفس متابولیکی ادامه می دهند تا برسند و پس از آن فاسد می شوند. آنزیمهای بافتهای مرده گوشت و ماهی، فعال باقی می مانند و باعث اکسیداسیون و یا اثرات تخریبی دیگر می شوند. میکروارگانیسمها به همه نوع مواد غذایی حمله می کنند و با تجزیه آنها باعث فساد ماده غذایی می شوند. همچنین باعث ایجاد واکنشهای شیمیایی، همچون اکسیداسیون چربیها، می شوند.

در دماهای پایین، خصوصاً دماهای پایین تر از شرایط مناسب رشد، سرعت رشد میکروارگانیسمها کاهش می یابد. همچنین فعالیت آنزیم و سرعت واکنش شیمیایی نیز کم می شود. سرعت بیشتر واکنشهای شیمیایی و بیولوژیکی به ازای هر  $K$  ۱۰ ( $10^\circ C$ ) کاهش دما،  $\frac{1}{3}$  تا  $\frac{1}{4}$  برابر کم می شود.

آب نقش مهمی در سرعت فاسد شدن مواد غذایی دارد و در بیشتر مواد بیولوژیکی وجود دارد.

برای رسیدن به پایین‌ترین دمای لازم که در آن دمای این واکنشها تقریباً متوقف شوند، بیشتر آب موجود در ماده باید منجمد شود. مواد غذایی برخلاف آب که در صفر درجه منجمد می‌شود در دماهای زیر صفر منجمد می‌شوند. اما بدلیل اثرات فیزیکی کریستالهای یخ و اثرات دیگری مانند تغلیظ شدن محلولها به جای انجماد، مواد بیولوژیکی را برای نگهداری غالباً سرد می‌کنند.

سرد کردن مواد غذایی شامل، گرفتن گرمای محسوس و گرمای متابولیسم و کاهش دما تا حدود  $4/4^{\circ}\text{C}$  ( $40^{\circ}\text{F}$ ) تا نزدیکی انجماد است. معمولاً گرمای نهان انجماد گرفته نمی‌شود. این مواد بسته به نوع محصول و شرایط محیطی از یک هفته تا یک ماه می‌توانند انبار شوند. هر ماده‌ای دمای مناسب سرد کردن مخصوص به خود دارد.

در انجماد مواد غذایی و بیولوژیکی، کاهش دما آنقدر ادامه پیدا می‌کند تا بیشتر آب موجود در ماده به یخ تبدیل می‌شود. بسته به دمای نهایی انبارداری که تا  $30^{\circ}\text{C}$  - می‌تواند باشد، مواد برای حدود یکسال قابل نگهداری هستند. اغلب در تولید بسیاری از مواد غذایی منجمد، برای تخریب آنزیمها ابتدا آنها را بی‌رنگ می‌کنند و یا در آب می‌جوشانند.

#### ۵-۵B سرد کردن مواد غذایی و بیولوژیکی

در سرد کردن مواد غذایی و بیولوژیکی دمای مواد به مقدار مناسب برای نگهداری و انبار کردن که می‌تواند حدود  $1/1^{\circ}\text{C}$  - تا  $4/4^{\circ}\text{C}$  ( $30^{\circ}$  تا  $40^{\circ}$  درجه فارنهایت) باشد، کاهش داده می‌شود. به عنوان مثال، پس از کشتن گاو، دمای گوشت حدود  $37/8^{\circ}\text{C}$  ( $100^{\circ}\text{F}$ ) تا  $40^{\circ}\text{C}$  ( $104^{\circ}\text{F}$ ) است، که تا حدود  $4/4^{\circ}\text{C}$  ( $40^{\circ}\text{F}$ ) سرد می‌شود. شیر پس از دوشیدن بایستی به سرعت تا دماهای حدود انجماد سرد شود. گوشت ماهی در زمان بسته‌بندی در دمای حدود  $7/2^{\circ}\text{C}$  ( $45^{\circ}\text{F}$ ) تا  $10^{\circ}\text{C}$  ( $50^{\circ}\text{F}$ ) است که باید تا نزدیک صفر سرد شود.

این نوع سرد کردن با سرعتهای ذکر شده تابع قوانین هدایت گرمایی ناپایدار است که در بخشهای ۱-۵ تا ۴-۵ بحث شد. گرما در داخل ماده به وسیله هدایت ناپایدار و در سطح ماده توسط جابه‌جایی خارج می‌شود. برای خارج کردن گرما از یک سیال در بیرون ماده غذایی یا بیولوژیکی استفاده می‌شود که اغلب مواقع هواست. هوا توسط سیستمهای تبرید تا محدوده  $1/1^{\circ}\text{C}$  تا  $4/4^{\circ}\text{C}$  بسته به نوع ماده و شرایط دیگر، سرد می‌شود. ضرایب انتقال حرارت جابه‌جایی، که معمولاً اثرات تابشی را نیز شامل می‌شود، توسط روشهای بحث شده در فصل ۴ به دست می‌آیند و برای هوا، ضرایب از حدود  $8/5$  تا  $40\text{ W/m}^2\cdot\text{K}$  ( $7 - 1/5\text{ Btu/hr}\cdot\text{ft}^2\cdot^{\circ}\text{F}$ ) بسته به سرعت اولیه هوا، تغییر می‌کنند.

در بعضی موارد سیال به کار برده شده برای سرد کردن، مایعی است که روی سطح مواد جریان



دارد و مقدار  $h$  از حدود  $280 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$  تا  $1700 \text{ (} 50 - 300 \text{ Btu/hr}\cdot\text{ft}^2\cdot\text{F})$  می تواند تغییر کند. همچنین در حالت‌های دیگر از کولر صفحه‌ای یا تماسی<sup>(۱)</sup> استفاده می شود که در این کولر صفحات سرد در تماس مستقیم با مواد هستند. بنابراین فرض می شود که دمای سطح ماده مساوی یا نزدیک به دمای صفحه سرد است. از فریزرهای تماسی<sup>(۲)</sup> نیز برای منجمد کردن مواد بیولوژیکی استفاده می شود.

در مواردی که مواد غذایی در جعبه بسته بندی می شود و یا توسط پلاستیک روکش می شود، مقاومت اضافی ناشی از این نوع بسته بندی نیز باید در نظر گرفته شود. یکی از روشهای انجام این کار اضافه کردن مقاومت پوشش بسته بندی به مقاومت فیلمی جابه جایی است،

$$R_T = R_P + R_C \quad (5-5-1)$$

که در این رابطه،  $R_P$  مقاومت پوشش،  $R_C$  مقاومت فیلمی جابه جایی بیرون و  $R_T$  مقاومت کل است. سپس هر کدام از این مقاومتها به صورت زیر است:

$$R_C = \frac{1}{h_c A} \quad (5-5-2)$$

$$R_P = \frac{\Delta x}{kA} \quad (5-5-3)$$

$$R_T = \frac{1}{hA} \quad (5-5-4)$$

که  $h_c$  ضریب جابه جایی گاز یا مایع،  $A$  مساحت،  $\Delta x$  ضخامت پوشش،  $k$  ضریب هدایت گرمایی پوشش و  $h$  ضریب کلی است. ضریب کلی  $h$  همان ضریبی است که در منحنیهای حالت ناپایدار استفاده می شود. در این حالت ظرفیت گرمایی پوشش ناچیز فرض می شود، که البته به نوع پوشش بستگی دارد. همچنین فرض می شود که پوشش با ماده در تماس است و هیچ مقاومتی بین ماده و پوشش وجود ندارد.

منابع اصلی خطا در استفاده از منحنیهای حالت ناپایدار، مربوط به کافی نبودن اطلاعات دانسیته، ظرفیت گرمایی و ضریب هدایت گرمایی و تخمین ضریب جابه جایی است. مواد غذایی معمولاً موادی ناهمگن و غیریکنواخت هستند و اغلب ارزیابی خواص فیزیکی آنها مشکل است. همچنین اگر در سرد کردن، تبخیر آب نیز اتفاق بیفتد، تلفات مربوط به گرمای نهان نیز روی دقت نتایج اثر خواهد گذاشت.

مثال ۵-۵-۱ سرد کردن گوشت گاو آماده شده

Hodgson (H2) خواص فیزیکی گوشت تازه را در حین سرد کردن به این صورت می‌دهد،  
 $\rho = 1073 \text{ kg/m}^3$ ،  $c_p = 3/48 \text{ kJ/kg.K}$ ،  $k = 0/498 \text{ W/m.K}$ . یک برش بزرگ از گوشت گاو به  
 ضخامت  $0/203 \text{ m}$  و در دمای اولیه  $37/8^\circ\text{C}$  سرد می‌شود به طوری که دمای مرکز آن به  $10^\circ\text{C}$   
 برسد. از هوای سرد در دمای ثابت  $1/7^\circ\text{C}$  و  $h = 39/7 \text{ W/m}^2.\text{K}$  استفاده می‌شود. زمان لازم را  
 محاسبه کنید.

حل: ضریب نفوذ گرمایی  $\alpha$  به صورت زیر است.

$$\alpha = \frac{k}{\rho c_p} = \frac{0/498}{1073 \times 3/48 \times 1000} = 1/334 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$$

سپس برای نصف ضخامت برش،  $x_1$  داریم،

$$x_1 = \frac{0/203}{2} = 0/1015 \text{ m}$$

برای مرکز برش داریم،

$$n = \frac{x}{x_1} = \frac{0}{0/1015} = 0$$

همچنین،

$$m = \frac{k}{h x_1} = \frac{0/498}{39/7 \times 0/1015} = 0/123$$

$$T_1 = 1/7^\circ\text{C} + 273/2 = 274/9 \text{ K} \quad T_0 = 37/8 + 273/2 = 311 \text{ K}$$

$$T = 10 + 273/2 = 283/2 \text{ K}$$

$$Y = \frac{T_1 - T}{T_1 - T_0} = \frac{274/9 - 283/2}{274/9 - 311} = 0/23$$

با استفاده از شکل ۶-۳-۵ برای مرکز یک صفحه صاف بزرگ،

$$X = 0/9 = \frac{\alpha t}{x_1^2} = \frac{1/334 \times 10^{-7} \times t}{0/1015^2}$$

و با حل آن،  $t = 6/95 \times 10^4 \text{ s}$  ( $19/3 \text{ h}$ )

### ۵-۵C انجماد مواد غذایی و بیولوژیکی

۱- مقدمه: در انجماد مواد غذایی و بیولوژیکی ابتدا حذف گرمای محسوس برای سرد کردن و سپس  
 حذف گرمای نهان به منظور انجماد انجام می‌شود. گرمای نهان انجماد آب  $335 \text{ kJ/kg}$  ( $144 \text{ Btu/lb}_m$ )

است، که بخش مهمی از کل گرمای گرفته شده برای انجماد است. اثرات ناچیز دیگری همچون گرمای انحلال نمکها و مانند آن ممکن است وجود داشته باشند، اما مقادیر کوچکی هستند. در واقع، هنگامی که ماده‌ای مانند گوشت تا  $29^{\circ}\text{C}$  - منجمد می‌شود. تنها  $90\%$  آب به یخ تبدیل می‌شود و باقیمانده آن، آبی است که در ساختار ماده وجود دارد (B1).

Riedel (R1) منحنیهای انتالپی - دما - ترکیب را برای انجماد مواد غذایی مختلف ارائه کرده است. این منحنیها نشان می‌دهند که انجماد در یک دمای مشخص اتفاق نمی‌افتد، بلکه در یک محدوده چند درجه‌ای انجام می‌شود. در نتیجه نقطه انجماد مشخص با نرخ گرمای نهان انجماد منحصر به فرد وجود ندارد. چون در فرآیند ناپایدار انجماد، گرمای نهان انجماد وجود دارد، معادلات استاندارد هدایت ناپایدار که در این فصل ارائه شد، برای به دست آوردن زمان انجماد نمی‌توانند به کار روند. بدلیل تغییر خواص فیزیکی و تغییر نرخ انجماد با دما و برخی عوامل دیگر، حل دقیق تحلیلی برای به دست آوردن سرعت انجماد مواد غذایی و بیولوژیکی بسیار مشکل است. یک حل تقریبی توسط پلانک ارائه شده است که غالباً از آن استفاده می‌شود.

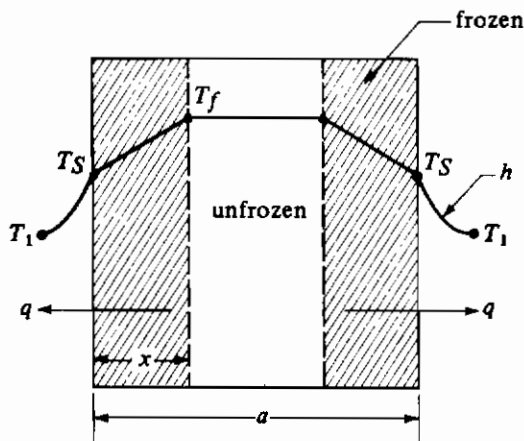
۲- حل تقریبی پلانک برای فرآیند انجماد: پلانک (P2) یک حل تقریبی برای به دست آوردن زمان فرآیند انجماد به دست آورده است که برای کارهای مهندسی دقت کافی دارد. فرضیات این روش به این صورت هستند. در ابتدا، تمام ماده غذایی در نقطه انجماد است اما منجمد نیست. ضریب هدایت گرمایی قسمت منجمد ثابت است. در نقطه انجماد تمام ماده با یک گرمای نهان ثابت منجمد می‌شود. انتقال حرارت در لایه منجمد به صورت هدایت اتفاق می‌افتد و سرعت آن طوری است که می‌توان آن را شبه پایدار در نظر گرفت.

در شکل ۵-۵-۱ یک اسلب به ضخامت  $a$  متر از دو طرف توسط جابه‌جایی سرد می‌شود. در زمان مشخص  $t$  ثانیه، ضخامت  $x$  متر از لایه منجمد روی دو طرف تشکیل شده است. دمای محیط مقدار ثابت  $T_1$  کلون است و دمای انجماد در  $T_f$  ثابت است. یک لایه غیر منجمد در مرکز در دمای  $T_f$  وجود دارد. گرمای خروجی در زمان  $t$  مقدار  $q$  وات است. چون در حالت شبه پایدار هستیم در زمان اگر گرمای خروجی به بیرون به طریق جابه‌جایی برابر است با،

$$q = hA(T_s - T_1) \quad (5-5-5)$$

که  $A$  سطح مفید است. همچنین، گرمایی که از طریق لایه منجمد به ضخامت  $x$  در شرایط پایدار به طریق هدایت منتقل می‌شود برابر است با،

$$q = \frac{kA}{x} (T_f - T_s) \quad (5-5-6)$$



شکل ۵-۵-۱. توزیع دما در طول انجماد

که ضریب هدایت گرمایی ماده منجمد است. در یک مدت زمان مشخص  $dt$  ثانیه، لایه‌ای به ضخامت  $dx$  از ماده منجمد می‌شود. بنابراین حاصلضرب  $A$  در  $dx$  در  $\rho$ ، جرم ماده منجمد شده برحسب  $kg$  را می‌دهد. با ضرب کردن این مقدار در گرمای نهان  $\lambda$  برحسب  $J/kg$  و تقسیم آن بر  $dt$  داریم،

$$q = \frac{A dx \rho \lambda}{dt} = A \rho \lambda \frac{dx}{dt} \quad (5-5-7)$$

که در اینجا  $\rho$  دانسیته ماده منجمد نشده است.

سپس برای حذف  $T_s$  از معادلات (۵-۵-۵) و (۵-۵-۶)، معادله (۵-۵-۵) را نسبت به  $T_s$  حل

می‌کنیم و در معادله (۵-۵-۶) جایگزین می‌کنیم، که خواهد داد:

$$q = \frac{(T_f - T_1)A}{x/k + 1/h} \quad (5-5-8)$$

با مساوی قرار دادن معادله (۵-۵-۸) با (۵-۵-۷)،

$$\frac{(T_f - T_1)A}{x/k + 1/h} = A \rho \lambda \frac{dx}{dt} \quad (5-5-9)$$

با مرتب کردن معادله و انتگرال‌گیری بین  $t = 0$  در  $x = 0$  تا  $t = t$  در  $x = a/2$  داریم،

$$(T_f - T_1) \int_0^t dt = \lambda \rho \int_0^{a/2} \left( \frac{x}{k} + \frac{1}{h} \right) dx \quad (5-5-10)$$

با انتگرال‌گیری و حل آن نسبت به  $t$  داریم:

$$t = \frac{\lambda \rho}{T_f - T_1} \left( \frac{a}{2h} + \frac{a^2}{8k} \right) \quad (5-5-11)$$

برای این‌که معادله فوق شکل عمومی تری پیدا کند و برای شکل‌های دیگر نیز کاربرد داشته باشد، داریم:

$$t = \frac{\lambda \rho}{T_f - T_i} \left( \frac{Pa}{h} + \frac{Ra^2}{k} \right) \quad (5-5-12)$$

که در این‌جا  $a$  ضخامت اسلب بی‌نهایت (مانند شکل ۵-۵-۱)، قطر یک کره، قطر یک استوانه بلند، یا کوچکترین بعد یک بلوک مکعب مستطیل است، همچنین،

$$P = \frac{1}{4} \text{ برای اسلب بی‌نهایت، } P = \frac{1}{6} \text{ برای کره، } P = \frac{1}{4} \text{ برای استوانه بی‌نهایت}$$

$$R = \frac{1}{4} \text{ برای اسلب بی‌نهایت، } R = \frac{1}{6} \text{ برای کره، } R = \frac{1}{4} \text{ برای استوانه بی‌نهایت}$$

برای یک بلوک مکعب مستطیل به ابعاد  $a$  در  $\beta_1 a$  در  $\beta_2 a$  که  $a$  کوچکترین ضلع است، (B1) Ede، منحنی‌ای برای تعیین مقادیر  $P$  و  $R$  ارائه کرده است. این مقادیر برای محاسبه  $t$  در معادله (۵-۵-۱۲) به کار می‌روند. همچنین معادله (۵-۵-۱۱) با جایگزینی  $k$  ماده منجمد با  $k$  ماده ذوب شده برای محاسبه مدت زمان ذوب شدن ماده منجمد به کار می‌رود.

### مثال ۵-۵-۲ منجمد کردن گوشت

صفحاتی از گوشت به ضخامت  $0.0635$  متر در یک فریزر که با جریان هوا کار می‌کند در دمای  $244/3K$  ( $-28/9^\circ C$ ) منجمد می‌شود. گوشت ابتدا در نقطه انجماد خود در  $270/4K$  ( $-2/8^\circ C$ ) بوده و حاوی  $75\%$  رطوبت است. ضریب انتقال حرارت  $17 \text{ W/m}^2 \cdot K$  است. خواص فیزیکی  $\rho = 1057 \text{ kg/m}^3$  برای گوشت غیر منجمد و  $k = 1038 \text{ W/m} \cdot K$  برای گوشت منجمد است. زمان انجماد را حساب کنید.

حل: چون گرمای نهان ذوب آب به یخ  $144 \text{ Btu/lb}_m$  ( $335 \text{ kJ/kg}$ ) است، برای گوشت با  $75\%$  آب داریم،

$$\lambda = 0.75 \times 335 = 251/2 \text{ kJ/kg}$$

متغیرهای معلوم دیگر،  $a = 0.0635 \text{ m}$ ،  $T_i = 270/4K$ ،  $T_f = 244/3K$ ،  $\rho = 1057 \text{ kg/m}^3$ ،  $h = 17 \text{ W/m}^2 \cdot K$  و  $k = 1038 \text{ W/m} \cdot K$  هستند. با جایگزینی در معادله (۵-۵-۱۱) داریم،

$$t = \frac{\lambda \rho}{T_f - T_i} \left( \frac{a}{2h} + \frac{a^2}{\lambda k} \right) = \frac{(251/2 \times 1057) \times 1057}{270/4 - 244/3} \left[ \frac{0.0635}{2 \times 17} + \frac{0.0635^2}{\lambda \times 1038} \right]$$

$$= 2/395 \times 10^4 \text{ s } (6/65 \text{ h})$$

۳- روشهای دیگر برای محاسبه زمان انجماد: Neumann (C1, C2) معادله پیچیده‌ای برای انجماد در یک اسلب به دست آورده است. شرایطی که او فرض کرده است عبارتند از: دمای سطح با محیط یکی است، یعنی مقاومت سطحی وجود ندارد. دمای انجماد ثابت است. این روش این محدودیت را دارد که نمی‌تواند از یک ضریب جابه‌جایی در سطح استفاده کند. زیرا مقاومت سطحی را در نظر نمی‌گیرد. اما اثر سرد کردن از یک دمای اولیه که می‌تواند بالاتر از دمای انجماد باشد، در نظر گرفته شده است.

معادله پلانک حالتی را که ممکن است دمای اولیه بالاتر از دمای انجماد باشد، پیش‌بینی نمی‌کند و در نظر نمی‌گیرد. یک روش تقریبی برای محاسبه زمان اضافی لازم برای سرد کردن از دمای  $T_i$  تا دمای انجماد  $T_f$  به این صورت است. به وسیله منحنیهای حالت ناپایدار و با استفاده از خواص فیزیکی ماده غیر منجمد، زمان لازم برای رسیدن دمای میانگین ماده به  $T_f$  با این فرض که هیچ انجمادی اتفاق نمی‌افتد، را به دست آورید. اگر مقاومت سطحی وجود داشته باشد، دما در چند نقطه ماده با استفاده از منحنیهای حالت ناپایدار به دست می‌آید و سپس دمای بین این نقاط محاسبه می‌شود. این کار ممکن است تا حدی حدس و خطا باشد، زیرا زمان مجهول است و باید فرض شود. اگر دمای میانگین محاسبه شده برابر با نقطه انجماد نباشد، مقدار جدیدی برای زمان باید فرض شود. این روش تقریبی است زیرا در حالت واقعی مقداری از ماده منجمد خواهد شد.

## ۵-۶ معادله دیفرانسیل تغییر انرژی

### ۵-۶A مقدمه

در بخشهای ۳-۶ و ۳-۷ معادله دیفرانسیل پیوستگی و معادله دیفرانسیل انتقال ممتوم را برای یک سیال خالص به دست آوردیم. این معادلات که با استفاده از موازنه‌های جرم، انرژی و ممتوم روی یک حجم محدود در بخشهای مختلف فصل ۲ به دست آمده‌اند، هیچ اطلاعی راجع به آنچه که در داخل حجم کنترل می‌گذرد به ما نمی‌دهند. در موازنه‌های انجام شده، برای هر سیستم مورد مطالعه، موازنه جداگانه‌ای نوشته می‌شود. اما غالباً بهتر است که از معادلات دیفرانسیل پیوستگی و انتقال ممتوم در فرم کلی شروع کنیم و سپس این معادلات را برای هر مورد خاص با حذف جملات غیرلازم ساده کنیم.

در فصل ۴ برای انتقال حرارت پایدار و در فصل ۵ برای انتقال حرارت ناپایدار موازنه‌های جداگانه‌ای روی یک حجم کنترل محدود نوشته شد. برای عمق بخشیدن به مطالعه انتقال حرارت یا انرژی در سیستمهای جریانی و غیرجریانی باید مطالعه روی یک حجم دیفرانسیلی انجام شود تا بتوانیم جزئیات آنچه را که در داخل این حجم اتفاق می‌افتد به دست آوریم. موازنه روی یک فاز انجام می‌شود و شرایط مرزی در مرز آن فاز برای انتگرال‌گیری مورد استفاده واقع می‌شود.

در بخش بعد معادلهٔ دیفرانسیل عمومی تغییر انرژی یا معادلهٔ بقای انرژی را به دست می‌آوریم. سپس این معادله برای موارد خاصی که بیشتر اتفاق می‌افتد ساده می‌شود. در نهایت موارد استفادهٔ این معادلات بحث خواهند شد. مواردی مربوط به انتقال انرژی پایدار و انتقال انرژی ناپایدار با استفاده از معادلهٔ بقای انرژی که معادله‌ای عمومی است و برای حالت‌های پایدار و ناپایدار صدق می‌کند، مطالعه خواهند شد.

### ۵-۶B به دست آوردن معادلهٔ دیفرانسیل تغییر انرژی

مانند آنچه که در به دست آوردن معادلهٔ دیفرانسیل انتقال ممتوم عمل شد، موازنه‌ای روی یک المان با حجم ثابت به ابعاد  $\Delta x$ ،  $\Delta y$ ،  $\Delta z$  نوشته می‌شود. سپس قانون بقای انرژی که در واقع قانون اول ترمودینامیک برای سیال داخل المان در هر زمان است، نوشته می‌شود. معادلهٔ زیر همان معادلهٔ (۲-۷-۷) است که در بخش ۷-۲ برای یک حجم کنترل نوشته شد.

(نرخ کار خارجی انجام شده توسط سیستم روی محیط) - (نرخ انرژی خروجی) - (نرخ انرژی ورودی)

$$(۵-۶-۱) \quad = (\text{نرخ تجمع انرژی})$$

همانند انتقال ممتوم، انتقال انرژی به داخل و خارج المان حجم از طریق جابه‌جایی و انتقال ملکولی یا هدایت صورت می‌گیرد. دو نوع انرژی مستقل می‌شود. ابتدا انرژی داخلی (U) که برحسب J/kg ( $Btu/lb_m$ ) است. این انرژی مربوط به حرکت‌های انتقالی، اتفاقی و داخلی ملکول و همچنین نیروهای متقابل بین مولکولی است. دوم انرژی جنبشی  $\rho v^2/2$  است که انرژی مربوط به حرکت تودهٔ سیال است که  $v$  سرعت موضعی سیال برحسب m/s (ft/s) است. بنابراین کل انرژی به ازای واحد حجم  $(\rho U + \rho v^2/2)$  است. نرخ تجمع انرژی در المان حجم بر حسب متر مکعب (فوت مکعب) خواهد بود،

$$\Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho U + \frac{\rho v^2}{2} \right) \quad (۵-۶-۲)$$

کل انرژی ورودی از طریق جابه‌جایی در جهت  $x$  در نقطه‌ای به طول  $x$  منهای انرژی خروجی در نقطه‌ای به طول  $x + \Delta x$  به صورت زیر است.

$$\Delta y \Delta z \left[ v_x \left( \rho U + \frac{\rho v^2}{2} \right) \right]_x - \Delta y \Delta z \left[ v_x \left( \rho U + \frac{\rho v^2}{2} \right) \right]_{x+\Delta x} \quad (۵-۶-۳)$$

معادلات مشابهی برای جهت‌های  $y$ ،  $z$  به ترتیب با سرعت‌های  $v_y$ ،  $v_z$  می‌توانند نوشته شوند.

نرخ خالص انرژی ورودی به المان از طریق هدایت در جهت  $x$  برابر است با:

$$\Delta y \Delta z [(q_x)_x - (q_x)_{x+\Delta x}] \quad (۵-۶-۴)$$

معادلات مشابهی برای جهت‌های  $y$ ،  $z$  می‌توانند نوشته شوند که  $q_x$ ،  $q_y$ ،  $q_z$  مؤلفه‌های بردار شار گرمایی  $q$  هستند، که برحسب  $W/m^2$  ( $Btu/s.ft^2$ ) یا واحدهای مناسب دیگر است.

مجموع این سه جمله در جهت  $x$  برابر با کار خالص انجام شده توسط سیستم روی محیط است. کار خالص انجام شده بر علیه نیروی ثقل به صورت زیر است:

$$-\rho \Delta x \Delta y \Delta z (v_x g_x) \quad (5-6-5)$$

که  $g_x$  نیروی ثقل است. کار خالص انجام شده بر علیه فشار استاتیک  $p$  به صورت زیر است:

$$\Delta y \Delta z [(pv_x)_{x+\Delta x} - (pv_x)_x] \quad (5-6-6)$$

که  $p$  برحسب  $N/m^2$  ( $lb_f/ft^2$ ) است. کار خالص انجام شده بر علیه نیروهای ویسکوز به صورت زیر است:

$$(\Delta y \Delta z) [(\tau_{xx} v_x + \tau_{xy} v_y + \tau_{xz} v_z)_{x+\Delta x} - (\tau_{xx} v_x + \tau_{xy} v_y + \tau_{xz} v_z)_x] \quad (5-6-7)$$

در بخش ۷-۳ نیروهای ویسکوز با جزئیات بیشتر بحث شده‌اند.

با نوشتن معادلات مشابه با معادلات (۵-۶-۳) تا (۵-۶-۷) در تمام جهات و جایگزینی این معادلات و معادله (۵-۶-۲) در معادله (۵-۶-۱)، تقسیم بر  $\Delta x$ ،  $\Delta y$ ،  $\Delta z$  و میل دادن  $\Delta x$  و  $\Delta y$  و  $\Delta z$  به سمت صفر داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho U + \frac{\rho v^2}{2} \right) = & - \left[ \frac{\partial}{\partial x} v_x \left( \rho U + \frac{\rho v^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} v_y \left( \rho U + \frac{\rho v^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} v_z \left( \rho U + \frac{\rho v^2}{2} \right) \right] \\ & - \left( \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) + \rho (v_x g_x + v_y g_y + v_z g_z) \\ & - \left[ \frac{\partial}{\partial x} (pv_x) + \frac{\partial}{\partial y} (pv_y) + \frac{\partial}{\partial z} (pv_z) \right] \\ & - \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xx} v_x + \tau_{xy} v_y + \tau_{xz} v_z) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{yx} v_x + \tau_{yy} v_y + \tau_{yz} v_z) \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{zx} v_x + \tau_{zy} v_y + \tau_{zz} v_z) \right] \end{aligned} \quad (5-6-8)$$

برای جزئیات بیشتر در مورد معادله فوق به مرجع (B2) مراجعه کنید.

معادله (۵-۶-۸) معادله نهایی تغییر انرژی نسبت به یک نقطه ثابت است. اما این معادله در شکل مناسبی نیست. ابتدا معادله (۵-۶-۸) را با معادله پیوستگی (۳-۶-۲۳) و با معادله حرکت (۳-۶-۴۰) ترکیب می‌کنیم و انرژی داخلی را نیز برحسب دمای سیال  $T$  و ظرفیت گرمایی می‌نویسیم.



سپس با نوشتن معادله حاصل برای یک سیال نیوتونی با ضریب هدایت گرمایی ثابت (k) خواهیم داشت:

$$\rho c_v \frac{DT}{Dt} = k \nabla^2 T - T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_p (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mu \phi \quad (5-6-9)$$

این معادله، قانون دوم فوریه در سه جهت را به کار می‌برد. در این رابطه داریم:

$$k \nabla^2 T = k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (5-6-10)$$

جمله مربوط به اتلاف ناشی از ویسکوزیته  $\mu \phi$  معمولاً ناچیز است، مگر این که اختلاف سرعت شدید وجود داشته باشد. در بحثهایی که در پی می‌آید از این جمله صرف‌نظر می‌شود. معادله (5-6-9) معادله تغییر انرژی برای یک سیال نیوتونی با k ثابت و برحسب دمای سیال (T) است.

### 5-6C حالت‌های خاص در معادله تغییر انرژی

معمولاً با حالت‌های خاص زیر از معادله (5-6-9) برای یک سیال نیوتنی با ضریب هدایت گرمایی ثابت، بیشتر روبرو می‌شویم. ابتدا معادله (5-6-9) بدون جمله  $\mu \phi$  در مختصات دکارتی نوشته می‌شود.

$$\begin{aligned} \rho c_v \left( \frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) \\ = k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) - T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_p \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (5-6-11)$$

۱- سیال در فشار ثابت: معادلات زیر که برای سیال با دانسیته ثابت است برای سیال در فشار ثابت نیز به کار می‌روند.

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = k \nabla^2 T \quad (5-6-12)$$

در مختصات دکارتی داریم:

$$\rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (5-6-13)$$

در مختصات استوانه‌ای نیز داریم:

$$\rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (5-6-14)$$

و در مختصات کروی هم داریم:

$$\rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) = k \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} \right] \quad (5-6-15)$$

تعاریف مختصات استوانه‌ای و کروی را در بخش ۶-۳ ببینید. اگر سرعت  $v$  صفر باشد،  $DT/Dt$  به صورت  $\partial T/\partial t$  در می‌آید.

۲- سیال با دانسیته ثابت،

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = k \nabla^2 T \quad (5-6-16)$$

توجه کنید که این معادله با معادله (۵-۶-۱۲) برای فشار ثابت یکسان است.

۳- جامد: در این حالت  $\rho$  ثابت و  $v = 0$

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \nabla^2 T \quad (5-6-17)$$

این رابطه غالباً قانون دوم هدایت گرمایی فوریه نامیده می‌شود. این رابطه برای یک سیال با سرعت صفر و در فشار ثابت نیز صدق می‌کند.

۴- تولید گرما: اگر در سیال تولید گرما توسط وسایل الکتریکی یا شیمیایی وجود داشته باشد،  $q$  به طرف راست معادله (۵-۶-۱۷) اضافه می‌شود.

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \nabla^2 T + q \quad (5-6-18)$$

که  $q$  نرخ تولید گرما برحسب  $W/m^3$  ( $Btu/hr.ft^3$ ) است. اتلاف ناشی از ویسکوزیته نیز یک منبع گرمایی است، اما اضافه کردن این جمله باعث پیچیده‌تر شدن حل مسأله می‌شود، زیرا معادلات انرژی و حرکت باید با هم حل شوند.

۵- دستگاههای مختصات دیگر: قانون دوم فوریه در هدایت گرمایی ناپایدار به صورت زیر نیز می‌تواند نوشته شود، در مختصات دکارتی،

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho c_p} \nabla^2 T = \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (5-6-19)$$

که  $\alpha = k/\rho c_p$  بوده و ضریب هدایت گرمایی برحسب  $m^2/s$  ( $ft^2/h$ ) است.

در مختصات استوانه‌ای،

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (5-6-20)$$

و در مختصات کروی،

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} \right] \quad (5-6-21)$$

### ۵-۶D کاربردهای معادله تغییر انرژی

در بخش ۸-۳ برای بررسی مسائل جریان سیال از معادلات دیفرانسیل پیوستگی و حرکت استفاده کردیم. این کار را با حذف جملاتی که صفر و یا نزدیک به صفر بودند و حل باقیمانده معادلات برای به دست آوردن توزیع سرعت و فشار، انجام دادیم. این کار به جای نوشتن موازنه‌های جدید جرم و ممنتوم برای هر حالت، انجام شد.

به روش مشابه، برای حل مسائل انتقال حرارت، معادلات دیفرانسیل پیوستگی، حرکت و انرژی مورد استفاده قرار می‌گیرند و جملات غیر لازم در آنها حذف می‌شود. برای تشریح روش کلی به کار گرفته شده مثالهایی آورده می‌شود.

#### مثال ۵-۶-۱ توزیع دما با وجود منبع تولید گرما

یک استوانه جامد که در آن گرما به طور یکنواخت به نرخ  $q$  وات بر متر مکعب تولید می‌شود، از دو انتها عایق شده است. دمای سطح استوانه در مقدار ثابت  $T_w$  کلین ثابت نگهداشته شده است. شعاع استوانه  $R$  متر است. گرما فقط در جهت شعاعی جریان دارد. در صورتی که جامد ضریب هدایت گرمایی ثابت داشته باشد، معادله توزیع دما را در شرایط پایدار به دست آورید. حل: از معادله (۵-۶-۲۰) برای مختصات استوانه‌ای استفاده می‌شود. همچنین عبارت  $q/\rho c_p$  مربوط به تولید گرما، به طرف راست این معادله اضافه می‌شود، که خواهیم داشت:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho c_p} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{\dot{q}}{\rho c_p} \quad (5-6-22)$$

برای حالت پایدار  $\partial T / \partial t = 0$  همچنین برای هدایت فقط در جهت شعاعی  $\partial^2 T / \partial z^2 = 0$  و  $\partial^2 T / \partial \theta^2 = 0$ . لذا معادله دیفرانسیل زیر نتیجه می‌شود:

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} = -\frac{\dot{q}}{k} \quad (5-6-23)$$

که به صورت زیر می‌تواند نوشته شود،

$$r \frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{dT}{dr} = -\frac{\dot{q}r}{k} \quad (5-6-24)$$

توجه کنید که معادله (۵-۶-۲۴) به صورت زیر هم می‌تواند نوشته شود،

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) = -\frac{\dot{q}r}{k} \quad (5-6-25)$$

با انتگرال‌گیری از معادله (۵-۶-۲۵) داریم،

$$r \frac{dT}{dr} = -\frac{\dot{q}r^2}{2k} + K_1 \quad (5-6-26)$$

که  $K_1$  یک ثابت است. با انتگرال‌گیری مجدد داریم،

$$T = -\frac{\dot{q}r^2}{4k} + K_1 \ln r + K_2 \quad (5-6-27)$$

که  $K_2$  یک ثابت است. شرایط مرزی به صورت  $dT/dr = 0$  وقتی که  $r = 0$  (براساس تقارن) و  $T = T_w$  وقتی که  $r = R$  است. معادله نهایی به صورت زیر است،

$$T = \frac{\dot{q}(R^2 - r^2)}{4k} + T_w \quad (5-6-28)$$

و این همان معادله (۴-۳-۲۹) است که به روش دیگری به دست آمد.

### مثال ۵-۶-۲ جريان آرام و انتقال حرارت با استفاده از معادله تغییر انرژی

با استفاده از معادله دیفرانسیل تغییر انرژی، یک معادله دیفرانسیل پاره‌ای همراه با شرایط مرزی لازم برای جریان آرام یک سیال با دانسیته ثابت داخل یک لوله افقی در حال گرم شدن، به دست آورید. سیال با سرعت ثابت  $v_z$  در حال جریان است. در دیواره لوله در جایی که  $r = r_0$ ، شار گرمایی مقدار ثابت  $q$  است. فرایند در حالت پایدار بوده و فرض می‌شود که در ورودی ( $z = 0$ ) توزیع سرعت وجود دارد. خواص فیزیکی ثابت فرض می‌شوند.

حل: از مثال ۳-۸-۳، معادله پیوستگی عبارت است از:  $\partial v_z / \partial z = 0$ . حل معادله حرکت در حالت پایدار در مختصات استوانه‌ای، معادله سهمی توزیع سرعت را به صورت زیر می‌دهد،

$$v_z = v_{z \max} \left[ 1 - \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 \right] \quad (5-6-29)$$

چون دانسیته سیال ثابت است. معادله (۵-۶-۱۴) در مختصات استوانه‌ای به عنوان معادله تغییر انرژی به کار می‌رود. برای این حالت  $v_r = 0$  و  $v_\theta = 0$ . چون تقارن وجود دارد  $\partial T / \partial \theta = 0$  و نیز هر دو صفر خواهند بود. در حالت پایدار  $\partial T / \partial t = 0$ . بنابراین معادله (۵-۶-۱۴) به صورت زیر تبدیل می‌شود،

$$v_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{k}{\rho c_p} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (5-6-30)$$

معمولاً هدایت در جهت  $z$  عبارت  $\partial^2 T / \partial z^2$  در مقایسه با عبارت جابه‌جایی  $v \partial T / \partial z$  کوچک است و می‌تواند حذف شود. در نهایت، با جایگزینی معادله (۵-۶-۲۹) در (۵-۶-۳۰) داریم،

$$v_{z \max} \left[ 1 - \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 \right] \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{k}{\rho c_p} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (5-6-31)$$

شرایط مرزی به صورت زیر هستند،

در  $z = 0$ ،  $T = T_0$  (به ازای همه  $r$  ها)

در  $r = 0$ ،  $T =$  محدود

در  $r = r_0$ ،  $q_r = -k \frac{\partial T}{\partial r}$  (ثابت)

برای به دست آوردن جزئیات بیشتر در مورد حل دقیق این معادله، مرجع (S2) را ببینید.

## ۵-۷ جریان لایه مرزی و اغتشاش در انتقال حرارت

### ۵-۷۸ جریان آرام و تنوری لایه مرزی در انتقال حرارت

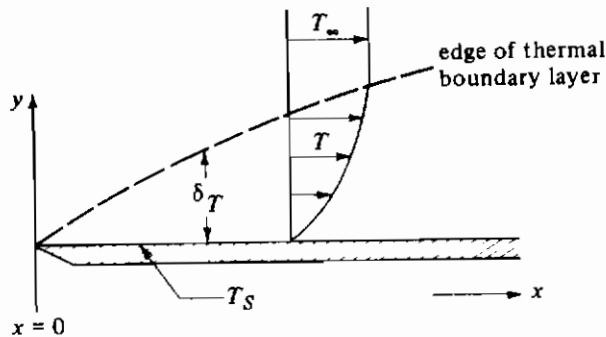
در بخش  $3-10^\circ\text{C}$  حل دقیق توزیع سرعت برای یک جریان آرام همدمای روی یک صفحه صاف به دست آمد. حل بلازیوس<sup>(۱)</sup> نیز می‌تواند به مسأله انتقال حرارت جابه‌جایی برای همان شکل هندسی و جریان آرام تعمیم داده شود. در شکل ۵-۷-۱ لایه مرزی گرمایی نشان داده شده است. دمای نیالی که به صفحه نزدیک می‌شود  $T_\infty$  و دمای صفحه در سطح آن  $T_s$  است.

با نوشتن موازنه دیفرانسیلی انرژی، معادله (۵-۶-۱۳)، شروع می‌کنیم،

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{k}{\rho c_p} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (5-7-1)$$

اگر جریان در جهت‌های  $x$  و  $y$  باشد،  $v_z = 0$  است. در حالت پایدار،  $\partial T / \partial t = 0$ . از هدایت در جهت‌های  $x$ ،  $z$  صرف‌نظر می‌شود. بنابراین  $\partial^2 T / \partial z^2 = 0$  و  $\partial^2 T / \partial x^2 = 0$ . هدایت در جهت  $y$  وجود دارد. نتیجه به صورت زیر می‌شود،

$$v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{k}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (5-7-2)$$



شکل ۱-۷-۵. جریان آرام سیال گذرنده از روی یک صفحه مسطح و لایه مرزی گرمایی

معادله ساده شده موازنه ممنتوم که در به دست آوردن سرعت در لایه مرزی به کار گرفته شد، خیلی مشابه معادله فوق است و به صورت زیر می باشد،

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad (۳-۱۰-۵)$$

معادله پیوستگی هم که قبلاً استفاده شد به صورت زیر است،

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (۳-۱۰-۳)$$

معادلات (۳-۱۰-۳) و (۳-۱۰-۵) توسط بلازیوس برای حل جریان لایه مرزی آرام به کار گرفته شدند. شرایط مرزی مورد استفاده به صورت زیر بودند:

$$\frac{v_x}{v_\infty} = \frac{v_y}{v_\infty} = 0 \quad \text{at } y = 0 \quad (۵-۷-۳)$$

$$\frac{v_x}{v_\infty} = 1 \quad \text{at } y = \infty$$

$$\frac{v_x}{v_\infty} = 1 \quad \text{at } x = 0$$

تشابه بین معادلات (۳-۱۰-۵) و (۵-۷-۲) کاملاً مشهود است. بنابراین اگر حل بلازیوس به صورت  $c_p \mu / k = 1$  باشد در اینجا نیز می تواند به کار گرفته شود. این بدین معناست که عدد پراتل  $T$  در معادله (۵-۷-۲) با متغیر بدون بُعد  $(T - T_s)/(T_\infty - T_s)$  انجام می شود. شرایط مرزی به صورت زیر هستند،

$$\frac{v_x}{v_\infty} = \frac{v_y}{v_\infty} = \frac{T - T_S}{T_\infty - T_S} = 0 \quad \text{at } y = 0$$

$$\frac{v_x}{v_\infty} = \frac{T - T_S}{T_\infty - T_S} = 1 \quad \text{at } y = \infty \quad (5-7-4)$$

$$\frac{v_x}{v_\infty} = \frac{T - T_S}{T_\infty - T_S} = 1 \quad \text{at } x = 0$$

دیدیم که معادلات و شرایط مرزی برای توزیع دما و توزیع سرعت یکسان هستند. بنابراین برای هر نقطه  $x$  و  $y$  در سیستم، جریان متغیرهای سرعت بدون بعد  $v_x/v_\infty$  و  $(T - T_S)/(T_\infty - T_S)$  مساوی هستند. حل توزیع سرعت دقیقاً مشابه با حل توزیع دماست.

این بدین معناست که انتقال ممتوم و گرما به طور مستقیم همگون هستند و ضخامت لایه مرزی  $\delta$  برای توزیع سرعت (لایه مرزی هیدرودینامیکی) و ضخامت لایه مرزی گرمایی  $(\delta_T)$  مساوی هستند. این موضوع در گازها که عدد پرانتل نزدیک به یک است، مهم می‌باشد.

با ترکیب معادلات (5-7-5) و (5-7-6)، اختلاف سرعت در سطح برابر است با،

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0} = 0.332 \frac{v_\infty}{x} N_{Re,x}^{1/2} \quad (5-7-5)$$

که  $N_{Re,x} = xv_\infty\rho/\mu$  است. همچنین،

$$\frac{v_x}{v_\infty} = \frac{T - T_S}{T_\infty - T_S} \quad (5-7-6)$$

با ترکیب معادلات (5-7-5) و (5-7-6) داریم:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = (T_\infty - T_S) \left(\frac{0.332}{x} N_{Re,x}^{1/2}\right) \quad (5-7-7)$$

معادله جابه‌جایی می‌تواند به صورت زیر به معادله فوریه ارتباط داده شود که  $q_y$  برحسب  $J/s$  یا  $W$  است،

$$\frac{q_y}{A} = h_x(T_S - T_\infty) = -k \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} \quad (5-7-8)$$

با ترکیب معادلات (5-7-7) و (5-7-8) داریم:

$$\frac{h_x x}{k} = N_{Nu,x} = 0.332 N_{Re,x}^{1/2} \quad (5-7-9)$$

که  $N_{Nu,x}$  عدد بدون بعد ناسلت و  $h_x$  ضریب انتقال حرارت موضعی در نقطه  $x$  روی صفحه است.

(K1) pohlhausen رابطه بین لایه مرزی هیدرودینامیک و گرمایی را برای سیالات با عدد پرانتل کوچکتر از ۰/۶ به دست آورد. این رابطه به طور تقریبی به صورت زیر است:

$$\frac{\delta}{\delta_T} = N_{Pr}^{1/3} \quad (5-7-10)$$

در نتیجه، معادله ضریب انتقال حرارت موضعی می شود:

$$h_x = 0.332 \frac{k}{x} N_{Re,x}^{1/2} N_{Pr}^{1/3} \quad (5-7-11)$$

همچنین،

$$\frac{h_x x}{k} = N_{Nu,x} = 0.332 N_{Re,x}^{1/2} N_{Pr}^{1/3} \quad (5-7-12)$$

معادله ضریب انتقال حرارت میانگین  $h$  از  $x = 0$  تا  $x = L$  برای صفحه‌ای به عرض  $b$  و مساحت

$bL$  هست:

$$\begin{aligned} h &= \frac{b}{A} \int_0^L h_x dx \\ &= \frac{1}{L} 0.332k \left( \frac{\rho v_\infty}{\mu} \right)^{1/2} N_{Pr}^{1/3} \int_0^L \frac{dx}{x^{1/2}} \end{aligned} \quad (5-7-13)$$

پس از انتگرال‌گیری،

$$h = 0.644 \frac{k}{L} N_{Re,L}^{1/2} N_{Pr}^{1/3} \quad (5-7-14)$$

$$\frac{hL}{k} = N_{Nu} = 0.644 N_{Re,L}^{1/2} N_{Pr}^{1/3} \quad (5-7-15)$$

همچنان‌که قبلاً اشاره شد، لایه مرزی آرام روی صفحات صاف تا عدد رینولدز حدود  $5 \times 10^5$  صدق می‌کند. در استفاده از نتایج فوق، خواص سیال معمولاً در دمای فیلم به صورت  $T_f = (T_s + T_\infty)/2$  می‌باشند.

#### ۵-۷B تجزیه و تحلیل انتگرالی تقریبی لایه مرزی گرمایی

همچنان‌که در تجزیه و تحلیل لایه مرزی هیدرودینامیک بحث شد، حل بلازیوس در محدوده خودش دقیق است. سیستمهای پیچیده‌تر با این روش حل نمی‌شوند. یک تحلیل انتگرالی تقریبی که توسط فون کارمن<sup>(۱)</sup> برای محاسبه لایه مرزی هیدرودینامیکی مورد استفاده قرار



گرفته بود در بخش ۳-۱۰ بررسی شد. این روش برای تحلیل لایه مرزی گرمایی نیز می‌تواند استفاده شود.

این روش مختصراً به این صورت است: ابتدا همچنان که قبلاً در شکل ۳-۱۰-۵ اشاره شد، یک حجم کنترل در نظر گرفته می‌شود و از آن برای به دست آوردن رابطه نهایی انرژی در شکل انتگرالی استفاده می‌شود،

$$\frac{k}{\rho c_p} \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{d}{dx} \int_0^{\delta_T} v_x (T_\infty - T) dy \quad (5-7-16)$$

این معادله با معادله (۳-۱۰-۴۸) همگون است. برای تحلیل ممتوم معادله (۳-۱۰-۴۸) با معادله (۳-۱۰-۵۱) ترکیب شد تا معادله‌ای به صورت زیر به دست آمد،

$$\frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} v_x (v_\infty - v_x) dy \quad (5-7-17)$$

معادله (۵-۷-۱۶) در صورتی که توزیع سرعت و توزیع دما معلوم باشد، قابل حل است. توزیع سرعت فرضی به کار برده شده در معادله (۳-۱۰-۵۰) به صورت زیر است:

$$\frac{v_x}{v_\infty} = \frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left( \frac{y}{\delta} \right)^3 \quad (3-10-50)$$

همین شکل معادله برای توزیع دما نیز فرض می‌شود،

$$\frac{T - T_s}{T_\infty - T_s} = \frac{3}{2} \frac{y}{\delta_T} - \frac{1}{2} \left( \frac{y}{\delta_T} \right)^3 \quad (5-7-18)$$

با جایگزینی معادلات (۳-۱۰-۵۰) و (۵-۷-۱۸) در معادله انتگرالی فوق و حل آن داریم،

$$N_{Nu, x} = 0.36 N_{Re, x}^{1/2} N_{Pr}^{1/3} \quad (5-7-19)$$

این پاسخ فقط ۸٪ بزرگتر از نتیجه دقیق به دست آمده از معادله (۵-۷-۱۱) است، که نشان می‌دهد این روش انتگرالی تقریبی در مواردی که حل دقیق امکانپذیر نیست با اطمینان می‌تواند استفاده شود.

به طریق مشابه، روش تحلیل انتگرالی ممتوم که در بخش ۳-۱۰ برای لایه مرزی هیدرودینامیکی مغشوش استفاده شد، برای لایه مرزی گرمایی مغشوش نیز استفاده می‌شود. مجدداً قانون توان  $\frac{1}{\sqrt{v}}$  برای توزیع دما استفاده می‌شود. نتایج به دست آمده کاملاً مشابه با معادلات تجربی بخش ۴-۶ است.

۵-۷C طول اختلاط پراتل و ضریب نفوذ گرمایی گردابه‌ای<sup>(۱)</sup>

۱- ضریب نفوذ ممنتوم گردابه‌ای<sup>(۲)</sup> در جریان مغشوش: در بخش  $F=10-3$  کل تنش برشی  $\tau_{yx}^l$  برای جریان مغشوش هنگامی که هر دو عامل اغتشاش و نفوذ ملکولی با هم جمع شوند به صورت زیر نوشته شد:

$$\tau_{yx}^l = -\rho \left( \frac{\mu}{\rho} + \varepsilon_t \right) \frac{d\bar{v}_x}{dy} \quad (5-7-20)$$

ضریب نفوذ ممنتوم مولکولی  $\mu/\rho$  برحسب  $m^2/s$  فقط تابعی از خواص مولکولی سیال است. اما ضریب نفوذ ممنتوم گردابه‌ای  $\varepsilon_t$  بستگی به حرکت سیال دارد. در معادله  $(29-10-3)$ ،  $\varepsilon_t$  را به طول اختلاط پراتل  $L$  به صورت زیر ارتباط دادیم،

$$\varepsilon_t = L^2 \left| \frac{d\bar{v}_x}{dy} \right| \quad (29-10-3)$$

۲- طول اختلاط پراتل و ضریب نفوذ گرمایی گردابه‌ای: به روش مشابه می‌توانیم ضریب نفوذ گرمایی گردابه‌ای را برای انتقال حرارت مغشوش به صورت زیر به دست آوریم. گردابه‌ها یا تکه‌های سیال در جهت  $y$  در فاصله‌ای به طول  $L$  حرکت می‌کنند. در نقطه  $L$  سرعت میانگین تکه سیال نسبت به سیال مجاورش به اندازه  $v'_x$  تفاوت دارد که این پارامتر همان جزء سرعت ناشی از افت و خیز است که در بخش  $F=10-3$  بحث شد. انرژی نیز در فاصله  $L$  با سرعت  $v'_y$  در جهت  $y$  همراه با جرم منتقل می‌شود. دمای لحظه‌ای سیال برابر با مقدار  $T = T' + \bar{T}$  است، که  $\bar{T}$  مقدار میانگین و  $T'$  انحراف از مقدار میانگین است. مقدار انحراف  $T'$  مشابه با مقدار انحراف سرعت  $v'_x$  است. طول اختلاط آن قدر کوچک است که اختلاف دما به صورت زیر می‌تواند نوشته شود،

$$T' = L \frac{dT}{dy} \quad (5-7-21)$$

نرخ انتقال انرژی در واحد سطح به صورت  $q_y/A$  است و مساوی با شار جرمی در جهت  $y$  ضرب در ظرفیت گرمایی و ضرب در اختلاف دما است.

$$\frac{q_y}{A} = \frac{-v'_y \rho c_p L dT}{dy} \quad (5-7-22)$$

در بخش  $F=10-3$  فرض کردیم که  $v'_x = v'_y$  و بنابراین،

$$v'_x = v'_y = L \left| \frac{d\bar{v}_x}{dy} \right| \quad (5-7-23)$$

با جایگزینی معادله (۵-۷-۲۳) در (۵-۷-۲۲)،

$$\frac{q_y}{A} = -\rho c_p L^2 \left| \frac{d\bar{v}_x}{dy} \right| \frac{dT}{dy} \quad (5-7-24)$$

عبارت  $L^2 \left| \frac{d\bar{v}_x}{dy} \right|$  در معادله (۳-۱۰-۲۹) ضریب نفوذ ممتوم گردابه‌ای ( $\epsilon_1$ ) است. هنگامی که این عبارت در معادله انتقال حرارت معشوش (۵-۷-۲۴) باشد، به آن ضریب نفوذ گرمایی گردابه‌ای ( $\alpha_1$ ) گفته می‌شود، پس معادله (۵-۷-۲۴) به شکل زیر در می‌آید:

$$\frac{q_y}{A} = -\rho c_p \alpha_1 \frac{dT}{dy} \quad (5-7-25)$$

با ترکیب این رابطه با معادله فوریه بر حسب ضریب نفوذ گرمایی ملکولی  $\alpha$  داریم:

$$\frac{q_y}{A} = -\rho c_p (\alpha + \alpha_1) \frac{dT}{dy} \quad (5-7-26)$$

۳- تشابه میان انتقال ممتوم، حرارت و جرم: معادله (۵-۷-۲۶) مشابه معادله (۵-۷-۲۰) برای انتقال ممتوم کلی است. ضریب نفوذ گرمایی گردابه‌ای  $\alpha_1$  و ضریب نفوذ ممتوم گردابه‌ای  $\epsilon_1$  در مراحل مختلف یکسان فرض شده‌اند. اطلاعات تجربی نشان می‌دهد که این تساوی فقط یک تقریب است. ضریب نفوذ جرمی گردابه‌ای نیز به روش مشابه برای انتقال جرم براساس تئوری طول اختلاط پراوتل تعریف می‌شود و فرض می‌شود که با  $\alpha_1$  و  $\epsilon_1$  مساوی است.

## مسائل

۵-۲-۱. پاسخ دما به سرد کردن یک سیم: یک سیم مسی کوچک به قطر  $0.792 \text{ mm}$  و دمای اولیه  $366/5 \text{ K}$  ناگهان در یک مایع که دمای آن در  $311 \text{ K}$  ثابت نگهداشته شده است وارد می‌شود. ضریب جابه‌جایی  $h = 85/2 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$  است. خواص فیزیکی ثابت هستند و  $k = 374 \text{ W/m.K}$  و  $c_p = 0.389 \text{ kJ/kg.K}$  و  $\rho = 8890 \text{ kg/m}^3$  است.

الف - زمان لازم برای کاهش دمای سیم به دمای میانگین  $338/8 \text{ K}$  (نصف اختلاف دمای اولیه) را برحسب ثانیه حساب کنید.

ب - محاسبه قسمت (الف) را با  $h = 11/36 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$  انجام دهید.

پ - در قسمت (ب) مقدار کل گرمای از دست داده شده به ازای یک متر از طول سیم را حساب کنید.

جواب: الف)  $t = 5/66 \text{ s}$

۵-۲-۲. سرد کردن گلوله سربی در یک حمام: گلوله سربی به قطر میانگین  $5/1 \text{ mm}$  در دمای اولیه  $204/4^\circ\text{C}$  قرار دارد. برای سرد کردن گلوله آن را وارد یک حمام روغن با دمای ثابت  $32/2^\circ\text{C}$  می کنند که به کف حمام سقوط می کند. زمان سقوط  $15 \text{ s}$  است. با فرض این که ضریب میانگین جابه جایی  $h = 199 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$  باشد، دمای گلوله پس از افتادن چقدر خواهد بود؟ برای سرب  $\rho = 11370 \text{ kg/m}^3$  و  $c_p = 0/138 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K}$ .

۵-۲-۳. گرم کردن ناپایدار یک تانک در حال اختلاط: یک ظرف در ابتدا با  $0/0283 \text{ m}^3$  آب در دمای اولیه  $288/8 \text{ K}$  پر شده است. ظرف که کاملاً همزده می شود، ناگهان در یک حمام بخار به دمای ثابت  $377/6 \text{ K}$  غوطه ور می شود. ضریب کلی انتقال حرارت  $U$  بین بخار و آب  $1136 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$  و سطح  $0/372 \text{ m}^2$  است. با صرف نظر کردن از ظرفیت گرمایی دیواره ها و همزن، زمان لازم برای گرم کردن آب تا  $338/7 \text{ K}$  را برحسب ساعت حساب کنید. (راهنمایی: چون آب کاملاً همزده می شود، دما آن یکنواخت است، نشان دهید که معادله (۵-۲-۳) صدق می کند و از معادله (۵-۲-۱) شروع کنید.)

۵-۳-۱. دما در یک جداره مقاوم: یک محفظه احتراق برای حفاظت پوسته خارجی، یک لایه مقاوم به ضخامت  $2 \text{ in}$  دارد. برای پیش بینی تنشهای گرمایی در موقع راه اندازی، دما در  $0/2 \text{ in}$  زیر سطح پس از گذشت یک دقیقه از شروع راه اندازی لازم است مشخص شود. این اطلاعات در دسترس هستند، دمای اولیه  $T_s = 100^\circ\text{F}$ ، دمای گاز داغ  $T_1 = 3000^\circ\text{F}$ ،  $h = 40 \text{ Btu/hr}\cdot\text{ft}^2\cdot^\circ\text{F}$ ،  $\alpha = 0/02 \text{ ft}^2/\text{hr}$ ،  $k = 0/6 \text{ Btu/hr}\cdot\text{ft}\cdot^\circ\text{F}$ ، دما را در عمق  $0/2 \text{ in}$  و  $0/6 \text{ in}$  محاسبه کنید. از شکل ۵-۳-۳ استفاده کنید و در صورتی که لایه مقاوم به عنوان یک جامد نیمه بی نهایت در طول مدت زمان یک دقیقه عمل کند، نحوه عمل را توجیه کنید.

جواب: برای  $0/2 \text{ in}$   $\alpha = 0/28$ ،  $T = 912^\circ\text{F}$ ،  $(T - T_s)/(T_1 - T_s) = 0/28$

برای  $0/6 \text{ in}$   $\alpha = 0/02$ ،  $T = 158^\circ\text{F}$ ،  $(T - T_s)/(T_1 - T_s) = 0/02$

۵-۳-۲. دمای انجماد در خاک: دمای میانگین خاک در یک روز زمستانی تا عمق نسبتاً زیاد تقریباً  $(40^\circ\text{F}) 277/6 \text{ K}$  است. اگر دمای هوای بیرونی ناگهان به  $(0^\circ\text{F}) 255/4 \text{ K}$  افت کند و همین طور باقی بماند، چه مدت طول می کشد تا لوله ای به عمق  $3/05 \text{ m}$  ( $10 \text{ ft}$ ) زیر سطح خاک به دمای  $273/2 \text{ K}$  ( $32^\circ\text{F}$ ) برسد؟ ضریب انتقال حرارت  $h = 8/52 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$  خواص فیزیکی خاک به صورت  $\alpha = 5/16 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$  ( $\alpha = 0/02 \text{ ft}^2/\text{hr}$ ) و  $k = 1/384 \text{ W/m}\cdot\text{K}$  ( $k = 0/8 \text{ Btu/hr}\cdot\text{ft}\cdot^\circ\text{F}$ ) است. (توجه: حل مسأله به صورت حدس و خطاست، چون زمان مجهول است و دوبار در منحنی مربوط به جامد نیمه بی نهایت ظاهر می شود.)

۵-۳-۳. سرد کردن یک صفحه آلومینیوم: یک قطعه بزرگ آلومینیومی که می‌تواند به عنوان یک جامد نیمه بی‌نهایت در نظر گرفته شود، در ابتدا دمای یکنواخت  $505/4 \text{ K}$  دارد. سطح به‌طور ناگهانی در معرض محیطی با دمای  $338/8 \text{ K}$  با ضریب جابه‌جایی سطحی  $455 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$  قرار می‌گیرد. زمان لازم برای این‌که دما در عمق  $25/4 \text{ mm}$  به  $388/8 \text{ K}$  برسد را برحسب ساعت حساب کنید. خواص فیزیکی میانگین  $\alpha = 0/34 \text{ m}^2/\text{hr}$  و  $k = 208 \text{ W/m} \cdot \text{K}$  است.

۵-۳-۴. گرم کردن سریع یک دیوار بتونی: یک دیوار ساخته شده از بتون به ضخامت  $0/305 \text{ m}$  از یک طرف عایق شده است. دیوار در دمای یکنواخت  $10^\circ \text{C}$  قرار دارد. طرف دیگر دیوار در معرض گازی به دمای  $843^\circ \text{C}$  ( $1116/2 \text{ K}$ ) قرار می‌گیرد. ضریب جابه‌جایی  $28/4 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ ، ضریب نفوذ گرمایی  $10^{-3} \text{ m}^2/\text{h}$  و  $1/74 \times 10^{-3} \text{ m}^2/\text{h}$  و ضریب هدایت گرمایی  $0/935 \text{ W/m} \cdot \text{K}$  است.

الف - زمان لازم برای رسیدن دمای سطح عایق شده به  $232^\circ \text{C}$  را به دست آورید.

ب - دما در نقطه‌ای در فاصله  $0/152 \text{ m}$  زیر سطح را در همان زمان حساب کنید.

جواب: الف)  $13/4 \text{ h}$  و  $t = 0/25$  و  $at/x_1^2 = 0/25$

۵-۳-۵. پختن یک ورقه گوشت: یک ورقه گوشت به ضخامت  $25/4 \text{ mm}$  در دمای یکنواخت اولیه  $10^\circ \text{C}$  در یک آون در دمای  $177^\circ \text{C}$  از دو طرف پخته می‌شود تا هنگامی که دمای مرکز آن به  $121^\circ \text{C}$  برسد. ضریب جابه‌جایی مقدار ثابت  $25/6 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$  فرض می‌شود. با صرف نظر کردن از تغییرات گرمای نهان، زمان لازم را محاسبه کنید. ضریب هدایت گرمایی  $0/69 \text{ W/m} \cdot \text{K}$  و ضریب نفوذ گرمایی  $5/85 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{hr}$  است. از منحنی هیسلا استفاده کنید.

جواب:  $0/8$  ساعت ( $2880$  ثانیه)

۵-۳-۶. هدایت ناپایدار در یک دیواره آجری: یک دیوار آجری صاف به ضخامت  $1 \text{ ft}$  رویه یک طرف یک کوره است. اگر دیوار در دمای یکنواخت  $100^\circ \text{F}$  باشد و یک طرف آن به‌طور ناگهانی در معرض گازی به دمای  $1100^\circ \text{F}$  قرار گیرد، زمان لازم برای این‌که دیواره کوره در نقطه‌ای به فاصله  $0/5 \text{ ft}$  از سطح به دمای  $500^\circ \text{F}$  برسد، را حساب کنید. طرف دیگر دیوار عایق است. ضریب جابه‌جایی  $2/6 \text{ Btu/hr} \cdot \text{ft}^2 \cdot ^\circ \text{F}$  است و خواص فیزیکی آجر،  $k = 0/65 \text{ Btu/hr} \cdot \text{ft} \cdot ^\circ \text{F}$  و  $\alpha = 0/02 \text{ ft}^2/\text{hr}$  است.

۵-۳-۷. سرد کردن یک میله فولادی: یک میله بلند فولادی به قطر  $0/305 \text{ m}$  در ابتدا در دمای  $588 \text{ K}$

قرار دارد. این میله در یک حمام روغن به دمای ثابت  $311\text{ K}$  غوطه‌ور می‌شود. ضریب جابه‌جایی سطحی  $125\text{ W/m}^2\cdot\text{K}$  است. دمای مرکز میله را پس از یک ساعت حساب کنید. خواص فیزیکی میانگین فولاد،  $k = 38\text{ W/m}\cdot\text{K}$  و  $\alpha = 0.0381\text{ m}^2/\text{hr}$  است.

جواب:  $T = 391\text{ K}$

۵-۳-۸. اثر اندازه بر فرآورش گرمایی گوشت: یک اتوکلاو در دمای ثابت  $121/1\text{ }^\circ\text{C}$  برای فرآوری گوشت سوسیس به قطر  $101/6\text{ mm}$  و طول  $0/61\text{ m}$  که در ابتدا در دمای  $21/1\text{ }^\circ\text{C}$  قرار دارد، به کار می‌رود. پس از دو ساعت دمای مرکز آن به  $98/9\text{ }^\circ\text{C}$  می‌رسد. اگر قطر به  $139/7\text{ mm}$  افزایش یابد، چه مدت زمان طول می‌کشد تا دمای مرکز به  $98/9\text{ }^\circ\text{C}$  برسد؟ ضریب انتقال حرارت برای سطح  $h = 1100\text{ W/m}^2\cdot\text{K}$  است که مقدار خیلی بزرگی است، به طوری که از مقاومت سطح می‌توان صرف‌نظر کرد. (این موضوع را نشان دهید). از انتقال حرارت در انتهای استوانه صرف‌نظر کنید. ضریب هدایت گرمایی  $k = 0/485\text{ W/m}\cdot\text{K}$  است.

جواب:  $3/78\text{ hr}$

۵-۳-۹. دمای پرتقالهای روی درخت‌ها در هوای بسیار سرد: در مدت زمان رشد پرتقال، انجماد پرتقالهای روی درخت در طول یک شب سرد از نظر اقتصادی بسیار مهم است. اگر پرتقالها در ابتدا در دمای  $21/1\text{ }^\circ\text{C}$  باشند، در صورتی که در معرض هوایی به دمای  $3/9\text{ }^\circ\text{C}$  قرار گیرند، دمای مرکز آنها را پس از ۶ ساعت به دست آورید. قطر پرتقالها  $102\text{ mm}$  و ضریب جابه‌جایی  $11/4\text{ W/m}^2\cdot\text{K}$  تخمین زده می‌شود. ضریب هدایت گرمایی  $0/431\text{ W/m}\cdot\text{K}$  و ضریب نفوذ گرمایی  $4/65 \times 10^{-4}\text{ m}^2/\text{hr}$  است. از اثرات گرمای نهان صرف‌نظر کنید.

جواب:  $(T_1 - T)/(T_1 - T_0) = 0/05$  و  $T = -2/65\text{ }^\circ\text{C}$

۵-۳-۱۰. سخت کردن یک کره فولادی: برای سخت کردن یک کره فولادی به قطر  $50/8\text{ mm}$  آن را تا دمای  $1033\text{ K}$  گرم می‌کنند و سپس به داخل یک حمام آب بزرگ به دمای  $300\text{ K}$  وارد می‌کنند. زمان لازم برای این که دمای مرکز کره به  $366/5\text{ K}$  برسد را حساب کنید. ضریب جابه‌جایی سطحی  $710\text{ W/m}^2\cdot\text{K}$  و  $k = 45\text{ W/m}\cdot\text{K}$  و  $\alpha = 0.0325\text{ m}^2/\text{hr}$  است.

۵-۳-۱۱. هدایت ناپایدار در یک استوانه کوتاه: یک استوانه آلومینیومی در ابتدا گرم می‌شود و در دمای یکنواخت  $204/4\text{ }^\circ\text{C}$  قرار می‌گیرد. سپس به داخل یک حمام بزرگ با دمای ثابت  $93/3\text{ }^\circ\text{C}$  وارد می‌شود که در آن  $h = 568\text{ W/m}^2\cdot\text{K}$ . قطر استوانه  $50/8\text{ mm}$  و طول آن  $101/6\text{ mm}$  است. دمای مرکز استوانه را پس از  $60\text{ s}$  حساب کنید. خواص فیزیکی،  $k = 207/7\text{ W/m}\cdot\text{K}$  و  $\alpha = 9/44 \times 10^{-5}\text{ m}^2/\text{s}$  است.

۵-۳-۱۲. هدایت سه بُعدی در یک بلوک مکعب مستطیل شکل: یک بلوک مکعب مستطیل شکل فولادی به ابعاد  $0.305\text{ m}$  در  $0.457\text{ m}$  در  $0.61\text{ m}$  در دمای اولیه  $315/6^\circ\text{C}$  قرار دارد. این بلوک به طور ناگهانی وارد محیطی به دمای  $93/3^\circ\text{C}$  می‌شود. دمای مرکز را پس از یک ساعت حساب کنید. ضریب جابه‌جایی سطح  $k = 38\text{ W/m.K}$  و  $\alpha = 0.379\text{ m}^2/\text{hr}$  است.

۵-۴-۱. روش عددی اشمیت برای هدایت ناپایدار: یک ماده به شکل یک صفحه بی‌نهایت به ضخامت  $0.762\text{ m}$  در دمای اولیه  $366/53\text{ K}$  قرار دارد. یک طرف صفحه عایق شده است و طرف دیگر صفحه به‌طور ناگهانی در معرض دمای  $533/2\text{ K}$  قرار می‌گیرد. مقاومت جابه‌جایی در این صفحه می‌تواند صفر فرض شود. توزیع دما را پس از  $0.875\text{ hr}$  با استفاده از روش عددی اشمیت با  $M = 2$  و صفحات با ضخامت  $0.1524\text{ m}$  محاسبه کنید. ضریب نفوذ گرمایی  $0.929\text{ m}^2/\text{hr}$  است.

۵-۴-۲. هدایت ناپایدار با توزیع دمای اولیه غیریکنواخت: با استفاده از شرایط مسئله ۵-۴-۱ با تغییرات زیر مسئله را مجدداً حل کنید. توزیع دمای اولیه یکنواخت نیست. یک طرف صفحه در  $366/53\text{ K}$  و طرف عایق در  $422/1\text{ K}$  است و تغییرات بین دو طرف صفحه خطی است.

۵-۴-۳. هدایت ناپایدار و استفاده از کامپیوتر: مسئله ۵-۴-۲ را با کامپیوتر و با نوشتن یک برنامه فرترن انجام دهید. ضخامت صفحات  $0.3048\text{ m}$  و  $M = 2$  را به کار ببرید. توزیع دما را پس از  $0.875\text{ hr}$  حساب کنید.

۵-۴-۴. سرد کردن گوشت و استفاده از روشهای عددی: یک ورق نازک از گوشت گاو به ضخامت  $45/7\text{ mm}$  و دمای اولیه  $283\text{ K}$  توسط یک کولر تماسی که دمای سطح روی آن  $274/7\text{ K}$  است سرد می‌شود. یک طرف گوشت عایق شده است. فرض کنید مقاومت جابه‌جایی در سطح رویی صفر باشد. با به کار بردن پنج صفحه و  $M = 2$  توزیع دما را پس از  $0.54\text{ hr}$  حساب کنید. ضریب نفوذ گرمایی  $4/64 \times 10^{-4}\text{ m}^2/\text{hr}$  است.

جواب:  $\Delta t = 0.09\text{ hr}$ ، شش فاصله زمانی

۵-۴-۵. سرد کردن گوشت گاو با مقاومت جابه‌جایی: یک ورقه بزرگ از گوشت گاو به ضخامت  $45/7\text{ mm}$  در دمای یکنواخت اولیه  $37/78^\circ\text{C}$  قرار دارد. یک طرف این قطعه گوشت در یک سیستم سردکننده با ضریب جابه‌جایی  $k = 38\text{ W/m}^2\text{.K}$  به دمای  $1/11^\circ\text{C}$  می‌رسد. طرف دیگر آن عایق شده است. ضریب هدایت گرمایی گوشت  $k = 498\text{ W/m.K}$  و

با استفاده از یک روش عددی با در نظر گرفتن پنج صفحه و  $\alpha = 4/64 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{h}$  است.  $M = 4$  توزیع دما را پس از  $0/278 \text{ h}$  حساب کنید. (راهنمایی: چون مقاومت جابه‌جایی وجود دارد، مقدار  $N$  باید محاسبه شود. معادله  $(5-4-7)$  برای محاسبه دمای سطح  $t + \Delta t T_1$  به کار می‌رود).

۵-۴-۶ سرد کردن گوشت گاو و استفاده از کامپیوتر: مسأله ۵-۴-۵ را با استفاده از کامپیوتر حل کنید. بیست برش در نظر بگیرید با  $M = 4$ . یک برنامه فرترن بنویسید.

۵-۴-۷ جابه‌جایی و هدایت ناپایدار: در مثال ۵-۴-۳ محاسبات را برای دوازده فاصله زمانی ادامه دهید. توزیع دما را رسم کنید.

۵-۴-۸ شرایط مرزی دیگر برای روش عددی: مثال ۵-۴-۳ را با شرایط مرزی معادله  $(5-4-11)$  مجدداً حل کنید و  $M = 4$  در نظر بگیرید. توزیع دما را برای کل دوازده فاصله زمانی محاسبه کنید.

۵-۴-۹ روش عددی برای جامد نیمه بی‌نهایت و جابه‌جایی: سطح یک جامد نیمه بی‌نهایت در دمای یکنواخت  $200^\circ\text{C}$  توسط جابه‌جایی سرد می‌شود. سیال سردکننده در دمای ثابت  $100^\circ\text{C}$  دارای  $h = 250 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$  است. خواص فیزیکی جامد  $k = 20 \text{ W/m}\cdot\text{K}$  و  $\alpha = 4 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$  است. با به کار بردن یک روش عددی با  $\Delta x = 0/04 \text{ m}$  و  $M = 4$  توزیع دما را پس از  $50$  ثانیه به دست آورید.

جواب:  $T_2 = 181/84^\circ\text{C}$ ،  $T_1 = 157/72^\circ\text{C}$

$T_5 = 199/90^\circ\text{C}$ ،  $T_4 = 198/93^\circ\text{C}$ ،  $T_3 = 194/44^\circ\text{C}$

۵-۵-۱ سرد کردن ورقه گوشت گاو: مثال ۵-۵-۱ را تکرار کنید، در این مثال مرکز یک ورقه گوشت گاو تا دما  $10^\circ\text{C}$  سرد می‌شود. اما در این مسأله از هوایی با دمای  $0^\circ\text{C}$  با  $h = 22/7 \text{ W/m}\cdot\text{K}$  استفاده کنید.

جواب:  $t = 19/74 \text{ hr}$ ،  $X = 0/92$ ،  $(T_1 - T)/(T_1 - T_0) = 0/265$

۵-۵-۲ سرد کردن فیله گوشت ماهی: گوشتهای فیله ماهی در دمای اولیه  $10^\circ\text{C}$  تا ضخامت

$102 \text{ mm}$  روی هم فشرده شده است. دو طرف بسته گوشت با یخ پوشیده شده است و یک کاغذ مقاوم در برابر رطوبت یخ و گوشت ماهی را از هم جدا می‌کند. دمای سطح گوشت ماهی را می‌توان  $0^\circ\text{C}$  در نظر گرفت. زمان لازم برای این که دمای مرکز گوشت به  $2/22^\circ\text{C}$  برسد را حساب کنید. دمای نقطه‌ای به فاصله  $25/4 \text{ mm}$  از مرکز را در همین زمان به دست آورید. همچنین منحنی دما برحسب مکان را رسم کنید. خواص فیزیکی  $(B1)$ ،



$$c_p = 4/02 \text{ kJ/kg.K}, \rho = 1052 \text{ kg/m}^3, k = 0/571 \text{ W/m.K} \text{ است.}$$

۵-۵-۳ دمای میانگین در سرد کردن گوشت ماهی: گوشت فیله ماهی با خواص فیزیکی داده شده در مسأله ۵-۵-۲ در دمای اولیه  $10^\circ\text{C}$  قرار دارد. گوشتها تا ضخامت  $102 \text{ mm}$  فشرده می شوند و روی دو طرف آنها یخ گذاشته می شود. با فرض این که دمای سطح گوشت  $0^\circ\text{C}$  باشد، زمان لازم برای این که دمای میانگین به  $1/39^\circ\text{C}$  برسد را حساب کنید. (توجه: در این حالت مقاومت سطحی صفر است. برای این حالت آیا می توانید از شکل ۱۳-۳-۵ استفاده کنید)؟

۵-۵-۴ زمان لازم برای انجماد یک ورقه گوشت: مثال ۵-۵-۲ را با همان شرایط مجدداً حل کنید. با این تفاوت که از یک فریزر تماسی یا صفحه‌ای استفاده می شود که در آن ضریب انتقال حرارت سطحی  $h = 142 \text{ W/m}^2.\text{K}$  می تواند فرض شود.

جواب:  $t = 2 \text{ hr}$

۵-۵-۵ انجماد یک قطعه گوشت به شکل استوانه: یک بسته گوشت محتوی  $75\%$  رطوبت و به شکل یک استوانه طویل به قطر  $5 \text{ in}$  در یک فریزر هوایی تا  $25^\circ\text{F}$  منجمد می شود. گوشت در ابتدا در دمای انجماد  $27^\circ\text{F}$  است. ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی برابر با  $h = 3/5 \text{ Btu/hr.ft}^2.\text{F}$  خواص فیزیکی،  $\rho = 64 \text{ lbm/ft}^3$  برای گوشت منجمد نشده و  $k = 0/6 \text{ Btu/hr.ft}^2.\text{F}$  برای گوشت منجمد شده است. زمان انجماد را محاسبه کنید.

۵-۶-۱ تولید گرما با به کار بردن معادله تغییر انرژی: یک دیوار صاف با تولید گرمای یکنواخت  $q'' \text{ W/m}^2$  در داخل دیوار از چهار وجه عایق شده است و هدایت گرمایی فقط در جهت  $x$  است. ضخامت دیوار  $2L$  متر است. دما در یک طرف دیوار یا  $x = +L$  و در طرف دیگر آن یا  $x = -L$  مقدار ثابت  $T_w$  کلون است. با استفاده از معادله دیفرانسیل تغییر انرژی، معادله (۵-۶-۱۸)، معادله‌ای برای توزیع نهایی دما به دست آورید.

$$T = \frac{q(L'' - x'')}{2k} + T_w \quad \text{جواب:}$$

۵-۶-۲ انتقال حرارت در یک جامد با استفاده از معادله تغییر انرژی: یک جامد به ضخامت  $L$  در دمای یکنواخت  $T$  کلون قرار دارد. دمای یک طرف جامد در  $z = 0$  به طور ناگهانی در زمان  $t = 0$  به  $T_1$  و دمای طرف دیگر آن در  $z = L$  به مقدار ثابت  $T_2$  افزایش می یابد و در این دماها نگهداشته می شود. انتقال حرارت فقط در جهت  $z$  است. با خواص فیزیکی ثابت و با استفاده از معادله دیفرانسیل تغییر انرژی موارد زیر را انجام دهید:

الف - یک معادله دیفرانسیل جزئی برای انتقال انرژی ناپایدار همراه با شرایط مرزی

به دست آورید.

ب - همان کار را برای شرایط پایدار انجام داده و از معادله نهایی انتگرال بگیرید.

جواب: الف)  $\partial T / \partial t = \alpha \partial^2 T / \partial z^2$ ، شرط مرزی ۱: در  $z = z_0$ ،  $t = 0$ ،  $T = T_0$

شرط مرزی ۲: در  $z = 0$ ،  $t = t_0$ ،  $T = T_1$

شرط مرزی ۳: در  $z = L$ ،  $t = t_0$ ،  $T = T_2$

$$T = (T_2 - T_1) z/L + T_1 \quad (\text{ب})$$

۵-۶-۳. توزیع شعاعی دما با استفاده از معادله تغییر انرژی: در یک استوانه توخالی و بلند با

دو انتهای عایق انتقال حرارت شعاعی به طریق هدایت اتفاق می افتد.

الف - معادله دیفرانسیل نهایی برای هدایت پایدار چیست؟ با قانون دوم فوریه در

مختصات استوانه‌ای معادله (۵-۶-۲۰) شروع کنید.

ب - معادله به دست آمده در قسمت (الف) را با شرایط مرزی زیر برای به دست آوردن

توزیع دما حل کنید.

$$r = r_i \text{ برای } T = T_i \text{ و } r = r_o \text{ برای } T = T_o$$

پ - با استفاده از نتایج قسمت (ب) رابطه‌ای برای شدت جریان گرمایی  $q$  بر حسب وات

به دست آورید.

$$T = T_i - \frac{T_i - T_o}{\ln(r_o/r_i)} \ln \frac{r}{r_i} \quad (\text{ب}) \quad \text{جواب:}$$

۵-۶-۴. هدایت گرمایی در یک کره: در یک کره توخالی به شعاع داخلی  $r_i$  و شعاع خارجی  $r_o$  جریان

انرژی به صورت شعاعی اتفاق می افتد. در شرایط پایدار سطح داخلی کره در دمای ثابت  $T_i$

و سطح خارجی در دمای ثابت  $T_o$  قرار دارد.

الف - توزیع دما را با حل معادله تغییر انرژی به دست آورید.

ب - به کمک قسمت (الف) رابطه‌ای برای شدت جریان گرمایی بر حسب وات به دست آورید.

۵-۶-۵. تولید متغیر گرما و معادله تغییر انرژی: یک دیوار صاف طوری عایق شده است

که هدایت فقط در جهت  $x$  اتفاق می افتد. شرایط مرزی در حالت پایدار، در  $T = T_o$  در  $x = 0$  و

$T = T_L$  در  $x = L$  است. تولید داخلی گرما در واحد حجم وجود دارد و به صورت  $e^{-bx/L}$

$q = q_o$  تغییر می کند که  $q_o$  و  $b$  دو ثابت هستند. با حل معادله عمومی تغییر انرژی توزیع

دما را به دست آورید.

۵-۷-۱. ضخامت لایه مرزی گرمایی و هیدرو دینامیکی: هوا در  $294/3$  کلرین و فشار  $101/3$  kPa با

سرعت آزاد  $12/2 \text{ m/s}$  از روی یک صفحه صاف که دمای ثابت سطح آن  $383 \text{ K}$  است عبور می‌کند. موارد زیر را به دست آورید:

الف - در رینولدز بحرانی  $5 \times 10^5 = \text{Re}_L$  طول بحرانی  $x = L$  صفحه، ضخامت لایه مرزی هیدرودینامیکی  $\delta$ ، ضخامت لایه مرزی گرمایی  $\delta_T$  را حساب کنید. توجه کنید که عدد پرانتل ۱ نیست.

ب - ضریب میانگین انتقال گرمای روی صفحه را که با یک لایه مرزی آرام پوشیده شده است به دست آورید.

۲-۷-۵. ضخامت لایه‌های مرزی و انتقال حرارت: هوا در  $37/8^\circ \text{C}$  و یک اتمسفر مطلق با سرعت  $3/05 \text{ m/s}$  موازی با یک صفحه صاف با دمای ثابت  $93/3^\circ \text{C}$  جریان دارد. عرض صفحه یک متر است. موارد زیر را در فاصله  $0/61 \text{ m}$  از لبه صفحه به دست آورید:

الف - ضخامت لایه مرزی گرمایی  $\delta_T$  و ضخامت لایه مرزی هیدرودینامیکی

ب - کل انتقال حرارت از سطح

### منابع

- (B1) BLAKEBROUGH, N. *Biochemical and Biological Engineering Science*, Vol. 2. New York: Academic Press, Inc., 1968.
- (B2) BIRD, R. B., STEWART, W. E., and LIGHTFOOT, E. N. *Transport Phenomena*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1960.
- (C1) CARSLAW, H. S., and JAEGER, J. C. *Conduction of Heat in Solids*. Oxford: Clarendon Press, 1959.
- (C2) CHARM, S. E. *The Fundamentals of Food Engineering*, 2nd ed. Westport, Conn.: Avi Publishing Co., Inc., 1971.
- (D1) DUSINBERRE, G. M. *Heat Transfer Calculations by Finite Differences*. Scranton, Pa.: International Textbook Co., Inc., 1961.
- (G1) GEANKOPLIS, C. J. *Mass Transport Phenomena*. Columbus, Ohio: Ohio State University Bookstores, 1972.
- (G2) GURNEY, H. P., and LURIE, J. *Ind. Eng. Chem.*, **15**, 1170 (1923).
- (H1) HEISLER, H. P. *Trans. A.S.M.E.*, **69**, 227 (1947).
- (H2) HODGSON, T. *Fd. Inds. S. Afr.*, **16**, 41 (1964); *Int. Inst. Refrig. Annexe*, **1966**, 633 (1966).
- (K1) KREITH, F. *Principles of Heat Transfer*, 2nd ed. Scranton, Pa.: International Textbook Company, 1965.
- (K2) KREITH, F., and BLACK, W. Z. *Basic Heat Transfer*. New York: Harper & Row, Publishers, 1980.

- (N1) NEWMAN, A. H. *Ind. Eng. Chem.*, **28**, 545 (1936).
- (P1) PERRY, R. H., and CHILTON, C. H. *Chemical Engineers' Handbook*, 5th ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1973.
- (P2) PLANK, R. Z. *Ges. Kalteind.*, **20**, 109 (1913); *Z. Ges. Kalteind. Bieh. Reih.*, **10** (3), 1 (1941).
- (R1) RIEDEL, L. *Kalttechnik*, **8**, 374 (1956); **9**, 38 (1957); **11**, 41 (1959); **12**, 4 (1960).
- (S1) SCHNEIDER, P. J. *Conduction Heat Transfer*. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1955.
- (S2) SIEGEL, R., SPARROW, E. M., and HALLMAN, T. M. *Appl. Sci. Res.*, **A7**, 386 (1958).