

مسأله های مرحله ی دوم یازدهمین دوره ی المپیاد ریاضی دانش آموزان کشور

بهمن ماه ۱۳۷۲

۱. اگر p عددی اول و بزرگتر از ۳ باشد، آن گاه ثابت کنید عدد $A = 7^p - 6^p - 1$ بر ۴۳ بخشپذیر است.

۲. مثلث ABC به اضلاع a, b, c و مساحت S داده شده است. اثبات یا رد کنید که شرط لازم و کافی برای اینکه نقطه ای مانند P درون آن وجود داشته باشد به گونه ای که فاصله ی آن از سه رأس مثلث مزبور به ترتیب x, y, z باشد، آن است که مثلثی به اضلاع a, y, z و مساحت S_1 ، مثلثی به اضلاع b, x, z و مساحت S_2 و مثلثی به اضلاع c, x, y و مساحت S_3 وجود داشته باشد که $S_1 + S_2 + S_3 = S$.

۳. فرض می کنیم n و r دو عدد طبیعی باشند. کوچکترین عدد طبیعی m را پیدا کنید که دارای ویژگی باشد که برای هر افراز مجموعه ی $\{1, 2, \dots, m\}$ به r زیرمجموعه ی A_1, A_2, \dots, A_r ، در یکی از A_i ها

$$1 \leq i \leq r \quad \text{دو عدد } a \text{ و } b \text{ پیدا می شوند به گونه ای که } 1 < \frac{a}{b} \leq 1 + \frac{1}{n} \text{ باشد.}$$

۴. تعداد $n \geq 2$ نقطه ی A_1, A_2, \dots, A_n در صفحه داده شده اند به گونه ای که هیچ سه نقطه [ای] روی یک خط راست واقع نیستند و هر دو نقطه ی A_i و A_j یا با پاره خط $A_i A_j$ به هم متصل اند و یا نقطه ای مانند A_k وجود دارد که با پاره خط های $A_i A_k$ و $A_j A_k$ به این دو نقطه متصل است.

الف) حداقل تعداد پاره خط های لازم را پیدا کنید.

ب) در حالتی که $n=6$ و $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$ یک شش ضلعی محدب باشد، حداقل چند پاره خط لازم است افزوده شود تا شریط بالا برقرار گردد.

۵. اگر D_1 و D_2 دو خط متنافر باشند، آن گاه ثابت کنید بی نهایت خط راست وجود دارد که [همه ی] نقاط روی آن ها از این دو خط به یک فاصله اند.

۶. اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو چندجمله ای با ضرایب حقیقی باشند به گونه ای که کسر $\frac{f(x)}{g(x)}$ را می توان به شکل نسبت دو چندجمله ای با ضرایب گویا نوشت.