

۱- حل تمرین ۱۸ صفحه ۸۷ کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال

$$[x] \leq x < [x] + 1$$

$$\frac{1}{[x] + 1} < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{[x]}$$

$$1 + \frac{1}{[x] + 1} < 1 + \frac{1}{x} \leq 1 + \frac{1}{[x]}$$

$$\left(1 + \frac{1}{[x] + 1}\right)^{[x]} < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x] + 1}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x] + 1} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]} \left(1 + \frac{1}{[x]}\right) = e \times 1 = e \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{[x] + 1}\right)^{[x]} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{[x] + 1}\right)^{[x] + 1}}{1 + \frac{1}{[x] + 1}} = \frac{e}{1 + 0} = e \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

۲- ثابت کنید $\cos 36^\circ$ عددی گنگ است.

حل:

$$\sin 108^\circ = \sin 72^\circ$$

$$\sin 3(36^\circ) = \sin 2(36^\circ)$$

$$3 \sin 36^\circ - 4 \sin^3 36^\circ = 2 \sin 36^\circ \cos 36^\circ$$

$$\sin 36^\circ \neq 0$$

$$\Rightarrow 3 - 4 \sin^2 36^\circ = 2 \cos 36^\circ$$

$$\cos 36^\circ = A$$

$$\Rightarrow 3 - 4(1 - A^2) = 2A$$

$$\Rightarrow 4A^2 - 2A - 1 = 0$$

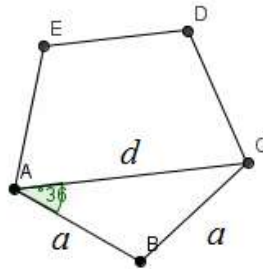
$$\Delta = 4 + 16 = 20$$

$$A = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{8} = \frac{1}{4}(1 \pm \sqrt{5})$$

$$\cos 36^\circ > 0$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{5})$$

۳- اثبات قضیه هیپاسوس



قضیه کسینوسها: $a^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos 36^\circ$

$$d^2 = 2ad \cos 36^\circ \Rightarrow \frac{d}{a} = 2 \cos 36^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{d}{a} = 2 \left(\frac{1}{4} (1 + \sqrt{5}) \right) = \frac{1}{2} (1 + \sqrt{5}) \quad \text{عددی گنگ است}$$

توجه ۱: اگر اندازه ضلع عددی گویا باشد باید اندازه قطر مضربی از $\sqrt{5} + 1$ باشد

توجه ۲: اگر قطر عددی گویا باشد باید اندازه ضلع مضربی از $\sqrt{5} - 1$ باشد

۴- تابع دریکله

$$D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

تابع دریکله

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x \in \mathbb{Q} \\ f_2(x) & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \Rightarrow f(x) = (f_1(x) - f_2(x))D(x) + f_2(x)$$

در صورتیکه f_1, f_2 در عددی حقیقی و دلخواه مانند $x = a$ پیوسته باشد آنگاه در صورتی f در $x = a$ پیوسته است که $f_1(a) = f_2(a)$ یعنی در واقع f در نقاطی از اعداد حقیقی پیوسته است که $f_1(x) - f_2(x) = 0$ به عبارت دیگر، $f_2(x) = f_1(x)$

مثال صفحه ۹۷ کتاب دیفرانسیل

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ 2-x & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$f(x) = (x - (2-x))D(x) + (2-x) \Rightarrow f(x) = (2x-2)D(x) + (2-x)$$

$\Rightarrow f$ در صورتی پیوسته است که $2x-2=0$ باشد \Rightarrow

f فقط در $x=1$ پیوسته است