سوالات مرحله اول المپیاد ریاضی ایران

به همراه راه حل، از سال ۸۲ تا کنون

وبگاه المپیاد ریاضی ایران

کمیته ملی المپیاد
ریاضی ایران- پاییز ۹۲

به نام او

که دانش آفریده است ...

سوالات مرحله اول المپیاد ریاضی به همراه راه‌حل

از سال ۱۳۸۲ تا ۱۳۹۲

فهرست مطالب

بخش دوم، پاسخ‌ها:

خواننده‌ی عزیز سلام

جمع‌آوری، تولید، تدوین و انتشار محتوای علمی مفید و با کیفیت، نیازمند پشت سرگذاشتن سختی‌های بسیاری است. این کتاب و کتاب مجموعه سؤالات و راه‌حل‌های آزمون مرحله اول حاصل زحمات عزیزانی است که در کمیته‌ی ملی المپیاد ریاضی ایران در باش‌گاه دانش‌پژوهان جوان ساعات زیادی را صرف جمع‌آوری سؤالات آزمون‌های مرحله اول و مرحله دوم، نوشتن راه‌حل‌ها، ویرایش محتوا و... کرده‌اند. جا دارد که از این عزیزان که نام آن‌ها را در زیر می‌بینید، صمیمانه تشکر کنیم:

ماهد آب‌روشن، سید احسان آزرم‌سا، احسان اسدی، صدرا بریری، مهران بهمنی، ماهان تجربه‌کار، سید علی‌رضا توکلی، مرتضی ثقفیان، خشایار خسروی، حسام‌الدین رجب‌زاده، سینا رضایی، عارف صادقی، عرفان صلواتی، جواد عابدی، علی‌رضا علی‌آبادیان، علی‌رضا عموزاد، فریما فرح‌مند، مجید فرهادی، سپهر قاضی‌نظامی، پارسا مرادی، امیرعلی معین‌فر، روح‌الله مهکام، امیرحسین نوید ادهم.

به علاوه در مورد آزمون‌ها بعضی سال‌ها از مجموعه‌ی نشریه‌های دانش‌پژوه که حدود ده سال قبل توسط انتشارات باش‌گاه دانش‌پژوهان به چاپ می‌رسید استفاده شده است. بنابراین لازم است از همه‌ی کسانی که در سالیان مختلف در تهیه‌ی این کتاب‌چه‌ها و نشریه‌ها هم‌کاری کرده‌اند هم کمال تشکر را داشته باشیم. در پایان امیدواریم که محتوای این کتاب برای شما عزیزان مفید باشد.

مهرماه ۱۳۹۲

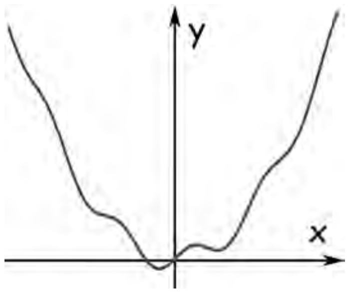
بخش اول: سوالات

سال ۱۳۸۲

زمان: ۲۴۰ دقیقه

مرحلهٔ اول بیست و دومین المپیاد ریاضی کشور

۱) نمودار روبرو مربوط به کدام یک از توابع زیر می‌باشد؟



الف) $y=\frac{x^2}{10}\cdot\sin x$

ب) $y=\frac{(\tan x)^2}{10}$

ج) $y=\cos(\frac{x^2}{10})-1$

د) $y=\frac{x^2}{10}+\cos x-1$

ه) $y=\frac{x^2}{10}+\sin x$

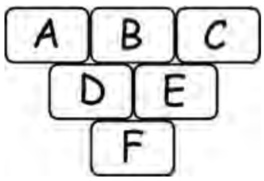
۲) معادلهٔ زیر چند جواب حقیقی دارد؟

$$(x+1)^{1383}+(x+1)^{1382}(x-2)+(x+1)^{1381}(x-2)^2+\cdots+(x+1)(x-2)^{1382}+(x-2)^{1383}=0$$

الف) این عبارت همواره صفر است. ب) ۲ ج) ۱۳۸۳

د) ۰ ه) ۱

۳) A، B، و C سه مجموعهٔ دل‌خواه هستند و از سطر دوم به بعد، هر مجموعه تفاضل دو مجموعهٔ بالای سر خودش است.(سمت چپ منهای سمت راست)
مثلاً $D=A-B$. کدام گزینهٔ حتماً درست است؟



الف) $F\subseteq C$ ب) $B\subseteq F$ ج) $F\subseteq A\cap C$ د) $A\cap C\subseteq F$ ه) $D\cap C\subseteq F$

۴) ضریب x^5 در چندجمله‌ای $(1+2x+3x^2+4x^3+\cdots+1382x^{1381})^2(x^8+x^4+1)^2$ چند است؟

الف) ۲۰ ب) ۳۲ ج) ۴۰ د) ۶۴ ه) ۷۰

۵) تابع دو متغیرهٔ f به صورت زیر تعریف شده است.

$$f(x,y)=y^2-x^2-2xy+2x+1$$

ناصر و منصور به این شکل با هم بازی می‌کنند که ابتدا ناصر یک عدد به جای x می‌گذارد و سپس منصور یک عدد به جای y قرار می‌دهد و مقدار تابع، هر چقدر که شد به عنوان امتیاز ناصر در نظر گرفته می شود.
اگر منصور خوب بازی کند بیش‌ترین امتیازی که ناصر می‌تواند به دست آورد چقدر است؟

الف) $\frac{3}{2}$ ب) $\frac{5}{4}$ ج) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ د) -1 ه) $-\sqrt{2}$

۶) چندجمله‌ای x^3+ax+1 بر x^2-3x+b بخش‌پذیر است. $a+2b$ چند است؟

الف) -8 ب) $-\frac{25}{4}$ ج) ۱ د) ۰ ه) -3

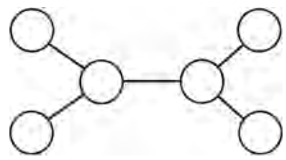
۷) A و B ماتریس‌هایی ۲ × ۲ به شکل زیر هستند.

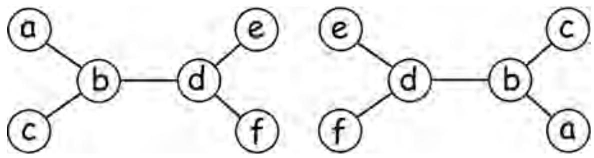
$$A = \begin{bmatrix} ۱ & x \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} \qquad\qquad B = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ y & ۱ \end{bmatrix}$$

چه موقع رابطهٔ $(A+B)^۲ = A^۲ + ۲AB + B^۲$ برقرار است؟

الف) همواره ب) وقتی $x+y = ۰$ ج) وقتی $x = y$ د) وقتی $xy = ۱$ ه) هیچ گاه

۸) می‌خواهیم در دایره‌های شکل روبرو برچسب‌های a، b، c، d، e، و f را بچسبانیم طوری که حروف واقع در هیچ دو دایره‌ای برابر نباشند. دو برچسب گذاری را متمایز گوییم هرگاه دو حرف وجود داشته باشند که دایره‌های شامل این دو حرف در یکی مجاور و در دیگری غیرمجاور باشند (دو دایره را مجاور گوییم هرگاه بین آن‌ها پاره‌خطی رسم شده باشد). مثلاً برچسب گذاری‌های زیر یکسانند.





چند برچسب گذاری متمایز وجود دارد؟

الف) ۱۸۰ ب) ۱۲۰ ج) ۹۰ د) ۶۰ ه) ۴۵

۹) حداقل چند مستطیل ۳ × ۲ باید از یک صفحهٔ شطرنجی ۸ × ۸ جدا شود تا دیگر حتی یک مستطیل ۳ × ۲ نتوان از شکل باقی‌مانده جدا کرد؟

الف) ۴ ب) ۵ ج) ۶ د) ۷ ه) ۸

۱۰) یک عدد طبیعی بزرگ‌تر از یک را «خوب» می‌نامیم هرگاه جمع هر دو مقسوم‌علیه متمایز آن بر ۷ بخش‌پذیر باشد. چند عدد خوب کمتر از ۱۰۰ وجود دارد؟

الف) ۳ ب) ۴ ج) ۵ د) ۶ ه) ۷

۱۱) فرض کنید فهرستی از اعداد طبیعی داده شده است. در هر مرحله می‌توانیم ۳ عضو متمایز این فهرست را انتخاب کرده و حاصل‌ضربشان را به فهرست اضافه کنیم تا فهرستی دیگر به دست آوریم. در صورتی که فهرست اولیهٔ ما مجموعهٔ اعداد اول باشد، کدام یک از اعداد زیر را می‌توان با انجام تعدادی مرحله به فهرست اضافه کرد؟

الف) ۱۰۰۰ ب) ۳۳۰ ج) ۳۵۰۰۰۰ د) ۳۷۵ ه) ۱۰۵۰۰

۱۲) برای عدد طبیعی n فرض کنید $p(n)$ حاصل‌ضرب ارقام n در مبنای ۱۰ باشد. $p(۱) + \cdots + p(۹۹۹)$ چند است؟

الف) ۱۱۲۵۷۶ ب) ۲۰۷۰ ج) ۹۱۱۲۵ د) ۹۳۱۹۵ ه) ۱۳۲۰۷۰

۱۳) دو دایرهٔ $C_۱$ و $C_۲$ به مراکز $O_۱$ و $O_۲$ در دو نقطهٔ A و B متقاطع می‌باشند. طول خط المرکزین دو دایره برابر ۵ و شعاع‌های آن‌ها ۴ و ۳ می‌باشد. خطی که از نقطهٔ A گذشته دو دایره را در نقاط M و N قطع کرده است. اگر اندازهٔ وتر AM برابر ۴ باشد اندازهٔ MN کدام است؟

الف) $۴+۳\sqrt{۳}$ ب) ۷ ج) ۸ د) $۴+۳\sqrt{\frac{۱۳}{۵}}$ ه) $۴\sqrt{۵}$

۱۴) رستم به فرمان کیکاووس از زابلستان به قصد کشتن دیو چند سر حرکت می‌کند.
اما قبل از نبرد، دیو به او هشدار می‌دهد که این کار، چندان ساده نیست :
این دیو چندین سر و هر سر او تعدادی چشم دارد. اگر رستم یک سر n−چشم را ($n>۱$) قطع کند دیو به جای آن، یک سر یک‌چشم، یک سر دوچشم، $\cdots$ و یک سر $(n-۱)$−چشم در می‌آورد!

تهمتـن چو بشـنید گفتـار دیـو — برآورد چون شیر جنـگی غـریـو
بزد بر سـر دیو چون پیل مست — سر و مغزش از گرز او گشت پست

اگر دیو در ابتدا سه سر، با ۴، ٦، و ۸ چشم داشته باشد رستم چند ضربه برای نابودی کامل دیو باید وارد کند؟

الف) ۱۸
ب) ٦۱
ج) ۱٦۸
د) متأسفانه رستم نمی‌تواند دیو را از پای درآورد!
ه) رستم دیو را از پای درمی‌آورد اما تعداد ضربات بستگی به روش او دارد.

۱۵) توجه کنید که در این سؤال هم مثل همهٔ سؤال‌های دیگر امتحان، چهار گزینه غلط و یک گزینه صحیح است!

الف) (ب) صحیح است.
ب) (ج) و (د) هر دو غلط‌اند.
ج) (ج) صحیح است.
د) (د) صحیح است.
ه) حداقل یکی از (ج) یا (ه) صحیح‌اند.

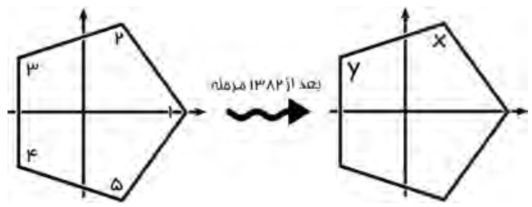
۱٦) یک عدد طبیعی را «تقسیمی» می‌نامیم هرگاه از قرار گرفتن یک عدد مضرب ۵ در سمت راست یک عدد مضرب ۳ به دست آمده باشد. تعداد اعداد ۴ رقمی مضرب ۵ که تقسیمی <u>نیستند</u> چند تاست؟

الف) ۵۸۸ ب) ۲۹۴ ج) ۸۸۲ د) ۱۲۰۰ ه) ۴۳۲

۱۷) در چهارضلعی $ABCD$ داریم $\widehat{ABC}=\widehat{BDC}=۹۰^\circ$ و $AB=CD$. اگر O محل تقاطع AC و BD باشد و $CB=۵$ و $BO=۳$ ، طول CO چقدر است؟

الف) ۴ ب) $\sqrt{۱۵}$ ج) $\sqrt{۱۴}$ د) ۳ ه) $۳\sqrt{۲}$

۱۸) فرض کنید یک ۵ ضلعی منتظم مانند شکل روی محورهای مختصات قرار گرفته است. عمل زیر را روی ۵ ضلعی ۱۳۸۲ بار انجام می‌دهیم: «نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم، ۷۲° در جهت خلاف حرکت عقربه ساعت دوران می‌دهیم، دوباره نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم.»
در این صورت (x,y) چند می‌باشد؟



الف) $(۳,۴)$ ب) $(۱,۵)$ ج) $(۵,۱)$ د) $(۴,۵)$ ه) $(۵,۴)$

۱۹) در چهارضلعی محدب $ABCD$ نیمساز زاویهٔ ABC ضلع CD را در نقطهٔ E قطع کرده است. اگر $\angle AEB = ۹۰^\circ$ و $\angle BCD = \angle CDA$، کدام یک از احکام زیر همواره برقرار است؟

الف) $ABCD$ چهارضلعی محیطی است.
ب) $ABCD$ چهارضلعی محاطی است.
ج) $AB = AD + BC$
د) $CD = AD + BC$
ه) $EA \cdot EB = EC \cdot ED$

۲۰) دستگاه معادلات مقابل در اعداد حقیقی چند جواب دارد؟

$$\begin{cases} ۱ + a^۳ + ۳ab = b^۳ \\ ۱ + a^۵ = b^۵ \end{cases}$$

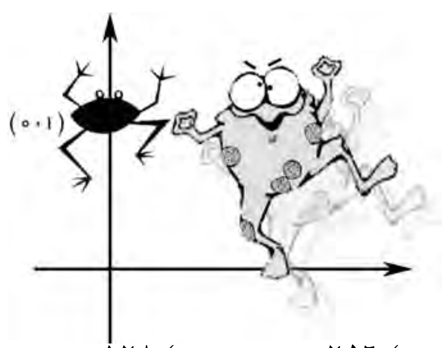
الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) نامتناهی جواب

۲۱) بیش‌ترین مقدار λ که برای هر $a > ۰$ نامساوی زیر برقرار باشد، چند است؟

$$a^۳ + \frac{۱}{a^۳} - ۲ \geq \lambda(a + \frac{۱}{a} - ۲)$$

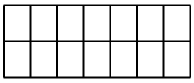
الف) ۰ ب) ۴ ج) ۹ د) $\frac{۵۶}{۴}$ ه) ۶

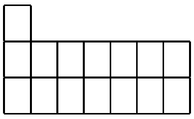
۲۲) یک قورباغه در نقطهٔ به مختصات $(۱,۰)$ از صفحه قرار دارد و هر بار در جهت عمود بر خطی که مبدأ مختصات را به مکان فعلی‌اش وصل می‌کند (طوری که مبدأ در سمت راستش قرار بگیرد) به اندازهٔ فاصلهٔ همان لحظه‌اش از مبدأ، جهش می‌کند. اگر قورباغه پس از ۱۵ جهش به نقطهٔ (a,b) برسد، a چند است؟

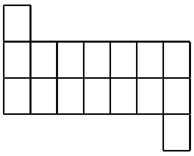


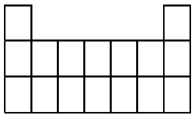
الف) ۰ ب) ۲۵۶ ج) $-۱۲۸\sqrt{۲}$ د) -۲۵۶ ه) -۱۲۸

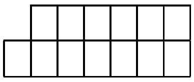
۲۳) تعداد زیادی موزاییک ۲ × ۱ در اختیار داریم. دو نفر به نوبت روی یک شکل شطرنجی به صورت زیر با هم بازی می‌کنند. هر نفر در نوبت خود یک موزاییک در دو خانه مجاور از شکل که قبلاً پر نشده باشد قرار می‌دهد. کسی که در نوبت خود نتواند حرکتی انجام دهد بازندهٔ بازی است. در کدام شکل نفر دوم می‌تواند طوری بازی کند که برندهٔ بازی باشد؟(فرض کنید نفر اول به بهترین صورت بازی می‌کند.)

الف) 

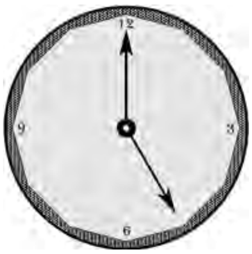
ب) 

ج) 

د) 

ه) 

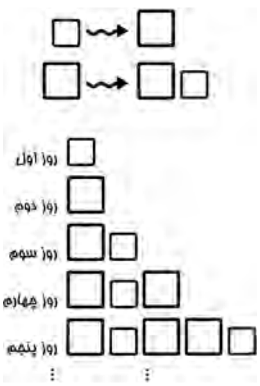
۲۴) ساعتی داریم که طول عقربهٔ ساعت شمار و دقیقه شمار آن برابر است. بین ساعت ۵ تا ٦ چند بار ممکن است عقربه‌ها به گونه‌ای قرار گیرند که ساعت دقیق مشخص نشود؟ مثلاً در حالت روبرو ساعت حتماً ۵ است، و نمی‌تواند ۱۲ : ۲۵ باشد.



الف) ۰ ب) ۱ ج) ۱۱ د) ۱۲ ه) ۱۳

۲۵) بر روی یک رشتهٔ بسیار باریک و دراز تعدادی سلول که بعضی کوچک و بعضی بزرگ هستند پشت سر هم قرار گرفته‌اند. بعد از گذشتن هر روز سلول‌های کوچک، بزرگ می‌شوند و سلول‌های بزرگ، یک سلول کوچک در سمت راست خود تولید می‌کنند.

اگر در روز اول تنها یک سلول کوچک داشته باشیم در روز هزار و سیصد و هشتاد و دوم دنباله‌ای طویل از سلول‌ها خواهیم داشت! سه جملهٔ وسط این دنباله کدامند؟



الف) 

ب) 

ج) 

د) 

ه) در این روز تعداد زوجی سلول وجود دارد و دنباله، وسط ندارد!

۲٦) فرض کنید n کوچک‌ترین عدد طبیعی باشد که $۲^n + ۳^n$ بر ۱۲۵ بخش‌پذیر است. مجموع ارقام n چند است؟

الف) ۸ ب) ۷ ج) ٦

د) ۵ ه) اصلاً چنین nای وجود ندارد.

۲۷) یک عدد طبیعی را «ریشه‌دار» می‌گوییم هرگاه مجذور مجموع ارقامش با خودش برابر باشد. کدام گزینه درست است؟

الف) تعداد اعداد ریشه‌دار نامتناهی است.

ب) عدد ریشه‌دار دو رقمی وجود ندارد.

ج) عدد ریشه‌دار چهار رقمی وجود ندارد.

د) عدد ریشه‌داری به شکل $۹k + ۳$ وجود دارد.

ه) عدد ریشه‌داری به شکل $۹k + ۴$ وجود دارد.

۲۸) از نقطهٔ P خارج دایرهٔ (O) دو قاطع بر دایره رسم می‌کنیم. اولی در A و B و دومی در C و D دایره را قطع می‌کند. از نقطهٔ P مماس PT را بر دایره رسم می‌کنیم. اگر M وسط کمان AB باشد و MD و MC، به ترتیب، AB را در E و F قطع نمایند و $\angle ETF = ۷۰^\circ$, $\angle FTP = ۳۰^\circ$ آنگاه زاویهٔ $\widehat{TPE}$ چقدر است؟

الف) ۶۰° ب) ۳۰° ج) ۴۵° د) ۵۰° ه) ۷۵°

۲۹) در مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$، طول میانهٔ رأس B، ۳ است و $\widehat{A} = ۱۵۰^\circ$. طول میانهٔ رأس A حداقل چقدر است؟

الف) ۱ ب) $\frac{۳+\sqrt{۵}}{۴}$ ج) $\frac{۳}{۲}(۳-\sqrt{۷})$ د) ۲ ه) $\frac{\sqrt{۳}+۱}{۲}$

۳۰) خط متغیر D و غیر گذرنده از نقاط B و C همواره دو ضلع AB و AC از مثلث ABC را، به ترتیب، در دو نقطهٔ M و N چنان قطع می‌نماید که مساحت مثلث AMN برابر مجموع مساحت‌های مثلث‌های MNB و MNC می‌باشد. کدام یک از احکام زیر درست است؟

الف) این خط باید همواره با ضلع BC موازی باشد.

ب) $\frac{AM}{NB} = \frac{AN}{MC}$

ج) این خط باید همواره از یک نقطهٔ ثابت در صفحهٔ مثلث بگذرد.

د) این خط باید همواره از وسط ارتفاع AH بگذرد.

ه) این خط باید همواره بر دایرهٔ محاطی داخلی مثلث مماس باشد.

سال ۱۳۸۳

زمان: ۲۴۰ دقیقه

۱) پس از بسط دادن $(۱ + ۲x + ۳x^۲ + \cdots + ۹x^۸ + ۱۰x^۹)^۲$، چند تا از ضرایب فرد است؟

الف) ۱ ب) ۵ ج) ۷ د) ۹ ه) ۱۰

۲) در برکه‌ای ۷ قطعه سنگ وجود دارد که از چپ به راست با اعداد ۱ تا ۷ شماره‌گذاری شده‌اند. قورباغه‌ای روی سنگ شماره یک نشسته است. فاصله سنگ‌ها به گونه‌ای است که اگر قورباغه روی سنگ i ام باشد می‌تواند حداکثر تا i سنگ جلوتر بپرد. به چند طریق ممکن است قورباغه، بدون برگشتن به سمت چپ، به سنگ شماره ۷ برود؟

الف) ۱۰ ب) ۱۱ ج) ۱۲ د) ۱۳ ه) ۱۴

۳) به چند طریق می‌توان سه زیرمجموعه دو عضوی از مجموعه $\{۱, ۲, \ldots, ٦\}$ انتخاب کرد به طوری که هر دو تا از آن‌ها دقیقاً یک عضو مشترک داشته باشند؟

الف) ۲۰ ب) ۴۰ ج) ۵۰ د) ٦۰ ه) ۸۰

۴) به‌ازای چند عدد طبیعی n، $\left[\frac{n^۲}{۳}\right]$ عددی اول است؟ ($[x]$ جزء صحیح x است.)

الف) یک ب) دو ج) سه د) بی‌نهایت ه) چنین عددی وجود ندارد.

۵) چهارضلعی $ABCD$ در بین چهارضلعی‌هایی که داخل نیم‌دایره‌ای به شعاع واحد قرار دارند، بیش‌ترین مساحت را دارد. مساحت $ABCD$ چه‌قدر است؟

الف) ۱ ب) $\frac{۳\sqrt{۳}}{۴}$ ج) $\frac{٦}{۵}$ د) $\frac{\sqrt{۷}}{۷}$ ه) $\sqrt{۲}$

٦) در مثلث متساوی‌الساقین ABC ($AB = AC$)، نیمساز زاویه C مثلث ABC را به دو مثلث متساوی‌الساقین دیگر تقسیم کرده است. نسبت $\frac{BC}{AB}$ برابر با کدام یک از اعداد زیر است؟

الف) $\frac{\sqrt{۳}+۱}{۲}$ ب) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ج) $\sqrt{۲}$ د) $\frac{۱}{۲}$ ه) $\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$

۷) سهمی $y = x^۲ - ۲ax + ۱$ و خط $y = ۲b(a - x)$ را در نظر بگیرید. تعریف کنید

$$A = \{(a,b) \in \mathbb{R}^۲ \mid \text{خط و سهمی مذکور یکدیگر را قطع نمی‌کنند}\}$$

مساحت A چقدر است؟

الف) $\frac{\pi}{۴}$ ب) $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ ج) A بی‌کران است. د) ۱ ه) π

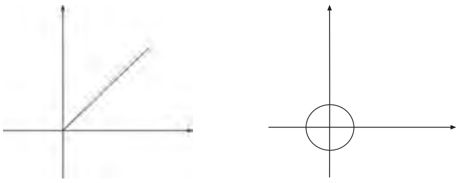
۸) ۱۸ خط در صفحه طوری رسم شده است که هر کدام افقی، عمودی یا موازی نیمساز ربع اول و سوم (یعنی خط $y = x$) است. در این وضعیت، صفحه حداکثر به چند قسمت (کران‌دار یا بی‌کران) تقسیم شده است؟

الف) ٦٣ ب) ۸۱ ج) ۱۲۱ د) ۱۲۷ ه) ۲۱٦

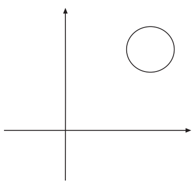
۹) فرض کنید A و B دو زیرمجموعه از نقاط صفحه باشند. مجموعه $A \oplus B$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$A \oplus B = \{(x_۱ + x_۲, y_۱ + y_۲) \mid (x_۱, y_۱) \in A, (x_۲, y_۲) \in B\}$$

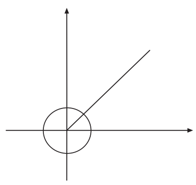
اگر A و B پاره‌خط و دایره نشان داده شده در شکل مقابل باشند، آنگاه $A \oplus B$ کدام یک از شکل‌های زیر خواهد بود؟



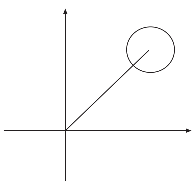
الف)



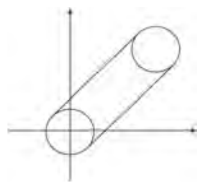
ب)



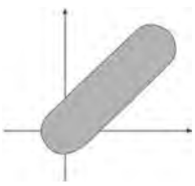
ج)



د)



ه)



۱۰) **قطر** یک زیرمجموعه از صفحه یعنی بزرگ‌ترین فاصله بین نقاط آن. به عنوان مثال، قطر هر مثلث برابر طول بزرگ‌ترین ضلع آن است. فرض کنید قطر دو مجموعه A و B برابر d است. کم‌ترین و بیش‌ترین مقدار قطر $A \oplus B$ چه‌قدر است؟ ($A \oplus B$ همان است که در سؤال قبل تعریف شده است.)

الف) d و d ب) $\sqrt{۲}d$ و $\sqrt{۳}d$ ج) d و $۲d$ د) $\sqrt{۲}d$ و $۲d$ ه) $۲d$ و $۳d$

۱۱) مجموعه‌های A_k، $k \in \mathbb{N}$ به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\begin{cases} A_{۱} = \text{مجموعه اعداد اول} \\ A_{k+۱} = \{a_{۱} \times a_{۲} \times \cdots \times a_{k+۱} \mid a_{۱}, a_{۲}, \ldots, a_{k+۱} \in A_k\} \end{cases}$$

توجه کنید که $a_{۱}$، $a_{۲}$، ... و $a_{k+۱}$ لزوماً متمایز نیستند. کدام یک از اعداد زیر، دست‌کم عضو یکی از A_k ها است؟

الف) $۳^{۷} \times ۲^{۲۴۳}$ ب) $۵^{۲۵} \times ۲^{۲۵}$ ج) $۷^{۲۵} \times ۲^{۲۳۱}$ د) $۳^{۹} \times ۲^{۱۱۱}$ هـ) $۵^{٦} \times ۳^{۱۲} \times ۲^{٦۰}$

۱۲) به‌ازای چند مقدار طبیعی برای a، معادله $\frac{۱}{y} - \frac{a}{x+y} = \frac{۱}{x}$ در مجموعه اعداد طبیعی جواب دارد؟

الف) چنین a ای وجود ندارد. ب) یکی ج) دو تا د) چهار تا هـ) بی‌نهایت

۱۳) می‌توان ثابت کرد در هر مثلث دلخواه ABC، قرینه مرکز ارتفاعیه (محل همرسی ارتفاع‌ها) نسبت به وسط ضلع BC روی دایره محیطی مثلث قرار می‌گیرد. این نقطه را D بنامید. اندازه زاویه DAC برابر است با

الف) $\frac{\widehat{A}}{۲}$ ب) $\frac{\widehat{B}}{۲}$ ج) $۹۰^\circ - \widehat{A}$ د) $۹۰^\circ - \widehat{B}$ هـ) $۹۰^\circ - \frac{\widehat{A}+\widehat{B}}{۲}$

۱۴) فرض کنید $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی وارون‌پذیر باشد و $h(x) = \frac{kf(x)}{۱ - f(x)}$. اگر h وارون‌پذیر باشد، آنگاه $\frac{x}{f \circ h^{-۱}(x)} - x$ برابر است با

الف) $f(x)$ ب) $h(x)$ ج) kx د) k هـ) $\frac{x}{f(x)} - x$

۱۵) کاغذی مستطیل شکل را چندین بار تا کرده‌ایم. در هر مرحله تا بر روی خطی موازی دو ضلع و در وسط آن‌ها زده شده است تا به مستطیلی با مساحت نصف مستطیل قبل برسیم. واضح است که در هر مرحله این کار به دو روش (افقی و عمودی) امکان‌پذیر است. در نهایت، همه تاها را باز کرده‌ایم و دیده‌ایم در مجموع ۳۱۸ خط تای افقی و عمودی تولید شده است. کاغذ چند بار تا شده است؟

الف) ۱۳ ب) ۱۴ ج) ۱۵۹ د) ۳۱۷ هـ) ۳۱۸

۱٦) مربع توپری به ضلع واحد در فضا در نظر بگیرید. حجم مجموعه نقاطی که فاصله آن‌ها دست‌کم از یکی از نقاط مربع کوچک‌تر یا مساوی ۱ باشد، چه‌قدر است؟

الف) ۲ ب) $۲(۱ + \frac{۲}{۳}\pi)$ ج) $۲(۱ + \pi)$ د) ۸ هـ) $۲(۱ + \frac{۵}{۳}\pi)$

۱۷) فرض کنید $S(n)$ مجموع ارقام عدد n باشد. چند عدد هفت رقمی n وجود دارد که ارقام ۱ تا ۹ دقیقاً یک بار در بین رقم‌های n و $S(n)$ ظاهر شده باشد؟

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۵۰۴۰ ه) ۱۰۰۸۰

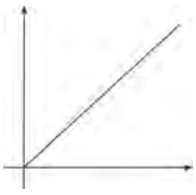
۱۸) فرض کنید عدد طبیعی a داده شده است. در هر گام، به جای عددی که در اختیار داریم یکی از عددهای $۲a + ۱$، $۳a + ۲$، $۴a + ۳$ و یا $۵a + ۴$ را در نظر می‌گیریم و کار را با آن ادامه می‌دهیم. با شروع از کدام یک از اعداد زیر، می‌توان بعد از تعدادی گام به عدد $۳۰^{۱۳۸۳} - ۱$ رسید؟

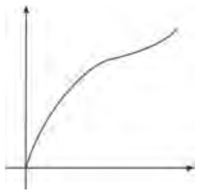
الف) ۱۰ ب) ۱۱ ج) ۱۲ د) ۱۳ ه) هیچ‌کدام

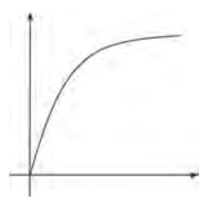
۱۹) فرض کنید $f_۰(x) = x$ و برای هر $n \geq ۰$، $f_{n+۱}(x) = \sqrt{۱ - f_n(x)}$. دامنه تابع $f_{۱۳۸۳}(x)$ کدام است؟

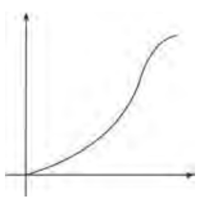
الف) $(-\infty, ۱]$ ب) $[۰, ۱]$ ج) $[۰, \frac{۱}{۲^{۱۳۸۳}}]$ د) $\{۱\}$ ه) $\{۰\}$

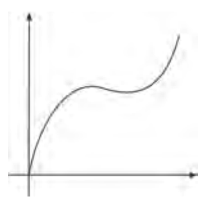
۲۰) در ظرفی به شکل روبه‌رو با نرخ ثابت در هر دقیقه یک لیتر آب می‌ریزیم. کدام یک از نمودارهای زیر می‌تواند نشان‌دهنده ارتفاع آب برحسب زمان باشد؟

الف) 

ب) 

ج) 

د) 

ه) 

۲۱) در دایره‌ای به شعاع واحد، AB کمانی ۶۰° و XY قطر متغیری از دایره است. خطوط XA و YB یکدیگر را در نقطه P قطع می‌کنند. مکان هندسی محل برخورد ارتفاع‌های مثلث PXY چیست؟

الف) دایره‌ای به شعاع $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

ب) خطی به موازات AB و به فاصله $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ از آن

ج) دایره‌ای به شعاع $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

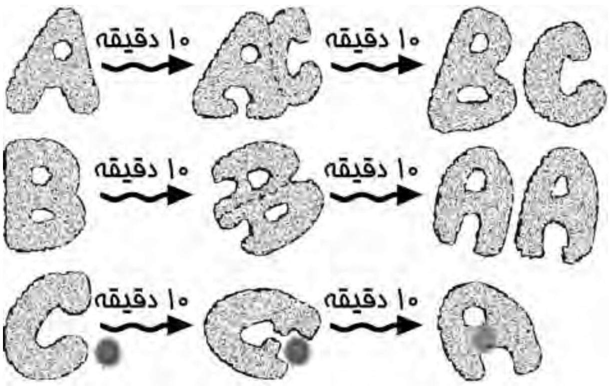
د) خطی به موازات AB و به فاصله $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ از آن

ه) دایره‌ای به شعاع ۱

۲۲) یک عدد طبیعی را **یکنوا** می‌گوییم هرگاه رقم صفر نداشته باشد و به علاوه ارقام آن به صورت اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی مرتب شده باشند. مثلاً اعداد ۱۳۵۶ و ۷۲ یکنوا هستند اما اعداد ۲۲، ۲۰۳۴ و ۱۳۸۳ یکنوا نیستند. مجموع همه اعداد یکنوای چهاررقمی چند است؟

الف) ۱۳۹۹۸۶۰   ب) ۹۹۹۹۹۸۰   ج) ۷۹۵۵۴۲۰   د) ۱۲۶۰۰۰۰   ه) ۴۹۴۹۵۵۰

۲۳) بیماری کشنده ABC توسط باکتری‌ای به همین نام تولید می‌شود. این باکتری در واقع دارای سه نوع A، B و C است که طبق این قوانین به هم تبدیل می‌شوند: پس از گذشت هر ۲۰ دقیقه هر باکتری A به یک B و یک C، هر باکتری B به دو A و هر باکتری C به یک A تبدیل می‌شود. به علاوه هر بار که C به A تبدیل می‌شود یک گلبول قرمز را نیز می‌خورد! اگر در آغاز تنها یک باکتری از نوع B وارد بدن شده باشد، پس از گذشت ۱۰ ساعت چند گلبول قرمز خورده شده است؟



الف) بین ۱۰۰ تا ۵۰۰ هزار   ب) بین ۵۰۰ هزار تا ۱ میلیون   ج) بین ۱ تا ۵ میلیون

د) بین ۵ تا ۱۰ میلیون   ه) بیش از ۱۰ میلیون

۲۴) دستگاه معادلات روبه‌رو را در نظر بگیرید که در آن A و B ماتریس‌هایی ۲ × ۲، I ماتریس همانی ۲ × ۲ و $\overline{O}$ ماتریس ۲ × ۲ با درایه‌های صفر است. داریم

$$\begin{cases} 2A^6 + 2A^2 + A + B = \overline{O} \\ A^2 - A + I = \overline{O} \end{cases}$$

الف) $3A + B = \overline{O}$ ب) $A + B = I$ ج) $A + 3B = \overline{O}$

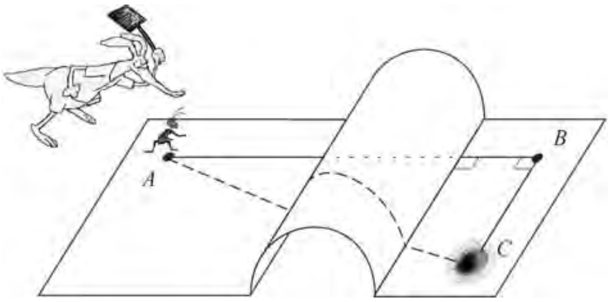
د) $A^2 + B^2 = \overline{O}$ ه) این دستگاه جواب ندارد.

۲۵) می‌خواهیم اعداد طبیعی را طوری رنگ‌آمیزی کنیم که اولاً هر دو عدد متوالی ناهمرنگ باشند و ثانیاً برای هر دو عدد ناهمرنگ a و b، یا باقیمانده a و b بر ۱۱ متفاوت باشد، یا باقیمانده a و b بر ۱۷. کم‌ترین تعداد رنگ‌های لازم چند تاست؟

الف) ۲   ب) ۳   ج) ۷   د) ۲۱   ه) ۱۴۷

۲۶) معادله $[\sin x] + \sin x = \left[\frac{x}{۳}\right] + \frac{x}{۳}$ چند جواب حقیقی دارد؟ ($[a]$ جزء صحیح a است.)

الف) جواب ندارد. ب) یکی ج) دو تا د) سه تا ه) پنج تا



۲۷) در شکل مقابل مثلث ABC قائم‌الزاویه است ($\widehat{B} = ۹۰°$) و $AB = ۱۰ - \pi$ و $BC = ۶$.
نیم‌استوانه‌ای با شعاع واحد و محور عمود بر AB، بین نقاط A و C مانع شده است. مورچه بنا به دلایلی (!) باید هرچه سریع‌تر از نقطه A به لانه‌اش در نقطه C برود. طول کوتاه‌ترین مسیر ممکن برابر است با

الف) $\sqrt{۱۳۶}$ ب) $\sqrt{۱۳۶} - \pi$ ج) ۱۰ د) $۷ + \pi$ ه) ۱۱

۲۸) مهره‌ای در مبداء مختصات قرار داده‌ایم. در هر مرحله مهره را توسط یکی از چهار بردار (m, n)، $(-m, -n)$، $(n + ۱, m + ۱)$ یا $(-n - ۱, -m - ۱)$ به نقطه دیگری منتقل می‌کنیم و این کار را تکرار می‌کنیم. به‌ازای کدام یک از (m, n) های زیر می‌توان مهره را به هر نقطه صفحه با مختصات صحیح رساند؟

الف) $n = ۳$ و $m = ۱$ ب) $n = ۳$ و $m = ۲$ ج) $n = ۵$ و $m = ۳$

د) $n = ۷$ و $m = ۴$ ه) به‌ازای هیچ m و n ای نمی‌توان این کار را انجام داد.

۲۹) فرض کنید $f(x) = x^۵ + x^۴ + x^۳ + x^۲ + x + ۱$. باقی‌مانده تقسیم $f(x^{۱۲})$ بر $f(x)$ کدام است؟

الف) $x^۳ + x^۲ + x + ۱$ ب) $x^۲ - x + ۶$ ج) $x + ۶$ د) ۶ ه) $۶ - x$

۳۰) یک چراغ راهنمای عجیب سه کلید دارد که هر کلید آن می‌تواند در یکی از وضعیت‌های ۱، ۲ یا ۳ قرار گیرد.
می‌دانیم که اگر وضعیت هر سه کلید را همزمان تغییر دهیم، رنگ چراغ تغییر می‌کند. ابتدا هر سه کلید در وضعیت ۱ هستند و چراغ قرمز است. افسر پلیس با تغییر وضعیت کلید اول از ۱ به ۲ چراغ را سبز می‌کند. حال اگر کلید دوم را هم در وضعیت ۲ قرار دهد، چراغ چه رنگی می‌شود؟

الف) قرمز ب) زرد ج) سبز

د) فقط می‌توان گفت سبز نیست. ه) هر رنگی ممکن است باشد.

سال ۱۳۸۴

زمان: ۲۴۰ دقیقه

مرحله اول بیست و چهارمین المپیاد ریاضی کشور

ویژه دانش‌آموزان دوم و سوم دبیرستان

۱) ضرایب چندجمله‌ای P صحیح است. تحت کدام‌یک از شرایط زیر P نمی‌تواند ریشه صحیح داشته باشد؟

الف) $P(۵) = ۵$ و $P(۶) = ۶$ ب) $P(۵) = ۵$ و $P(۶) = ۵$ ج) $P(۵) = ۶$ و $P(۶) = ۶$

د) $P(۵) = ۶$ و $P(۶) = ۵$ ه) تحت هر کدام از این شرایط، P می‌تواند ریشه صحیح داشته باشد.

۲) شازده کوچولو، روی سیاره کوچکی زندگی می‌کند که شعاعش ۶۰ متر است. روزی با شروع از روی خط استوا، ۳۰π متر به شرق، ۲۰π متر به شمال، ۳۰π متر به غرب و سرانجام ۲۰π متر به جنوب می‌رود. شازده کوچولو تا مکان اولش چند متر فاصله دارد؟

الف) صفر ب) ۳۰π ج) ۲۰π د) ۴۰π ه) ۱۵π

۳) چند سه‌تایی طبیعی $x < y < z \leq ۱۰$ وجود دارد که $x + y = z$؟

الف) ۱۵ ب) ۲۰ ج) ۴۰ د) ۴۵ ه) ۵۰

۴) به ازای چند عدد طبیعی مانند m حاصل $\sqrt{m + ۱۵} + \sqrt{m - ۱}$ صحیح است؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ ه) بی‌نهایت

۵) از شهر A جاده‌ای مستقیم خارج شده است که دو شهر B و C در دو طرفش قرار دارند. مجموع فاصله دو شهر B و C از جاده حداکثر چند کیلومتر است؟ می‌دانیم که فاصله شهر A از دو شهر دیگر ۶۰ و ۵۰ کیلومتر و فاصله دو شهر B و C از هم ۴۰ کیلومتر است.

الف) ۳۰ ب) ۴۰ ج) ۵۰ د) ۶۰ ه) ۷۰

۶) الگوریتم زیر را روی چندجمله‌ای $P(x)$ اجرا کرده‌ایم.

۱. d را برابر درجه P قرار بده و اگر $d < ۱$ به سطر ۴ برو.

۲. a را برابر ضریب x^d در P قرار بده و $P(x) - ax^{d-۱}(x + ۲)$ را به جای $P(x)$ بگذار.

۳. به سطر ۱ برو.

۴. P را چاپ کن.

پس از اجرای الگوریتم عدد ۱۳۸۴ چاپ شده است. P در آغاز کدام بوده است؟

الف) $x^{۱۰} - ۴۵x^۳$ ب) $۱۳x^۷ - ۲$ ج) $x^{۱۱} - ۸۳x^۳$ د) $۱۶x^۸ + x$ ه) $-x^{۱۱} + ۸۴$

۷) فرض کنید $(۲+\sqrt{۳})^n = ۵۰۴۲ + b\sqrt{۳}$ که در آن n طبیعی و b صحیح است. b چند است؟

الف) ۱۳۸۴ ب) ۳۵۴۳ ج) ۷۸۰ د) ۵۸۲۲ ه) ۲۹۱۱

۸) مستطیلی در صفحه با رئوس $(۰,۰)$، $(۰,۱۰۰)$، $(۱۵۰,۰)$ و $(۱۵۰,۱۰۰)$ در نظر بگیرید. چند خط موازی با قطر گذرا از رأس $(۰,۰)$، اضلاع مستطیل را در دو نقطه متمایز با مختصات صحیح قطع می‌کند؟ قطر را هم بشمارید.

الف) ۹۹ ب) ۱۰۰ ج) ۱۹۹ د) ۲۰۰ ه) ۳۰۰

۹) کدام‌یک از مجموعه‌های زیر نسبت به ضرب بسته است؟ اعداد طبیعی‌ای که یکانشان در بسط مبنای...

الف) چهار، ۱ یا ۲ یا ۳ است. ب) پنج، ۱ یا ۲ یا ۴ است. ج) هفت، ۱ یا ۲ یا ۴ است.
د) نه، ۰ یا ۲ یا ۴ یا ۶ یا ۸ است. ه) ده، ۰ یا ۱ یا ۲ یا ۵ است.

۱۰) نیم‌سازهای داخلی مثلث ABC دایره محیطی آن را در نقاط A'، B' و C' قطع می‌کنند. اگر I' مرکز دایره محاطی داخلی مثلث $A'B'C'$ باشد، اندازه $\angle B'I'C'$ برابر کدام گزینه است؟

الف) $۹۰^\circ + \frac{\widehat{B}+\widehat{C}}{۴}$ ب) $۱۸۰^\circ - \frac{\widehat{B}+\widehat{C}}{۴}$ ج) $۲\widehat{A}+\widehat{B}-\widehat{C}$ د) $۱۸۰^\circ - \widehat{A}$ ه) $۲\widehat{A}$

۱۱) اگر a، b و c اعدادی حقیقی باشند که $a^۲+b^۲+c^۲=۱$، مجموعه همه مقادیر ممکن $ab+bc+ca$ زیرمجموعه کدام یک از بازه‌های زیر است؟

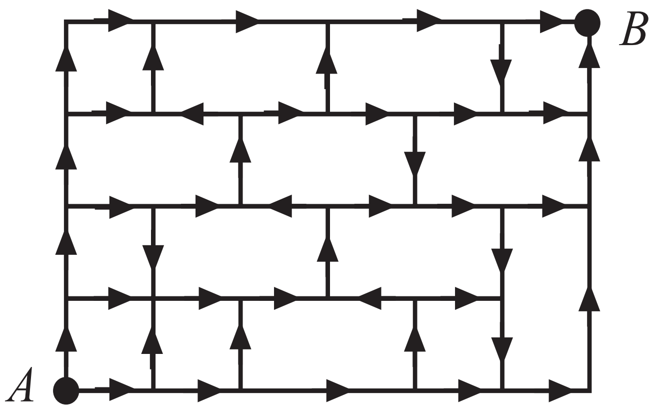
الف) $[۰,۲]$ ب) $[-۱,۰]$ ج) $[۰,۱]$ د) $\left[-۲,\frac{۱}{۲}\right]$ ه) $\left[\frac{-۱}{۲},۲\right]$

۱۲) دوربینی زیر یک هواپیما نصب شده است. هواپیما روی مسیری خطی در حال اوج‌گیری است. زمین را مسطح فرض کنید. مساحت فیلم‌برداری شده، تابع درجه چندی از جابجایی مکانی هواپیما است؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ ه) چندجمله‌ای نیست.

۱۳) تصاعد حسابی از اعداد اول با قدر نسبت $n^۲+۱$، که n عددی طبیعی است حداکثر چند عضو دارد؟

الف) ۳ ب) ۴ ج) ۵ د) ۶ ه) تصاعد با هر تعداد عضو وجود دارد.



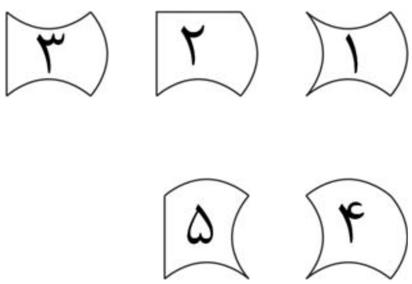
۱۴) در شکل روبرو می‌خواهیم از نقطه A به نقطه B برویم. مسیرها در جهت فلش یک‌طرفه هستند. به چند طریق می‌توانیم این کار انجام دهیم؟

الف) ۳۷ ب) ۵۸ ج) ۱۲

د) ۶۳ ه) ۶۴

۱۵) طول یال مکعبی یک واحد است. اگر A، B و C رأس‌های مجاور به رأس D باشند، کم‌ترین مقدار مجموع مربعات فاصله نقطه دلخواه P از خطوط AB، BC و CA چقدر است؟

الف) ۱ ب) $\frac{۱}{۲}$ ج) $\frac{۳}{۲}$ د) $\frac{۳}{۴}$ ه) $\frac{۱}{۴}$



۱۶) هر یک از کاشی‌های روبرو با اضافه و یا کم کردن قطاعی از دایره به مربع ۱×۱ به دست آمده است. هر کدام از این کاشی‌ها را «صفحه‌پرکن» می‌گوییم اگر بتوان با آن صفحه نامتناهی شبکه‌بندی‌شده را پوشاند؛ هر کاشی را می‌توان ۹۰ درجه و ۱۸۰ درجه دوران داد و آن را پشت و رو کرد. البته کاشی باید طوری در صفحه قرار داده شود که چهار گوشه آن روی نقاط شبکه قرار گیرد. کدام یک از کاشی‌ها صفحه‌پرکن هستند؟

الف) ۱ و ۵ ب) ۲ و ۴ و ۵ ج) ۲ و ۳ و ۵ د) ۳ و ۴ ه) ۲ و ۴

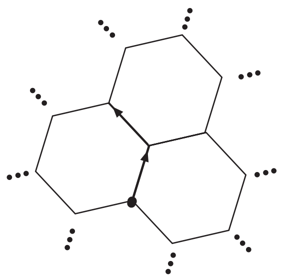
۱۷) کدام بزرگ‌تر است؟

الف) $۲^{۴۳۱}$ ب) $۳^{۴۲۱}$ ج) $۴^{۳۲۱}$ د) $۲۱^{۴۳}$ ه) $۳۱^{۴۲}$

۱۸) در مثلث ABC نقطه D محل برخورد نیم‌ساز زاویه A با ضلع BC و نقطه E محل تماس دایره محاطی داخلی با ضلع BC است. اگر $BE = ED$، کدام گزینه صحیح است؟

الف) $۳A + ۲C = ۱۸۰^\circ$ ب) $۲A + ۳C = ۱۸۰^\circ$ ج) $B - C = ۹۰^\circ$

د) $۲B + C = ۱۸۰^\circ$ ه) $B = ۲C$



۱۹) کندوی زنبوری از شش‌ضلعی‌های منتظم با طول واحد تشکیل شده است. بچه‌زنبوری روی اضلاع حرکت می‌کند و به هر رأسی که می‌رسد می‌تواند به سمت چپ یا راست خود برود. اگر این زنبور ۱ بار به چپ، ۲ بار به راست، ۴ بار به چپ،... و $۲^{۱۳۸۴}$ بار به چپ برود، فاصله مکان نهایی او از ابتدای حرکتش چند واحد است؟

الف) بین صفر و $۲^{۵}$ ب) بین $۲^{۵}$ و $۲^{۱۰}$ ج) بین $۲^{۱۰}$ و $۲^{۱۵}$ د) بین $۲^{۱۵}$ و $۲^{۲۰}$ ه) بین $۲^{۱۳۸۴}$ و $۲^{۱۳۸۵}$

۲۰) می‌خواهیم برای سه روستا به فاصله دوبه‌دوی ۹، ۱۴ و ۱۹ کیلومتر، مدرسه‌ای بسازیم. کم‌ترین مقدار a که بتوان مدرسه را جایی ساخت که فاصله‌اش از هر سه روستا بیش از a کیلومتر نباشد چند است؟

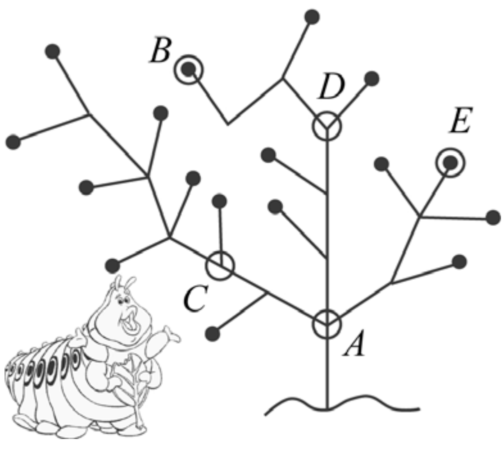
الف) ۹ ب) ۹/۵ ج) $۷\sqrt{۲}$ د) $\frac{۵۷\sqrt{۲}}{۸}$ ه) ۱۰

۲۱) بسط مبنای ۲- را با استفاده از ارقام صفر و یک، شبیه بسط مبنای ۲ تعریف می‌کنیم. مثلاً

$$(۱۰۱)_{-۲} = ۱ \times (-۲)^{۲} + ۰ \times (-۲)^{۱} + ۱ \times (-۲)^{۰} = ۵$$

۱۱۷ در مبنای ۲- ، چند تا یک دارد؟ (توجه کنید گذاشتن علامت منفی، مثلاً $-(۱۰۱)_{-۲}$، مجاز نیست.)

الف) ۲ ب) ۴ ج) ۶ د) ۱۱۷ بسط مبنای ۲- ندارد. ه) ۱۱۷ بیش‌تر از یک بسط در مبنای ۲- دارد.



۲۲) کرمی شکمو می‌خواهد همه میوه‌های درخت روبرو را بخورد و در عین حال مسافتی که روی شاخه‌ها طی می‌کند، کم‌ترین مقدار ممکن باشد. فرض کنید کرم می‌تواند مکان خود را برای شروع انتخاب کند. کدام نقطه بهتر است؟ فاصله بین دو نقطه متوالی روی درخت یک متر است و تمام شاخه‌های انتهایی، میوه دارند. میوه‌ها با دایره سیاه توپر مشخص شده‌اند.

الف) A ب) B ج) C د) D ه) E

۲۳) $*$، عملی روی اعداد صحیح است با این خاصیت که جابجایی و شرکت‌پذیر است ولی روی جمع پخش نمی‌شود. به جای آن برای هر a، b و c صحیح $a * (b + c) = (a * b) + (a * c) - a$. می‌دانیم که $۱ * ۱ = ۳$. در این صورت $۱۰ * ۱۰$ چند است؟

الف) ۱۰۰ ب) ۱۰۲ ج) ۱۲۰ د) ۲۵۰ ه) ۳۰۰

۲۴) در افسانه‌ها آمده است وقتی پادشاه هند می‌خواست به مخترع شطرنج پاداش دهد، طرف در دیزی را باز دید (!) و خواست به ازای خانه اول شطرنج یک دانه گندم، به ازای خانه دوم، دو دانه گندم و به همین ترتیب برای هر خانه‌ای، دو برابر خانه قبل به او گندم داده شود. فرض کنید خانه‌های صفحه شطرنج مانند شکل روبرو شماره‌گذاری شده‌اند. چه کسری از کل گندم‌ها به ازای خانه‌های سفید درخواست شده است؟ (جواب تا دو رقم اعشار است.)

الف) ۰/۳۳   ب) ۰/۵۰   ج) ۰/۶۶   د) ۰/۷۵   ه) هیچ‌کدام

۲۵) در مثلث ABC نقطه M وسط ضلع BC و نقطه E محل تماس دایره محاطی داخلی مثلث با ضلع BC است. اگر نقطه L وسط AM و K محل برخورد AE با BL باشد و بین اضلاع مثلث رابطه $۲(AC - AB) = BC$ باشد، آنگاه $\frac{AK}{AE}$ کدام است؟

الف) ۱   ب) $\frac{۲}{۳}$ ج) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ د) $\frac{۱}{۲}$ ه) $\frac{۳}{۴}$

۲۶) دو نفر با هم مشاعره می‌کنند؛ اولی بیتی از اشعار روبرو را می‌خواند و دومی باید بیت جدیدی بگوید که با حرف آخر بیت قبلی شروع شده باشد. چند بیت وجود دارد که با شروع از آن‌ها نفر اول می‌تواند مستقل از بازی نفر دوم برنده شود؟ بازنده کسی است که نتواند شعری بخواند.

این سر به مهر نامه بدان مهربان رسان	کس را خبر مکن که کجا می‌فرستمت
نور تویی سور تویی دولت منصور تویی	مرغ که طور تویی خسته به منقار مرا
ای پادشه خوبان داد از غم تنهایی	دل بی‌تو به جان آمد وقت است که بازآیی
نابرده رنج گنج میسر نمی‌شود	مزد آن گرفت جان برادر که کار کرد
درخت تو گر بار دانش بگیرد	به زیر آوری چرخ نیلوفری را
تا توانی دلی به دست آور	دل شکستن هنر نمی‌باشد
یعقوب‌وار وا اسفاها همی‌زنم	دیدار خوب یوسف کنعانم آرزوست
تا نگردی بی‌خبر از جسم و جان	کی خبر یابی ز جانان یک زمان
یار شو و یار بین دل شو و دل‌دار بین	در پی سرو روان چشمه و گلزار بین
دوست آن باشد که گیرد دست دوست	در پریشان حالی و درماندگی

الف) صفر   ب) ۲   ج) ۵   د) ۸   ه) ۱۰

۲۷) A، B و C سه زیرمجموعه دلخواه مجموعه اعداد طبیعی هستند. با دو عمل اجتماع و مکمل، حداکثر چند مجموعه مختلف می‌توان ساخت؟

الف) ۷   ب) ۸   ج) ۱۸   د) ۱۲۸   ه) ۲۵۶

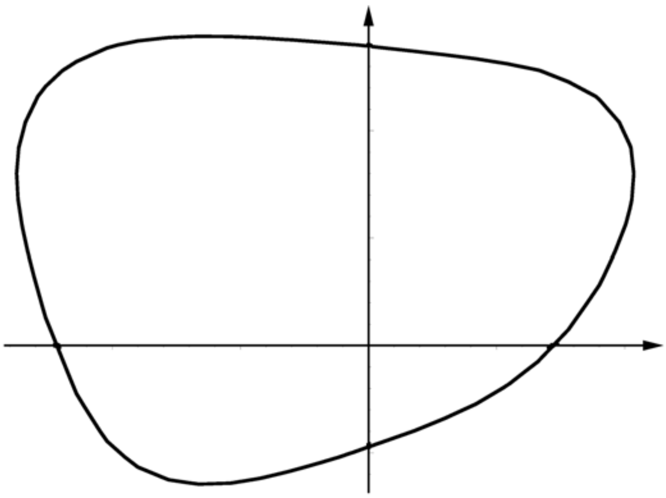
۲۸) فاصله مرکزهای دو دایره به شعاع $\sqrt{۳}$، برابر ۴ است. نقاطی را در نظر بگیرید که خارج دو دایره هستند و هر خط گذرنده از آن نقاط، دست‌کم یکی از دو دایره را قطع می‌کند. مساحت این مجموعه چقدر است؟

الف) صفر ب) $۲\pi - \sqrt{۳}$ ج) $۴\pi - ۲\sqrt{۳}$ د) $۲\sqrt{۳} - \pi$ ه) $۴\sqrt{۳} - ۲\pi$

۲۹) خانه‌های یک مستطیل ۵×۴ را می‌خواهیم با چهار رنگ طوری رنگ کنیم که در هر مربع ۲×۲، هر چهار رنگ ظاهر شوند. به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟

الف) ۱۲۰ ب) ۱۹۲ ج) ۲۴ د) ۲۶۴ ه) ۲۸۸

۳۰) شکل روبرو مجموعه جواب‌های کدام یک از معادلات زیر در صفحه است؟



الف) $x^۳ + xy + y^۳ = ۴$

ب) $\operatorname{Cos} x + x^۲ + y^۲ + y = ۲$

ج) $x^۲y^۳ + xy^۲ + y = ۱$

د) $x^۴ + y^۴ = ۲y - x + ۱$

ه) $\operatorname{Sin}(x+y) + \operatorname{Sin} x + \operatorname{Sin} y = ۱$

سال ۱۳۸۵

زمان: ۲۴۰ دقیقه

مرحله اول بیست و پنجمین المپیاد ریاضی کشور ☺

ویژه دانش‌آموزان دوم و سوم دبیرستان

۱) A، B و C سه رقم متمایز از بین $\{۰,۱,\ldots,۹\}$ هستند و می‌دانیم که جمع روبه‌رو درست است. $A+B+C$ کدام است؟

$$\begin{array}{r} CAAB \\ +BAA \\ \hline ACBC \end{array}$$

الف) ۷   ب) ۱۶   ج) ۱۹   د) ۲۱   ه) ۲۴

۲) چه تعداد از پاره‌خط‌های بین نقاط زیر، محور xها را قطع می‌کنند؟

۴,۹ , ۱۹,−۱۱ , ۵,۱۵ , −۹,۱ , −۳,−۱ , ۳,۲ , ۵,−۵ , ۱۲,−۷ , ۷,۸ , −۱۵,۶

الف) ۴   ب) ۶   ج) ۱۶   د) ۲۱   ه) ۲۴

۳) مجموع مساحت و محیط مستطیلی ۱۴۰ شده است. مساحت آن حداکثر چه‌قدر است؟

الف) ۱۰۰   ب) ۷۰   ج) ۸۰   د) ۶۰   ه) هیچ کدام

۴) چند عدد چهاررقمی به شکل $\overline{abab}$ وجود دارد که دقیقاً چهارده مقسوم‌علیه داشته باشد؟

الف) ۱   ب) ۲   ج) ۳   د) ۴   ه) چنین عددی وجود ندارد.

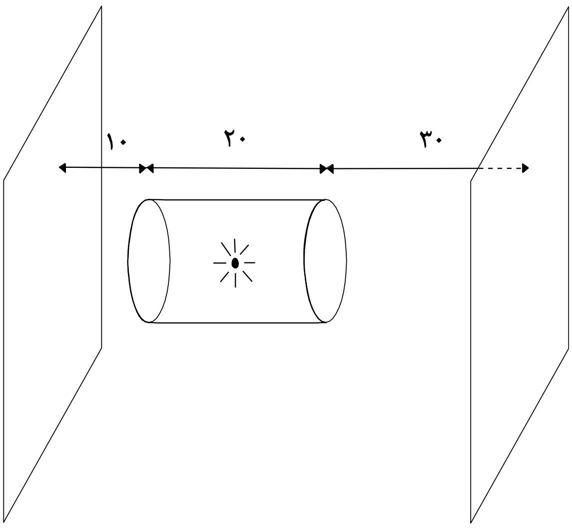
۵) چند عدد سه رقمی وجود دارد که هیچ دو رقم متوالی آن یکی نباشد؟

الف) ۶۴۸   ب) ۷۲۰   ج) ۷۲۹   د) ۸۱۰   ه) ۹۰۰

۶) چند خط در صفحه وجود دارد که یک مستطیل ۵×۲ داده‌شده را به دو مستطیل متشابه تقسیم کند؟

الف) ۱   ب) ۲   ج) ۳   د) ۴   ه) ۵

۷) وسط لوله‌ای استوانه‌ای شکل به طول ۲۰ سانتی‌متر لامپی روشن است. در دو طرف لوله دو پرده به فاصله‌های ۳۰ و ۱۰ سانتی‌متر قرار گرفته است. نسبت مساحت ناحیه‌های روشن روی دو پرده چند است؟



الف) ۳   ب) ۴   ج) ۶   د) ۸   ه) ۹

۸) در یک امتحان تستی ۳۰ سؤالی، هر پاسخ صحیح چهار نمره و هر پاسخ غلط یک نمره منفی دارد. اگر نمره یکی از شرکت‌کنندگان ۸۹ باشد، او چند سؤال را بدون پاسخ رها کرده است؟

الف) ۳   ب) ۴   ج) ۵   د) ۶   ه) ۷

مرحله اول بیست و پنجمین المپیاد ریاضی کشور

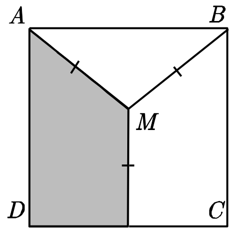
ویژه دانش‌آموزان دوم و سوم دبیرستان

۹) حجم هشت‌وجهی‌ای که رأس‌هایش مرکزهای وجه‌های مکعبی به ضلع یک است، چند است؟

الف) $\frac{۱}{۲}$ ب) $\frac{۱}{۳}$ ج) $\frac{۱}{۶}$ د) $\frac{۱}{۸}$ ه) $\frac{۱}{۱۲}$

۱۰) کدام عدد در غربال اراتستن، برای مشخص کردن اعداد اول کوچک‌تر از ۵۰۰۰، دیرتر حذف می‌شود؟

الف) ۳۲۵۶   ب) ۴۱۴۱   ج) ۳۵۵۳   د) ۳۸۰۱   ه) ۴۱۴۵



۱۱) در شکل روبه‌رو ضلع مربع $ABCD$، یک است و نقطه M از رأس A، رأس B و ضلع DC به یک فاصله است. مساحت چهارضلعی مشخص‌شده چند است؟

الف) $\frac{۱}{۳}$ ب) $\frac{۲}{۵}$ ج) $\frac{۱۳}{۳۰}$ د) $\frac{۱۳}{۳۲}$ ه) $\frac{۷}{۱۵}$

۱۲) فرض کنید $x,y,z \in \left[-۱,۱\right]$ و $x+y+z=۰$. بیش‌ترین مقدار ممکن xyz چند است؟

الف) $\frac{۱}{۲۷}$ ب) $\frac{۱}{۸}$ ج) $\frac{۱}{۴}$ د) $\frac{۱}{۲}$ ه) ۱

۱۳) $۲^{۲^{۵}}-۱$ برابر کدام گزینه است؟

الف) ۴۲۹۴۹۶۹۲۸۵   ب) ۴۲۹۴۹۶۴۱۵۵   ج) ۴۲۹۴۹۶۳۳۳۵   د) ۴۲۹۴۹۶۸۰۱۵   ه) ۴۲۹۴۹۶۷۲۹۵

۱۴) به چند شکل می‌توان وجوه یک مکعب را با دو رنگ قرمز و آبی رنگ کرد به طوری که از هر دو رنگ استفاده شود؟ دو رنگ‌آمیزی را که با دوران مکعب به هم تبدیل می‌شوند یکی فرض کنید.

الف) ۸   ب) ۱۰   ج) ۱۲   د) ۱۶   ه) ۳۲

۱۵) مثلثی با اضلاع ۳، ۴ و ۵ مفروض است. کم‌ترین مقدار ممکن برای مجموع فاصله‌های یک نقطه درون آن مثلث با اضلاع آن چند است؟

الف) $\frac{۷}{۲}$ ب) $\frac{۱۲}{۵}$ ج) $\frac{۶}{۵}$ د) $\frac{۱۰}{۳}$ ه) ۳

۱۶) A، B، C و D مجموعه‌هایی هستند که در روابط روبه‌رو صدق می‌کنند. کدام گزینه لزوماً درست است؟

$$\begin{cases} A\cup C = B\cup C \\ A\cap C = \ \ B\cap C \ \ \cup D \end{cases}$$

الف) $D=\varnothing$ ب) $C=D$ ج) $A\subseteq B$

د) $A=B\cup D$ ه) $D=A\cap B$

مرحله اول بیست و پنجمین المپیاد ریاضی کشور ☺

ویژه دانش‌آموزان دوم و سوم دبیرستان

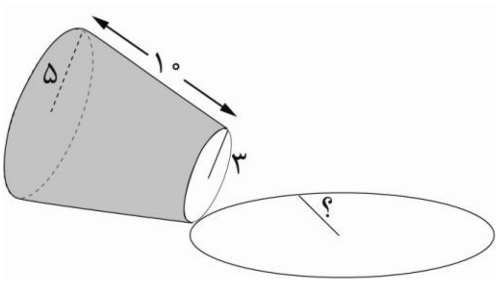
۱۷) A ماتریسی ۱۰×۱۰ است که درایه‌هایش صفر یا یک هستند. می‌دانیم $A^۲ = ۰$. ماتریس A حداکثر چند یک دارد؟

الف) ۰   ب) ۱   ج) ۹   د) ۲۵   ه) ۴۵

۱۸) به چند راه می‌توان ۱۱ خانه جدولی ۱۲×۲ را سیاه کرد که دو خانه سیاه، ضلع مشترک نداشته نباشند؟

الف) ۴۲   ب) ۴۴   ج) ۴۶   د) ۴۸   ه) ۵۰

۱۹) مخروط ناقصی به شکل روبه‌رو روی زمین می‌غلطد و به جای اولیه‌اش بر می‌گردد. اگر شعاع قاعده‌های مخروط، ۳ و ۵ و طول یال آن ۱۰ باشد، شعاع دایره‌ای که قاعده کوچک‌تر مخروط طی می‌کند چه‌قدر است؟



الف) ۳   ب) ۵   ج) ۱۰   د) ۱۵   ه) ۲۰

۲۰) معادله $\sin^۲(۲۴x) + \sin^۲(۳۲x) = ۰$ در بازه $[۰, \pi]$ چند جواب دارد؟

الف) ۷   ب) ۸   ج) ۹   د) ۱۰   ه) ۱۱

۲۱) $۳^{۴۰}$ در مبنای ده چند رقمی است؟

الف) ۱۷   ب) ۱۸   ج) ۱۹   د) ۲۰   ه) ۲۱

۲۲) فاصله نقطه‌ای روی دایره محاطی یک مربع، از دو ضلع نزدیک‌تر مربع برابر ۱ و ۲ است. طول ضلع مربع چند است؟ (دایره‌ای محاطی دایره‌ای است که از داخل بر اضلاع مربع مماس است.)

الف) ۵   ب) ۶   ج) ۸   د) ۱۰   ه) ۱۱

۲۳) تعداد جواب‌های معادله $x^۲ + x + ۸ = y^۲$ در مجموعه اعداد طبیعی چند است؟

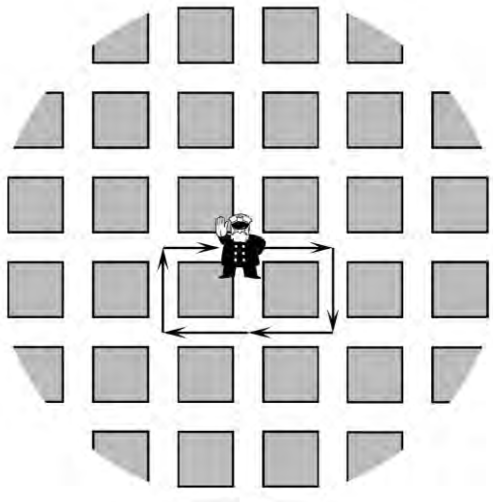
الف) ۰   ب) ۱   ج) ۲   د) ۳   ه) ۴

۲۴) در اتاقی ۵×۵ حداکثر چند کاشی ۳×۱ می‌توان قرار داد؟

الف) ۵   ب) ۶   ج) ۷   د) ۸   ه) ۹

۲۵) A و B دو ماتریس هستند که $AB = B$ و $BA = A$. کدام گزینه برابر $(A+B)^۲$ است؟

الف) $۲A^۲ + ۲A$ ب) $۴A^۲$ ج) $۴A$ د) $۲(A+B)$ ه) $A^۲ + ۲AB + B^۲$



۲۶) پاسبانی می‌خواهد با شروع از تقاطعی که کلانتری در نبشش واقع شده است، یک ساعت در خیابان‌ها قدم بزند و در نهایت به کلانتری برگردد. اگر خیابان‌ها به شکل یک شبکه مربعی، مانند تصویر روبه‌رو، باشد و طی کردن هر خیابان ده دقیقه طول بکشد، این کار به چند طریق ممکن است؟ پاسبان تنها سر تقاطع ممکن است مسیرش را تغییر دهد و ممکن است از جلوی کلانتری و یا از یک خیابان چند بار عبور کند.

الف) ۶۴ ب) ۳۶۰ ج) ۴۰۰
د)۱۲۹۶ ه) ۴۰۹۶

۲۷) برای کدام عدد طبیعی n هیچ کدام از اعداد $n, ۲n, ۳n, \ldots, ۱۰۰۰n$ مربع کامل نیست؟

الف) ۱۷۸۵۰ ب) ۸۶۴۹ ج) ۳۲۹۲ د) ۲۶۰۷ ه) ۲۰۳۶

۲۸) معادله $\left[x^۳\right] = x^۲$ چند جواب دارد؟ ($[x]$ یعنی بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر یا مساوی x)

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ ه) بی‌نهایت

۲۹) یک مستطیل کاغذی به طول ۵ و عرض ۱ را به گونه‌ای تا می‌کنیم که دو سر یک قطر آن روی هم قرار گیرند. مساحت ناحیه یک‌لایه چقدر است؟

الف) ۰ ب) $\frac{۵}{۲}$ ج) ۲ د) $\frac{۶}{۵}$ ه) $\frac{۱۲}{۵}$

۳۰) در مسابقات کشتی پهلوانی ۹ نفر دوبه‌دو مسابقه داده‌اند. حداکثر چند نفر بیش از ۴ مسابقه را برده‌اند؟

الف) ۴ ب) ۵ ج) ۶ د) ۷ ه) ۸

سال ۱۳۸۶

زمان: ۲۷۰ دقیقه

۱. همه‌ی زاویه‌های مثلثی از ۵۹ درجه بزرگ‌ترند. کدام گزینه درباره‌ی این مثلث همواره صحیح است؟

۱) یک زاویه‌ی منفرجه دارد. ۲) یک زاویه‌ی ۶۰ درجه دارد. ۳) قائم‌الزاویه است.

۴) متساوی‌الاضلاع است. ۵) همه‌ی زاویه‌هایش از ۶۲ درجه کوچک‌ترند.

۲. چند عدد طبیعی وجود دارد که عامل اول بیش از ۱۵ نداشته باشد و بر هیچ عدد مکعب کامل بزرگ‌تر از یک بخش‌پذیر نباشد.

۱) ۶۴ ۲) ۷۲۰ ۳) ۷۲۹ ۴) ۲۱۸۷ ۵) ۴۰۹۶

۳. معادله‌ی $|\,-۲\,|\,|a| + ۳\,|| = ۱$ چند جواب حقیقی دارد؟

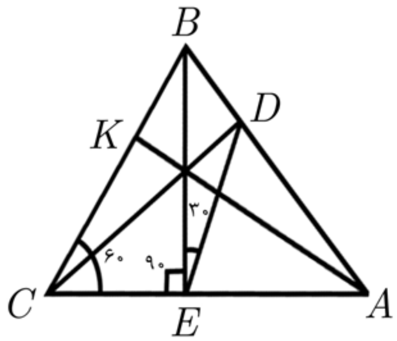
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۸ ۵) جواب ندارد.

۴. مجموع ارقام کوچک‌ترین عددی که حاصل‌ضرب ارقام آن برابر ۱۰۰۰ است، چیست؟

۱) ۱۴ ۲) ۲۱ ۳) ۲۳ ۴) ۲۶ ۵) ۳۰

۵. در شکل روبه‌رو BE بر AC عمود است. اگر $\angle BED = ۳۰^\circ$ و $\angle ACB = ۶۰^\circ$ باشد، نسبت BK به BC چند است؟ (شکل دقیق نیست.)

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$ ۵) $\frac{۱}{۲}$

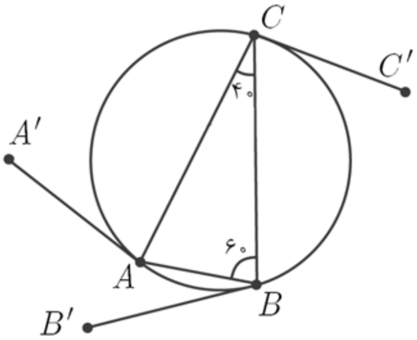


۶. عددی دو رقمی در نظر بگیرید. حاصل‌ضرب ارقامش را محاسبه کنید. برای عدد به‌دست‌آمده همین کار را انجام دهید و این کار را آن‌قدر تکرار کنید تا به عددی یک‌رقمی برسید. با شروع از چند عدد دورقمی به عدد ۲ می‌رسید؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸ ۵) ۱۰

۷. تمام اعداد طبیعی ۵ رقمی که شامل ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ و بدون رقم تکراری هستند را از کوچک به بزرگ مرتب کرده‌ایم. ۳۲۴۵۱ چندمین عدد است؟

۱) ۴۶ ۲) ۴۹ ۳) ۵۲ ۴) ۵۵ ۵) ۵۸



۸. در مثلث ABC، $\hat{B} = ۶۰^\circ$ و $\hat{C} = ۴۰^\circ$. AA'، BB' و CC' هم‌طول و در یک جهت بر دایره محیطی ABC مماسند. زاویه‌ی $\angle B'A'C'$ چند درجه است؟ (شکل دقیق نیست.)

۱) ۳۰   ۲) ۴۰   ۳) ۶۰

۴) ۸۰   ۵) ۱۲۰

۹. عددی طبیعی را مثلثی گوییم هر گاه بتوان به ازای یک عدد طبیعی n آن را به صورت $\frac{n(n+۱)}{۲}$ نوشت. چند زوج (a,b) از اعداد مثلثی وجود دارد که $a-b = ۱۰۱$؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴   ۵) ۵

۱۰. بزرگ‌ترین ضریب در بسط دوجمله‌ای $(۱+x)^{۱۰۰}$ چند رقم دارد؟

۱) کم‌تر از ۱۵   ۲) بین ۱۵ تا ۲۵   ۳) بین ۲۵ تا ۳۵   ۴) بین ۳۵ تا ۴۵   ۵) بیش‌تر از ۴۵

۱۱. یک عدد اول را «بسیار اول» گوییم اگر هر قطعه از ارقام متوالی آن نیز عددی اول به وجود آورند. اعداد بسیار اول دورقمی عبارتند از ۲۳، ۳۷، ۵۳ و ۷۳. چند عدد سه‌رقمی بسیار اول وجود دارد؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴   ۵) ۵

۱۲. مجلس هشتم ۲۸۵ کرسی دارد. اگر سه حزب در انتخابات شرکت کنند به چند حالت ممکن است هیچ حزبی اکثریت مطلق را به دست نیاورد؟ (یعنی تعداد نماینده‌گان منتخب از آن حزب بیش از نصف نباشد.)

۱) ۱۰۱۵۳   ۲) ۱۰۲۰۱   ۳) ۱۱۳۲۵   ۴) ۱۱۴۰۰   ۵) ۱۱۷۱۵

۱۳. دستگاه معادلات روبه‌رو در مجموعه‌ی اعداد حقیقی چند جواب دارد؟

$$\begin{cases} x-۱ = yz \\ y-۱ = zx \\ z-۱ = xy \end{cases}$$

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴   ۵) جواب ندارد.

۱۴. به چند طریق می‌توان ۵ مهره سیاه و ۵ مهره سفید را در یک ردیف قرار داد که دقیقاً سه بلوک سیاه داشته باشد؟ یک بلوک سیاه چند مهره‌ی سیاه کنار هم است که در دو طرف آن‌ها مهره‌ی سیاه دیگری نباشد.

مثلاً آرایش روبه‌رو دو بلوک سفید و سه بلوک سیاه دارد.

۱) ۵۴ ۲) ۱۲۰ ۳) ۲۰۰ ۴) ۴۰۰ ۵) ۵۴۰

۱۵. بیش‌ترین تعداد عامل ۲ در مجموع پنج عدد طبیعی که ضرب آن‌ها $۲^{۱۳۸۶}$ باشد چند است؟

۱) ۲۷۶ ۲) ۲۷۷ ۳) ۲۷۸ ۴) ۲۷۹ ۵) ۲۸۰

۱۶. نقطه‌ی A روی دایره‌ی C ثابت است و نقطه‌های M و N طوری روی دایره حرکت می‌کنند که مقدار زاویه‌ی $\angle MAN$ همواره ۳۳ درجه است. کدام گزینه صحیح است؟

۱) همه‌ی خطوط MN از نقطه‌ی ثابتی می‌گذرند.
۲) همه‌ی خطوط MN به دایره‌ی ثابتی مماس هستند.
۳) تفاضل طول AM و AN مقداری ثابت است.
۴) نسبت طول AM و AN مقداری ثابت است.
۵) اندازه‌ی شعاع دایره‌ی محاطی مثلث AMN عددی ثابت است.

۱۷. بیش‌ترین مقدار $ab+bc+cd$ برای $a,b,c,d \geq ۰$ با شرط $a+b+c+d=۱$ چند است؟

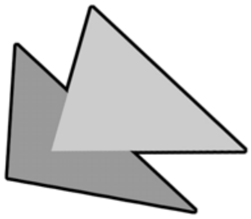
۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۲}{۹}$ ۵) $\frac{۳}{۱۶}$

۱۸. الاغی می‌خواهد از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B برود ولی دقیقاً در وسط راه دریاچه‌ای دایره‌ای شکل به قطر دو کیلومتر قرار دارد. اگر فاصله‌ی A و B چهار کیلومتر باشد کوتاه‌ترین مسیر چند کیلومتر است؟

۱) $\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$ ۲) $۲+\pi$ ۳) ۵ ۴) $۲\sqrt{۳}+\frac{\pi}{۳}$ ۵) ۶

۱۹. تعداد مثلث‌های غیرهم‌نهشت که رئوسشان از بین رئوس ده‌ضلعی منتظم انتخاب شده باشند برابر است با

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹ ۵) ۱۰



۲۰. دو مثلث کاغذی را روی هم قرار می‌دهیم. مرز بیرونی شکلی که به وجود می‌آید چند ضلع نمی‌تواند داشته باشد؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱ ۵) ۱۲

۲۱. شش جعبه خالی با اندازه‌های مختلف داریم. ابعاد جعبه‌ها طوری است که درون هر جعبه می‌توان همه‌ی جعبه‌های کوچک‌تر از آن را، جدا از هم، جا داد. به چند طریق می‌توان این جعبه‌ها را درون بزرگ‌ترین جعبه جاسازی کرد؟ (توجه کنید که می‌شود بعضی از جعبه‌ها را درون بعضی دیگر قرار داد.)

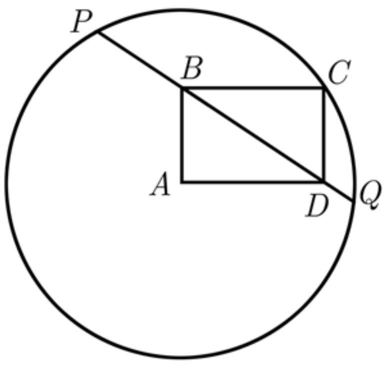
۱) ۶۴ ۲) ۱۲۰ ۳) ۱۲۸ ۴) ۲۰۰ ۵) ۲۴۰

۲۲. فرض کنید $f(x) = ax + b$. اگر $f(۰) \le ۲$، $f(۱) \ge ۰$ و $f(۲) \le ۴$، بیش‌ترین مقدار ممکن برای $f(۱۰)$ چند است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۲۰ ۴) ۳۶ ۵) ۴۰

۲۳. مساحت بزرگ‌ترین مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در مربع به ضلع یک چقدر است؟

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $\frac{۴\sqrt{۳}}{۷+۴\sqrt{۳}}$ ۴) $۲۵\sqrt{۳} - ۴۸$ ۵) $\frac{\sqrt{۳}}{۲+\sqrt{۳}}$



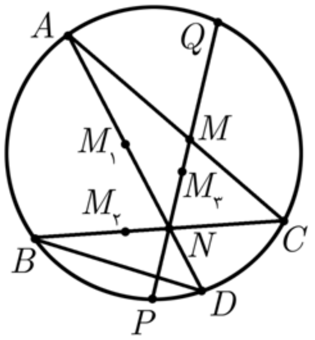
۲۴. فرض کنید $ABCD$ مستطیلی ۲×۱ باشد. دایره‌ای به مرکز A و شعاع AC رسم می‌کنیم. اگر امتداد BD دایره را در نقاط P و Q قطع کند طول PQ چقدر است؟

۱) $\sqrt{\frac{۸۴}{۵}}$ ۲) $\sqrt{\frac{۳۵}{۲}}$ ۳) $\sqrt{\frac{۹۲}{۵}}$

۴) $\sqrt{۶\pi}$ ۵) $\sqrt{۲۰}$

۲۵. معادله‌ی $y^۲ = ۲x^۲ + ۲^x$ در اعداد صحیح چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۶ ۵) جواب ندارد.



۲۶. در شکل روبه‌رو $M_۱$، $M_۲$، $M_۳$ و M، به ترتیب، وسط AD، BC، PQ و CA هستند و $\angle ANQ = ۴۰^\circ$. زاویه‌ی بین دو خط گذرنده از $M_۱M_۲$ و $M_۲M_۳$ چند درجه است؟ (شکل دقیق نیست.)

۱) ۲۰ ۲) ۴۰ ۳) ۵۰ ۴) ۶۰ ۵) ۸۰

۲۷. a عددی طبیعی بزرگ‌تر از ۱۰ و x_n رقم دهگان a^n است. بسط اعشاری $۰/x_۱x_۲x_۳\ldots$

۱) به ازای هر a متناوب ساده است. ۲) به ازای هر a متناوب مرکب است.

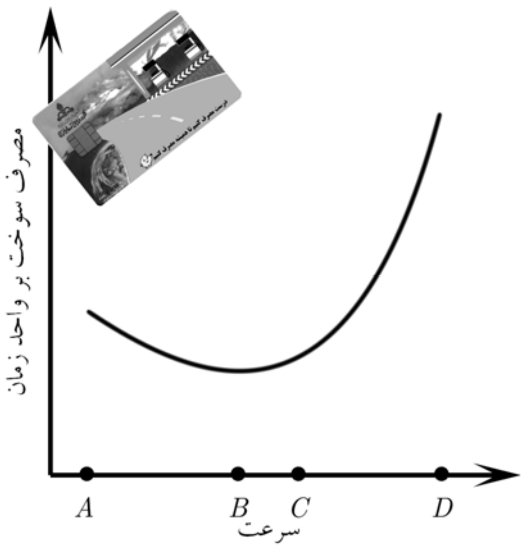
۳) به ازای هر a نامتناوب است. ۴) برای بعضی از مقادیر a متناوب و برای بعضی نامتناوب است.

۵) برای بعضی از مقادیر a متناوب ساده و برای بعضی متناوب مرکب است.

۲۸. به هر وجه و هر رأس یک مکعب عددی طبیعی نسبت داده‌ایم. می‌دانیم عدد هر رأس برابر ضرب اعداد سه وجه مجاورش است. مجموع اعداد رئوس ۲۳۱ است. مجموع اعداد وجوه چند است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۷ ۳) ۲۱ ۴) ۳۰ ۵) اطلاعات ناقص است.

۲۹. نمودار مقابل مصرف سوخت در واحد زمان یک خودرو را بر حسب سرعت آن نشان می‌دهد. اگر بخواهیم با سرعت ثابت از زنجان به قزوین برویم با چه سرعتی کل سوخت مصرف‌شده کم‌تر است؟



۱) کم‌ترین سرعت ممکن یعنی A ۲) B

۳) بیش‌ترین سرعت ممکن یعنی D ۴) C

۵) بستگی به فاصله‌ی زنجان و قزوین دارد.

۳۰. چند سه‌تایی (A, B, C) از زیرمجموعه‌های $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ داریم که $A \cap B \subseteq C \subseteq A \cup B$ ؟

۱) ۷۵۰۰ ۲) ۷۶۵۵ ۳) ۷۶۵۶ ۴) ۷۷۰۰ ۵) ۷۷۷۶

سال ۱۳۸۷

زمان: ۲۷۰ دقیقه

آزمون مرحله‌ی اول بیست و هفتمین
المپیاد ریاضی کشور

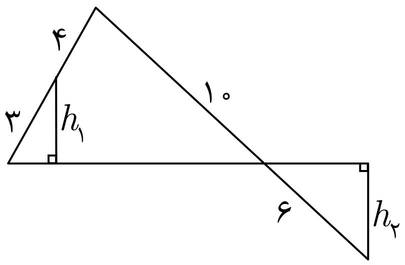
$$\begin{array}{r} ^{۲\ ۲\ ۸} \\ **** \\ \times \quad ۹ \\ \hline ۱*۰** \end{array}$$

۱. ارقام ستاره‌دار در حاصل‌ضرب روبه‌رو نامعلوم‌اند و لزوماً برابر نیستند. مجموع ارقام حاصل‌ضرب چه‌قدر است؟ (اعداد کوچک سطر بالا از ده بر یک حاصل شده‌اند.)

الف) ۵ ب) ۹ ج) ۱۸ د) ۲۷ ه) ۳۶

۲. چند سه‌تایی (a,b,c) از اعداد طبیعی وجود دارد که کوچک‌ترین مضرب مشترک a، b و c برابر ۷۰۰۰ باشد؟

الف) ۱۰۰۸ ب) ۲۱۸۷ ج) ۵۱۰۳ د) ۵۴۸۸ ه) ۹۵۸۳



۳. در شکل روبه‌رو، نسبت $h_۲$ به $h_۱$ چه‌قدر است؟

الف) ۰٫۸ ب) ۱ ج) ۱٫۲ د) ۱٫۴ ه) ۲

۴. طول سه میانه‌ی مثلثی، ۵، ۵ و ۸ سانتی‌متر است. کوتاه‌ترین ضلع مثلث چند سانتی‌متر است؟

الف) ۲ ب) $۳\sqrt{۷}$ ج) $\frac{\sqrt{۸۹}}{۳}$ د) $\frac{۲}{۳}$ ه) ۴

۵. در بسط $(۱ + x^۳ + x^۶)^{۵۰}$ چند جمله با ضریب ناصفر وجود دارد؟

الف) ۵۱ ب) ۱۰۱ ج) ۱۵۱ د) ۲۰۱ ه) ۳۰۱

۶. تعداد مقسوم‌علیه‌های $۲۰۰۸ \times (۱۳۸۷! + ۱۴۳۰)$ چند برابر تعداد مقسوم‌علیه‌های $۱۳۸۷! + ۱۴۳۰$ است؟

الف) ۴ ب) ۵ ج) ۸ د) ۱۰ ه) ۲۰۰

۷. چند عدد پنج رقمی با ارقام ۱ تا ۵ وجود دارد که ارقام آن متمایز باشد و مجموع رقم اول و رقم پنجم آن با مجموع رقم دوم و رقم چهارم آن برابر باشد؟

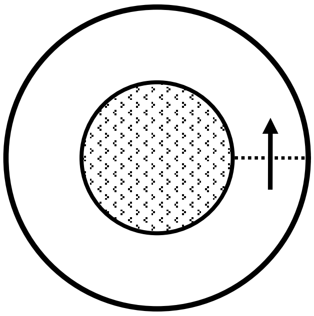
الف) ۸ ب) ۱۲ ج) ۱۶ د) ۲۴ ه) ۳۶

آزمون مرحله‌ی اول بیست و هفتمین المپیاد ریاضی کشور ☺

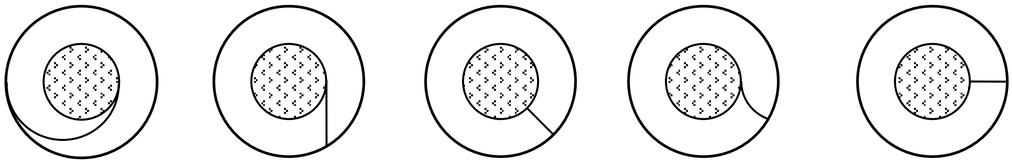
۸. ده نفر، با شماره‌های یک تا ده، به ترتیب در جهت حرکت عقربه‌های ساعت دور میزی نشسته‌اند. در ابتدا هر کس ۱۰۰ مهره دارد. با شروع از نفر شماره یک، هر نفر ۲ مهره از نفر سمت راست خود می‌گیرد و ۱ مهره به نفر سمت چپ خود می‌دهد و نوبت به نفر سمت چپ منتقل می‌شود. پس از انجام ۸۷ مرحله، نفر هشتم چند مهره خواهد داشت؟

الف) ۹۸   ب) ۹۹   ج) ۱۰۰   د) ۱۰۱   ه) ۱۰۲

۹. در پیست دایره‌ای روبه‌رو، دونده‌ها روی دایره‌های متحدالمرکز می‌دوند. خط شروع مسابقه و جهت حرکت در شکل مشخص شده است. نقطه‌ی پایان مسابقه روی کدام یک از خم‌های زیر باشد تا طول مسیری که دونده‌های مختلف تا رسیدن به خط پایان طی می‌کنند، با هم برابر باشد؟



الف)   ب)   ج)   د)   ه)



۱۰. برای دو عدد مثبت a و b، M و G را به ترتیب میانگین حسابی ($\frac{a+b}{۲}$) و میانگین هندسی ($\sqrt{ab}$) در نظر می‌گیریم. کوچک‌ترین عدد k را بیابید که نابرابری زیر برای هر a و b حقیقی مثبت برقرار باشد.

$$\left|M-G\right| \leq k\left|a-b\right|$$

الف) $\frac{۱}{۶}$ ب) $\frac{۱}{۴}$ ج) $\frac{۱}{۳}$ د) $\frac{۱}{۲}$ ه) ۱

۱۱. کاغذی مربع شکل را از روی قطر آن تا می‌کنیم تا یک مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین به دست آید. سپس مثلث را از روی محور تقارن آن تا می‌کنیم و مثلث دیگری به دست می‌آوریم و این کار را ۱۱ بار انجام می‌دهیم. سپس دو گوشه‌ی غیر قائمه‌ی مثلث حاصل را می‌بریم. اکنون اگر کاغذ را باز کنیم، چند سوراخ در آن می‌بینیم؟ (توجه کنید که در مجموع، ۱۲ بار عمل تا کردن انجام شده است.)

الف) ۸۴۱   ب) ۹۰۰   ج) ۹۶۱   د) ۱۰۲۴   ه) ۱۰۸۹

آزمون مرحله‌ی اول بیست و هفتمین المپیاد ریاضی کشور ☺

۱۲. هرمی مربع‌القاعده در نظر بگیرید که وجوه جانبی آن مثلث‌های متساوی‌الاضلاع به ضلع ۱ هستند. طول ضلع بزرگ‌ترین مکعبی که در این هرم جا می‌شود چه‌قدر است؟

الف) $\sqrt{۲}-۱$ ب) $۲-\sqrt{۳}$ ج) $۲\sqrt{۳}-۳$

د) $\sqrt{۳}-۱$ ه) $۲-\sqrt{۲}+۲\sqrt{۲-\sqrt{۲}}$

۱۳. دو ماتریس A و B را هم‌توان گوییم اگر اعداد طبیعی m و n وجود داشته باشند که $A^m = B^n$. کدام گزینه نادرست است؟

الف) اگر A و B هم‌توان و B و C هم‌توان باشند، آن‌گاه A و C نیز هم‌توان‌اند.

ب) اگر A و I هم‌توان باشند، آن‌گاه A وارون‌پذیر است.

ج) $\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & -۱ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ هم‌توان‌اند.

د) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ هم‌توان‌اند.

ه) $\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$ هم‌توان‌اند.

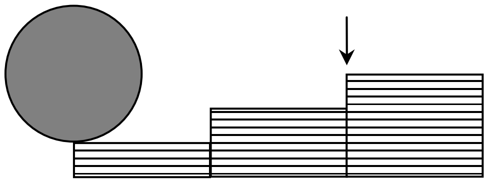
۱۴. چند سه‌تایی (a,b,c) از اعداد تک‌رقمی ناصفر وجود دارد که $b \neq c$ و مجموعه‌ی ارقام دو عدد $a\times b$ و $a\times c$ یک‌سان باشند؟

الف) ۴   ب) ۶   ج) ۸   د) ۱۰   ه) ۱۲

۱۵. شانزده نقطه در یک شبکه‌ی مربعی ۴×۴ قرار گرفته‌اند. از این نقاط حداکثر چند نقطه می‌توان انتخاب کرد که هیچ سه تایی هم‌خط نباشند؟

الف) ۶   ب) ۷   ج) ۸   د) ۹   ه) ۱۰

۱۶. چرخی به شعاع یک متر در ابتدای پلکانی قرار دارد که ارتفاع هر پله‌ی آن نیم متر و طول هر پله‌ی آن ۲ متر است. وقتی چرخ از دو پله بالا رفت، در ابتدای پله، چند رادیان چرخیده است؟



الف) ۵   ب) $۲+\pi$ ج) $۲+\frac{۴}{۳}\pi$ د) $۲-\sqrt{۳}+\frac{\pi}{۳}$ ه) $۴-\sqrt{۳}+\frac{۲}{۳}\pi$

۱۷. $x_{۱},\ldots,x_{۱۰}$ جواب دستگاه معادله‌ی روبه‌رو است. $x_{۵}$ چند است؟

$$\begin{cases} x_{۱}+x_{۳}=۲x_{۲}\\ x_{۲}+x_{۴}=۲x_{۳}\\ \quad\vdots\\ x_{۸}+x_{۱۰}=۲x_{۹}\\ x_{۹}+x_{۱}=۲۲\\ x_{۱۰}+x_{۲}=۲۶ \end{cases}$$

الف) ۰ ب) ۵ ج) ۹ د) ۱۱ ه) ۱۶

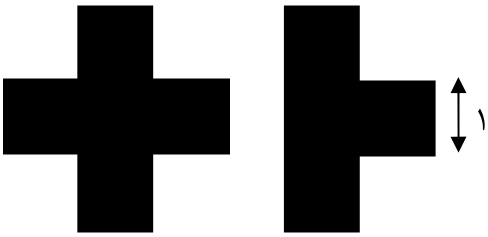
۱۸. یک جدول ۸×۸ که هر خانه‌ی آن مربعی به ضلع یک است در نظر بگیرید. مجموع مساحت همه‌ی مستطیل‌هایی که اضلاع آن‌ها در این جدول دیده می‌شود چند است؟

الف) ۱۲۹۶ ب) ۴۰۹۶ ج) ۱۴۴۰۰ د) ۱۶۴۰۰ ه) ۲۴۳۸۴

۱۹. سه رقم سمت راست $۲۱^{۶۴}$ کدام است؟

الف) ۶۸۱ ب) ۸۸۱ ج) ۴۸۱ د) ۲۲۱ ه) ۳۸۱

۲۰. جسمی سه بعدی را بر روی صفحات $x-y$ و $y-z$ تصویر کرده‌ایم و دو شکل روبه‌رو به دست آمده است. حداکثر حجمی که جسم سه بعدی می‌تواند داشته باشد، چه‌قدر است؟



الف) ۶ ب) ۸ ج) ۹ د) ۱۲ ه) ۲۰

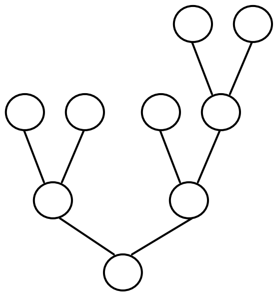
۲۱. نمودار تابع $y=x^{۳}$ را نسبت به خط $y+۵x=۰$ قرینه می‌کنیم. در مورد شکل حاصل کدام درست است؟

الف) نمودار یک تابع پوشا است.
ب) نمودار یک تابع یک به یک است.
ج) نمودار یک تابع صعودی است.
د) نمودار یک تابع نزولی است.
ه) نمودار یک تابع نیست.

۲۲. مجموع ارقام کدام یک از اعداد زیر بیش‌تر است؟

الف) $۲۰+۲^{۱۰۰}$ ب) $۱۲+۲^{۱۰۰}$ ج) $۸+۲^{۱۰۰}$ د) $۴+۲^{۱۰۰}$ ه) $۲^{۱۰۰}$

آزمون مرحله‌ی اول بیست و هفتمین المپیاد ریاضی کشور ☺



۲۳. به چند طریق می‌توان اعداد ۱ تا ۹ را ، بدون تکرار، در دایره‌های شکل روبه‌رو قرار داد به طوری که عدد هر دایره از دو عددی که در بالای آن قرار دارد کم‌تر باشد؟

الف) ۱۶ ب) ۹۶ ج) ۴۴۸ د) ۸۹۶ ه) ۳۶۲۸۸۰

۲۴. معادله‌ی $۲^{b-a} + a = b^{۲}$ در اعداد صحیح نامنفی چند جواب دارد؟

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۴ ه) بی‌نهایت

۲۵. مثلث به رأس‌های A ، B و C دارای این خاصیت است که فواصل رأس‌های آن تا نقطه‌ی ثابت P، به ترتیب، برابر با ۷، ۱۰ و ۱۴ است و در بین مثلث‌های با این خاصیت، بیش‌ترین مساحت را دارد. نسبت فاصله‌ی P از ضلع AB به فاصله‌ی P از ضلع BC، چه‌قدر است؟

الف) ۱ ب) $\frac{۱}{۲}$ ج) ۲ د) $\frac{۲}{۳}$ ه) $\frac{۷}{۱۰}$

۲۶. x و y و z جواب دستگاه معادله‌ی روبه‌رو در بازه‌ی $(-\pi,\pi]$ هستند. $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}$ کدام گزینه است؟

$$\begin{cases} \sin x + \sin y + \sin z = ۰ \\ \cos x + \cos y + \cos z = ۰ \\ x + y + z = ۰ \end{cases}$$

الف) ۰ ب) $\frac{\pi^{۲}}{۴}$ ج) $\frac{۳\pi^{۲}}{۴}$ د) $\frac{۸\pi^{۲}}{۹}$ ه) $\frac{۲۷\pi^{۲}}{۴}$

۲۷. زیرمجموعه‌های $A_۰, A_۱, A_۲, \ldots$ از اعداد طبیعی به صورت روبه‌رو تعریف شده‌اند. کدام یک از اعداد زیر عضو $A_{۱۰۰}$ نیست؟ (توجه کنید که $A\Delta B = (A-B)\cup(B-A)$.)

$$\begin{cases} A_۰ = \varnothing, A_۱ = \{۱\} \\ A_n = (A_{n-۱}\Delta A_{n-۲}) \cup \{n\} \end{cases}$$

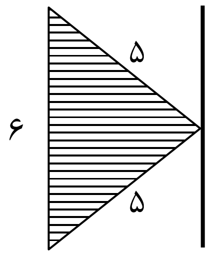
الف) ۶۹ ب) ۷۰ ج) ۷۱ د) ۷۲ ه) ۷۳

آزمون مرحله‌ی اول بیست و هفتمین ☺
المپیاد ریاضی کشور

۲۸. چراغ‌قوه‌ای داریم که به دو باتری نیاز دارد. پنج باتری در اختیار داریم که دقیقاً سه تای آن‌ها سالم است. با دست‌کم چند بار امتحان کردن می‌توانیم حتماً چراغ‌قوه را روشن کنیم؟ (آخرین باری که چراغ‌قوه روشن می‌شود نیز یک بار امتحان کردن محسوب می‌شود.)

الف) ۳ ب) ۴ ج) ۵ د) ۶ ه) ۷

۲۹. مثلث متساوی‌الساقینی با قاعده‌ی ۶ و طول ساق‌های ۵ را حول محوری که از رأس آن می‌گذرد و موازی قاعده‌ی آن است دوران می‌دهیم. حجم شکل حاصل چه‌قدر است؟



الف) ۱۲π ب) ۴۸π ج) ۶۴π د) ۷۲π ه) ۹۶π

۳۰. در یک جدول با ۷۲ سطر و ۱۴۰ ستون، مهره‌ای با این قاعده حرکت می‌کند که در هر حرکت ۳۰ واحد به سمت راست و ۲۰ واحد به سمت بالا می‌رود و وقتی به ضلع راست یا ضلع بالای جدول می‌رسد، حرکت را از ضلع مقابل ادامه می‌دهد. مثلاً اگر مهره در خانه‌ی ۱۲۰ افقی و ۷۰ عمودی باشد در حرکت بعد به خانه‌ی ۱۰ افقی و ۱۸ عمودی می‌رود. اگر این مهره از خانه‌ی گوشه‌ی پایین سمت چپ (۱ افقی و ۱ عمودی) شروع به حرکت کند، به چه نسبتی از خانه‌های جدول می‌تواند برسد؟

الف) $\frac{۱}{۸۰}$ ب) $\frac{۱}{۴۰}$ ج) $\frac{۱}{۳۰}$ د) $\frac{۱}{۲۰}$ ه) $\frac{۵}{۱۲}$

سال ۱۳۸۸

زمان: ۲۷۰ دقیقه

☺ آزمون مرحلهٔ اول بیست و هشتمین المپیاد ریاضی کشور

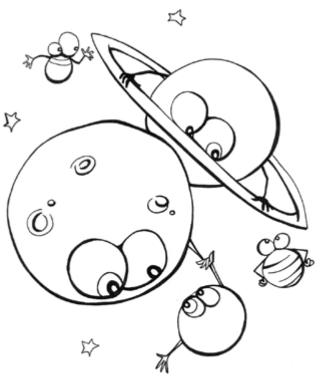
۱. دایره‌ای به شعاع واحد در نظر بگیرید. مساحت این دایره به مساحت چند مثلث متساوی الاضلاع به ضلع واحد نزدیک‌تر است؟

الف) ۶   ب) ۷   ج) ۸   د) ۹   ه) ۱۰

۲. فرض کنید حاصل‌ضرب همهٔ اعداد داخل جدول ضربِ ۱۰×۱۰ برابر n باشد. بزرگ‌ترین عدد m که $\sqrt[m]{n}$ عددی طبیعی باشد چند است؟

الف) ۲   ب) ۱۰   ج) ۱۱   د) ۲۰   ه) ۴۰

۳. دانش‌مندان، منظومه‌ای در کهکشان راه شیری کشف کرده‌اند که دارای یک ستاره، ۹ سیاره و ۱۲۲ قمر است و هر سیارهٔ آن دست‌کم یک قمر دارد. تحقیقات نشان می‌دهد که جرم ستاره برابر $۱٫۹۸ \times ۱۰^{۳۰}\ kg$ است و مجموع جرم سیاره‌ها برابر جرم ستاره و مجموع جرم قمرهای هر سیاره برابر جرم آن سیاره است. میانگین جرم اجرام این منظومه چه‌قدر است؟



الف) $۱٫۵ \times ۱۰^{۲۸}\ kg$ ب) $۴٫۵ \times ۱۰^{۲۸}\ kg$ ج) $۶٫۶ \times ۱۰^{۲۸}\ kg$

د) $۵٫۹۴ \times ۱۰^{۲۸}\ kg$ ه) اطلاعات موجود کافی نیست.

۴. چهار میله به طول‌های ۵، ۳، ۷ و ۴ متر به همین ترتیب به هم لولا شده‌اند و ابتدای میلهٔ اول هم به انتهای میلهٔ چهارم لولا شده است. اگر میله‌ها بتوانند آزادانه در یک صفحه حول لولاهایشان بچرخند، فاصلهٔ لولای بین میله‌های ۵ متری و ۴ متری تا لولای مقابل چند متر می‌تواند باشد؟

الف) هر مقدار بین ۳ و ۸ متر   ب) هر مقدار بین ۲ و ۱۱ متر

ج) هر مقدار بین ۲ و ۸ متر   د) هر مقدار بین ۳ و ۱۱ متر

ه) هر مقدار بین ۲ و ۳ متر و هر مقدار بین ۸ و ۱۱ متر

۵. یک امتحان ۱۰۰ نمره‌ای از دانش‌آموزان دو کلاس الف و ب گرفته شده است. هر کلاس ۵۰ دانش‌آموز دارد. پس از اعلام نتایج، مشخص شد که میانگین نمرات کلاس الف از میانگین نمرات کلاس ب بیش‌تر است. حداکثر چند دانش‌آموز در کلاس ب هستند که نمرهٔ آن‌ها از همهٔ دانش‌آموزان کلاس الف بیش‌تر است؟

الف) ۱   ب) ۲۵   ج) ۴۹   د) ۵۰

ه) امکان ندارد دانش‌آموزی از کلاس ب، نمره‌اش از همهٔ دانش‌آموزان کلاس الف بیش‌تر باشد.

آزمون مرحلهٔ اول بیست و هشتمین المپیاد ریاضی کشور ☺

۶. مهندس ناظر تونل توحید در اولین شنبه بعد از آغاز کار از پروژهٔ تونل توحید بازدید کرده است. از آن روز به بعد برنامهٔ بازدید وی از تونل به این شکل بوده است: فردای همان روز، یعنی یک‌شنبه، از پروژه مجدداً بازدید کرده و در ادامه هر بار یک روز به فاصلهٔ بین بازدیدها اضافه کرده است. صدمین بازدید در چه روزی از هفته انجام شده است؟

الف) شنبه　ب) یک‌شنبه　ج) دوشنبه　د) سه‌شنبه　ه) چهارشنبه

۷. شخصی در اصفهان زندگی می‌کند و می‌خواهد از سه شهر تبریز، مشهد مقدس و یزد دیدن کند و به شهر اصفهان باز گردد به طوری که در هر یک از این سه شهر یک شب بماند. وسایل نقلیه بین این سه شهر اتوبوس، قطار و هواپیما است. اتوبوس و قطار هر روز و هواپیما تنها در روزهای زوج موجود است. اگر این شخص سفر خود را در روز شنبه آغاز کند، به چند حالت می‌تواند این سفر را انجام دهد؟ (توجه کنید که این شخص به هر ترتیبی می‌تواند به این سه شهر سفر کند.)

الف) ۳۶　ب) ۷۲　ج) ۱۰۸　د) ۱۲۰　ه) ۲۱۶

۸. چند عدد ۸ رقمی وجود دارد که حاصل‌ضرب ارقامش ۹۸۰۰ باشد؟

الف) ۱۶۸۰　ب) ۵۰۴۰　ج) ۸۴۰۰　د) ۱۰۰۸۰　ه) ۱۲۰۹۶۰

۹. فرض کنید a عددی گنگ باشد. کدام‌یک از گزاره‌های زیر لزوماً درست است؟

الف) دست‌کم یکی از a^3 و $a^4 - 1$ گنگ است.　ب) دست‌کم یکی از $a^3 - 1$ و a^6 گنگ است.

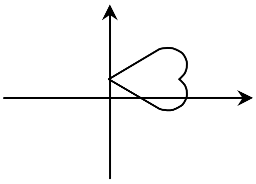
ج) دست‌کم یکی از a^2، a^3 و a^5 گویا است.　د) a^2 و $a^3 - 1$ گنگ هستند.

ه) حداکثر یکی از $a^3 + 1$ و a^4 گنگ است.

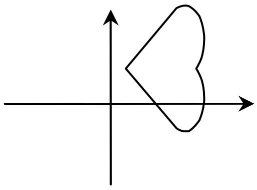
۱۰. تعداد اعداد طبیعی بین ۵۰۰۰ و ۱۰۰۰۰ که عامل اولی به غیر از ۲ و ۳ نداشته باشد چند تاست؟

الف) ۶　ب) ۹　ج) ۱۴　د) ۲۰　ه) ۸۳۳

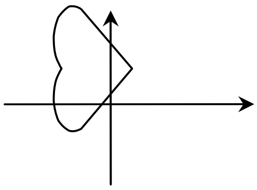
۱۱. $f(x,y)$ تابعی دومتغیره است و شکل روبه‌رو مجموعهٔ نقاط (x,y) در صفحه است که $f(x,y) = 0$. مجموعهٔ نقاط (x,y) که $f(1-x, 2y) = 0$ کدام گزینه است؟



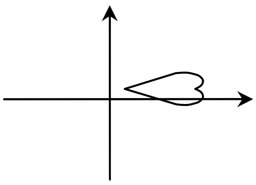
الف)



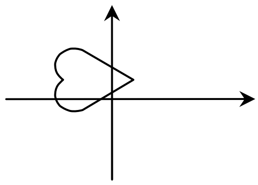
ب)



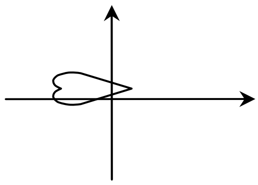
ج)



د)



ه)



۱۲. ظرفی مکعب شکل به ضلع ۶ سانتی‌متر را تا نصفه پر از آب کرده‌ایم. اگر این ظرف را به‌آرامی طوری کج کنیم که یک ضلع کف روی زمین باقی بماند و کف آن با زمین زاویهٔ ۶۰ درجه بسازد، چند سانتی‌متر مکعب آب بیرون می‌ریزد؟

الف) $108 - 36\sqrt{3}$ ب) $216 - 12\sqrt{3}$ ج) $108 - 9\sqrt{3}$

د) $216 - 18\sqrt{3}$ ه) اصلاً آبی نمی‌ریزد.

۱۳. معادلهٔ $y^3 - 2x^2 = 1388$ در مجموعهٔ اعداد صحیح چند جواب دارد؟

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) بی‌نهایت

۱۴. چند عدد چهار رقمی وجود دارد که هر رقم آن از رقم سمت چپش کوچک‌تر باشد و اگر ترتیب ارقام آن را برعکس کنیم، تفاضل این دو عدد ۶۱۷۴ شود؟

الف) ۱ ب) ۸ ج) ۱۰ د) ۱۲ ه) ۲۱

۱۵. فرض کنید مقدار تابع $f(x) = -x^2 + bx + c$ همواره کم‌تر یا مساوی ۲ باشد. اگر این تابع دو ریشهٔ حقیقی داشته باشد، فاصلهٔ ریشه‌های آن <u>حداکثر</u> چه‌قدر است؟

الف) ۲ ب) ۴ ج) ۸ د) $\sqrt{2}$ ه) $2\sqrt{2}$

۱۶. می‌گوییم یک عدد در مبنای a کاهشی است در صورتی که اگر آن را در مبنای a بنویسیم، هیچ رقمی از رقم سمت چپ خود بزرگ‌تر نباشد. چند عدد طبیعی کوچک‌تر از ۱۰۲۴ وجود دارد که هم در مبنای ۲ و هم در مبنای ۴ کاهشی باشد؟

الف) ۱۰   ب) ۳۰   ج) ۳۵   د) ۴۰   ه) ۵۵

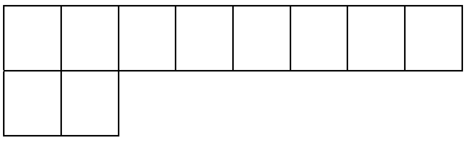
۱۷. چند زوج مرتب (x,y) از اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۱۰۱ وجود دارد که $۲x + ۷y$ بر $x + y$ بخش‌پذیر باشد؟

الف) ۵۰   ب) ۷۸   ج) ۱۰۰   د) ۱۱۶   ه) ۲۰۰

۱۸. ضلع AB، از مثلث ABC را از طرف B به اندازهٔ خودش تا P ادامه می‌دهیم. ضلع AC را هم از طرف C به اندازهٔ دو برابر خودش تا نقطهٔ Q امتداد می‌دهیم. اگر M وسط PQ باشد، مساحت مثلث MBC چند برابر مساحت مثلث ABC است؟

الف) ۱   ب) ۱٫۲۵   ج) ۱٫۵   د) ۱٫۷۵   ه) ۲

۱۹. می‌خواهیم اعداد ۱ تا ۱۰ را، بدون تکرار، در جدول زیر بنویسیم به طوری که هر عدد هم از عدد سمت راستش و هم از عدد پایینش کوچک‌تر باشد. این کار به چند طریق ممکن است؟



الف) ۳۴   ب) ۳۵   ج) ۳۶

د) ۴۴   ه) ۴۵

۲۰. فرض کنید عدد طبیعی n روی تخته‌سیاه نوشته شده است. این عدد را پاک می‌کنیم و به جای آن عدد $n + ۲^b - ۲^a$ را می‌نویسیم که در آن a بزرگ‌ترین عددی است که n به ۲^a بخش‌پذیر است و b کوچک‌ترین عددی است که $n < ۲^b$. اگر در ابتدا عدد ۴۲ نوشته شده باشد بعد از ۱۱۳ بار انجام این کار چه عددی روی تخته خواهد بود؟

الف) ۷×۲^{۱۱۶} ب) $۲^{۱۱۷} - ۱۸۴$ ج) ۹×۲^{۱۱۷}

د) $۲^{۱۱۳} + ۴۲$ ه) $۲^{۱۱۸} - ۱۸۴$

۲۱. فرض کنید ABC یک مثلث قائم الزاویهٔ متساوی الساقین باشد که AB وتر آن است. مورچه‌ای داخل مثلث است. وی ابتدا به سمت نقطهٔ A می‌رود تا جایی که فاصله‌اش تا آن نقطه نصف شود. سپس به سمت نقطهٔ B می‌رود تا جایی که فاصله‌اش تا آن نقطه نصف شود و این دو حرکت را متناوباً تکرار می‌کند. بعد از ۲۰ مرحله انجام این کار مورچه به کدام نقطه نزدیک‌تر است؟

الف) A ب) B ج) C د) وسط وتر AB ه) بستگی به مکان اولیهٔ مورچه دارد.

۲۲. در یک ستون ۲۵۷ سرباز ایستاده‌اند. فرمانده دستور می‌دهد که نفراتی که در مکان‌های فرد قرار گرفته‌اند به همان ترتیب از صف خارج شوند، نفرات دیگر با حفظ ترتیب جای آن‌ها را پر کنند و در نهایت نفرات از صف خارج‌شده به همان ترتیب به انتهای صف بروند. اگر فرمانده ۴۱ مرتبهٔ دیگر این دستور را تکرار کند سربازی که در نهایت نفر اول صف شده در ابتدا نفر چندم بوده است؟

الف) ۱ ب) ۱۶ ج) ۱۲۸ د) ۲۵۳ ه) ۲۵۵

۲۳. به چند صورت می‌توان یک چندجمله‌ای از درجهٔ پنج ساخت که ضرایب آن، با ترتیبی دل‌خواه، اعداد ۱، ۲، ۳ و... ۶ باشد و به‌علاوه به چندجمله‌ای $x^{۲}+x+۱$ بخش‌پذیر باشد؟ (بخش‌پذیر بودن یک چندجمله‌ای به چندجمله‌ای $x^{۲}+x+۱$ یعنی آن را بتوان به صورت ضرب چندجمله‌ای $x^{۲}+x+۱$ و یک چندجمله‌ای دیگر نوشت.)

الف) ۱ ب) ۴۸ ج) ۱۲۰ د) ۳۶۰ ه) چنین چندجمله‌ایی وجود ندارد.

۲۴. بزرگ‌ترین عدد حقیقی k را بیابید که برای هر عدد مثبت a با شرط $a-\frac{۱}{a}\geq ۱$، داشته باشیم $a^{۳}-\frac{۱}{a^{۳}}\geq k(a-\frac{۱}{a})$.

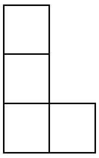
الف) ۲ ب) $\sqrt{۳}$ ج) ۴ د) $۴\sqrt{۳}$ ه) ۵

۲۵. توپی به شعاع ۲۰ سانتی‌متر روی سطح زمین قرار دارد. بالاترین نقطهٔ توپ را علامت می‌زنیم. پس از آن توپ را به اندازهٔ ۲۵π سانتی‌متر به سمت شرق و سپس به اندازهٔ ۲۵π سانتی‌متر به سمت شمال می‌غلطانیم. در نهایت ارتفاع علامت از سطح زمین چند سانتی‌متر است؟

الف) $۲۰-۱۰\sqrt{۲}$ ب) ۲۰ ج) $۲۰+۵\sqrt{۲}$ د) $۲۰+۱۰\sqrt{۲}$ ه) ۳۰

آزمون مرحلهٔ اول بیست و هشتمین ☺

المپیاد ریاضی کشور



۲۶. به چند طریق می‌توان جدول ۱۳۸۸×۱۳۸۸ را با اعداد ۱ تا ۶ پر کرد به طوری که اگر کاشی به شکل روبه‌رو را بر روی چهار خانه از جدول قرار دهیم، مجموع ۴ عدد زیر کاشی مضربی از ۶ باشد؟ (کاشی را می‌توان چرخاند یا پشت و رو کرد.)

الف) ۸ ب) ۱۰ ج) ۱۲ د) ۱۶ ه) ۲۰

۲۷. کدام گزینه دربارهٔ سه عدد زیر صحیح است؟ در عبارتی که برابر A است ۵۰۰ بار ۲ و ۵۰۰ بار ۴ ظاهر شده است و در عبارتی که برابر B است نیز همین طور است. در عبارتی که برابر C است ۲۰۰۰ بار ۲ ظاهر شده است.

$$A = ۲^{۴^{۲^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{۴}}}}}}،\quad B = ۴^{۲^{۴^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{۲}}}}}} \text{ و } C = ۲^{۲^{۲^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{۲}}}}}}$$

الف) $A > B > C$ ب) $B > A > C$ ج) $C > A > B$

د) $C > B > A$ ه) $B > C > A$

۲۸. در چهارضلعی محدب $ABCD$، $\widehat{DAB} = ۱۱۰^\circ$، $\widehat{BCD} = ۱۲۵^\circ$ و $AB = AD = ۶$. طول قطر AC چه‌قدر است؟

الف) ۵ ب) ۵٫۵ ج) ۶ د) ۶٫۵ ه) اطلاعات کافی نیست.

۲۹. یک جورچین (پازل) ساده از ۱۰ قطعهٔ مربعی شکل تشکیل شده است که باید در یک ردیف در کنار هم قرار بگیرند تا تصویری مشخص را درست کنند. فرض کنید مکان‌های سوم و هشتم به‌درستی پر شده است و از این به بعد در هر مرحله تنها مجازیم قطعه‌ای را سر جایش قرار دهیم که دست‌کم یکی از قطعات مجاورش قبلاً جای‌گذاری شده باشد. به چند روش مختلف می‌توان ۸ قطعهٔ باقی‌مانده را سر جایشان گذاشت؟

الف) ۱۶۸۰ ب) ۳۳۶۰ ج) ۴۲۰۰ د) ۵۰۴۰ ه) ۱۰۰۸۰

۳۰. حداکثر چند دایره در فضا می‌توان قرار داد به طوری که هر دو تا هم‌دیگر را در دو نقطه قطع کنند، هیچ سه تایی از یک نقطه عبور نکنند و هیچ دو تایی در یک صفحه قرار نداشته باشند؟

الف) ۳ ب) ۴ ج) ۶ د) ۱۲ ه) بی‌نهایت

سال ۱۳۸۹

زمان: ۲۴۰ دقیقه

آزمون مرحلهٔ اول بیست و نهمین المپیاد ریاضی کشور ☺

دانش‌آموز عزیز، در این بخش شما باید به ۱۰ سؤال پاسخ دهید. جواب این سؤالات یک عدد حداکثر پنج رقمی است و شما باید ارقام آن را جداگانه در پاسخ‌نامه بنویسید. به عنوان مثال اگر پاسخ سؤالی ۶۹۵۰ بود شما باید در مقابل شمارهٔ سؤال در پاسخ‌نامه چنین چیزی بنویسید:

	۶	۹	۵	۰

خوانا بنویسید، چون پاسخ شما توسط ماشین خوانده خواهد شد. البته لازم نیست کاملاً شبیه نمونهٔ بالا بنویسید؛ حتی نوشتن رقم ۶ به شکل «٦» هم ایرادی ندارد ولی به هیچ‌وجه از ارقام انگلیسی استفاده نکنید. پاسخ درست به هر سؤال در این قسمت ۴ نمرهٔ مثبت دارد. در مورد این ۱۰ سؤال پاسخ نادرست نمرهٔ منفی ندارد.

۱. بزرگ‌ترین عدد طبیعی n که هر کدام از اعداد ۱، ۲، ۳ و... $11n$ حداکثر سه مقسوم علیه اول داشته باشند چند است؟

۲. دوازده کشتی‌گیر در جام جهان‌پهلوان تختی شرکت کرده‌اند. ممکن است دو کشتی‌گیر چند بار با هم مبارزه کنند. کسی که پنج بار ببازد از دور رقابت‌ها حذف می‌شود. در این جام حداکثر چند کشتی برگزار می‌شود؟ (توجه کنید که کشتی تساوی ندارد.)

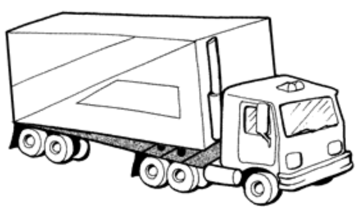
۳. نمرات دانش‌آموزان یک کلاس ۱۱ نفره اعدادی صحیح از صفر تا ۲۰ است. فرض کنید میانگین نمرات ۱۸ و میانهٔ نمرات ۱۹ است؛ کم‌ترین نمرهٔ کلاس حداقل چند می‌تواند باشد؟ (میانهٔ ۱۱ نمره، نمره‌ای است که پس از مرتب کردن نمرات به ترتیب نزولی، در رتبهٔ ششم قرار می‌گیرد.)

۴. قیمت سهام شرکت «نوسان‌سازان شدید» دچار نوسانات شدیدی شده است! در ابتدای ورود شرکت به بازار بورس، هر سهم آن هزار ریال قیمت‌گذاری شد. پس از یک روز، قیمت هر سهم یک ریال کاهش پیدا کرد. سپس به مدت دو روز، هر روز یک ریال افزایش یافت. سپس به مدت سه روز، هر روز یک ریال کاهش یافت و الی آخر. بعد از گذشت ۳۶۵ روز از ورود شرکت به بازار بورس قیمت هر سهم چند ریال است؟

۵. به ازای چند عدد صحیح a، معادلهٔ $x^2 + ax + ۱۳۸۹ = ۰$ ریشه‌ای صحیح دارد؟

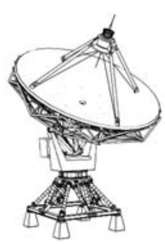
۶. فرض کنید n کوچک‌ترین عدد طبیعی بزرگ‌تر از یک باشد که برای m از ۲ تا ۶، $\sqrt[m]{n}$ عددی طبیعی است. n چند مقسوم‌علیه مثبت دارد؟

۷. طول محفظهٔ کامیونی ۴ متر و عرض و ارتفاع آن ۲ متر است. مقداری آب در محفظهٔ کامیون جمع شده که در حالت افقی بودن محفظه، ارتفاع آن ۱۰ سانتی‌متر است. راننده می‌خواهد برای جلوگیری از زنگ زدن محفظه، آن را بالا بیاورد طوری که سطح تماس آب با بدنه کم‌ترین مقدار ممکن شود. سقف و در محفظه بسته است. او باید محفظه را چند درجه بالا بیاورد؟ (اگر جواب عددی اعشاری است فقط قسمت صحیح آن را بنویسید.)

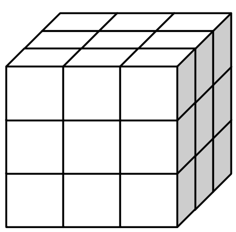


۸. <u>کوچک‌ترین</u> عدد n که 17^2 مقسوم‌علیه $\dfrac{(n+1)(n+2)\dots(2n)}{1\times 2\times \dots \times n}$ باشد، چند است؟

۹. سه رادار بر روی زمین طوری قرار گرفته‌اند که فاصله‌های آن‌ها از هم ۶، ۸ و ۱۰ کیلومتر است. در یک لحظه، هر سه فاصلهٔ هواپیمایی تا خود را ۱۳ کیلومتر گزارش می‌کنند. ارتفاع هواپیما تا سطح زمین چند کیلومتر است؟ زمین را مسطح فرض کنید. (اگر جواب عددی اعشاری است فقط قسمت صحیح آن را بنویسید.)



۱۰. مکعبی به ضلع سه در نظر بگیرید که به مکعب‌های به ضلع یک تقسیم شده است. چند خط وجود دارد که با وجه پایینی مکعب بزرگ زاویهٔ ۴۵ درجه می‌سازد و دست‌کم از مرکز دو تا از مکعب‌های کوچک می‌گذرد؟



آزمون مرحلهٔ اول بیست و نهمین المپیاد ریاضی کشور ☺

دانش‌آموز عزیز، در این بخش شما باید به ۱۵ سؤال پنج‌گزینه‌ای پاسخ دهید. پاسخ درست به هر سؤال در این قسمت ۴ نمرهٔ مثبت و پاسخ نادرست ۱ نمرهٔ منفی دارد.

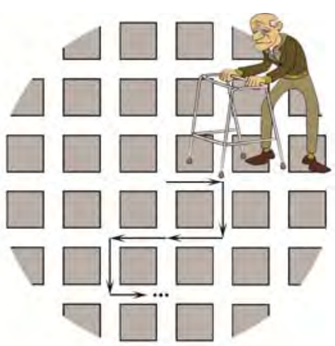
۱. در متوازی الاضلاع $ABCD$ داریم $\widehat{BAD} = ۶۰^\circ$. این متوازی الاضلاع را حول رأس A به اندازهٔ ۶۰° دوران می‌دهیم. دوران‌یافتهٔ نقاط B، C و D را به ترتیب B'، C' و D' می‌نامیم. نسبت $\frac{CC'}{AC}$ چه‌قدر است؟

الف) $\frac{۴}{۵}$ ب) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ج) $\frac{\sqrt{۲}+۱}{۲}$ د) $\frac{۶}{۵}$ ه) ۱

۲. به ازای چند عدد طبیعی k، عدد $\frac{۵۹۶+k}{۷۰۰-k}$ نیز طبیعی است؟

الف) ۲۴ ب) ۲۵ ج) ۳۷ د) ۴۹ ه) ۵۰

۳. آقای فراموش‌کار، ۹۲ ساله، ساعت ۷ صبح از منزل خود که در چهارراه مرکزی شهر است خارج شده و تا کنون که ساعت ۱۰ شب است به منزل برنگشته است. خیابان‌های شهر، افقی و عمودی هستند و فاصلهٔ هر دو چهارراه مجاور یک کیلومتر است. می‌دانیم که نام‌برده در هر ساعت از چهارراهی به چهارراه مجاورش می‌رود. اکنون او در چند چهارراه ممکن است باشد؟



الف) ۲۴۰ ب) ۲۵۶ ج) ۴۸۰ د) ۴۸۱ ه) ۹۶۹

۴. یک جعبهٔ شکلات یازده ردیف یازده تایی دارد. شکلات‌های موجود را هر طور قرار دهیم در بیش‌تر ردیف‌های افقی، بیش‌تر خانه‌ها خالی است. تعداد شکلات‌ها حداکثر چند تاست؟

الف) ۳۵ ب) ۳۶ ج) ۶۶ د) ۸۵ ه) ۸۶

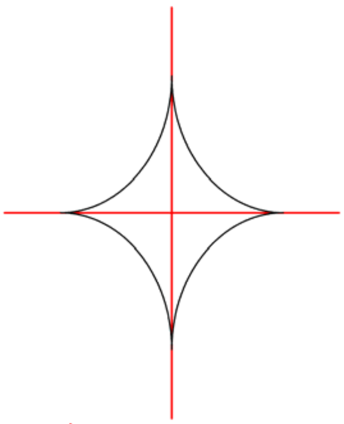
۵. در مثلث ABC، $\hat{B} = ۴۵^\circ$ و $\hat{C} = ۳۰^\circ$. نقاط P، D و E را، به ترتیب، روی اضلاع BC، AB و AC طوری انتخاب می‌کنیم که $PE \perp AC$، $PD \perp AB$ و $DE \parallel BC$. نسبت $\frac{PB}{PC}$ چند است؟

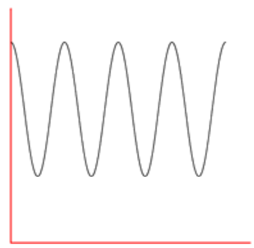
الف) $\frac{۱}{۲}$ ب) $\frac{۳}{۴}$ ج) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ د) $\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$ ه) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

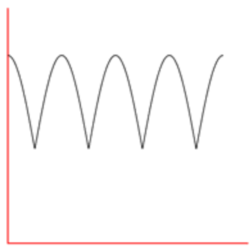
۶. q کوچک‌ترین عدد گویای مثبت است که بسط اعشاری q^3 به شکل $0/abcabcabc\ldots$ است که a، b و c ارقامی از بین ۰، ۱، ۲ و... ۹ هستند. $a+b+c$ چند است؟

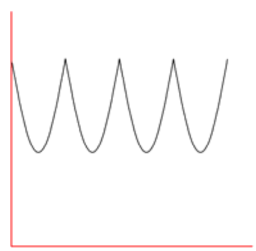
الف) ۹ ب) ۱۰ ج) ۱۷ د) ۱۸ ه) ۲۷

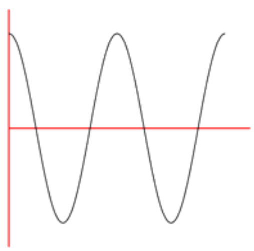
۷. متحرکی از نقطهٔ $(1,0)$ شروع کرده و با سرعت ثابت در جهت مثلثاتی، روی شکل روبه‌رو حرکت می‌کند. نمودارِ مجموعِ مؤلفه‌های x و yِ آن بر حسب زمان، شبیه کدام گزینه است؟

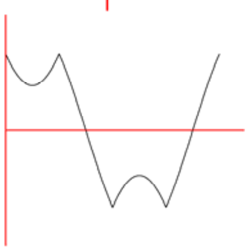


الف) 

ب) 

ج) 

د) 

ه) 

۸. بزرگ‌ترین عدد حقیقی M را طوری بیابید که برای هر $a,b \in [0,1]$ داشته باشیم $a^2 + b^{1389} \geq Mab$.

الف) صفر ب) 2^{-1386} ج) ۱ د) $\frac{1391}{1389}$ ه) ۲

۹. دانش‌آموزی می‌خواهد کتاب‌های ریاضی، فیزیک، ادبیات و عربی اول و دوم دبیرستان را در هشت هفته، در هر هفته یک کتاب، مرور کند. او باید کتاب سال دوم هر موضوع را زمانی مطالعه کند که کتاب سال اول آن موضوع را قبلاً خوانده باشد. این کار به چند روش ممکن است؟

الف) ۷۰ ب) ۵۷۶ ج) ۲۵۲۰ د) ۲۰۱۶۰ ه) ۴۰۳۲۰

۱۰. برای چند زوج مرتب (a,b) از اعداد طبیعی که $1 \leq a,b \leq 10$، معادلهٔ $x^2 = ax - b$ ریشه‌ای در $[0,1]$ دارد؟

الف) ۹ ب) ۱۰ ج) ۲۰ د) ۴۵ ه) ۶۲

۱۱. عدد $۲^{۱۰}۳^{۱۱}۵^{۱۲}$ روی تخته نوشته شده است. بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه این عدد (غیر از خودش) را در نظر گرفته و آن را از عدد روی تخته کم می‌کنیم و حاصل را به جای عدد روی تخته می‌نویسیم. همین کار را با عدد جدید انجام می‌دهیم. پس از چند بار به عدد ۱ می‌رسیم؟ (مثلاً اگر در ابتدا عدد ۷ روی تخته می‌بود، پس از ۴ مرحله به عدد ۱ می‌رسیدیم: ۶، ۳، ۲ و ۱.)

الف) ۳۳ ب) ۴۵ ج) ۵۶ د) ۶۸ ه) ۸۰

۱۲. سه ساعت داریم که اولی سالم است، دومی هر ساعت، ۷ دقیقه و سومی هر ساعت ۱۱ دقیقه جلو می‌افتد. اگر ساعت‌ها در ظهر امروز به درستی تنظیم شوند بعد از گذشت چند ساعت، هر دو ساعت خراب، ۶ ساعت جلوتر از ساعت سالم را نشان می‌دهند؟

الف) ۱۸ ب) ۷۷ ج) ۱۸۰ د) ۳۶۰ ه) ۷۲۰

۱۳. فرض کنید $f(\overline{abc}) = ab + bc + ca$ که $\overline{abc}$ نمایش در مبنای ۱۰ است. دقت کنید ممکن است برخی از a، b و c صفر باشند. مثلاً $f(۲۳) = ۰ \times ۲ + ۲ \times ۳ + ۳ \times ۰ = ۶$. مجموع $f(۰) + f(۱) + \ldots + f(۹۹۹)$ چند است؟

الف) ۲۴۳ ب) ۶۹۳۰ ج) ۶۰۷۵۰ د) ۱۲۱۵۰۰ ه) ۴۹۹۵۰۰

۱۴. کاغذی مربعی به ضلع $۲۰cm$ از یکی از اضلاع به وسط یک میز بزرگ چسبیده و می‌تواند حول آن ضلع دوران بکند. دو طرف این کاغذ کاملاً جوهری شده است و به هر جایی که مالیده شود آن را جوهری می‌کند. می‌خواهیم تنها با تا کردن و خم کردن کاغذ و مالیدن و تکان دادن آن بیش‌ترین سطح ممکن از میز را رنگی کنیم. حداکثر چند سانتی‌متر مربع از میز را می‌توان رنگی کرد؟

الف) $۲۰۰\pi + ۴۰۰$ ب) $۳۰۰\pi + ۲۰۰$ ج) ۴۰۰π

د) ۶۰۰π ه) $۶۰۰\pi - ۴۰۰$

۱۵. فرض کنید H محل برخورد ارتفاع‌های مثلث ABC باشد. از H خطی به موازات ضلع AC رسم می‌کنیم تا ضلع BC را در نقطهٔ D قطع کند. نقطهٔ E را روی دایرهٔ محیطی مثلث بین A و C طوری انتخاب می‌کنیم که $\widehat{HDB} = \widehat{EDC}$. اگر $DH = ۱$، $HB = ۳$ و $BA = ۸۹$، AE چه‌قدر است؟

الف) ۳۰ ب) $\frac{۸۹}{۳}$ ج) $\frac{۸۶}{۳}$ د) $\frac{۸۵}{۳}$ ه) $\frac{۴۵}{۲}$

سال ۱۳۹۰

زمان: ۱۸۰ دقیقه

آزمون مرحلهٔ اول سی‌امین المپیاد ریاضی کشور ☺

دانش‌آموز عزیز، در این بخش شما باید به ۱۰ سؤال پاسخ دهید. جواب این سؤالات یک عدد حداکثر پنج رقمی است و شما باید ارقام آن را جداگانه در پاسخنامه بنویسید. به عنوان مثال اگر پاسخ سؤالی ۶۹۵۰ بود شما باید در مقابل شمارهٔ سؤال در پاسخنامه، چنین چیزی بنویسید:

	۶	۹	۵	۰

خوانا بنویسید، چون پاسخ شما توسط ماشین خوانده خواهد شد. البته لازم نیست کاملاً شبیه نمونهٔ بالا بنویسید؛ حتی نوشتن رقم ۶ به شکل «٦» هم ایرادی ندارد ولی به هیچ‌وجه از ارقام انگلیسی استفاده نکنید. پاسخ درست به هر سؤال در این قسمت ۴ نمرهٔ مثبت دارد. در مورد این ۱۰ سؤال پاسخ نادرست نمرهٔ منفی ندارد.

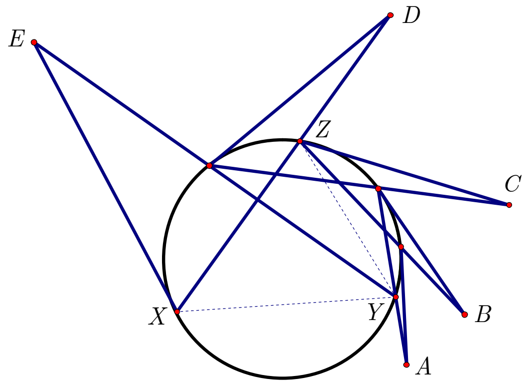
۱. فرض کنید a، b و c اعدادی طبیعی باشند که $ac = ۲۰۱۲$، بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک a و b برابر ۱ و کوچک‌ترین مضرب مشترک b و c برابر ۱۳۹۰ است. مقدار $a+b+c$ چند است؟

۲. اخیراً سه شهر نمکستان، سماقستان و فلفلستان که از توابع شِکرستان هستند از طریق خط راه‌آهن مستقیماً به شکرستان متصل شده‌اند. جهان‌گردی سفر خود را از نمکستان شروع کرده و ۱۲ بلیط قطار دارد و می‌خواهد از همهٔ بلیط‌های خود استفاده کند. اگر او بخواهد دقیقاً یک بار به سماقستان وارد شود به چند روش می‌تواند سفر خود را انجام دهد؟ (توجه کنید که بین نمکستان، سماقستان و فلفلستان مسیر مستقیم وجود ندارد.)

۳. مجموع اعداد حقیقی نامنفی a، b و c برابر ۳۰ است. بیش‌ترین مقدار ممکن $۳ab + ۴bc$ چه‌قدر است؟

۴. به چند حالت می‌توان در عبارت $۷ \pm \cdots \pm ۲ \pm ۱\pm$ مثبت‌ها و منفی‌ها را تعیین کرد که حاصل مثبت باشد؟

۵. در دو طرف خیابان اصلی شهر هجده چراغ برق در دو ردیف نُه تایی مقابل هم نصب شده‌اند. فاصلهٔ بین دو چراغ متوالی پنجاه متر و عرض خیابان ده متر است. بعضی از چراغ‌ها خاموش شده‌اند اما در فاصلهٔ کمتر از شصت متر از هر چراغ خاموش حداکثر سه چراغ خاموش دیگر وجود دارد. تعداد چراغ‌های خاموش حداکثر چندتاست؟



۶. شش نقطه روی یک دایره قرار دارند و با رسم برخی خطوط مماس و خطوط واصل آن‌ها، شکل روبه‌رو حاصل شده است. اگر زوایای $\hat{A}$، $\hat{B}$، $\hat{C}$، $\hat{D}$ و $\hat{E}$، به‌ترتیب، برابر با ۴، ۷، ۱۰، ۱۳ و ۱۶ درجه باشند، اندازهٔ زاویهٔ $X\hat{Y}Z$ را بر حسب درجه بنویسید. (اگر پاسخ عدد صحیح نیست، جزء صحیح آن را بنویسید.)

۷. فرض کنید a و b اعدادی طبیعی باشند که تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت a، b و ab، به ترتیب، برابر با ۳، ۴ و ۸ باشد. عدد $b^۲$ چند مقسوم‌علیه مثبت دارد؟

۸. به چند طریق می‌توان ۴ مهره در یک جدول ۴×۴ قرار داد که در هر سطر و در هر ستون دست‌کم یک مهره وجود داشته باشد؟

۹. در مثلث ABC داریم $\angle BAC = ۶۰^\circ$، $AB = ۷\sqrt{۳}$ و $AC = ۱۴\sqrt{۳}$. نقطهٔ متغیر X را روی پاره‌خط BC در نظر می‌گیریم. از نقطهٔ X دو خط به موازات AB و AC رسم می‌کنیم تا به ترتیب AC و AB را در نقاط Y و Z قطع کنند. طول پاره‌خط BX چه‌قدر باشد تا پاره‌خط YZ کم‌ترین طول ممکن را داشته باشد؟

۱۰. چندجمله‌ای $P(x)$ برابر است با مجموع x^nهایی که $۱ \leq n \leq ۱۲۰$ و n بر دست‌کم یکی از اعداد ۲ یا ۳ بخش‌پذیر باشد. این چندجمله‌ای چند ریشهٔ حقیقی متمایز دارد؟

آزمون مرحلهٔ اول سی‌امین المپیاد ریاضی کشور ☺

دانش‌آموز عزیز، در این بخش شما باید به ۱۵ سؤال پنج‌گزینه‌ای پاسخ دهید. در این قسمت پاسخ درست به هر سؤال ۴ نمرهٔ مثبت و پاسخ نادرست ۱ نمرهٔ منفی دارد.

۱. یک جسم به شکل مکعب مستطیل با ارتفاع ۳ و قاعدهٔ ۶ × ۴ روی زمین قرار دارد. نقطهٔ A روی ضلعی از قاعده که طول آن ۶ است قرار دارد. جسم را حول ضلع مقابل آن روی زمین می‌غلطانیم و این کار را در همان جهت آن‌قدر ادامه می‌دهیم تا جسم یک دور کامل بچرخد. نقطهٔ A چه مسافتی را در فضا طی کرده است؟

الف) ۳π ب) ۴π ج) ۶π د) ۸π ه) ۱۲π

۲. سه مجموعهٔ A، B و C را در نظر بگیرید. کدام‌یک از گزینه‌ها، برابر مجموعهٔ اعضایی است که دست‌کم عضو دو تا از این سه مجموعه است؟

الف) $(A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C)$ ب) $A \cup B \cup C \cup (A \cap B \cap C)$

ج) $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C)$ د) $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (A \cup C)$

ه) گزینه‌های ج و د هر دو صحیح هستند.

۳. به چند روش می‌توان مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ۳۰\}$ را دو قسمت کرد که حاصل‌ضرب اعضای آن‌ها با یک‌دیگر برابر باشد؟

الف) این کار ممکن نیست. ب) بین ۱ و ۱۰ روش ج) بین ۱۱ و ۱۰۰ روش

د) بین ۱۰۱ و ۱۰۰۰ روش ه) بیش از ۱۰۰۰ روش

۴. مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین ABC به زاویهٔ رأس A و طول ۱۰ ساق مفروض است. نقطهٔ دل‌خواه D در صفحه مفروض است به طوری که، نقطهٔ A داخل مثلث BCD قرار می‌گیرد. نیم‌سازهای داخلی زوایای $\angle BAD$ و $\angle CAD$ را رسم می‌کنیم تا اضلاع BD و CD را به ترتیب، در نقاط E و F قطع کنند. اگر مرکز ثقل مثلث BCD واقع بر پاره‌خط EF باشد، طول پاره‌خط AD چه‌قدر است؟

الف) ۱۰ ب) ۱۵ ج) ۲۰ د) ۳۰ ه) بستگی به مکان D دارد.

۵. چندجمله‌ای $x^۴ - x^۲ - ۲x - ۱$ را در نظر بگیرید. مجموعهٔ xهایی که به ازای آن‌ها این چندجمله‌ای نامنفی است، چه شکلی دارد؟

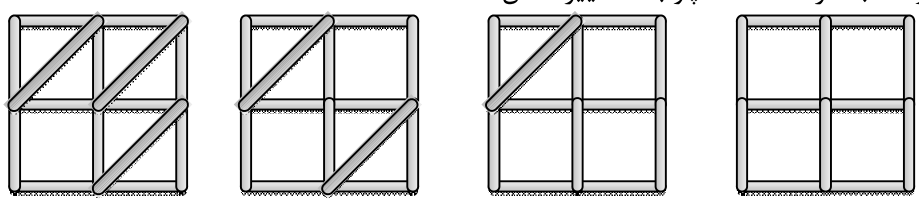
الف) یک پاره‌خط ب) دو پاره‌خط ج) یک پاره‌خط و یک نیم‌خط

د) یک پاره‌خط و دو نیم‌خط ه) دو نیم‌خط

۶. به چند طریق می‌توان دو عدد طبیعی a و b را از بین اعداد ۱ تا ۱۰ انتخاب کرد که کسر $\frac{a+b}{a-b}$ عددی طبیعی باشد؟

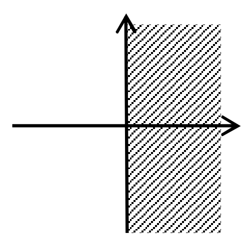
الف) ۱۹ ب) ۲۴ ج) ۲۸ د) ۲۹ ه) ۳۴

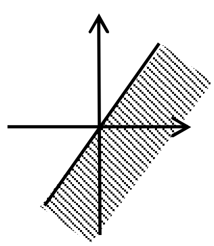
۷. فرض کنید با لولا کردن تعدادی قطعهٔ چوبی به طول‌های یک متر و $\sqrt{۲}$ متر چهار شکل زیر را ساخته‌ایم به طوری که قطعات می‌توانند آزادانه در صفحه، دور لولاها بچرخند. چند تا از این شکل‌ها می‌توانند با حرکت قطعه چوب‌ها تغییر شکل دهند؟

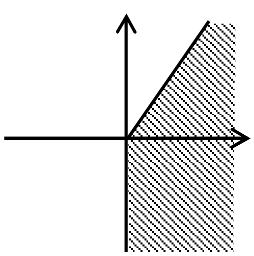


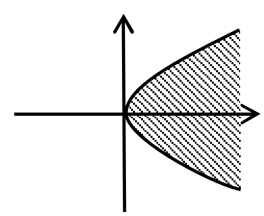
الف) هیچ‌کدام ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) ۴

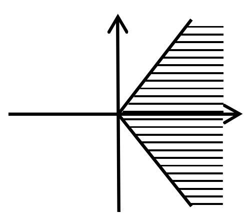
۸. مجموعهٔ نقاطی از صفحه که دارای نمایشی به شکل $(x^۲+y^۲,xy)$ هستند، که x و y اعدادی حقیقی هستند، کدام گزینه است؟ (شکل‌ها تقریبی هستند.)

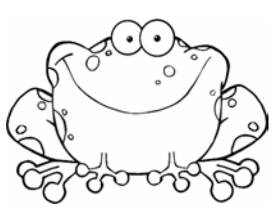
الف)


ب)


ج)


د)


ه)




۹. یک وزغ و یک ملخ در فاصلهٔ ۲ متری یک‌دیگر قرار دارند. وزغ در هر ثانیه ۲۵ یا ۵۰ سانتی‌متر به سمت ملخ، روی زمین، حرکت می‌کند و ملخ نیز در هر ثانیه ۲۵ یا ۵۰ سانتی‌متر به سمت وزغ می‌پرد. در صورتی که این دو روی زمین به هم برسند، وزغ ملخ را می‌خورد و می‌ایستد. به چند روش ممکن است ملخ خورده شود؟

الف) ۸ ب) ۱۷ ج) ۱۸ د) ۲۴ ه) ۳۲

۱۰. فرض کنید چهار خط در فضا داده شده‌اند که دو تا از آن‌ها متقاطع‌اند و به جز آن دو، نه هیچ دو خطی متقاطع هستند و نه موازی. حداکثر چند خط در فضا وجود دارد که هر چهار تای آن‌ها را قطع کند؟

الف) ۱   ب) ۲   ج) ۳

د) بی‌نهایت   ه) هیچ خطی نمی‌تواند هر چهار تا را قطع کند.

۱۱. بزرگ‌ترین عدد حقیقی a که برای هر دو عدد حقیقی x و y که $xy^۲ + ۴x^۲y + ۵ = ۰$ و $x > ۰$، داشته باشیم $ax < y$، کدام است؟

الف) $-\sqrt[۳]{۸۰}$ ب) -۴ ج) ۰ د) ۴ ه) $\sqrt[۳]{۸۰}$

۱۲. به چند طریق می‌توان سه عدد طبیعی x، y و z را انتخاب کرد که $x + y + ۲z = xyz$؟

الف) ۷   ب) ۴   ج) ۲   د) ۱   ه) ممکن نیست.

۱۳. رستوران «مرغ تخم‌طلا» هر روز تنها یکی از غذاهای نیم‌رو، املت و تخم‌مرغ آب‌پز را ارائه می‌کند! مدیر رستوران می‌خواهد برنامهٔ هفتگی را طوری تنظیم کند که غذای هیچ دو روز متوالی یکی نباشد. این کار به چند روش مختلف ممکن است؟ (توجه کنید که روز بعد از جمعه، شنبه است!)

الف) ۷۸   ب) ۸۴   ج) ۱۲۶   د) ۱۶۸   ه) ۱۹۲

۱۴. چند زوج مرتب (x,y) از اعداد حقیقی، در دستگاه معادلات روبه‌رو صدق می‌کند؟

$$\begin{cases} x^۲ + y = xy^۲ \\ y^۲ + x = yx^۲ \end{cases}$$

الف) ۱   ب) ۲   ج) ۳   د) ۴   ه) ۵

۱۵. فرض کنید چهارضلعی محدب $ABCD$ محیطی نیست؛ یعنی دایره‌ای وجود ندارد که بر هر چهار ضلع آن مماس باشد. دایره‌هایی را در نظر بگیرید که بر سه ضلع از این چهارضلعی مماس هستند. چند تا از این دایره‌ها کاملاً داخل چهارضلعی قرار می‌گیرند؟

الف) بسته به چهارضلعی، گاهی دو تا، گاهی سه تا و گاهی چهار تا   ب) گاهی دو تا و گاهی سه تا

ج) گاهی یکی و گاهی دو تا   د) همواره دو تا   ه) همواره یکی

سال ۱۳۹۱

زمان: ۱۸۰ دقیقه

آزمون مرحلهٔ اول سی و یکمین المپیاد ☺
ریاضی کشور

دانش‌آموز عزیز، سؤال‌های این آزمون به دو شکل پنج‌گزینه‌ای و پاسخ‌کوتاه است. پاسخ درست به هر دو نوع سؤال ۴ نمرهٔ مثبت دارد. پاسخ غلط به هر سؤال پنج‌گزینه‌ای ۱ نمرهٔ منفی دارد ولی پاسخ غلط به سؤال‌های پاسخ‌کوتاه نمرهٔ منفی ندارد. پاسخ‌نامه در مورد هر دو نوع سؤال مشابه و شامل پنج مکان خالی است که در هر کدام می‌توانید یک رقم از ارقام صفر تا نه را بنویسید.

جواب سؤال‌های پاسخ‌کوتاه، عددی نامنفی و کم‌تر از ۱۰۰۰۰۰ است. شما باید ارقام قسمت صحیح آن را جداگانه در پاسخ‌نامه بنویسید. به عنوان مثال اگر پاسخ سؤالی ۶۹۵۰٫۷۳ بود شما باید در مقابل شمارهٔ سؤال در پاسخ‌نامه، چنین چیزی بنویسید:

	۶	۹	۵	۰

در مورد سؤال‌های پنج‌گزینه‌ای شمارهٔ گزینهٔ درست را در مستطیل سمت راست بنویسید. مثلاً اگر گزینهٔ شمارهٔ ۳ درست است باید در مقابل شمارهٔ سؤال در پاسخ‌نامه، چنین چیزی بنویسید:

				۳

لازم نیست کاملاً شبیه نمونه‌های بالا بنویسید؛ حتی نوشتن رقم ۶ به شکل «٦» هم ایرادی ندارد ولی رقم صفر را کوچک و رقم پنج را بزرگ بنویسید تا با هم اشتباه نشوند و به‌علاوه به هیچ‌وجه از ارقام انگلیسی استفاده نکنید. با رنگ سیاه یا آبی، خوانا و پررنگ بنویسید. هر یک از ارقام را داخل یک کادر بنویسید. اگر از مداد استفاده کنید، پاک کردن برایتان مقدور است ولی از مداد اتود، که اثر آن کم‌رنگ و نازک است، استفاده نکنید.

۱. مأمور آمار، یک سرشماری در شکرستان انجام داده است. فراوانی نسبی تعداد خانواده‌ها به صورت زیر است:

تعداد اعضای خانواده	۲	۳	۴	۵	۶
درصد	۱۰	۳۰	۳۰	۱۰	۲۰

چند درصد از مردم، در خانواده‌های ۲ نفری زندگی می‌کنند؟

۲. کم‌ترین مقدار $\frac{a^{۲}}{b}$ در مجموعهٔ زیر چند است؟

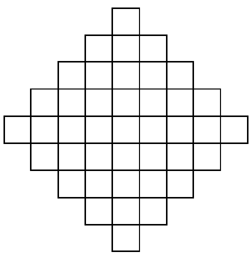
$$\left\{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}, (a+۱)(b+۱) = ab, ۰ \leq b\right\}$$

۳. چند عدد چهار رقمی با ارقام ۱، ۲، ۳ و ۴ وجود دارد که هیچ‌کدام از رقم‌های آن تکرار نشده باشد و مجموع هر دو رقم متوالی آن بر ۲ یا ۳ (یا هر دو) بخش‌پذیر باشد؟

۴. در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین $ABCD$ طول ضلع AB برابر ۴ و طول دو ساقِ AD و BC برابر ۲ است. زاویهٔ $\angle ABC$ نیز برابر ۱۲۰° درجه است. اگر E محل برخورد دو قطر ذوزنقه باشد، نسبت $\frac{BE}{DE}$ برابر است با:

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\sqrt{۳}-۱$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۴) $\frac{۵}{۹}$ ۵) $\frac{۲}{۳}$

۵. تعدادی مُهر مربعی شکل با ابعاد ۱×۱، ۲×۲، ۳×۳، ۴×۴ و ۵×۵ به ما داده شده است. در هر مرحله می‌توانیم یک مُهر را آغشته به رنگ کرده و سپس با کوبیدن آن روی نقشهٔ روبه‌رو آن را رنگ کنیم به طوری که تمامی سطح مهر درون نقشه قرار گیرد. دست‌کم چند بار باید مُهر روی نقشه بکوبیم تا همهٔ جای نقشه رنگ شود؟ (ضلع مربع‌های کوچک یک واحد است.)



۶. چند زوج مرتب (x,y) از اعداد حقیقی، در دستگاه معادلات زیر صدق می‌کند؟

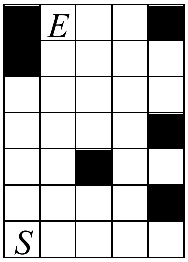
$$\begin{cases} x^۲y+xy^۲=۳۰ \\ xy+x+y=۱۱ \end{cases}$$

۷. در لحظه‌ای که ماهوارهٔ امید در ارتفاع ۲۵۶ کیلومتری از سطح زمین قرار داشته، فاصلهٔ ماهواره تا دورترین نقطهٔ روی زمین که می‌توانسته آن را ببیند چند کیلومتر بوده است؟ (زمین را کره‌ای به شعاع ۶۳۷۰ کیلومتر در نظر بگیرید.)

۸. چند چهارتایی (a,b,c,d) از اعداد طبیعی در رابطه‌های زیر صدق می‌کنند؟

$$a^b=cd,\quad b^c=da,\quad c^d=ab,\quad d^a=bc.$$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۶ ۴) ۸ ۵) بی‌نهایت



۹. در شکل روبه‌رو، مهره‌ای ابتدا در خانهٔ S قرار دارد و در هر قدم می‌توانیم آن را در یکی از جهت‌های بالا، چپ و راست یک خانه جابه‌جا کنیم، بدون این‌که از جدول خارج شود یا وارد خانه‌های سیاه‌رنگ شود. اگر بخواهیم از هیچ خانه‌ای بیش از یک مرتبه عبور نکنیم، به چند روش مختلف می‌توان مهره را به خانهٔ E رساند؟

۱۰. حداکثر چند عدد از میان اعداد طبیعی ۱ تا ۱۳۹۱ می‌توان انتخاب کرد که ضرب هر دوتایی از آن‌ها مربع کامل باشد؟

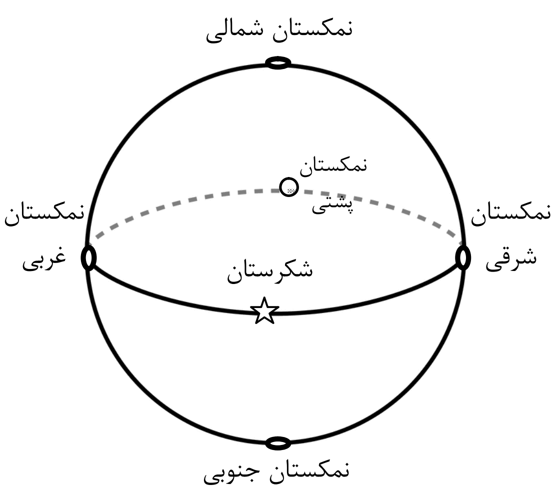
۱۱. برای دو عدد طبیعی a و b عمل $\hat{}$ به این صورت تعریف می‌شود: $a \mathbin{\hat{}} b = a^b$. عمل $\otimes$ نیز به شکل زیر تعریف می‌شود

$$a \otimes b = (\cdots((a \mathbin{\hat{}} a) \mathbin{\hat{}} a) \mathbin{\hat{}} \cdots \mathbin{\hat{}} a)$$

که در عبارت سمت راست، a، b مرتبه ظاهر شده است. در این صورت $a \otimes b$ برابر است با:

۱) $a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}$ ۲) b^a ۳) a^{ab} ۴) $a^{a^{b-1}}$ ۵) ab^{b^a}

۱۲. در مثلث ABC، میانه‌های نظیر رأس B و رأس C بر هم عمود هستند. اگر طول اضلاع AB و AC به ترتیب ۱۹ و ۲۲ باشد. طول ضلع BC چه قدر است؟



۱۳. سلطان شکرستان در نظر دارد که یک تور جهان‌گردی بین شکرستان و ۵ شهر دیگر برقرار کند: نمکستان‌های شمالی، جنوبی، شرقی، غربی و پشتی! (در شکل، نمکستان پشتی، در پشت کره است!). هر شهر تنها به ۴ شهر نزدیکِ خود خط هوایی دارد. به چند صورت می‌توان توری طراحی کرد که ابتدا و انتهای آن شکرستان باشد و از شهرهای دیگر دقیقاً یک بار بگذرد؟

۱) ۱۶ ۲) ۲۰ ۳) ۳۲ ۴) ۴۰ ۵) ۴۸

۱۴. به تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$، تابعی n مقداری می‌گوییم اگر برد آن مجموعه‌ای n عضوی باشد. اگر f و g به ترتیب n و m مقداری باشند. توابع $f+g$، $f\times g$ و $f\circ g$، به ترتیب حداکثر چند مقداری هستند؟

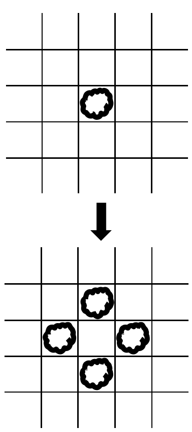
۱) mn، mn و $\min(m,n)$.
۲) mn، $m+n$ و $\max(m,n)$.
۳) $m+n$، mn و n^m.
۴) $m+n$، mn و mn.
۵) $\max(m,n)$، mn و mn.

۱۵. در ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ $ABCD$، ($\angle A=\angle D=۹۰^\circ$)، M وسط ضلع BC است. فرض کنید دایره به مرکز M و شعاع MB، درونِ پاره خط AD را در X و Y قطع کند. اگر $AB=۱$ و طول پاره‌خط‌های BC، CD و DA به ترتیب p، q و r باشد. طول پاره‌خط‌های AX و AY ریشه‌های کدام معادلهٔ زیر هستند؟

۱) $x^۲+px+q$
۲) $x^۲-rx+q$
۳) $x^۲-px+q$
۴) $qx^۲+rx+p$
۵) $px^۲-qx+r$

۱۶. جمع صورت و مخرج چند تا از کسرهای $\frac{۱}{۹۰},\frac{۲}{۹۰},\cdots,\frac{۹۰}{۹۰}$، بعد از ساده کردن بر ۳ بخش‌پذیر است؟

۱۷. در خانه‌های یک شبکهٔ مربعی نامتناهی، گونه‌ای باکتری به نام «چارزا» زندگی می‌کند. در هر خانه هر تعداد چارزا می‌توانند هم‌زمان زندگی کنند. بعد از یک ساعت هر چارزا به چهار چارزا تقسیم شده و هرکدام به یکی از چهار خانهٔ مجاور می‌رود. اگر در ابتدا فقط یک چارزا وجود داشته باشد، بعد از شش ساعت چند چارزا در خانه‌ای است که با خانهٔ ابتدایی فقط یک رأس مشترک دارد؟ (به طور مثال پس از یک ساعت فقط در هر کدام از چهار خانهٔ مجاور خانهٔ آغازی، دقیقاً یک چارزا وجود خواهد داشت.)



۱۸. چند زیرمجموعهٔ چهار عضوی از اعداد حقیقی مثبت وجود دارد که ضرب دوبه‌دوی اعضای آن، برابر مجموعهٔ $\{۲,۸,۹,۳۲,۳۶,۱۴۴\}$ شود؟

۱۹. تابع $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ این‌گونه تعریف شده است که $f(۱)=۱$ و برای $n>۱$ اگر تجزیهٔ n به عوامل اول به صورت $n=p_۱^{r_۱}\cdots p_k^{r_k}$ باشد، آن‌گاه $f(n)=r_۱^{p_۱}\cdots r_k^{p_k}$. کدام درست است؟ ($p_i$ها اعداد اول متمایزند و r_iها اعداد طبیعی هستند.)

۱) f پوشا است.

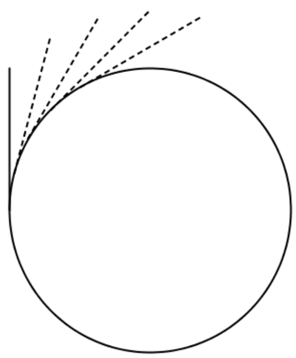
۲) f یک‌به‌یک است.

۳) اگر a و b عضو برد f باشند، آن‌گاه ab عضو برد f است.

۴) برای هر دو عدد طبیعی m و n، $f(m)f(n)\leq f(mn)$.

۵) برای هر دو عدد طبیعی m و n، $f(m)f(n)\geq f(mn)$.

۲۰. چرخی به شعاع ده متر از مرکز به وسیلهٔ محوری به زمین متصل شده، طوری که می‌تواند آزادانه حول آن محور بچرخد. میله‌ای به طول ده متر به شکل مماس به چرخ متصل شده است. اگر چرخ ۶۰° بچرخد، نزدیک‌ترین گزینه به مساحت نقطه‌هایی که این میله از روی آن‌ها عبور می‌کند، (بر حسب متر مربع) کدام است؟ (شکل وضعیت میله در ابتدا، انتها و سه لحظهٔ بینی را نشان می‌دهد.)



۱) ۲۰   ۲) ۳۰   ۳) ۴۰   ۴) ۵۰   ۵) ۶۰

۲۱. دنبالهٔ $\{a_n\}$ با دو عدد حقیقی دل‌خواه $a_۱$ و $a_۲$ شروع می‌شود و جمله‌های بعدی آن از رابطهٔ $a_{n+۲}=\max\{a_{n+۱}-۱, a_n+۱\}$ به‌دست می‌آیند. اگر $a_{۱۰۰}=۱۰۰$، بیش‌ترین مقدار ممکن برای $a_۱$ چند است؟

۲۲. احسان و حسام در جدولی ۲×۳ مطابق شکل، با هم مهره‌بازی می‌کنند. در این بازی هر کس در نوبت خودش می‌تواند یک مهره در یکی از خانه‌های خالی جدول قرار دهد یا یکی از مهره‌های موجود را به خانهٔ سمت راستش یا خانهٔ بالایش منتقل کند، البته اگر آن خانه خالی باشد. بازنده اولین کسی است که نتواند حرکتی انجام دهد. احسان برای شروع بازی در کدام‌یک از خانه‌های شماره‌گذاری‌شده، مهره را قرار دهد تا بتواند بازی را ببرد؟

	۱
۳	۲
۴	

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

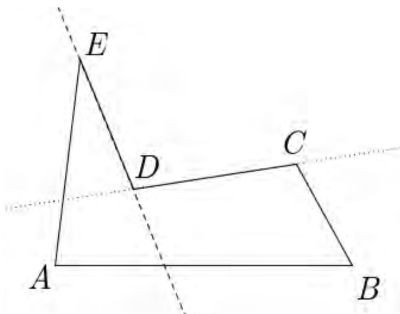
۵) در هر کدام از این چهار حالت، حسام می‌تواند طوری بازی کند که برنده شود.

۲۳. تعداد جواب‌های معادلهٔ زیر در اعداد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی ۱۰۰، با شرط $x \leq y$ را بیابید.

$$x^۲ + y^۲ = xy(x,y) + [x,y].$$

منظور از (x,y)، بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک x و y و منظور از $[x,y]$ کوچک‌ترین مضرب مشترک x و y است.

۲۴. منظور از یک ضلعِ «ناجور» در یک چندضلعی که اضلاع آن یک‌دیگر را قطع نمی‌کنند، ضلعی است که دو ضلعِ مجاورش در دو طرف خط شامل آن قرار دارند. مثلاً در پنج‌ضلعی روبه‌رو تنها ضلع‌های CD و DE ناجور هستند. یک ۱۳۹۱ ضلعی حداکثر چند ضلع ناجور می‌تواند داشته باشد؟



۲۵. روی سطحِ کره‌ای، ۴ دایره رسم شده است. سطح این کره حداکثر به چند ناحیه تقسیم می‌شود؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۴ ۳) ۱۵ ۴) ۱۶ ۵) ۱۷

بخش دوم: پاسخ‌ها

سال ۱۳۸۲

زمان: ۲۴۰ دقیقه

۱. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

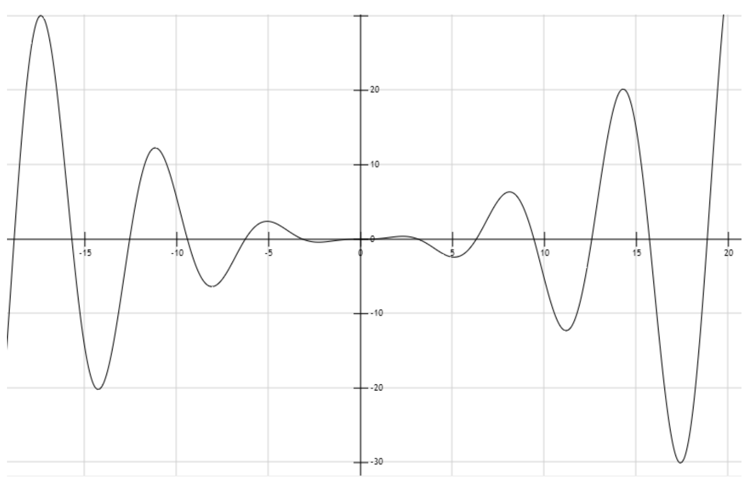
فرض کنید $y = f(x)$ تابع مورد نظر باشد. ابتدا با توجه به این که نقطه‌ی $(۰,۰)$ روی نمودار قرار دارد، باید $f(۰) = ۰$ که همه‌ی گزینه‌ها این شرط را برآورده کنند. این نمودار تابعی را مشخص می‌کند که نه زوج است و نه فرد(زیرا نه نسبت به مبدأ مختصات و نه محور yها تقارن دارد.) پس گزینه‌های (الف)، (ب) و (ج) که به ترتیب توابعی فرد، زوج و زوج هستند نمی‌توانند جواب مسئله باشند.

طبق نمودار سؤال برای هر عدد حقیقی مثبت x باید $f(x)$ مثبت باشد، اما اگر در گزینه‌ی (د) به جای x، $\frac{\pi}{۲}$ قرار دهیم داریم:

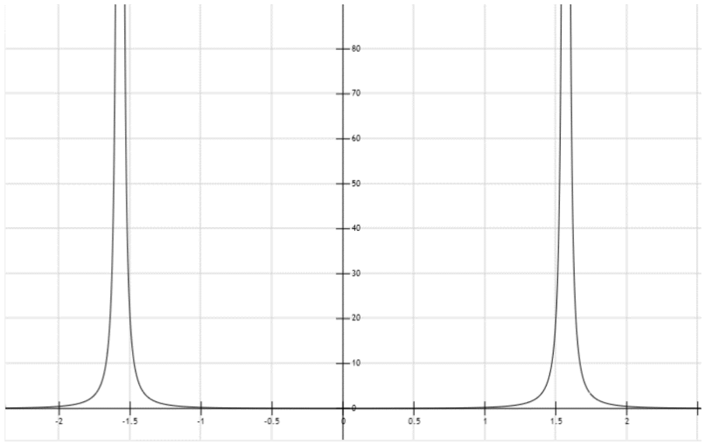
$$\frac{x^۲}{۱۰} + \cos x - ۱ = \frac{\pi^۲}{۴۰} + \cos \pi - ۱ = \frac{\pi^۲}{۴۰} - ۱ < ۰$$

پس گزینه‌ی (د) هم نمی‌تواند جواب مسئله باشد و جواب درست گزینه‌ی (ه) است. در زیر نمودار مربوط به چهار تابع دیگر را می‌بینید.

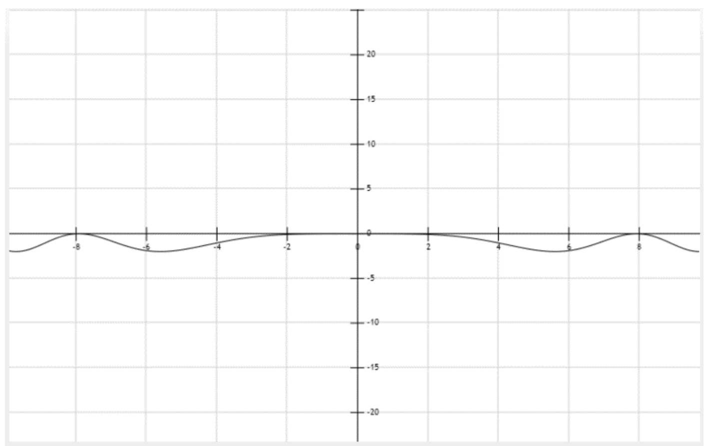
گزینه‌ی الف. $y = \frac{x^۲}{۱۰}.\sin x$



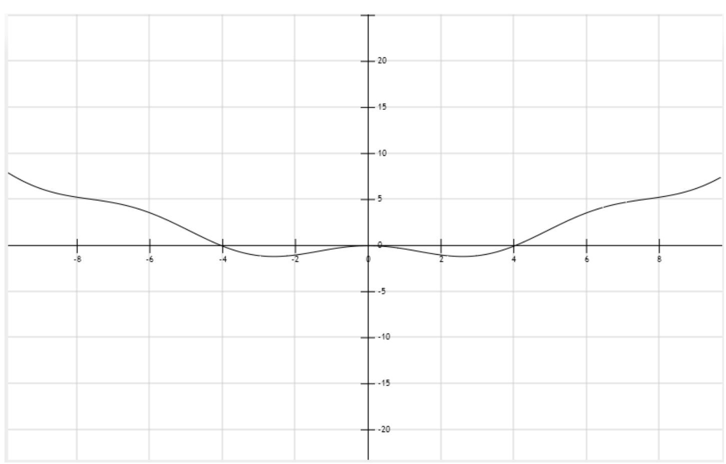
گزینه‌ی ب. $y = \frac{(\tan x)^{۲}}{۱۰}$



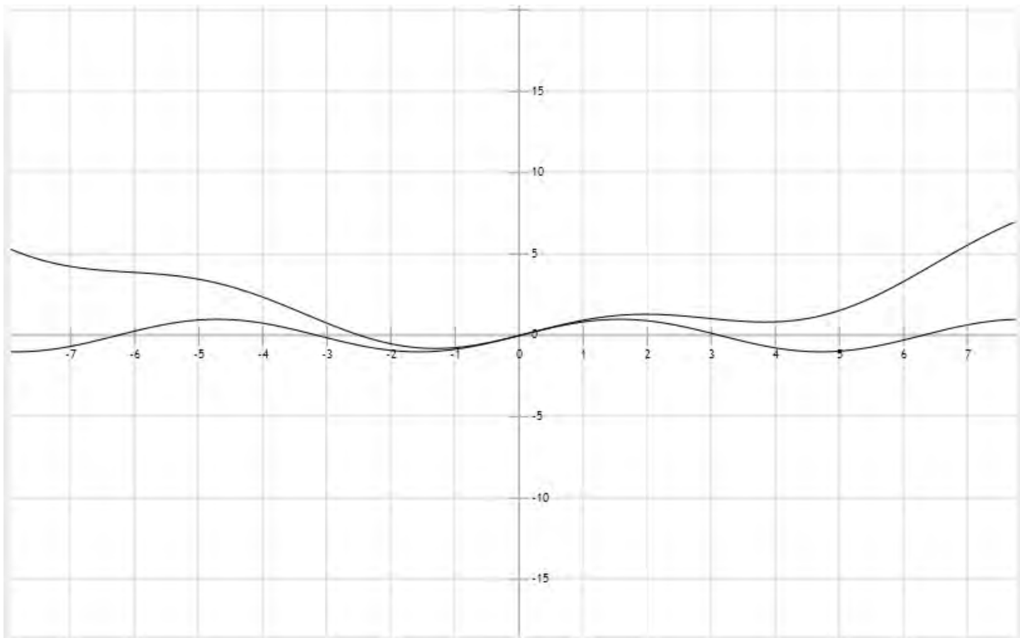
گزینه‌ی ج. $y = \cos(\frac{x^{۲}}{۱۰}) - ۱$



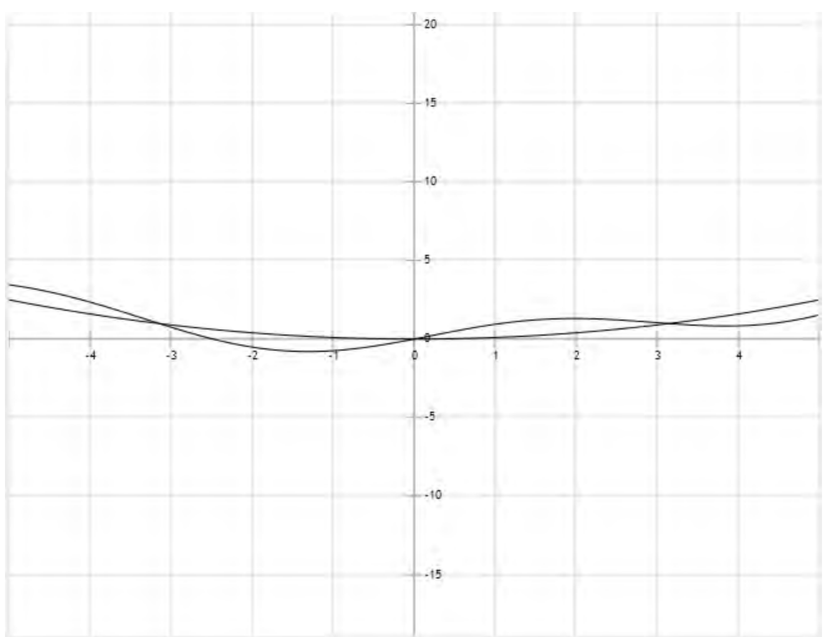
گزینه‌ی د. $y = \frac{x^{۲}}{۱۰} + \cos x - ۱$



توضیح: اگر به نمودار صورت سؤال حول نقطه‌ی صفر که کسر $\frac{x^{۲}}{۲}$ در این‌جا بسیار کوچک است، دقت کنید نموداری شبیه به $\sin x$ می‌بینید.(در شکل زیر نمودار پایینی مربوط به $y = \sin x$ و نمودار بالاتر مربوط به گزینه‌ی (ه) است.)



توضیح: نمودار $\sin x + \frac{x^{۲}}{۱۰}$ از جمع کردن نمودار دو تابع $\frac{x^{۲}}{۱۰}$ و $\sin x$ به دست می‌آید. یعنی به تعبیری کاملاً غیر دقیق باید نمودار $\frac{x^{۲}}{۱۰}$ قرار گیرد تا به نمودار $\sin x + \frac{x^{۲}}{۱۰}$ برسیم.



۲. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

صورت سؤال کاملاً ما راهنمایی می‌کند که باید از اتحاد چاق و لاغر استفاده کنیم. طرفین عبارت را در $(x+۱)-(x-۲)=۳$ ضرب می‌کنیم. صرفاً برای راحتی در نوشتن از نماد a برای $x+۱$ و از b برای $x-۲$ استفاده می‌کنیم.

$$\begin{aligned} a^{۱۳۸۴}-b^{۱۳۸۴} &= (a-b)(a^{۱۳۸۳}+a^{۱۳۸۲}b+\cdots+ab^{۱۳۸۲}+b^{۱۳۸۳}) \\ &= \quad ۳\times(a^{۱۳۸۳}+a^{۱۳۸۲}b+\cdots+ab^{۱۳۸۲}+b^{۱۳۸۳})=۰ \end{aligned}$$

پس $a^{۱۳۸۴}=b^{۱۳۸۴}$ و لذا $a=b$ و یا $a=-b$. با ترجمه‌ی این عبارت‌ها با استفاده از متغیر اصلی مسئله یعنی x، $x+۱=x-۲$ و یا $x+۱=۲-x$. حالت اول به $-۲=۱$ منجر می‌شود که امکان ندارد، اما از حالت دوم جواب $x=\frac{۱}{۲}$ به دست می‌آید که تنها جواب مسئله است.

۳. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

$$D\cap C=(A-B)\cap C=A\cap B^c\cap C$$

$$\begin{aligned} F &= D-E=D\cap E^c=(A-B)\cap(B-C)^c=(A\cap B^c)\cap(B\cap C^c)^c= \\ &= A\cap(B^c\cap(B^c\cup C))=A\cap B^c \end{aligned}$$

پس به وضوح حکم مسئله برقرار است.

توضیح ۱. استفاده از نمودار ون در چنین سؤالاتی بسیار سودمند است.

توضیح ۲. $A=\{۱,۲\}$، $B=\{۲,۳\}$ و $C=\{۲\}$ مثال نقضی برای همه‌ی گزینه‌های دیگر است.

۴. گزینه‌ی (د) صحیح است.

برای ایجاد $x^۵$ باید از هر کدام از ۴ پرانتز مسئله یکی از جملات انتخاب شود طوری که مجموع توان‌های آن‌ها برابر ۵ باشد.

از هیچ‌کدام از دو پرانتز $x^۸+x^۴+۱$، نمی‌تواند جمله‌ی $x^۸$ انتخاب شود و ضمناً نمی‌توان هم‌زمان از هر دوی آن‌ها $x^۴$ انتخاب کرد زیرا در هر دو صورت مجموع توان‌ها از ۵ بیش‌تر می‌شود.

اگر از یکی از دو $x^۸ + x^۴ + ۱$، جمله‌ی $x^۴$ انتخاب شود از دیگری باید لزوماً ۱ را انتخاب کنیم و در این حالت از یکی از دو پرانتز باقی‌مانده و از دیگری $۲x$ باید انتخاب شود. بنابراین چهار حالت داریم که هر کدام منجر به یک جمله‌ی $۲x^۵$ و در مجموع $۸x^۵$ می‌شوند.

اگر از هر دو پرانتز $x^۸ + x^۴ + ۱$، ۱ انتخاب شود باید از دو پرانتز دیگر دو جمله انتخاب کنیم که مجموع توان‌های آن‌ها ۵ باشد پس در این حالت ضریب $x^۵$ برابر $۵۶ = (۴ \times ۳ + ۵ \times ۲ + ۶ \times ۱)۲$ می‌شود.

یعنی ضریب $x^۵$ در مجموع $۶۴ = ۸ + ۵۶$ است.

۵. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

فرض کنید ناصر عدد α را انتخاب کرده باشد، در این صورت منصور برای این که امتیاز کم‌تری به ناصر برسد سعی می‌کند عددی را به جای y قرار دهد تا $f(\alpha, y) = y^۲ - ۲\alpha y + -\alpha^۲ + ۲\alpha + ۱$ کم‌ترین مقدار ممکن شود. این عبارت یک رابطه‌ی درجه دوم برحسب y است که کم‌ترین مقدار آن وقتی است که y برابر $\alpha = -\frac{-۲\alpha}{۲}$ باشد و این کم‌ترین مقدار برابر است با $f(\alpha, \alpha) = -۲\alpha^۲ + ۲\alpha + ۱$. یعنی با فرض این‌که منصور خوب بازی می‌کند ناصر با انتخاب α به $-۲\alpha^۲ + ۲\alpha + ۱$ امتیاز می‌رسد. پس ناصر باید α را طوری انتخاب کند که این مقدار بیش‌ترین مقدار ممکن خود باشد. بیش‌ترین مقدار این عبارت زمانی است که α برابر $\frac{۱}{۲} = -\frac{۲}{۲\times(-۲)}$ و این بیش‌ترین مقدار برابر است با $\frac{۳}{۲} = ۱ + (\frac{۱}{۲})۲ + {}^۲(\frac{۱}{۲})۲-$.

۶. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

با تقسیم کردن خواهیم داشت:

$$x^۳ + ax + ۱ = (x + ۳)(x^۲ - ۳x + b) + \ (a - b + ۹)x + ۱ - ۳b$$

اگر طبق فرض مقسوم بر مقسوم‌علیه بخش‌پذیر باشد، باقی‌مانده باید متحد با صفر باشد.

$$(a - b + ۹)x + (۱ - ۳b) \equiv ۰ \Rightarrow \begin{cases} a - b + ۹ = ۰ \Rightarrow a = -۹ + b \\ ۱ - ۳b = ۰ \Rightarrow b = \dfrac{۱}{۳} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a + ۲b = (-۹ + b) + ۲b = -۹ + ۳b = -۹ + ۳(\frac{۱}{۳}) = -۹ + ۱ = -۸$$

۷. گزینه‌ی (د) صحیح است.

می‌دانیم ضرب ماتریس‌ها روی جمع پخش می‌شود اما خاصیت جابه‌جایی ندارد(لزوماً AB و BA با هم برابر نیستند.)، پس $(A+B)^۲ = (A+B)(A+B) = A^۲ + AB + BA + B$. با مقایسه‌ی این رابطه با فرض مسئله می‌فهمیم $AB = BA$ و لذا

$$\left.\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} ۱ & x \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ y & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱+xy & ۱+x \\ ۱+y & ۲ \end{bmatrix} \\ BA &= \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ y & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & x \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & x+۱ \\ y+۱ & xy+۱ \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \Rightarrow xy+۱ = ۲ \Rightarrow xy = ۱$$

۸. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

راه‌حل اول. دو دایره‌ی وسط که هر کدام با سه دایره‌ی دیگر مجاور هستند را دایره‌ی مرکزی می‌نامیم. در دو برچسب‌گذاری یک‌سان باید برچسب دایره‌های مرکزی یکی باشد زیرا در غیر این صورت حرفی وجود دارد که در یکی از دو برچسب‌گذاری در دایره‌ی مرکزی است و با سه حرف دیگر مجاور است اما در برچسب‌گذاری دیگر تنها با یک حرف مجاور است.

بنابراین برای مشخص کردن یک برچسب‌گذاری ابتدا به $C(۶,۲) = \frac{۶!}{۲!\times۴!} = ۱۵$ حالت دو حرف دایره‌های مرکزی را انتخاب می‌کنیم، سپس دو حرف از چهار حرف باقی مانده را انتخاب می‌کنیم که مجاور حرفی باشد که زودتر در الفبا ظاهر می‌شود(a زودتر از b، b زودتر از c و... ظاهر می‌شود.) این کار به $c(۴,۲) = \frac{۴!}{۲!\times۲!} = ۶$ حالت امکان‌پذیر است. دو حرف باقی‌مانده هم در دو دایره‌ی باقی‌مانده قرار می‌گیرند. پس در کل $۹۰ = ۶ \times ۱۵$ برچسب‌گذاری داریم.

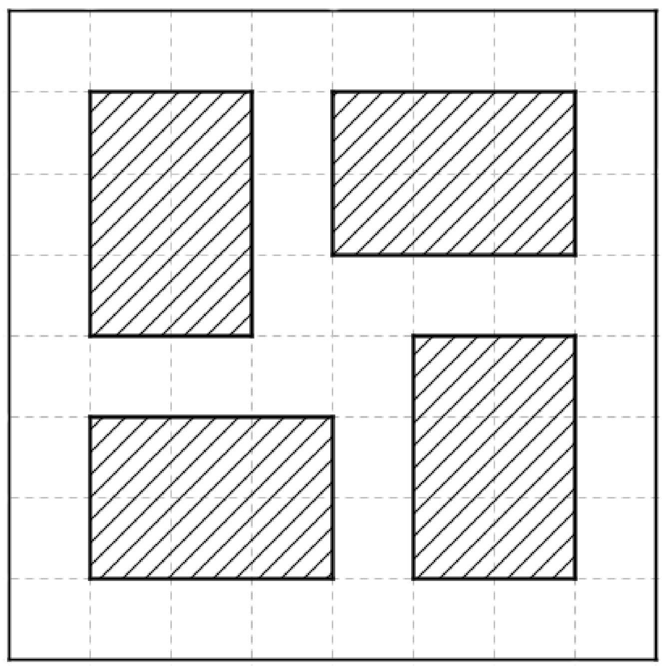
راه‌حل دوم. اگر فرض کنیم هر دو برچسب‌گذاری با هم متفاوت هستند، تعداد کل برچسب‌گذاری‌ها $۷۲۰ = ۶!$ تا می‌شود. برای یک برچسب‌گذاری خاص مثل شکل زیر تعداد برچسب‌گذاری‌هایی که طبق تعریف مسئله با آن یک‌سان هستند می‌شماریم.

در هر برچسب‌گذاری یک‌سان با این برچسب‌گذاری باز هم حرف‌های a و b باید در دایره‌های مرکزی باشند. پس بسته به این که کدام حرف سمت چپ قرار گیرد دو حالت داریم. در هر کدام از حالت‌ها برای قرار دادن حرف‌های دایره‌های مجاور به دایره‌ی a دو حالت و برای قرار دادن حرف‌های دایره‌های مجاور به دایره‌ی b هم

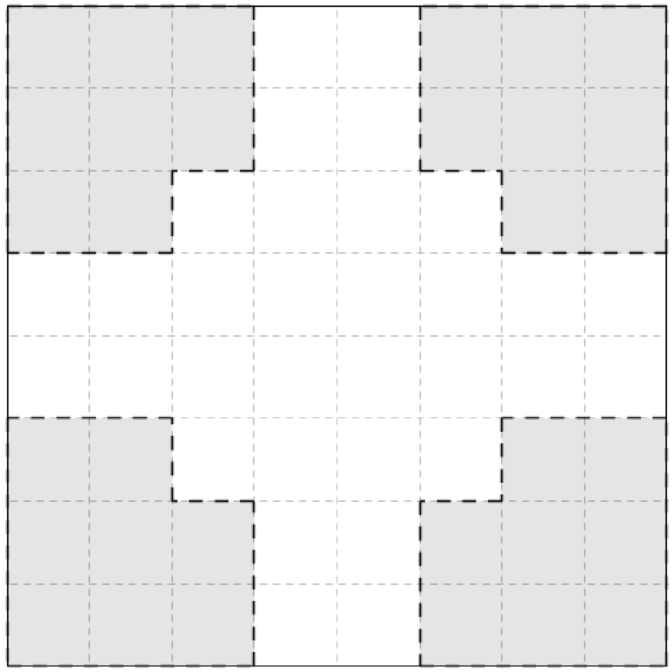
دو حالت داریم. پس در کل ۸ برچسب‌گذاری مشابه با این برچسب‌گذاری وجود دارد(با احتساب خودش). با توجه به این که با استدلال مشابه همین هر برچسب‌گذاری ۸ برچسب‌گذاری مشابه دارد، تعداد کل برچسب‌گذاری‌های متفاوت $۹۰ = \frac{۷۲۰}{۸}$ است.

۹. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

شکل زیر چهار مستطیل ۳×۲ را در جدولی ۸×۸ مشخص می‌کند، طوری که هیچ مستطیل دیگری در جدول جای نگیرد.



حال ادعا می‌کنیم به هر صورت که سه مستطیل ۳×۲ در جدول قرار دهیم، می‌توان یک مستطیل دیگر هم در جدول قرار داد. به چهار شکلی که در گوشه‌ی جدول زیر مشخص هستند دقت کنید. هر مستطیل ۳×۲ حداکثر با یکی از این چهار شکل گوشه‌ای خانه‌ی مشترک دارد. پس اگر تنها سه مستطیل داشته باشم یکی از این گوشه‌ها هست که هیچ کدام از خانه‌های آن پوشیده نشده است، و به وضوح در این شکل یک مستطیل ۳×۲ قرار می‌گیرد.



۱۰. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

ادعا می‌کنیم هر عدد طبیعی خوب مثل n اول است. اگر این طور نباشد مقسوم‌علیهی مثل a دارد که $n > a > ۱$. طبق فرض مسئله

$$\left.\begin{array}{l} ۷\big|a+۱,\ ۷\big|n+۱ \Rightarrow ۷\big|a+n+۲ \\ ۷\big|a+n \end{array}\right\} \Rightarrow ۷\big|۲$$

که این یک تناقض است. حال یک عدد اول p خوب است اگر $۷\big|p+۱$، که اعداد اول این‌چنینیِ کم‌تر از ۱۰۰، تنها $\{۱۳,۴۱,۸۳,۹۷\}$ هستند.

۱۱. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

اگر $p_۱^{\alpha_۱}p_۲^{\alpha_۲}\cdots p_k^{\alpha_k}$ تجزیه‌ی n به عوامل اول باشد، $S(n)$ را برابر مجموع $\alpha_۱+\alpha_۲+\cdots+\alpha_k$ تعریف می‌کنیم. ادعا می‌کنیم برای هر عدد طبیعی n که در فهرست ظاهر می‌شود، $S(m)$ فرد است. ابتدا تنها اعداد اول در فهرست هستند و برای هر عدد اول p، $S(p)=۱$ و فرد است. برای این منظور ادعا می‌کنیم در هر گام این فرد بودن حفظ می‌شود. فرض کنید همه‌ی اعدادی که تا یک مرحله در فهرست قرار دارند فرد هستند و در مرحله‌ی بعدی با استفاده از سه عدد a، b و c که در فهرست قرار دارند عدد abc را اضافه کنیم. می‌دانیم $S(abc)=S(a)+S(b)+S(c)$، حال چون $S(a)$، $S(b)$ و $S(c)$ فرد هستند، $S(abc)$ هم فرد می‌شود.

حال باید دید برای اعداد هر گزینه مقدار S چه‌قدر است.

$$\begin{aligned} S(۱۰۰۰) &= S(۲^{۳} \times ۵^{۳}) = ۶ \\ S(۳۳۰) &= S(۲ \times ۳ \times ۵ \times ۱۱) = ۴ \\ S(۳۵۰۰۰۰) &= S(۲^{۴} \times ۵^{۵} \times ۷) = ۱۰ \\ S(۳۷۵) &= S(۳ \times ۵^{۳}) = ۴ \\ S(۱۰۵۰۰) &= S(۲^{۲} \times ۳ \times ۵^{۳} \times ۷) = ۷ \end{aligned}$$

پس تنها گزینه‌ی (ه) می‌تواند صحیح باشد. با فرآیند زیر نشان می‌دهیم که با در هر گام با استفاده از اعداد اول و عدد به دست آمده در گام قبلی می‌توان به عدد ۱۰۵۰۰ در فهرست رسید.

$$۲,۳,۵ \rightarrow ۳۰, \quad ۳۰,۲,۵ \rightarrow ۳۰۰, \quad ۳۰۰,۵,۷ \rightarrow ۱۰۵۰۰$$

توضیح: با فرآیندی شبیه به بالا می‌توان نشان داد غیر از اعداد اول، تنها اعداد طبیعی nای در فهرست ظاهر می‌شود که حداقل سه عامل اول داشته باشد و ثانیاً $S(n)$ فرد باشد.

۱۲. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

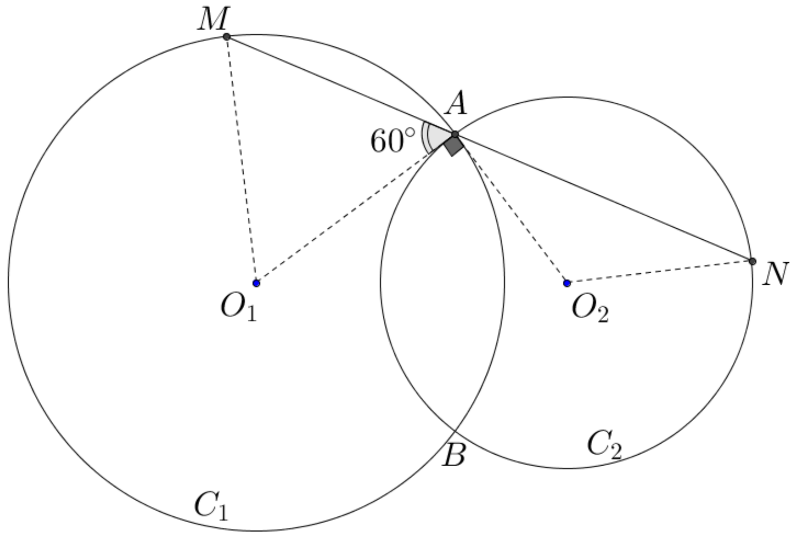
محاسبه‌ی این حاصل‌جمع را با توجه به تعداد ارقام به سه قسمت تقسیم می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \sum_{n=۱}^{۹} p(n) &= \sum_{i=۱}^{۹} i = ۴۵ \\ \sum_{n=۱۰}^{۹۹} p(n) &= \sum_{i=۱}^{۹}\sum_{j=۰}^{۹}(i \times j) = (\sum_{i=۱}^{۹} i)(\sum_{i=۰}^{۹} j) = (\sum_{i=۱}^{۹} i)^{۲} = ۴۵^{۲} \\ \sum_{n=۱۰۰}^{۹۹۹} p(n) &= \sum_{i=۱}^{۹}\sum_{j=۰}^{۹}\sum_{k=۰}^{۹}(i \times j \times k) = (\sum_{i=۱}^{۹} i)(\sum_{i=۰}^{۹} j)(\sum_{k=۰}^{۹} k) = (\sum_{i=۱}^{۹} i)^{۳} = ۴۵^{۳} \end{aligned}$$

بنابراین

$$\sum_{n=۱}^{۹۹۹} p(n) = ۴۵ + ۴۵^{۲} + ۴۵^{۳} = ۹۳۱۹۵$$

۱۳. گزینه‌ی (الف) صحیح است.



با توجه به شکل بالا می‌بینیم که طول AM طبق فرض مسئله برابر ۴ است. از طرف دیگر $MO_۱$ و $AO_۱$ که شعاع‌های دایره‌ی $C_۱$ هستند، طولی برابر ۴ دارند، پس مثلث $AMO_۱$ متساوی‌الاضلاع است و لذا $\angle MAO_۱ = ۶۰^\circ$. به علاوه طبق قضیه‌ی فیثاغورس مثلث $AO_۱O_۲$ هم قائم‌الزاویه است ($۵^۲ = ۴^۲ + ۳^۲$).

بنابراین زاویه‌ی $\angle NAO_۲$ در مثلث متساوی‌الساقین $AO_۲N$ برابر ۳۰° است و لذا با یک محاسبه‌ی ساده نتیجه می‌شود که $AN = ۳\sqrt{۳}$ و بنابراین $MN = MA + AN = ۴ + ۳\sqrt{۳}$.

۱۴. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

فرض کنید a_k تعداد ضربات لازم برای از بین بردن یک سر با k چشم باشد. در این صورت $a_۱ = ۱$، ضمناً اگر $k > ۱$ با یک ضربه به این سر، باید تمام سرهای جدید را از بین ببرد و از آن‌جا که برای هر $i < k$ دیو یک سر i چشم درآورده است به a_i ضربه برای از بین بردن این سر احتیاج دارد. پس

$$a_k = a_{k-۱} + a_{k-۲} + \cdots + a_۱ + ۱$$

از آن‌جا که $a_۱ = ۱$، با استفاده از رابطه‌ی بالا می‌فهمیم $a_۲ = ۲$، $a_۳ = ۴$ و با استفاده از استقرا به راحتی دیده می‌شود که $a_k = ۲^{k-۱}$. پس برای از بین بردن یک سر k چشم، $۲^{k-۱}$ ضربه نیاز است.

سرهای دیو به ترتیب ۴، ۶ و ۸ چشم دارند، پس برای از بین بردن کامل دیو به

$$a_۴ + a_۶ + a_۸ = ۲^۳ + ۲^۵ + ۲^۷ = ۸ + ۳۲ + ۱۲۸ = ۱۶۸$$

ضربه نیاز است.

۱۵. گزینه‌ی (د) صحیح است.

در زیر بررسی می‌کنیم که اگر هر کدام از گزینه‌ها درست باشند چه می‌شود:

الف. این امکان ندارد زیرا در صورت درست بودن (الف) باید (ب) هم درست باشد(آن‌چه (الف) می‌گوید) که ممکن نیست.

ب. اگر (ب) درست باشد، چون تنها یک گزینه‌ی درست داریم باید (الف) غلط باشد، اما غلط بودن (الف) به معنی غلط بودن (ب) هست. پس این گزینه هم نمی‌تواند درست باشد.

ج. اگر (ج) درست باشد، گزینه‌ی (ه) به ناچار غلط است، اما غلط بودن گزینه‌ی (ه) یعنی هیچ‌کدام از (ج) و (ه) درست نیستند که با فرض اولیه تناقض دارد. پس این گزینه هم نمی‌تواند گزینه‌ی درست باشد.

د. اگر (د) درست باشد. گزینه‌ی (الف) که بیان می‌کند (ب) صحیح است، غلط می‌شود. گزینه‌ی (ب) که بیان می‌کند (ج) و (د) هر دو غلط هستند به خاطر فرض درستی (د) غلط می‌شود. گزینه‌ی (ج) که بیان می‌کند (ج) غلط است هم غلط می‌شود. درستی گزینه‌ی (د) تناقضی با خودش ندارد. در مورد گزینه‌ی ه، غلط بودن آن نتیجه می‌دهد که (ج) و (ه) باید هر دو غلط باشند که از قضا این درست است. پس گزینه‌ی (د) باید گزینه‌ی صحیح باشد.

ه. درستی (ه) نتیجه می‌دهد (ب) غلط است و لذا باید یکی از (ج) و (د) درست باشند که این طور نیست پس این گزینه هم غلط است.

۱۶. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

برای این‌که عدد طبیعی چهاررقمی $\overline{xyzt}$ مضرب ۵ باشد باید $t \in \{۰,۵\}$. به علاوه اگر یکی از اعداد x، $\overline{xy}$ و $\overline{xyz}$ مضرب سه باشند این عدد تقسیمی می‌شود. بنابراین عدد $\overline{xyzt}$ غیر تقسیمی است اگر $t \in \{۰,۵\}$ و $\bar{x}$، $\overline{xy}$ و $\overline{xyz}$ بر سه بخش‌پذیر نباشند. معادلاً x، $x + y$ و $x + y + z$ بر سه بخش‌پذیر نباشد.(یک عدد طبیعی بر ۳ بخش‌پذیر است، اگر و تنها اگر مجموع ارقامش بر ۳ بخش‌پذیر باشد.) بنابراین می‌توان از روی باقی‌مانده‌ی تقسیم x، y و z تشخیص داد که یک عدد تقسیمی هست یا نه. با بررسی حالت‌های مختلفی که باقی‌مانده‌های x، y و z می‌تواند داشته باشد می‌بینیم که تنها حالت‌های زیر منجر به یک عدد غیرتقسیمی می‌شوند.

باقی‌مانده‌ی تقسیم x بر ۳	۱	۱	۱	۱	۲	۲	۲	۲
باقی‌مانده‌ی تقسیم y بر ۳	۰	۰	۱	۱	۰	۰	۲	۲
باقی‌مانده‌ی تقسیم z بر ۳	۰	۱	۰	۲	۰	۲	۰	۱
تعداد حالت‌ها برای x	۳	۳	۳	۳	۳	۳	۳	۳
تعداد حالت‌ها برای y	۴	۴	۳	۳	۴	۴	۳	۳
تعداد حالت‌ها برای z	۴	۳	۴	۳	۴	۳	۴	۳
تعداد حالت‌ها	۴۸	۳۶	۳۶	۲۷	۴۸	۳۶	۳۶	۲۷

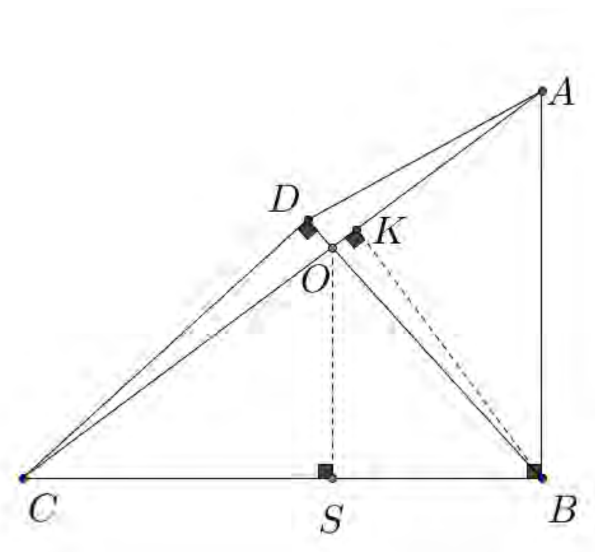
با توجه به این‌که برای t هم دو حالت داریم، تعداد کل اعداد مضرب ۵ غیرتقسیمی ۵۸۸تا است.

$$۲(۲۷ + ۳۶ + ۳۶ + ۴۸ + ۲۷ + ۳۶ + ۳۶ + ۴۸) = ۵۸۸$$

۱۷. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

از B عمودی بر AC رسم می‌کنیم و پای این عمود را K می‌نامیم. در این صورت- $\angle CDB = \angle CKB$ و لذا چهارضلعی $CDKB$ محاطی است و در نتیجه- دو مثلث ODC و OKB متشابه هستند. بنابراین

$$\frac{DC}{KB} = \frac{CO}{OB} = \frac{CO}{۳} \Rightarrow CO = ۳\frac{DC}{KB} = ۳\frac{AB}{KB} \quad (\star)$$



از طرف دیگر دو مثلث AKB و ABC هم متشابه هستند و لذا

$$\frac{AB}{KB} = \frac{AC}{BC} = \frac{AC}{۵} \overset{\star}{\Rightarrow} CO = \frac{۳}{۵}AC$$

حال از O بر BC عمود می‌کنیم و پای عمود را S می‌نامیم. OS و AB هر دو بر BC عمود هستند و لذا با هم موازی‌اند. بنابراین طبق قضیه‌ی تالس داریم:

$$\frac{CO}{AC} = \frac{CS}{AB} \Rightarrow \frac{۳}{۵} = \frac{CS}{۵} \Rightarrow CS = ۳, BS = ۲$$

و در نهایت با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی OBS و OSC خواهیم داشت:

$$OC^{۲} = OS^{۲} + SC^{۲} = BO^{۲} - BS^{۲} + SC^{۲} = ۹ - ۴ + ۹ = ۱۴$$

و بنابراین $OC = \sqrt{۱۴}$.

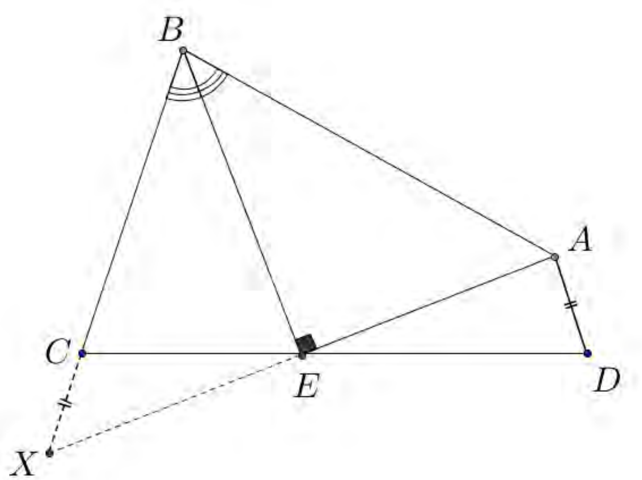
۱۸. گزینه‌ی (د) صحیح است.

با یک بررسی ساده می‌بینیم که ترکیب اعمال گفته شده در صورت مسئله در حقیقت همان دوران ۷۲° ساعت‌گرد به مرکز مبدأ است و بنابراین انجام این عمل برای ۱۳۸۲ مرحله معادل دورانی به اندازه‌ی ۷۲×۱۳۸۲ درجه است. اما می‌دانیم که دوران ۳۶۰ درجه و مضارب ۳۶۰ درجه همان دوران صفر درجه است. پس

$$۱۳۸۲ \times ۷۲ = ۱۳۸۰ \times ۷۲ + ۲ \times ۷۲ = (۱۳۸ \times ۲) \times ۳۶۰ + ۱۴۴$$

کل این عمل دورانی ۱۴۴درجه در جهت حرکت عقربه‌های ساعت است و لذا $x = ۴$ و $y = ۵$ است.

۱۹. گزینه‌ی (ج) صحیح است.



AE را امتداد می‌دهیم تا امتداد BC را در نقطه‌ی X قطع کند. در این صورت دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی AEB و XEB به حالت وتر و یک زاویه($\angle ABE = \angle XBE$) با هم برابر هستند و در نتیجه $XE = AE$ ($\star$)و $BX = AB$ ($\star\star$). حال با استفاده از قضیه‌ی سینوس‌ها در مثلث‌های XEC و ADE داریم:

$$\frac{\sin(\angle ADE)}{AE} = \frac{\sin(\angle DEA)}{AD}, \quad \frac{\sin(\angle XCE)}{XE} = \frac{\sin(\angle XEC)}{XC}$$

با توجه به این که $\angle ADE = \angle BCE$، دو زاویه‌ی $\angle ADE$ و $\angle XCE$ مکمل هستند و در نتیجه سینوس برابر دارند. این موضوع و $\star$ نتیجه می‌دهد که

$$\frac{\sin(\angle ADE)}{AE} = \frac{\sin(\angle XCE)}{XE} \Rightarrow \frac{\sin(\angle DEA)}{AD} = \frac{\sin(\angle XEC)}{XC}$$

اما دو زاویه‌ی $\angle XEC$ و $\angle DEA$ متقابل‌به‌رأس هستند و لذا سینوس برابر دارند. بنابراین $XC = AD$ و

$$(\star\star) \Rightarrow AB = BX = BC + XC = BC + AD$$

که همان چیزی است که گزینه‌ی (د) به آن اشاره می‌کند.

۲۰. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

طبق رابطه‌ی اول داریم:

$$a^{۳} + (-b)^{۳} + ۱^{۳} = ۳a(-b)(۱)$$

این یعنی مجموع مکعب‌های سه عدد برابر حاصل‌ضرب آن‌ها شده است. طبق اتحاد اویلر این نتیجه می‌دهد این سه عدد با هم برابر هستند و یا این که مجموع آن‌ها برابر صفر است. اگر $a = -b = ۱$، $۱ + a^{۵} = ۲$ درحالی که $b^{۵} = -۱$ پس این حالت امکان ندارد و $a - b + ۱ = ۰$، معادلاً $b = a + ۱$. حال اگر این نتیجه را در رابطه‌ی دوم جای‌گذاری کنیم خواهیم داشت:

$$۱ + a^{۵} = (۱ + a)^{۵} \Rightarrow (۱ + a)((۱ + a)^{۴} - (a^{۴} - a^{۳} + a^{۲} - a + ۱)) = ۰$$
$$(۱ + a)^{۴} - (a^{۴} - a^{۳} + a^{۲} - a + ۱) = ۵a^{۳} + ۵a^{۲} + ۵a = ۵a(a^{۲} + a + ۱)$$
$$\Rightarrow ۵a(a + ۱)(a^{۲} + a + ۱) = ۰$$

از آن‌جا که $a^{۲} + a + ۱ > ۰$، تنها جواب‌های معادله‌ی اخیر $a = ۰$ و $a = -۱$ هستند که به ترتیب منجر به $b = ۱$ و $b = ۰$ می‌شوند. پس این دست‌گاه در مجموع دو جواب دارد.

۲۱. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

دقت کنید که $a + \frac{۱}{a} - ۲ = (\frac{a - ۱}{\sqrt{a}})^{۲}$ و $a^{۳} + \frac{۱}{a^{۳}} - ۲ = (\frac{a^{۳} - ۱}{a\sqrt{a}})^{۲}$. پس

$$a^{۳} + \frac{۱}{a^{۳}} - ۲ \geq \lambda(a + \frac{۱}{a} - ۲) \Leftrightarrow (\frac{a^{۳} - ۱}{a\sqrt{a}})^{۲} - \lambda(\frac{a - ۱}{\sqrt{a}})^{۲} \geq ۰$$
$$\Leftrightarrow (\frac{a - ۱}{\sqrt{a}})^{۲}((\frac{a^{۲} + a + ۱}{a})^{۲} - \lambda) \geq ۰ \Leftrightarrow (\frac{a^{۲} + a + ۱}{a})^{۲} \geq \lambda$$

یعنی باید بزرگ‌ترین مقدار λ را بیابیم که رابطه‌ی بالا را برآورده کند. این یعنی باید کم‌ترین مقدار عبارت $(\frac{a^{۲}+a+۱}{a})^{۲}$را پیدا کنیم.

$$(\sqrt{a} - \frac{۱}{\sqrt{a}})^{۲} \Rightarrow a + \frac{۱}{a} \geq ۲ \Rightarrow \frac{a^{۲} + a + ۱}{a} = a + \frac{۱}{a} + ۱ \geq ۳$$
$$\Rightarrow (\frac{a^{۲} + a + ۱}{a})^{۲} \geq ۳^{۲} = ۹$$

پس بیش‌ترین مقدار ممکن برای λ، ۹ است.

۲۲. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

منظور از زاویه‌ی قورباغه، زاویه‌ای است که خط واصل بین قورباغه با جهت مثبت محور y می‌سازد. دقت کنید که زاویه را با حرکت در جهت عقربه‌های ساعت اندازه‌گیری می‌کنیم. در هر حرکت جدید زاویه‌ی قورباغه ۴۵درجه افزایش پیدا می‌کند، پس بعد از ۱۵ مرحله قورباغه زاویه‌ی قورباغه $۱۵ \times ۴۵^{\circ} = ۳۱۵^{\circ}$ می‌شود و بنابراین قورباغه روی قسمتی از خط $y = -x$ که درون ربع دوم مختصات قرار دارد، خواهد بود.

به علاوه اگر فاصله‌ی قورباغه تا مبدأ مختصات بعد از گام nاُم را d_n بنامیم. $d_{n+۱}$ طول وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقینی است که طول ساق آن برابر d_n است. بنابراین $d_{n+۱} = \sqrt{۲}d_n$. پس

$$d_{۱۵} = \sqrt{۲}.d_{۱۴} = (\sqrt{۲})^{۲}d_{۱۳} = \cdots = (\sqrt{۲})^{۱۵}d_{۰} = (\sqrt{۲})^{۱۵} = ۲^{۷}\sqrt{۲} = ۱۲۸\sqrt{۲}$$

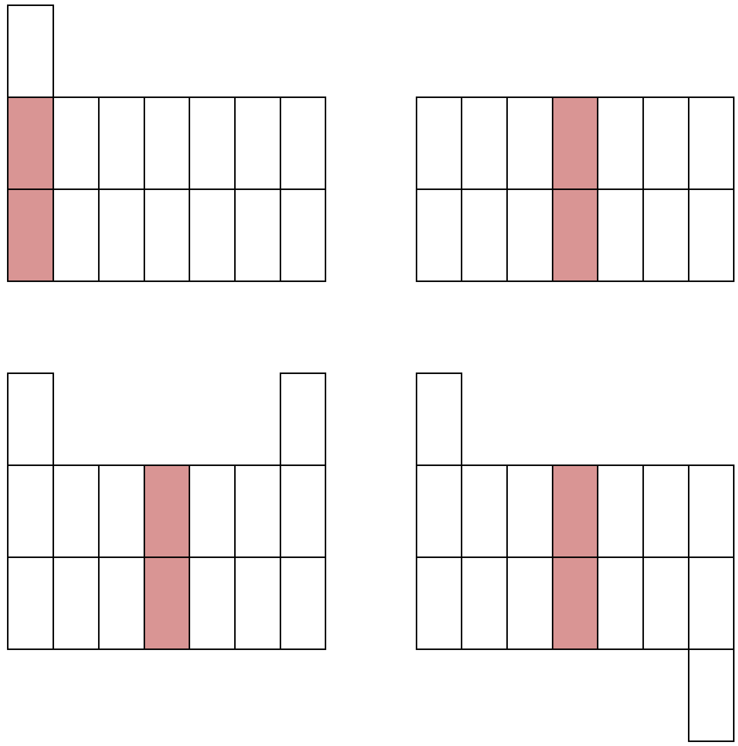
با توجه به این‌که (a,b) روی خط $y = -x$ قرار دارد، $b = -a > ۰$ و

$$۲^{۱۵} = (۲^{۷}\sqrt{۲})^{۲} = d_{۱۵}^{۲} = a^{۲} + b^{۲} = ۲a^{۲} \Rightarrow a = -۲^{۷} = -۱۲۸$$

توضیح: می‌توان با اندکی تلاش به دست آورد که اگر قورباغه در خانه‌ی (x,y) قرار داشته باشد، بعد از جهش از این خانه با شیوه‌ای که در صورت سؤال بیان شده است به خانه‌ی $(x+y, y-x)$ می‌رود. (در حقیقت بردار (x,y) با دوران ۹۰درجه‌ی آن در جهت ساعت‌گرد یعنی $(y,-x)$ جمع می‌شود.)

۲۳. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

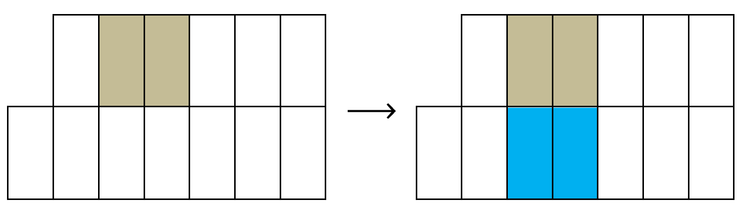
ادعا می‌کنیم در گزینه‌های (الف)، (ب)، (ج) و (د) نفر اول همواره می‌تواند برنده‌ی بازی باشد. به این صورت که در هر کدام از این چهار گزینه مطابق شکل زیر با قرار دادن این کاشی زمین بازی شکلی است که دارای یک خط تقاران یا یک مرکز تقارن است و به علاوه در این زمین جدید نفر دوم شروع کننده‌ی بازی است. حالا نفر اول در هر گام قرینه‌ی خانه‌هایی که نفر دوم با یک کاشی پر کرده است را با یک کاشی جدید پر می‌کند. با این نحوه‌ی بازی اگر نفر دوم بازی کند، نفر اول حتماً می‌تواند حرکت بعد از آن را هم انجام دهد و لذا نفر اول نمی‌تواند بازنده باشد و بنابراین حتماً برنده است.



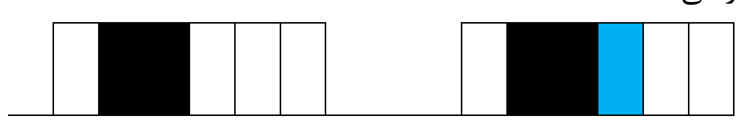
حال روشی ارایه می‌دهیم که نفر دوم می‌تواند با این روش در گزینه‌ی (ه) برنده‌ی بازی باشد.

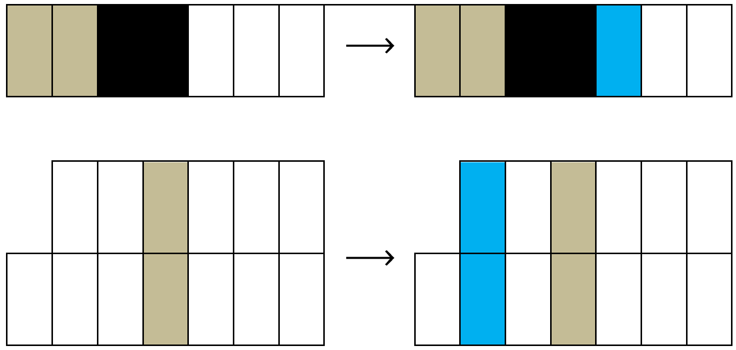
اگر نفر اول یک کاشی افقی را در جدول قرار دهد طوری که شامل تک‌خانه‌ی پایین چپ جدول نباشد، نفر دوم یک کاشی افقی را دقیقاً پایین یا بالای کاشی نفر اول قرار می‌دهد.(اگر نفر اول در ردیف پایین گذاشته باشد، نفر دوم در ردیف بالا می‌گذارد و بالعکس)

در زیر شکل سمت چپ حرکت نفر اول و شکل سمت راست حرکت نفر دوم را تصویر می‌کند. خانه‌های مشکی رنگ هم خانه‌هایی را نشان می‌دهند که قبلاً با کاشی پر شده اند.



اگر نفر اول یک کاشی عمودی در جدول قرار دهد، یا این‌که یک کاشی افقی را مطابق شکل زیر طوری قرار دهد که تک‌خانه‌ی پایین سمت چپ جدول را بپوشاند، نفر دوم یک کاشی عمودی را در اولین ستون از سمت چپ که کاملاً خالی باشد قرار می‌دهد.





وقتی نفر اول و دوم یک دور بازی خود را انجام دهند، دو ستون از ستون‌های دوتایی جدول غیرقابل قابل استفاده می‌شود، اگر نفر اول یک بار از حرکت‌های دوم استفاده کند، تک ستون یک خانه‌ای هم غیرقابل استفاده می‌گردد. بنابراین در هر دو بازی هر دو نفر اول و دوم ۲ ستون از شش ستون کامل جدول(غیر از تک ستون ناقص) غیرقایل استفاده می‌شود. بنابراین با ادامه‌ی این روند به وضعیتی می‌رسیم که نفر اول نتواند بازی را ادامه دهد.

۲۴. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

فرض کنید ساعت ۵ و x دقیقه باشد، در این صورت زاویه‌ی عقربه‌ی دقیقه‌شمار نسبت به نقطه‌ی صفر (همان۱۲)، $\frac{x}{۶۰}\times ۳۶۰ = ۶x$ درجه و زاویه‌ی عقربه‌ی ساعت‌شمار برابر $۵\times ۳۰ + \frac{x}{۶۰}\times ۳۰ = ۱۵۰ + \frac{x}{۲}$ درجه باشد. حال اگر در ساعت a و b دقیقه عقربه‌ها در وضعیت مشابهی قرار داشته باشند. در این صورت:

$$۳۰a + \frac{b}{۲} = ۶x \Rightarrow ۶\Big|\frac{b}{۲} \Rightarrow ۱۲\big|b$$
$$۶b = ۱۵۰ + \frac{x}{۲} \Rightarrow ۶\Big|\frac{x}{۲} \Rightarrow x = ۱۲k\ (۰ \leq k \leq ۵)$$
$$\Rightarrow ۶b = ۱۵۰ + ۶k \Rightarrow b = ۲۵ + k$$

با توجه به این که b بر ۱۲ بخش‌پذیر است، باید $k+۱$ بر ۱۲ بخش‌پذیر باشد که برای $k = ۰,۱,\dots,۵$ امکان ندارد.

۲۵. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

رشته‌ی مرحله‌ی iاُم را با A_i نمایش می‌دهیم. هم‌چنین منظور ما از نماد A_iA_j این است که رشته‌ی مربوط به A_i در سمت چپ رشته‌ی A_j قرار گرفته است. به طور مثال $A_۳ = A_۲A_۱$.

به استقرا نشان می‌دهیم برای هر عدد طبیعی m، $A_{3m+2} = A_{3m-1}A_{3m-2}A_{3m-1}A_{3m-1}A_{3m-2}$. (با اندکی بازی کردن برای رسیدن به A_5 و سپس A_8 از روی A_5 و با توجه به این که باقی‌مانده‌ی تقسیم ۱۳۸۲ بر ۳ برابر ۲ است می‌توان این رابطه را حدس زد.)

برای حالت $m = 1$ که حکم به وضوح برقرار است. ($A_5 = A_2A_1A_2A_2A_1$)

حال فرض کنید حکم برای k برقرار باشد، یعنی:

$$A_{3k+2} = A_{3k-1}A_{3k-2}A_{3k-1}A_{3k-1}A_{3k-2}$$

حال اگر باکتری‌ها سه مرحله رشد کنند به اندیس هر A_nای سه واحد اضافه می‌گردد. پس

$$A_{3(k+1)+2} = A_{3k+5} = A_{3k+2}A_{3k+1}A_{3k+2}A_{3k+1}A_{3k+2}$$

و حکم ثابت می‌شود. حال از آن‌جا که تعداد باکتری‌های دو رشته‌ی $A_{3m-1}A_{3m-2}$ و $A_{3m-2}A_{3m-1}$ یک‌سان و برابر مجموع تعداد باکتری‌های رشته‌های A_{3m-1} و A_{3m-2} است، سه باکتری وسطی مربوط به A_{3m+2} همان سه باکتری وسطی مربوط به A_{3m-1} است و با استدلال مشابه سه باکتری وسطی A_{3m-1} همان سه باکتری وسطی A_{3m-4} است. با ادامه‌ی همین فرآیند می‌فهمیم که سه باکتری وسطی A_{3m+2} همان سه باکتری وسطی A_5 است. پس با توجه به این‌که $1382 = 3\times460 + 2$ گزینه‌ی (الف) گزینه‌ی درست است.

۲۶. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

ابتدا دقت کنید که n باید عددی فرد باشد. زیرا اگر n بر ۲ بخش‌پذیر شود:

$$0 \equiv 2^n + 3^n \equiv 2^n + (-2)^n \equiv 2^n + 2^n \equiv 2^{n+1} \pmod{5}$$

که امکان ندارد. حال برای $n \geq 3$ داریم: (حالت $n = 1$ و $n = 2$ به وضوح جواب نیستند.)

(دقت کنید که همه‌ی روابط زیر بالا به پیمانه‌ی ۱۲۵ هستند.)

$$0 \equiv 2^n + 3^n \equiv 2^n + (5-2)^n \equiv 2^n + \binom{n}{n}5^n(-2)^0 + \cdots + \binom{n}{1}5^1(-2)^{n-1} + \binom{n}{0}5^0(-2)^n$$

$$\equiv 2^n - \frac{n(n-1)}{2}5^2 \times 2^{n-2} + 2^{n-1} \times 5 \times n - 2^n \equiv 2^{n-3}(-25n^2 + 45n)$$

حال با استفاده‌ی از رابطه‌ی بالا خواهیم داشت:

$$۱۲۵ \Big| ۲^{n-۳} \times ۵n(۵n-۹) \Rightarrow ۲۵ \Big| ۲^{n-۳} n(۵n-۹)$$

حال با توجه به این‌که $(۵,۲) = ۱$ و $(۵,۱) = ۱$ و $(۵,۵n-۹) = (۵,-۹) = (۹-۵) = ۱$ و با به کارگیری لم اقلیدس نتیجه می‌شود که باید n بر ۲۵ بخش‌پذیر باشد. کوچک‌ترین عدد طبیعی مضرب ۲۵ خودش است که مجموع ارقامش برابر ۷ می‌باشد. پس گزینه‌ی (ب) صحیح است.

۲۷. گزینه‌ی (ج) درست است.

اولاً فرض کنید $۱۰^{k-۱} \le n < ۱۰^{k}$ یک عدد ریشه‌دار k رقمی باشد. در این صورت $n = \overline{a_k a_{k-۱} \cdots a_۱}$. حال داریم

$$۱۰^{k-۱} \le n = (a_k + a_{k-۱} + \cdots + a_۱)^۲ < (۱۰k)^۲ \Rightarrow ۱۰^{k-۳} < k^۲$$

اما به سادگی به کمک استقرا می‌توان نشان داد که اگر k بزرگ‌تر از ۴ باشد، $۱۰^{k-۳} \ge k^۲$ و لذا عدد ریشه‌دار با بیش از ۴ رقم نداریم و بنابراین تعداد اعداد ریشه‌دار باید متناهی باشد.

حال ادعا می‌کنیم عدد ریشه‌دار ۴ رقمی هم وجود ندارد. اگر $n = \overline{abcd}$ یک عدد ریشه‌دار چهار رقمی باشد، این یعنی $۱۰۰۰ \le n = (a+b+c+d)^۲ < ۴۰^۲ = ۱۶۰۰$ پس $a = ۱$ و اگر a برابر یک باشد، باید داشته باشیم $۱۰۰۰ \le n = (۱+b+c+d)^۲ < (۱+۱۰+۱۰+۱۰)^۲ = ۳۱^۲ = ۹۶۱$ که امکان ندارد. پس عدد ریشه‌دار چهاررقمی هم نداریم. اما به وضوح ۸۱ یک عدد ریشه‌دار دورقمی است.

به علاوه دقت کنید که می‌دانیم باقی‌مانده‌ی تقسیم یک عدد بر ۹ با باقی‌مانده‌ی تقسیم مجموع ارقامش بر ۹ با هم برابر هستند. اگر مجموع ارقام n را با $S(n)$ نمایش دهیم، n ریشه‌دار است اگر $n = S(n)^۲$. پس باید

$$n \equiv S(n) \equiv n \equiv S(n)^۲ \equiv n^۲ \ (\text{به پیمانه‌ی } ۹)$$

پس باید $۹ \Big| n(n-۱)$، با توجه به این که n و $n-۱$ هر دو نمی‌توانند بر ۳ بخش‌پذیر باشند این تنها در صورتی امکان دارد که $۹ \Big| n$ و یا $۹ \Big| n-۱$. یعنی تمام اعداد ریشه‌دار به شکل $۹k$ و $۹k+۱$ هستند و غیر از این دو صورت عدد ریشه‌داری نداریم.

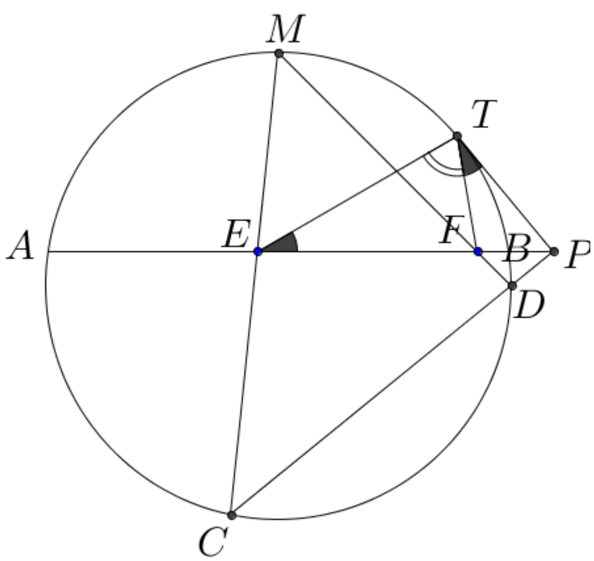
توضیح: دقت کنید که اگر n عددی ریشه‌دار باشد، از آن‌جا که $n < ۱۰۰۰$، $S(n) = \sqrt{n} < \sqrt{۱۰۰۰}$، پس $S(n) \le ۳۲$. اما $S(n) \equiv n \equiv ۰,۱ \ (\text{به پیمانه‌ی } ۹)$. پس $S(n) \in \{۱,۸,۹,۱۷,۱۸,۲۶,۲۷\}$.

اما

$$
\begin{aligned}
S(۸^۲) &= S(۶۴) &&= ۱۰ \neq ۸ \\
S(۱۷^۲) &= S(۲۸۹) &&= ۱۹ \neq ۱۷ \\
S(۱۸^۲) &= S(۳۲۴) &&= ۹ \neq ۱۸ \\
S(۲۶^۲) &= S(۶۷۶) &&= ۱۹ \neq ۲۶ \\
S(۲۷^۲) &= S(۷۲۹) &&= ۱۸ \neq ۲۷
\end{aligned}
$$

بنابراین تنها عددهای ریشه‌دار ۱ و ۸۱ هستند.

۲۸. گزینه‌ی (د) صحیح است.



ابتدا دقت کنید که $\angle MBE = \angle BCM = \frac{AB}{۲}$، بنابراین با توجه به این‌که زاویه‌ی $BME\angle$ در دو مثلث BME و $BM($ مشترک است، این مثلث متشابه هستند. نسبت تشابه این دو مثلث نتیجه می‌دهد $MB^۲ = ME.MC$. با استدلال کاملاً مشابه و با توجه به مثلث‌های AMF و $BA\,l$ به دست می‌آوریم $MA^۲ = MF.MD$. از آن‌جا که دو کمان MA و MB با هم برابر هستند، $MA^۲ = MB^۲$ و در نتیجه $ME.MC = MF.MD$ و این یعنی چهارضلعی $EFDC$ محاطی است. از محاطی بودن این چهارضلعی نتیجه می‌شود که $PF.PE = PD.PC$. اما طبق قوت P نسبت به دایره‌ی اصلی مسئله $PD.PC = PT^۲$. این رابطه نتیجه می‌دهد که دو مثلث PTF و PTE متشابه‌اند و لذا $\angle TEP = \angle PTF = ۳۰^\circ$. در نتیجه داریم $\angle TPE = ۱۸۰^\circ - ۳۰^\circ - ۳۰^\circ - ۷۰^\circ = ۵۰^\circ$.

۲۹. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

M را وسط ضلع AC و G را مرکز ثقل مثلث بگیرید. در این صورت نقطه‌ی A باید روی کمان درخور زاویه‌ی ۱۵۰° نظیر پاره‌خط BM باشد. از آن‌جا که طول AG برابر $\frac{۲}{۳}$ میانه‌ی نظیر رأس A است، کافی

است کم‌ترین مقدار ممکن برای AG را بیابیم و آن را در $\frac{۳}{۲}$ ضرب کنیم. فرض کنید O مرکز این کمان درخور باشد و نیم‌خط OG دایره را در نقطه‌ی X قطع کند. حال داریم

$$OG + GA \geq OA = OX \Rightarrow GA \geq OX - OG = XG$$

یعنی کم‌ترین مقدار ممکن طول GX است. حال باید طول GX را بیابیم. با توجه به قوت نقطه‌ی G داریم:

$$TG.GX = GA.GM = ۲ \Rightarrow (۲R - GX)GX = ۲$$

که T و R به ترتیب محل تماس دوم خط GX و دایره‌ی محیطی AMC و شعاع این دایره هستند.

$$R = \frac{۳}{۲\sin(۱۵۰^{\circ})} = ۳$$

پس $GX^۲ - ۶GX + ۲ = ۰$ و بنابراین $GX = ۳ \pm \sqrt{۷}$ که چون $GX < R = ۳$ تنها حالت $GX = ۳ - \sqrt{۷}$ قابل قبول است.

۳۰. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

T را نقطه‌ی وسط ضلع BC بگیرید و فرض کنید h_a، h_b، h_c و h_t به ترتیب طول عمودهای وارد از A، B، C و T بر MN باشند. از آن جا که قاعده‌ی هر سه مثلث همان MN است باید $h_b + h_c = h_a$. حال از آن‌جا که T نقطه‌ی وسط ضلع BC است، می‌توان به سادگی به کمک قضیه‌ی تالس نتیجه گرفت که $h_t = \frac{h_b + h_c}{۲} = \frac{h_a}{۲}$. حال فرض کنید خط واصل بین A و T، خط مذکور در صورت سؤال را در نقطه‌ی S قطع کند. در این صورت به دلیل قضیه‌ی تالس و توازی عمودهای وارد از T و A، $\frac{AS}{ST} = \frac{h_a}{h_t} = ۲$، پس S نقطه‌ای روی میانه‌ی نظیر ضلع BC از مثلث ABC است که این میانه را به نسبت یک به دو تقسیم می‌کند، پس باید مرکز ثقل مثلث باشد و بنابراین این خط همواره از مرکز ثقل مثلث که نقطه‌ای ثابت در صفحه‌ی مثلث است می‌گذرد.

سال ۱۳۸۳

زمان: ۲۴۰ دقیقه

۱. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

به ازای هر جمله‌ی ax^ix^j، جمله‌ی ax^jx^i نیز وجود دارد که در مجموع ضریبی زوج می‌سازد مگر اینکه $i=j$. به ازای حالاتی که i فرد باشد و ضریب x^i نیز زوج است، جمله‌ی x^{2i} ضریب زوج خواهد داشت.

در نتیجه به ازای $i=0,4,8,12,16$ ضرایبِ x^i، فرد هستند.

۲. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

بیایید از آخر مسئله را حل کنیم. فرض می‌کنیم که در حال حاضر روی سنگ iاُم هستیم و تعداد روش‌های مختلف برای رسیدن به سنگ ۷اُم را یادداشت می‌کنیم. ابتدا مسئله را برای سنگ ۷اُم حل می‌کنیم (۱ روش). سپس برای سنگ ۶اُم و ...

در هر مرحله کافی است که برای سنگ iاُم، مجموع تعداد روش‌های سنگ‌های $i+1$اُم تا $2i$اُم را محاسبه کنیم. در نتیجه جواب مسئله این‌گونه به دست می‌آید:

$$7:1 \ \rightarrow\ 6:1\ \rightarrow\ 5:2\ \rightarrow 4:4\ \rightarrow 3:7\ \rightarrow 2:11\ \rightarrow 1:11$$

۳. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

دو حالت برای انتخاب زیرمجموعه‌ها ممکن است:

حالت اول: یکی از اعضا در سه زیرمجموعه آمده باشد. تعداد حالات برابر است با: $6\times\binom{5}{3}=60$

حالت دوم: هر عضو دقیقا در دو زیرمجموعه آمده است. تعداد حالات برابر است با: $\binom{6}{3}=20$

تعداد کل روش‌ها برابر مجموع این دو حالت یعنی ۸۰ است.

۴. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

می‌دانیم باقی‌مانده‌ی تقسیم n^2 بر ۳ برابر صفر یا یک است پس این چنین عددی به صورت $3k$ و یا $3k+1$ است.

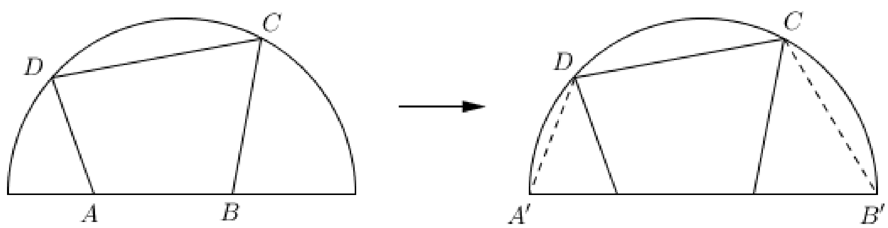
اگر به صورت $3k$ باشد: $\left[\frac{n^2}{3}\right]$ بر ۳ بخشپذیر است. در نتیجه تنها به ازای $\left[\frac{n^2}{3}\right]=3$ عدد اول خواهیم داشت.

اگر به صورت $3k+1$ باشد: $\left[\frac{n^2}{3}\right]=\frac{(n-1)(n+1)}{3}$. در نتیجه تنها در صورتیکه $n=4$ باشد، $\left[\frac{n^2}{3}\right]=5$ عدد اول خواهد بود.

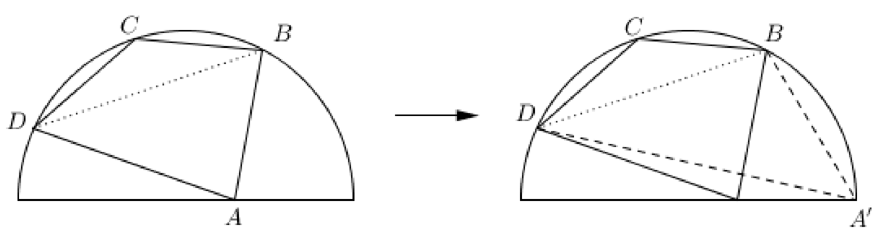
در مجموع دو عدد با ویژگی سوال وجود دارد.

۵. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

ابتدا ادعا می‌کنیم که چهارضلعی که بیش‌تری مساحت را دارد، همه‌ی رئوسش روی محیط نیم‌دایره قرار دارند.
دقت کنید که حداکثر دو رأس از رئوس چهارضلعی می‌تواند روی قطر نیم‌دایره باشد.
اگر مطابق شکل زیر دقیقاً دو رأس روی قطر باشد، می‌توان مطابق شکل زیر دو رأس را طوری جابه‌جا کرد که مساحت چهارضلعی بیش‌تر شود.

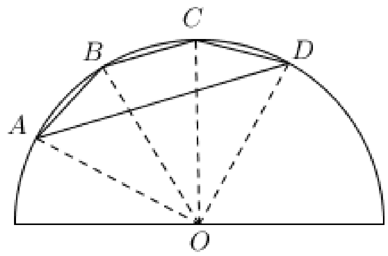


اگر هم تنها یک رأس روی قطر باشد(مثلاً رأس A) می‌توان آن رأس را با یکی از دو سر قطر که از نقاط روی کمان نیم‌دایره هستند طوری جابه‌جا کرد که ارتفاع مثلث ABD و تبع آن مساحت چهارضلعی کم نشود.



حال فرض کنید چهار نقطه‌ی A، B، C و D به همین ترتیب روی دایره هستند. اگر نقطه‌ی B دقیقاً وسط A و C نباشد و B را با وسط کمان AC عوض کنیم ارتفاع مثلث ABC و به تبع آن مساحت

مثلث زیاد می‌شود. پس در مثلثی که بیش‌ترین مساحت را دارد، کمان AB و BC برابر هستند. با استدلال کاملاً مشابه کمان‌های BC و CD هم باید برابر باشند.

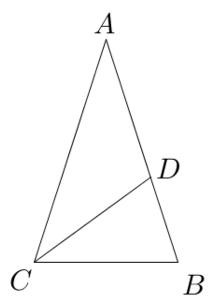


پس چهارضلعی با بیش‌ترین مساحت ذوزنقه‌ی با رئوس روی محیط نیم‌دایره است. اگر زاویه‌ی کمان AB برابر α باشد $(۰ \leq \alpha \leq \frac{\pi}{۳})$ ، مطابق شکل روبه‌رو برای مساحت چهارضلعی $ABCD$ داریم:

$$\begin{aligned} S(ABCD) &= S(AOB) + S(BOC) + S(COD) - S(AOD) \\ &= ۳S(AOB) - S(AOD) \\ &= \frac{۳}{۲}\sin\alpha - \frac{۱}{۲}\sin(۳\alpha) = \frac{۳}{۲}\sin\alpha - \frac{۱}{۲}(۳\sin\alpha - ۴\sin^۳\alpha) \\ &= ۲\sin^۳\alpha \leq ۲\sin^۳(\frac{\pi}{۳}) = ۲(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۳ \\ &= \frac{۳\sqrt{۳}}{۴} \end{aligned}$$

پس بیش‌ترین مقدار مساحت برابر $\frac{۳\sqrt{۳}}{۴}$ است.

۶. گزینه‌ی (ه) صحیح است.



مطابق شکل روبه‌رو اگر $\angle CDB \geq ۹۰^\circ$، با توجه به این که مثلث CDB متساوی‌الساقین است باید $\angle DBC = \angle DCB = \frac{۱}{۲}\angle ACB$ که امکان ندارد. پس $\angle CDB \leq ۹۰^\circ$. این نتیجه می‌دهد که $\angle ADC \geq ۹۰^\circ$ و با توجه به متساوی‌الساقین بودن مثلث ADC، باید $\angle CAD = \angle ACD = \frac{۱}{۲}\angle ACB$. با توجه به این اطلاعات از یک سو مثلث‌های BDC و ABC با هم متشابه هستند و نسبت تشابه آن‌ها نتیجه می‌دهد که $BC^۲ = BD.BA$ و از طرف دیگر با توجه به این که CD نیم‌ساز است داریم $\frac{AC}{CB} = \frac{AD}{DB}$. بنابراین:

$$\left.\begin{aligned} & BC^۲ = BD.BA \Rightarrow (\frac{BC}{BA})^۲ = \frac{BD}{BA} \\ & \frac{BC}{AC} = \frac{BD}{AD} \Rightarrow \frac{BC}{AC+BC} = \frac{BC}{AC+CB} = \frac{BD}{AB} \end{aligned}\right\} \Rightarrow (\frac{BC}{AB})^۲ = \frac{\frac{BC}{AB}}{۱ + \frac{BC}{AB}}$$

که با طرفین وسطین رابطه‌ی آخر و با توجه به این که $\frac{BC}{AB} > ۰$، به معادله‌ای درجه دو برای $\frac{BC}{AB}$ می‌رسیم که از حل آن نتیجه می‌شود $\frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$.

۷. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

اگر برای یک a, b خاص خط و سهمی یک‌دیگر را قطع کنند به زبان جبر این موضوع یعنی این که دست‌گاه معادلات $\begin{cases} y = x^2 - ax + 1 \\ y = 2b(a - x) \end{cases}$ جواب دارد . به این ترتیب باید حالاتی را بیابیم که این دست‌گاه جواب دارد.

رابطه‌ی دوم را در رابطه اول جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\begin{cases} y = x^2 - ax + 1 \\ y = 2b(a - x) \end{cases} \to \ldots \to x^2 + (2b - 2a)x + 1 - 2ab = 0$$

قطع کردن سهمی و خط به این معنی است که معادله درجه دو بالا جواب حقیقی داشته باشد و این معادله زمانی جواب حقیقی دارد که مبین (دلتا-Δ) آن منفی نباشد به عبارت دیگر اگر بخواهیم این دو هم‌دیگر را قطع نکنند مبین عبارت بالا باید منفی باشد.

$$\Delta < 0 \to (2b - 2a)^2 - 4(1 - 2ab) < 0$$

$$4a^2 + 4b^2 - 8ab - 4 + 8ab < 0 \to 4a^2 + 4b^2 < 4 \to a^2 + b^2 < 1$$

مجموعه نقاط (a, b) در صفحه که $a^2 + b^2 = 1$ دایره به شعاع یک به مرکز مبدأ است. بنابراین $a^2 + b^2 < 1$ نقاط درون این دایره را شامل می‌شود .بنابراین مساحت این ناحیه از رابطه‌ی مساحت دایره به دست می‌آید:

$$A_{\text{مساحت}} = \pi R^2 = \pi * 1^2 = \pi$$

۸. گزینه‌ی (د) صحیح است.

فرض کنید که تعداد خطوط افقی، عمودی و مورب به ترتیب x، y و z باشد. در صورتی که این نقاط با یکدیگر تقاطعی نداشته باشند (موازی باشند)، تعداد ناحیه‌ها برابر با $x+y+z+1$ خواهد بود. به ازای هر نقطه‌ی تقاطع بین خطوط یک ناحیه به شکل اضافه می‌شود. تعداد نقاط تقاطع در شکل برابر است با $xy+yz+xz$.

$$xy+yz+xz+x+y+z+1=\frac{(x+y+z)^2}{2}-\frac{x^2+y^2+z^2}{2}+19$$

$$=181-\frac{x^2+y^2+z^2}{2}$$

با توجه به این‌که مجموع این سه عدد برابر ۱۸ است، طبق نامساوی حسابی-مربعی:

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{2}\geq 54 \Rightarrow x=y=z=6 \Rightarrow 181-54=127$$

در صورتی که هیچ سه خطی با یک‌دیگر در یک نقطه تقاطع نداشته باشند این تعداد ناحیه به وجود خواهد آمد.

۹. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

به ازای هر نقطه در شکل، ابتدا نقطه‌ای با فاصله‌ی واحد روی خط A پیدا می‌کنیم و دایره‌ای به شعاع واحد از آن می‌گذرانیم. بدین ترتیب مرکز دایره (x_2, y_2) و موقعیت نقطه نسبت به مرکز (x_1, y_1) خواهد بود.

۱۰. گزینه‌ی (د) صحیح است.

کم‌ترین فاصله: در صورتی که تنها نقاطی که بیش‌ترین فاصله را از یک‌دیگر دارند در دو شکل در نظر بگیریم، ادغام دو شکل چهار نقطه خواهد شد که تشکیل یک لوزی را می‌دهند (چون فاصله‌ی ضلع‌ها همگی برابر با d است). در لوزی نیز می‌دانیم بیش‌ترین فاصله زمانی کمینه خواهد شد که شکل مربع باشد که این فاصله برابر $\sqrt{2}d$ است. مثال برای این حالت دو پاره‌خط است که بر یک‌دیگر عمود هستند.

بیش‌ترین فاصله: هر دو نقطه که در شکل نهایی در نظر بگیرید، از مجموع دو نقطه در هر شکل بدست آمده است که از یک‌دیگر حداکثر d واحد فاصله دارند. پس در مجموع فاصله‌ی آن‌ها از یک‌دیگر حداکثر $2d$ خواهد شد. مثال برای این حالت دو خط است که موازی یک‌دیگر هستند.

۱۱. گزینه‌ی (د) صحیح است.

هر عدد در A_k دقیقا از ضرب $k!$ عدد اول تشکیل شده است. این حکم به سادگی با استقرا اثبات می‌شود و از طرفی هر عدد با این ویژگی نیز در A_k وجود دارد چرا که می‌توانیم هر عددی را به عوامل اولش تقیسم کنیم و آن را بسازیم. در بین گزینه‌ها تنها $2^{111} \times 3^9$ است که تعداد عوامل اولش $6! = 120$ باشد.

۱۲. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

با ساده‌سازی روابط به معادله‌ی زیر می‌رسیم:

$$\frac{1}{x} = \frac{ay - x - y}{(x+y)y} \Rightarrow xy + y^2 + x^2 = (a-1)xy$$

به وضوح $a > 3$. اگر x و y را بر ب.م.م آن‌ها تقسیم کنیم تا نسبت به هم اول باشند، در رابطه‌ی بالا از طرفی سمت راست تساوی بر x و y بخش‌پذیر هستند. پس سمت چپ تساوی هم باید بر این دو عدد بخشپذیر باشد. بدین ترتیب ثابت می‌شود $x|y$ و $y|x$.(x و y بعد از تقسیم به ب.م.م نسبت به هم اول هستند.) در نتیجه:

$$x = y \Rightarrow a = 4$$

۱۳. گزینه‌ی (د) صحیح است.

می‌توان به سادگی و با اندکی برابر زاویه‌ها نشان داد که قرینه‌ی مرکز ارتفاعی نسبت به خود ضلع BC هم روی دایره‌ی محیطی مثلث قرار می‌گیرد. این نقطه را E می‌نامیم. با توجه به قضیه‌ی تالس در مثلث HDE (H مرکز ارتفاعی است.) می‌توان نتیجه گرفت $DE \parallel BC$ و بنابراین داریم:

$$\angle DAC = \frac{۱}{۲}DC = \frac{۱}{۲}BE = \angle BAD = ۹۰^\circ - \angle B$$

۱۴. گزینه‌ی (د) صحیح است.

در ابتدا سعی می‌کنیم $h^{-1}(x)$ را بدست آوریم. فرض کنید $h(x) = y$:

$$h(x) = \frac{kf(x)}{1 - f(x)} \Rightarrow (k+y)f(x) = y \Rightarrow x = f^{-1}\left(\frac{y}{k+y}\right)$$

$$\Rightarrow fo\, h^{-1}(x) = \frac{x}{k+x} \Rightarrow \frac{x}{fo\, h^{-1}(x)} - x = \frac{kx + x^2 - x^2}{x} = k$$

۱۵. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

در صورتی که تعداد تاهای افقی و عمودی به ترتیب x و y باشد، تعداد خطوط افقی و عمودی برابر با $2^x - 1$ و $2^y - 1$ خواهد بود (به ازای هر خط اضافه تعداد نواحی دو برابر می‌شود). در نتیجه اگر تعداد خطوط در انتها برابر با ۳۱۸ باشد داریم:

$$2^x + 2^y = 320 = (101000000)_2 \Rightarrow \{x, y\} = \{6,8\} \Rightarrow x + y = 14$$

۱۶. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

شکل نهایی این سوال از چند بخش تشکیل شده است:

- یک مکعب مستطیل که عمود بر مربع ساخته شده است به حجم ۲.
- چهار نیم استوانه که به محوریت ضلع‌های مربع ساخته شده‌اند به حجم $4 \times \frac{\pi}{2} = 2 \times \pi$.
- چهار تا ربع کره که یک کره‌ی کامل را تشکیل می‌دهند به حجم $\frac{4\pi}{3}$.

پس در مجموع حجم شکل برابر است با: $2 \times \left(1 + \frac{5\pi}{3}\right)$

۱۷. در صورتی که مجموع هفت رقم برابر با عددی شود که دو رقم دیگر را داراست، این هفت رقم می‌توانند به ۵۰۴۰ = !۷ حالت مختلف چیده شوند. در نتیجه پاسخ مسئله بر این عدد بخشپذیر است.

با توجه به اینکه مجموع ارقام ۱ تا ۹ برابر با ۴۵ است باید دو رقم را حذف کنیم که مجموع بقیه، از این دو رقم شکل گرفته باشد.

- اگر دهگان مجموع ۴ باشد: عدد ۴ حذف شده و مجموع کمتر از ۴۱ خواهد شد که نمی‌تواند چنین باشد.
- اگر دهگان مجموع ۳ باشد: رقم بعدی از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$30 + x = 42 - x \Rightarrow x = 6$$

- اگر دهگان مجموع ۲ و یا ۱باشد: یکی از ارقام حذف شده ۲ است و در هیچ صورتی مجموع هفت رقم کمتر از ۳۰ نخواهد شد.

۱۸. گزینه‌ی (ب) صحیح است

در هر مرحله اگر عدد را به صورت $a-1$ نمایش دهیم، پس از حرکات فوق به $2a-1$، $3a-1$، $4a-1$ و یا $5a-1$ تبدیل می‌شود. پس اگر در انتها a تنها از ۲ و ۳ و ۵ تشکیل شده است، در ابتدا نیز باید مضربی از این اعداد باشد.

بین گزینه‌های داده شده تنها ۱۱=۱-۱۲ این ویژگی را دارد. پس پاسخ برابر با ۱۱ خواهد بود. ضمناً به سادگی می‌توان نشان داد که با شروع از عددد ۱۱ و تعدادی بار انجام این عمل می‌توان به عدد خواسته شده رسید.

۱۹. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

تنها اعدادی می‌توانند در دامنه‌ی f_1 باشند که در بازه‌ی $(-\infty,1]$ باشند. در نتیجه دامنه‌ی تابع f_1 بازه‌ی $(-\infty,1]$ و برد آن اعداد نامنفی است. در نتیجه دامنه و برد تابع f_2 بازه‌ی $[0,1]$ خواهد بود. و هم‌چنین به ازای توابع بعدی نیز این دامنه و برد حفظ می‌شود. پس پاسخ بازه‌ی $[0,1]$ است.

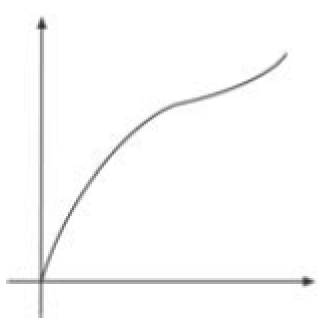
۲۰. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

در این سوال کافی است که به چند نکته دقت کنیم:

- ارتفاع آب در طول زمان همواره صعودی است.

- شیب نمودار در هر لحظه تابعی نزولی از مساحت هر قطاع ظرف است.

در نتیجه ابتدا شیب باید زیاد باشد و به مرور زمان کم شود (تا به میانه‌ی ظرف که بیشترین مساحت را دارد برسد) و سپس دوباره باید شیب افزایش پیدا کند.



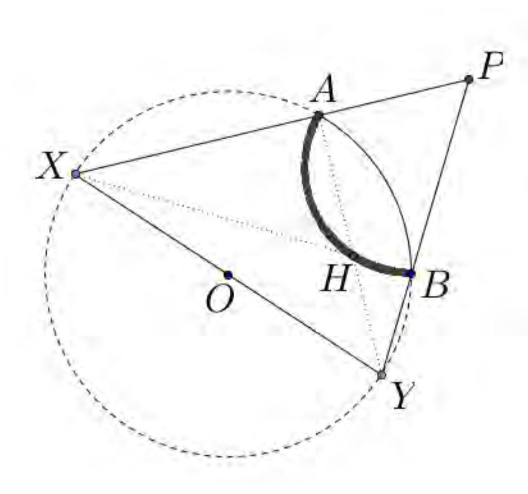
ب)

با توجه به موارد فوق تنها گزینه‌ی (ب) این ویژگی را دارد.

۲۱. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

دقت کنید که با توجه به این که XY قطر دایره است، $AX \perp AY$ و $XB \perp BY$، پس مرکز ارتفاعی مثلث PXY همان محل تقاطع XB و AY است. حال دقت کنید که

$$\angle AHB = \angle XBY + \angle AYB = ۹۰^\circ + \frac{۱}{۲}\angle AOB = ۱۲۰^\circ$$



پس مرکز ارتفاعی روی کمان درخور زاویه‌ی ۱۲۰درجه پاره‌خط AB قرار دارد. پس H روی دایره‌ای به شعاع $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ قرار دارد. (دقت کنید که حالتی که در بالا بررسی شد مربوط به همین ترتیب قرار گرفتن نقاط بود، در حالت‌های دیگر باید وضعیت جداگانه بررسی شود که باز به همین جواب می‌رسیم.)

۲۲. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

تناظری بین اعداد با ویژگی یاد شده پیدا می‌کنیم. به ازای هر عدد یکنوا به صورت $a_1a_2a_3a_4$ عدد دیگری به صورت $(10-a_1)(10-a_2)(10-a_3)(10-a_4)$ انتخاب می‌کنیم که یکنوا است. حال مجموع این دو عدد برابر با ۱۱۱۱۰ است. پس باید تعداد کل اعداد صعودی چهار رقمی را بیابیم و در عدد ۱۱۱۱۰ ضرب کنیم تا مجموع کل به دست آید.

$$\binom{9}{4} \times 11110 = 1399860$$

۲۳. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

در ۱۰ ساعت مجموعاً ۳۰ مرحله تغییر نسل صورت می‌گیرد. در مراحل زوج تمامی باکتری‌ها از نوع B و C هستند و در مراحل فرد تمامی باکتری‌ها از نوع A خواهند بود.

همچنین در مراحل زوج تعداد باکتری‌های نوع B با نوع C برابر هستند (به جز مرحله‌ی صفرم) و دو برابر تعداد باکتری‌های مرحله‌ی قبل. در مراحل فرد نیز تعداد باکتری‌های نوع A، ۳ برابر تعداد باکتری‌های نوع A در دو

مرحله قبل خواهد بود. در نتیجه تعداد گلبول‌های خورده شده در ۱۵ مرحله‌ی فرد رخ می‌دهد که تعداد آن‌ها به صورت زیر است:

$$0+2+6+\cdots+2\times 3^{13} = 2\times\left(\frac{3^{14}-1}{3-1}\right) = 4782969$$

۲۴. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

از معادله‌ی دوم به دست می‌آید:

$$A^2 = A - I$$

در نتیجه داریم:

$$A^6 = (A-I)^3 = A^3 - 3A^2 + 3A - I = -2A^2 + 2A - I = I$$

$$2A^6 + 2A^2 + A + B = \bar{O} \Rightarrow 2I + (2A - 2I) + A + B = 3A + B = \bar{O}$$

۲۵. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

ثابت می‌کنیم جواب مسئله ۳ است.

شرط دوم مسئله معادل با این است که هر دو عدد که باقی‌مانده‌ی ثابتی در تقسیم بر ۱۱×۱۷ داشته باشند، باید هم‌رنگ شوند. چون در غیر این صورت دو عدد ناهم‌رنگ خواهیم داشته که باقی‌مانده‌شان بر ۱۱ و ۱۷ برابر است. در صورتی‌که از دو رنگ استفاده کنیم، با توجه به شرط اول اعداد باید یکی در میان رنگ‌آمیزی شوند و در اینصورت رنگ اعداد ۱ و ۱۸۸ متفاوت خواهد بود.

ولی در صورتی‌که با رنگ سومی داشته باشیم، اعدادی که باقی‌مانده‌شان به پیمانه‌ی ۱۱×۱۷ برابر ۱۸۶ باشد را با رنگ سوم، رنگ می‌کنیم و باقی اعداد را یکی در میان با دو رنگ دیگر. بدین ترتیب شرایط مسئله برقرار خواهد شد.

۲۶. گزینه‌ی (د) صحیح است.

می دانیم که تابع سینوس بین یک و منفی یک است. پس :

$$-1 \le \sin x \le 1 \Rightarrow -2 \le \sin x + [\sin x] \le 2 \Rightarrow -2 \le \frac{x}{3} + \left[\frac{x}{3}\right] \le 2 \Rightarrow -3 \le x \le 3$$

حال دو حالت داریم.

الف) $0 \leq x \leq 3$ در این حالت می‌دانیم که اگر $x = 3$ باشد معادله جواب نخواهد داشت. و در غیر این صورت

$$0 \leq x < 3 \Rightarrow 0 \leq \frac{x}{3} < 1 \Rightarrow \left[\frac{x}{3}\right] = 0$$

و هم‌چنین چون $0 \leq x < 3$ پس برای تابع سینوس هم خواهیم داشت: $[\sin x] = 0$ و در نتیجه معادله به صورت زیر در خواهد آمد:

$$\frac{x}{3} = \sin x$$

حال کافی است نمودار خط $\frac{x}{3}$ با تابع $\sin x$ تقاطع بدهیم. این دو تابع در سه نقطه با هم برخورد می‌کنند. یکی در ناحیه‌ی مثبت، یکی در ناحیه‌ی منفی و دیگری در صفر. فقط در جواب‌های صفر و مثبت آن قابل قبول است.

ب) اگر $-3 \leq x < 0$ باشد. در این حالت می‌دانیم که:

$$-3 \leq x < 0 \Rightarrow -1 \leq \frac{x}{3} < 0 \Rightarrow \left[\frac{x}{3}\right] = -1$$

و همچنین چون $-3 \leq x < 0$ پس برای تابع سینوس هم خواهیم داشت: $[\sin x] = -1$ و در نتیجه باز هم معادله به صورت زیر در خواهد آمد:

$$\frac{x}{3} = \sin x$$

حال نمودار خط $\frac{x}{3}$ با تابع $\sin x$ تقاطع بدهیم. این دو تابع در سه نقطه با هم برخورد می‌کنند. یکی در ناحیه‌ی مثبت، یکی در ناحیه‌ی منفی و دیگری در صفر. فقط در جواب منفی آن قابل قبول است. پس در مجموع سه جواب خواهیم داشت.

۲۷. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

اگر فرش زیر پای را می کشیم که چروک پدید آمده از بین برود! در این حالت باز هم مثلثی قائم‌الزاویه ABC را خواهیم داشت که در آن $BC = 6$ است ولی مقدار AB تغییر می‌کند. AB به اندازه‌ی قطر دایره کاهش یافته و به اندازه نصف محیط دایره اضافه می‌شود. بنابراین: $AB = (10 - \pi) - 2 + \pi$ که داریم:

$AB = 8$ حال طبق قضیه‌ی فیثاغورس $AC = 10$ و چون کوتاه‌ترین مسیر بین دو نقطه خط مستقیم خواهد بود؛ پس او بعد از چین خوردن دوباره فرش باید در خط مستقیم قبلی حرکت کرده و خود را از A به C برساند.

۲۸. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

برای این که مهره بتواند با این حرکت‌ها به همه‌ی خانه‌های با مختصات صحیح برسد لازم و کافی است که بتواند با این حرکت‌ها به خانه‌های $(۱,۰)$ و $(۰,۱)$ برسد. معادلاً باید اعداد صحیح مثبت یا منفی a، b، c و d یافت شوند که

$$a(m,n) + b(n+۱, m+۱) = (۱,۰)$$
$$c(m,n) + d(n+۱, m+۱) = (۰,۱)$$

که این روابط هم به بیان دیگری یعنی

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m & n \\ n+۱ & m+۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

که این هم نتیجه می‌دهد ماتریس $\begin{bmatrix} m & n \\ n+۱ & m+۱ \end{bmatrix}$ باید وارونی با درایه‌های صحیح داشته باشد، پس باید دترمینانش ±۱ باشد. اما

$$\det\begin{bmatrix} m & n \\ n+۱ & m+۱ \end{bmatrix} = m^۲ + m - n^۲ - n = (m-n)(m+n+۱)$$

که از بین $m-n$ و $m+n+۱$ یکی زوج و دیگری فرد است. پس حاصل‌ضرب آن‌ها نمی‌تواند عددی فرد باشد. پس برای هیچ m و n صحیح این عمل امکان‌پذیر نیست.

۲۹. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

$f(x^{12}) = f(x).q(x) + r(x)$ که در آن $r(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه‌ی کم‌تر از $f(x)$ است. یعنی درجه‌ی $r(x)$ باید کم‌تر از ۵ باشد.

از طرفی می‌دانیم که $f(-1) = 0$ که در نتیجه با قرار دادن -۱ در معادله‌ی بالا خواهیم داشت:

$$f((-1)^{12}) = f(-1).q(-1) + r(-1) \Rightarrow f(1) = 6 = 0 + r(-1)$$

پس باید $r(-1) = 0$ باشد که فقط گزینه‌ی (الف) این خاصیت را دارد.

۳۰. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

۱۱۱ قرمز و ۲۱۱ سبز هستند. بنابراین ۳۳۲ و ۳۲۳ هر دو زرد هستند. چون هر دو با تغییر تمام کلیدهای این دو حالت به دست آمده‌اند و باید رنگی غیر از سبز و قرمز (که زرد است) داشته باشند.

با همین استدلال باید ۱۳۲ قرمز باشد، چون ۲۱۱ سبز و ۳۲۳ زرد هستند. پس ۲۲۱ سبز است چرا که نمی‌تواند با ۱۳۲ و ۳۳۲ هم‌رنگ باشد.

سال ۱۳۸۴

زمان: ۲۴۰ دقیقه

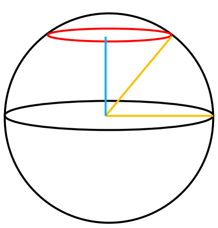
۱. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

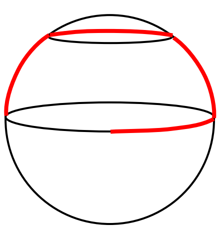
لم: اگر چندجمله‌ای $P(x)$ دارای ضرایب صحیح باشد آن‌گاه $a-b \mid P(a)-P(b)$.

فرض کنید چندجمله‌ای $P(x)$ با ضرایب صحیح دارای ریشه صحیح a باشد، یعنی $P(a)=۰$. حال اگر بخواهد گزینه‌ی (ب) درست باشد طبق لم باید $۵-a \big| P(۵)-P(a)=۵$ و همچنین باید $۶-a \big| P(۶)-P(a)=۵$ که در این صورت باید عدد ۵ دو مقسوم‌علیه متوالی داشته باشد، که این غیر ممکن است.

دقت کنید که برای گزینه‌های (الف)، (ج) و (د) به ترتیب چندجمله‌ای‌های $P(x)=x$، $P(x)=-۳(x-۵)(x-۶)+۶$ و $P(x)=۱۱-x$ شرایط هر گزینه را دارا هستند و به علاوه به ترتیب دارای ریشه‌های صحیح ۰، ۷ و ۱۱می‌باشند.

۲. گزینه‌ی (ب) صحیح است.





محیط مدار استوا $۱۲۰\pi = ۶۰ \times ۲\pi$ است. در حرکت اول به اندازه‌ی یک چهارم محیط خط استوا به سمت شرق می‌رود. سپس به اندازه ۲۰π بالا می‌رود (مانند شکل اول) که در این صورت ۱۰π تا رسیدن به قطب شمال فاصله دارد. یعنی $\frac{۲}{۳}$ مسیر تا قطب شمال طی شده است. پس زاویه‌ی طی شده $\frac{۲}{۳}$ کل زاویه تا رسیدن به قطب است، یعنی ۶۰ درجه. حال بر روی یک دایره جدید باید حرکت کند. اگر از مرکز کره به مرکز این دایره‌ی جدید وصل کنیم؛ یک مثلث قائم‌الزاویه با زاویه‌ای ۳۰ درجه خواهیم داشت. ضلع روبه‌رو به زاویه ۳۰ درجه نصف وتر است. پس شعاع دایره‌ی جدید نصف شعاع کره یعنی ۳۰ متر است. بنابراین محیط این دایره‌ی جدید $۶۰\pi = ۳۰ \times ۲\pi$ و حال که ۳۰π روی محیط این دایره حرکت کرده است؛ یعنی نصف محیط را رفته است. در آخرین حرکت به مدار استوا بر می‌گردد. در این حرکت نصف خط استوا را طی کرده است. پس نسبت به جای اول خود یک چهارم محیط استوا (۳۰π) طی کرده است.

۳. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

z بین ۳ تا ۱۰ می‌تواند باشد. اگر z ۳ یا ۴ باشد برای x یک حالت داریم و y به صورت یک‌تا تعیین می‌شود. اگر z ۵ یا ۶ باشد برای x دو حالت داریم و y به صورت یک‌تا تعیین می‌شود. اگر z ۷ یا ۸ باشد برای x سه حالت داریم و y به صورت یک‌تا تعیین می‌شود. اگر z ۹ یا ۱۰ باشد، برای x چهار حالت داریم و y به صورت یک‌تا تعیین می‌شود؛ پس در مجموع: ۲۰ = ۴×۲ + ۳×۲ + ۲×۲ + ۱×۲ حالت داریم.

۴. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

باید $\sqrt{m+۱۵}+\sqrt{m-۱}=n$ باشد که در آن n عددی طبیعی است. پس داریم:

$$\sqrt{m+۱۵}-\sqrt{m-۱}=\frac{۱۶}{\sqrt{m+۱۵}+\sqrt{m-۱}}=\frac{۱۶}{n}\in\mathbb{Q}$$

حال چون $\sqrt{m+۱۵}+\sqrt{m-۱}$ و $\sqrt{m+۱۵}-\sqrt{m-۱}$ هر دو گویا هستند میانگین آن‌ها یعنی $\sqrt{m+۱۵}$ و به تبع آن $\sqrt{m-۱}$ هر دو گویا هستند. پس $m+۱۵$ و $m-۱$ هر کدام مربع عددی گویا هستند. می‌توان به سادگی نشان داد که اگر عددی طبیعی مربع عددی گویا باشد لزوماً مربع عدد طبیعی است. پس حتماً باید $\sqrt{m-۱}$ و $\sqrt{m+۱۵}$ طبیعی باشند.

بنابراین باید داشته باشیم:

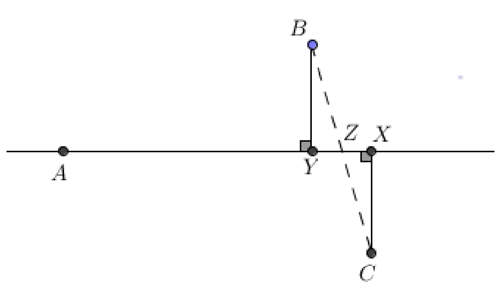
$$m+۱۵=a^۲\ ,m-۱=b^۲\Rightarrow a^۲-b^۲=۱۶\Rightarrow(a-b)(a+b)=۱۶$$

حال با بررسی مقسوم‌علیه‌های عدد ۱۶ به این نتیجه می رسیم که m فقط می‌تواند اعداد ۱ و ۱۰ باشد.

۵. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

اگر X و Y به ترتیب نقاطی روی خط جاده باشند که کم‌ترین فاصله را تا C و B دارند و Z محل تقاطع پاره‌خط BC و جاده باشد، می‌دانیم که مثلث‌های BYZ و CXZ قائم‌الزاویه هستند و همواره در یک مثلث قائم‌الزاویه وتر بزرگ‌ترین ضلع است، بنابراین:

$$BY\le BZ \text{ و } CX\le CZ$$



در نتیجه: $BY + CX \leq BC$ پس مجموع فاصله‌ی دو شهر از جاده حداکثر برابر فاصله‌ی دو شهر است که برابر ۴۰ کیلومتر است. زمانی هم این مقدار برابر ۴۰ می‌شود که BC بر جاده عمود باشد که این حالت هم محتمل است.

۶. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

فرض کنید $p(x) = a_n x^n + a_{n-۱} x^{n-۱} + \cdots + a_۱ x + a_۰$ باشد. در این صورت $p(x)$ بعد از یک تغییر به چندجمله‌ای زیر تبدیل می شود:

$$(a_{n-۱} - ۲a_n)x^{n-۱} + a_{n-۲}x^{n-۲} + \ldots + a_۱ x + a_۰$$

تغییر دوم این چندجمله‌ای به چندجمله‌ای زیر تبدیل خواهد شد:

$$(a_{n-۲} - ۲a_{n-۱} + ۴a_n)x^{n-۲} + a_{n-۳}x^{n-۳} + \ldots + a_۱ x + a_۰$$

با ادامه‌ی این روند به چندجمله‌ای درجه صفر زیر می‌رسیم:

$$(-۲)^۰ a_۰ + (-۲)^۱ a_۱ + (-۲)^۲ a_۲ + \ldots + (-۲)^{n-۱} a_{n-۱} + (-۲)^n a_n$$

حال اگر گزینه‌ها را در این مسئله امتحان کنیم فقط گزینه‌ی (الف) است که حاصل بالا ۱۳۸۴ برابر می‌شود:

$$(-۲)^۳ \times \ -۴۵ \ + (-۲)^{۱۰} \times ۱ = ۱۳۸۴$$

۷. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

می‌دانیم که اگر آن عبارت را در مزدوجش ضرب کنیم حاصل برابر یک می‌شود؛ یعنی

$$(۲ + \sqrt{۳})^n (۲ - \sqrt{۳})^n = ۱$$

حال اگر بتوانیم مقدار مزدوج را بر حسب خود عبارت بدست آوریم، مسئله حل خواهد شد. برای این منظور با استقرا به راحتی می‌توان نشان داد که اگر $(۲ + \sqrt{۳})^n = r_n + s_n\sqrt{۳}$ باشد؛ در این صورت $(۲ - \sqrt{۳})^n = r_n - s_n\sqrt{۳}$ خواهد شد. بنابراین با جای‌گذاری خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
۱ &= (۲+\sqrt{۳})^n(۲-\sqrt{۳})^n = (r_n + s_n\sqrt{۳})(r_n - s_n\sqrt{۳}) \\
&= (۵۰۴۲ + b\sqrt{۳})(۵۰۴۲ - b\sqrt{۳}) = ۵۰۴۲^۲ - b^۲ \times ۳ \\
&\Rightarrow ۱ = ۵۰۴۲^۲ - ۳b^۲ \Rightarrow b^۲ = \frac{۵۰۴۲^۲ - ۱}{۳} \Rightarrow b = ۲۹۱۱
\end{aligned}
$$

۸. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

شیب قطر برابر $\frac{۲}{۳} = \frac{۱۰۰}{۱۵۰}$ است و تعداد ۴۹ خط داریم که دارای این شیب هستند و زیر خط قطر قرار دارند. این تعداد از آن جا به دست می‌آید که به ازای هر ۳ واحد حرکت در راستای محور افقی به سمت راست و ۲ واحد حرکت در راستای محور عمودی به سمت پایین به نقاط جدیدی در این مستطیل می‌رسیم که خط گذرنده از آن‌ها موازی قطر است.

دقیقاً به همین میزان هم بالای قطر پاره خط وجود دارد. پس در مجموع ۹۹ خط موازی داریم.

۹. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

برای رد گزینه‌ی (الف) ۲×۲ در مبنای چهار را در نظر بگیرید که حاصل ۱۰ می‌شود. که یکانش ۰ است.

برای رد گزینه‌ی (ب) ۴×۲ در مبنای پنج را در نظر بگیرید که حاصل ۱۳ می‌شود. که یکانش ۳ است.

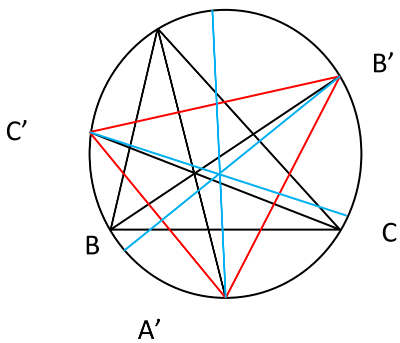
برای رد گزینه‌ی (د) ۶×۲ در مبنای نه را در نظر بگیرید که حاصل ۱۳ می‌شود. که یکانش ۳ است.

برای رد گزینه‌ی ه ۲×۲ در مبنای ده را در نظر بگیرید که حاصل ۴ می‌شود. که یکانش ۴ است.

برای اثبات گزینه‌ی (ج) باید نشان دهیم که اگر رقم یکان هر عددی در مبنای هفت، ۱ یا ۲ یا ۴ باشد در ضرب درون همین مجموعه قرار خواهد گرفت که با بررسی هر ۹ حالت به این نتیجه خواهیم رسید.

۱۰. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

شکل این سوال به صورت روبه‌رو خواهد شد:



$$\angle B'I'C' = \frac{B'AC'}{۲} + \frac{C''A'B''}{۲}$$

که در آن B'' و C'' به ترتیب پای نیم‌سازهای زوایای B' و C' بر دایره‌ی محیطی هستند. همان طور که در شکل نیز واضح است:

$$\angle A' = \frac{B'AC'}{۲} \quad \text{و} \quad \frac{\angle B'}{۲} + \frac{\angle C'}{۲} = \frac{A'B''}{۲} + \frac{C''A'}{۲} = \frac{C''A'B''}{۲}$$

در نتیجه $\frac{\angle A'}{۲} + ۹۰^\circ = \frac{\angle C'}{۲} + \frac{\angle B'}{۲} + \angle A' = \angle B'$ و از آن‌جا که زاویه‌ی A' روبه‌رو به کمان $B'AC'$ است داریم: $\frac{\angle C}{۲} + \frac{\angle B}{۲} = \angle A'$ در نتیجه: $\angle B'I'C' = ۹۰^\circ + \frac{\angle B + \angle C}{۴}$

۱۱. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

نشان می‌دهیم که مجموعه‌ی همه‌ی مقادیر ممکن در بازه‌ی $[-\frac{۱}{۲}, ۱]$ قرار دارد. برای این منظور دو نامساوی‌های زیر را ثابت می‌کنیم:

$$a^۲ + b^۲ + c^۲ \geq ab + bc + ac \geq -\frac{۱}{۲}(a^۲ + b^۲ + c^۲)$$

برای اثبات نامساوی سمت چپ داریم:

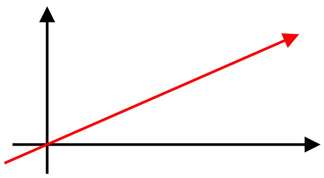
$$\begin{aligned}
& a^۲ + b^۲ + c^۲ \geq ab + bc + ac \\
\Leftrightarrow\ & ۲a^۲ + ۲b^۲ + ۲c^۲ \geq ۲ab + ۲bc + ۲ac \\
\Leftrightarrow\ & (a^۲ + b^۲) + (b^۲ + c^۲) + (c^۲ + a^۲) \geq ۲ab + ۲bc + ۲ac \\
\Leftrightarrow\ & (a^۲ + b^۲ - ۲ab) + (b^۲ + c^۲ - ۲bc) + (c^۲ + a^۲ - ۲ac) \geq ۰ \\
\Leftrightarrow\ & (a - b)^۲ + (b - c)^۲ + (c - a)^۲ \geq ۰
\end{aligned}$$

برای اثبات نامساوی سمت راست هم داریم:

$$\begin{aligned}
& ab + bc + ac \geq -\frac{۱}{۲}(a^۲ + b^۲ + c^۲) \\
\Leftrightarrow\ & ۲ab + ۲bc + ۲ac \geq -(a^۲ + b^۲ + c^۲) \\
\Leftrightarrow\ & a^۲ + b^۲ + c^۲ + ۲ab + ۲bc + ۲ac \geq ۰ \\
\Leftrightarrow\ & (a + b + c)^۲ \geq ۰
\end{aligned}$$

حال دقت کنید که اگر $a=b=c=\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ باشد، $ab+bc+ca=۱$ و اگر $a=-b=\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ و $c=۰$ باشد، $ab+bc+ca=\frac{-۱}{۲}$. بنابراین گزینه‌ی صحیح باید شامل ۱ و $\frac{-۱}{۲}$ باشد که تنها گزینه‌ای که این خاصیت را دارد گزینه‌ی (ه) است.

۱۲. گزینه‌ی (ب) صحیح است.



دقت کنید که حرکت هواپیما مشابه خط روبه‌رو است که طبق قضیه‌ی تالس نتیجه می‌دهد ارتفاع هواپیما به صورت خطی رشد می کند و در نتیجه مساحت به صورت تابعی درجه دو خواهد بود.

۱۳. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

فرض کنید که a اولین عضو این دنباله باشد. در این صورت باید همه‌ی اعداد دنباله‌ی زیر اول باشند:

$$a\ ,a+n^{۲}+۱\ ,a+۲n^{۲}+۲\ ,a+۳n^{۲}+۳\ ,\dots$$

می‌خواهیم نشان دهیم که در این صورت چهارمین عضو دنباله نمی‌تواند عددی اول باشد و در نتیجه دنباله حداکثر سه عضوی می‌شود.

برای این منظور باید دقت شود که باقیمانده $n^{۲}+۱$ بر ۳ نمی‌تواند صفر باشد.(این موضوع را می‌توانید با بررسی حالت‌های مختلفی که باقی‌مانده‌ی n بر ۳ می‌تواند داشته باشد تحقیق کنید.) پس با اضافه شدن به a باقی‌مانده‌ی آن بر ۳ با a متفاوت خواهد شد. به همین ترتیب باقیمانده $a+۲n^{۲}+۲$ بر ۳ با باقیمانده $a+n^{۲}+۱$ بر۳ و با باقی‌مانده‌ی a بر ۳ متفاوت است.

پس در بین این اعداد یکی باید مضرب ۳ باشد و چون این عددها اول هستند باید یکی از این اعداد ۳ باشد.

اما دقت کنید که a عددی اول است و در نتیجه $a\geq ۱$. پس

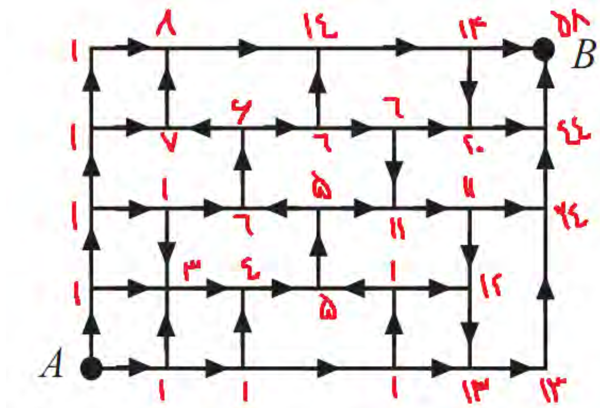
$$a+۲n^{۲}+۲>a+n^{۲}+۱>۱+۱+۱=۳$$

پس تنها a می‌تواند برابر ۳ باشد. حال اگر دنباله عضو چهارمی داشته باشد باید باقی‌مانده‌ی این عضو یعنی $a+۳n^{۲}+۳$ بر ۳ با باقی‌مانده‌ی a بر ۳ برابر باشد. که در این صورت این عدد مضرب ۳ است که نمی‌تواند اول باشد.

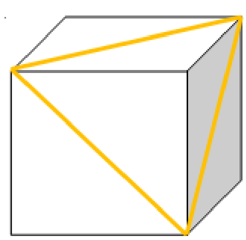
دقت کنید که اگر $n=۱$ باشد تصاعد ۳، ۵، ۷ دارای سه عضو است. بنابراین مقدار حداکثر برابر ۳ است.

۱۴. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

طبق اصل جمع تعداد راه‌های رسیدن به هر نقطه برابر است با جمع تعداد راه‌هایی که می‌توان به آن نقطه رسید و بر همین اساس تعداد راه‌های رسیدن به هر نقطه را محاسبه می‌کنیم و جدول روبه‌رو به دست می‌آید:



۱۵. گزینه‌ی (ب) صحیح است.



خطوط مذکور بر روی یک صفحه قرار دارند. بنابراین برای این که مجموع مربعات کمترین مقدار خود را اخذ کند باید نقطه‌ی P بر روی همان صفحه قرار داشته باشد. دلیل آن این است که اگر خارج صفحه در نظر بگیریم تصویر آن نقطه بر روی صفحه فاصله کمتری خواهد داشت و چون مثلث متساوی الاضلاع است باید این نقطه بر روی مرکز ثقل باشد. (برای چک کردن این موضوع هم می‌توانید مثلث متساوی‌الاضلاع مسئله را مثلثی مرکز صفر و رئوس $(0,a)$، $\left(\frac{a\sqrt{3}}{2},\frac{-a}{2}\right)$ و $\left(\frac{-a\sqrt{3}}{2},\frac{-a}{2}\right)$ در نظر بگیرید و خواهید دید که کم‌ترین مجموع مربعات فاصله مربوط به مبدأ مختصات که مرکز ثقل مثلث است می‌باشد.)

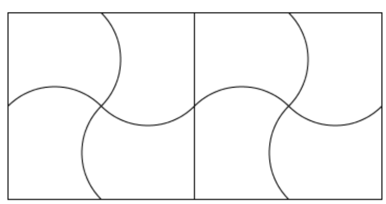
حال در مسئله‌ی اصلی اندازه‌ی ضلع مثلث برابر است با. $\sqrt{2}$ است پس ارتفاع آن طبق قضیه‌ی فیثاغورس برابر $\sqrt{\frac{3}{2}}$ است و فاصله‌ی این نقطه تا ضلع مثلث برابر $\frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}$ است که مربع آن برابر $\frac{1}{6}$ است و جمع سه تا از آن‌ها مساوی $\frac{1}{2}$ می‌شود.

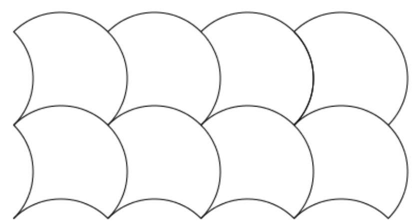
۱۶. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

ادعا می‌کنیم که شرط لازم برای این که با یک کاشی بتوان صفحه را فرش کرد این است که تعداد فررفتگی‌ها و برآمدگی‌هایش با هم برابر باشند. فرض کنید یک کاشی a تورفتگی و b برآمدگی داشته باشد. حال برای یک

عدد طبیعی مثل N، یک مربع $N \times N$ را در نظر بگیرید. تعداد کاشی‌های لازم برای فرش کردن این مربع برابر N^2 است. دقت کنید که تعداد تورفتگی‌های کاشی‌ها درون این مربع حداقل برابر $aN^2 - 4N$ است زیرا ممکن است حداکثر $4N$تا از تورفتگی‌ها در ضلع‌های مربع بزرگ باشند. از طرف دیگر تعداد برآمدگی‌ها درون این مربع حداکثر برابر bN^2 است. اما می‌دانیم اگر صفحه کاملاً کاشی‌کاری شده باشد باید برای هر تورفتگی یک برآمدگی داشته باشیم پس تعداد آن‌ها در درون مربع باید برابر باشد و این نتیجه می‌دهد که $aN^2 - 4N \le bN^2$. پس $a - \frac{4}{N} \le b$. حال چون N عدد طبیعی دل‌خواهی است این نتیجه می‌دهد که $a \le b$. با برعکس کردن استدلال برای تورفتگی‌ها و برآمدگی‌ها می‌توان نشان داد که $b \le a$. پس در کل $a = b$ و تعداد برآمدگی‌ها و تورفتگی‌ها برابر هستند. بنابراین کاشی‌های شماره‌های ۱، ۳ و ۵ نمی‌توانند صفحه‌پرکن باشند. بنابراین تنها کاشی‌های شماره‌ی ۲و ۴ باقی می‌مانند که با این دو کاشی هم می‌توان صفحه را فرش کرد.

بنابراین فقط شکل‌های ۲ و ۴ می‌توانند صفحه‌پرکن باشند که با توجه به الگوی زیر این‌چنین هستند.





۱۷. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

می‌دانیم که اگر در مقایسه دو عدد توانی پایه‌های برابر باشد، عددی که توان برابر دارد بزرگ‌تر است و هم چنین اگر توان‌ها برابر باشد، عددی که پایه‌ی بزرگ‌تر دارد، بزرگ‌تر است و اگر پایه و توان عددی از دیگر بزرگ‌تر باشد عدد اول بزرگ‌تر است. بنابراین $2^{431} < 2^{642} = 4^{321}$. به علاوه

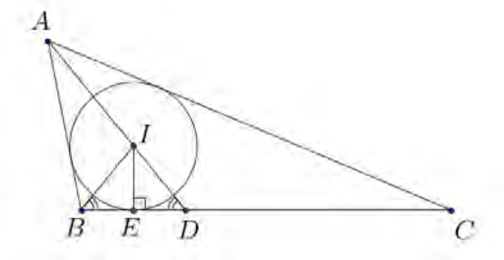
$$4^{321} = 2^{642} = (2^5)^{128} \times 2^2 = 32^{128} \times 2^2 > 32^{128} > 31^{42}$$

$$4^{321} = 2^{642} = (2^5)^{128} \times 2^2 = 32^{128} \times 2^2 > 32^{128} > 21^{43}$$

و داریم:

$$\begin{aligned} 3^{421} &= (3^7)^{60} \times 3^1 = 2187^{60} \times 3^1 > 2048^{60} \times 3 \\ &= (2^{11})^{60} \times 3 = 2^{660} \times 3 > 2^{660} \times 2 = 2^{661} > 2^{642} = 4^{321} \end{aligned}$$

۱۸. گزینه‌ی (ب) صحیح است.



نیم‌ساز زاویه‌ی $\angle B$ را رسم می‌کنیم. این نیم‌ساز هم مانند AD از مرکز دایره‌ی محاطی داخلی مثلث(نقطه‌ی I) خواهد گذشت. بعد از آن از مرکز دایره‌ی محاطی I به ضلع عمود می‌کنیم. دو مثلث BIE و DIE با هم هم‌نهشت هستند. پس زاویه‌ی $\angle D_۲$ برابر زاویه‌ی $\angle B_۱$ نصف زاویه‌ی $\angle B$ است. هم‌چنین $\angle D_۲$ زاویه‌ی خارجی مثلث DAC هم هست. پس داریم:

$$\frac{\angle B}{۲} = \frac{\angle A}{۲} + \angle C \Rightarrow \angle B = \angle A + ۲\angle C$$
$$\Rightarrow \angle A + \angle B + \angle C = ۲\angle A + ۳\angle C \Rightarrow ۲\angle A + ۳\angle C = ۱۸۰^\circ$$

۱۹. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

اگر زنبور ۶ بار به سمت چپ برود؛ محیط یک شش‌ضلعی را طی می‌کند و سر جای اول خود باز می‌گردد. در مورد سمت راست هم همین طور است.

حال کافی است دقت کنید که برای هر عدد طبیعی فرد n، ۲^n به صورت $۶k + ۲$ و برای هر عدد طبیعی زوج n، ۲^n به صورت $۶k + ۴$ می‌شود.

پس می‌توان فرض کرد که به جز حرکت اول که یک بار به سمت چپ می‌رود یکی در میان ۲ بار به راست و ۴ بار به چپ می‌رود. حال با طی کردن چند حرکت اولیه می‌توان دید که بر روی یک مسیر بسته حرکت می‌کند و بنابراین دور نمی‌شود! پس فاصله‌ی مکان نهایی از مکان اولیه کم‌تر از $۲^۵$ است.

۲۰. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

ابتدا فرض کنید روستاها را با A، B و C نشان دهیم به طوری که $AB = ۹$، $AC = ۱۴$ و $BC = ۱۹$. دقت کنید که اگر M نقطه‌ی وسط BC باشد، $MB = MC = ۹/۵$ و به علاوه

$$AM^۲ = \frac{AB^۲ + AC^۲}{۲} - \frac{BC^۲}{۴} = \frac{۱۹۶ + ۸۱}{۲} - \frac{۳۶۱}{۴} = ۴۸/۲۵ < ۹۰/۲۵ = (۹/۵)^۲$$

پس اگر مدرسه را در M بسازیم فاصله‌اش از سه روستا بیش‌تر از ۹/۵ نیست و لذا $a \leq ۹/۵$. اما دقت کنید که نقطه‌ای در صفحه وجود ندارد که فاصله‌اش از هر دو B و C کم‌تر از ۹/۵ باشد پس a نمی‌تواند کم‌تر از ۹/۵ باشد و بنابراین در کل کم‌ترین مقدار ممکن ۹/۵ است.

۲۱. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

برای این منظور باید از تقسیمات متوالی بر عدد ۲− انجام دهیم:

$$\begin{aligned} ۱۱۷ &= (-۲)(-۵۸) + ۱ \\ -۵۸ &= (-۲)(۲۹) + ۰ \\ ۲۹ &= (-۲)(-۱۴) + ۱ \\ -۱۴ &= (-۲)(۷) + ۰ \end{aligned} \qquad \begin{aligned} ۷ &= (-۲)(-۳) + ۱ \\ -۳ &= (-۲)(۲) + ۱ \\ ۲ &= (-۲)(-۱) + ۰ \\ -۱ &= (-۲)(۱) + ۱ \end{aligned}$$

پس $(۱۱۰۱۱۰۱۰۱)_{-۲} = ۱۱۷$ که دارای ۶ رقم ۱ است. تنها کافی است با استقرا ثابت کنید که هر عدد صحیح در مبنای ۲− یک بسط یک‌تا خواهد داشت.

۲۲. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

اگر از نقطه‌ی A شروع کند باید هر مسیری از سه مسیر روبه‌رویش را که طی می‌کند برگردد (به جز مسیر آخر). به‌تر است به جای این که مجبور بشود کل شاخه را برود و برگردد؛ از انتهای یک شاخه آغاز کند که مجبور به بازگشت مسیر نشود.

هم‌چنین اگر از D یا C آغاز کند باید بخشی از مسیر را برگردد.

پس تنها موارد باقی‌مانده B و E هستند که در انتهای شاخه‌های اصلی درخت قرار دارند. در مقایسه‌ی این دو باید به این نکته توجه و دقت کنیم که نقطه‌ی E بر روی یک شاخه به طول ۳ با ۳ تا شاخه منشعب قرار دارد و نقطه B بر روی یک شاخه به طول ۶ با ۴ تا انشعاب.

اگر از E آغاز کند مجبور است یکی از شاخه‌های اصلی که طول آن ۶ است و انشعاباتی دارد را برگردد ولی اگر از B آغاز کند می تواند از شاخه های اصلی که طول آن ۶ است برگردد و یا از شاخه اصلی که طول آن ۳ است برگردد که به وضوح حالت اخیر مسیر کم‌تری را برگشته است. پس کل مسافت طی‌شده آن کم‌تر خواهد شد.

بنابراین به‌ترین نقطه برای آغاز نقطه‌ی B خواهد بود و به‌ترین مسیر این است که پس از خوردن تمام میوه‌های شاخه‌ی خودش به شاخه‌ی سمت راست رفته و پس از آن به شاخه‌ی سمت چپ برود. که در طول این مسیر در به‌ترین حالت ۴۶ متر طی می‌کند که کم‌ترین میزان ممکن است.

۲۳. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

ادعا می‌کنیم که برای هر عدد طبیعی n داریم: $n * ۱ = ۲n + ۱$ برای این منظور از استقرا استفاده می‌کنیم. حکم برای $n = ۱$ به دلیل فرض صورت سؤال درست است. حال داریم:

$$(\mathrm{n}+۱) * ۱ = ۱ * (n+۱) = (۱ * n) + (۱ * ۱) - ۱ = (۲n+۱) + ۳ - ۱ = ۲n + ۳$$

هم‌چنین ادعا می‌کنیم که برای هر عددی طبیعی n داریم: $n * n = (n+۱)^۲ - ۱$ برای این منظور هم از استقرا استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned}(n+۱) * (n+۱) &= (n+۱) * n + (n+۱) * ۱ - (n+۱)\\ &= (n+۱) * n + (۲n+۳) - (n+۱)\end{aligned}$$

حال باید مقدار $n * (n+۱)$ را محاسبه کنیم تا حکم مورد نظر اثبات شود:

$$\begin{aligned}(n+۱) * n &= n * (n+۱) = n * n + n * ۱ - n\\ &= ((n+۱)^۲ - ۱) + \ ۲n+۱\ - n = n^۲ + ۳n + ۱\end{aligned}$$

حال با جای‌گذاری در معادله‌ی فوق خواهیم داشت:

$$(n+۱) * (n+۱) = (n^۲ + ۳n + ۱) + n + ۲ = (n+۲)^۲ - ۱$$

بنابراین $۱۲۰ = ۱۰ * ۱۰$ می شود.

۲۴. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

x	$۲x$
$۲^۸x$	$۲^۹x$

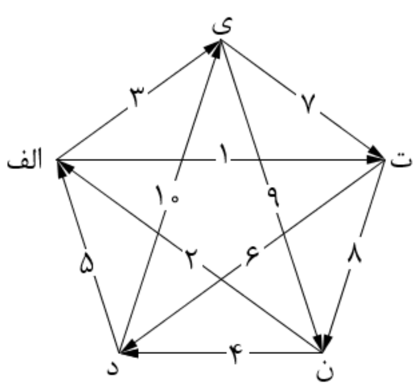
صفحه‌ی شطرنج را به ۱۶ تا مربع ۲×۲ مجاور افراز می‌کنیم. در این صورت در هر مربع ۲×۲ افراز شده مربع کوچک بالا- سمت راست سفید است و اگر مقدار آن خانه x باشد مقدار بقیه‌ی خانه‌های مربع ۲×۲ شامل آن خانه برحسب x به صورت جدول روبه‌رو خواهد بود. بنابراین نسبت مقدار خانه‌های سفید به کل خانه‌ها در این مربع برابر

$۰.۶۶ \approx \frac{۵۱۳x}{۷۷۱x} = \frac{x+۲^۹x}{x+۲x+۲^۸x+۲^۹x}$ است. پس نسبت خانه‌های سفید به کل خانه‌ها در کل جدول هم برابر همین عدد است.

۲۵. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

دقت کنید که طبق خواص مثلث می‌دانیم $BE = \frac{BC+AB-AC}{۲}$ که با توجه به فرض مسئله نتیجه می‌شود که $BE = \frac{BC+AB-AC}{۲} = \frac{۲(AC-AB)+AB-AC}{۲} = \frac{AC-AB}{۲} = \frac{BC}{۴} = \frac{BM}{۲}$. پس E نقطه‌ی وسط پاره‌خط BM و چون L هم وسط AM است K مرکز ثقل مثلث ABM و AE میانه‌ی این مثلث است. پس با توجه به خواص میانه‌ها می‌دانیم که $\frac{AK}{AE} = \frac{۲}{۳}$.

۲۶. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

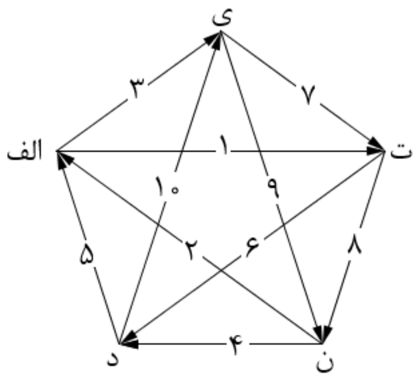


یک گراف جهت‌دار به این صورت می‌سازیم که حروف "الف، ن، د، ت و ی" را به عنوان رئوس اختیار می‌کنیم و به ازای هر بیت دو رأس مربوط به حرف ابتدایی و انتهایی آن بیت را با یالی جهت‌دار به هم وصل می‌کنیم. با این کار به گراف روبه‌رو می‌رسیم. (عددهای نوشته شده روی یال‌ها شماره‌ی بیت مربوط به آن یال را درصورت سؤال نشان می‌دهد.)

حال مشاعره در مسئله معادل با این می‌شود که نفر اول یک یال انتخاب کند و نفر بعد هر بار یالی غیرتکراری که ابتدای آن انتهای یال نفر قبلی باشد انتخاب می‌کند. هر کس که نتواند یالی انتخاب کند بازنده است. با توجه به تقارن وجود در گراف یال‌های $\{۱,۶,۱۰,۹,۲\}$ و همین طور $\{۳,۷,۸,۴,۵\}$ وضعیت مشابهی دارند. پس کافی است یک یال از هر دسته به عنوان یال شروع بازی انتخاب شود و وضعیت بازی بررسی شود.(با توجه به این نکته الآن می‌فهمیم که گزینه‌های (ب) و (د) نمی‌توانند پاسخ مسئله باشند.)

ابتدا فرض کنید که نفر اول یک یال از دسته‌ی اول مثلاً یال ۱ را انتخاب کند. ادعا می‌کنیم در این صورت نفر اول می‌تواند برنده شود. نفر دوم باید از بین $\{۶,۸\}$ یک یال انتخاب کند. اگر یال ۶ را انتخاب کند نفر اول یال ۵ و اگر یال ۸ را برگزینند، نفر اول یال ۲ را انتخاب می‌کند. با این انتخاب‌ها بعد از سه حرکت بار دیگر در رأس

"الف" هستیم و نفر دوم این بار مجبور است یال ۳ را انتخاب کند و بعد از آن نفر اول یال ۷ را انتخاب می‌کند. با این حرکات دوباره به رأس "ت" که قبلاً در آن بوده‌ایم بازگشته‌ایم و در این مرحله نفر دو به ناچار باید یالی از بین $\{۶,۸\}$ که قبلاً انتخاب نکرده را انتخاب کند. بعد نفر اول استراتژی حرکت دومش را تکرار می‌کند و به این صورت برای بار سوم به رأس "الف" برگشته‌ایم با این تفاوت که این بار انتخاب جدیدی نداریم و بنابراین نفر اول حتماً برنده است. پس در ۵ یال $\{۱,۶,۱۰,۹,۲\}$ نفر اول می‌تواند برنده شود.



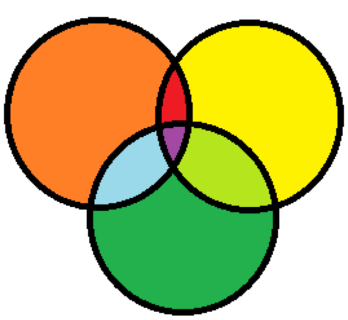
حال ادعا می‌کنیم که در ۵ یال دیگر مثلاً یال شماره‌ی ۳ نفر دوم می‌تواند برنده باشد. در این حالت نفر دوم یال ۷ را انتخاب می‌کند. حال نفر اول برای انتخاب یال بعدی دو حالت دارد.

حالت اول. یال ۸ را انتخاب کند. در این حالت نفر دوم یال ۴ را انتخاب می‌کند. بعد از این نفر یک یکی از دو یال ۱۰ یا ۵ را انتخاب می‌کند. می‌توان به سادگی بررسی کرد که با انتخاب هر کدام از این دو یال انتخاب‌های بعدی به هر نفر تحمیل می‌شود و با انتخاب یال‌ها همه‌ی یال‌ها استفاده می‌شوند. پس آخرین یال را نفر دو استفاده می‌کند و بنابراین نفر اول که گزینه‌ای برای انتخاب ندارد، بازنده است.

حالت دوم. یال ۶ را انتخاب کند. در این صورت نفر دوم یال ۱۰ را انتخاب می‌کند. با این انتخاب نفر اول مجبور از یال ۹ را انتخاب کند و در مرحله‌ی بعد نفر دوم باید یالی که از رأس "ن" خارج می‌شود را برگزینند. اگر نفر دوم یال ۲ را انتخاب کند، مشابه حالت قبل می‌توان چک کرد که حرکات بعدی به دو نفر به تحمیل می‌شود و در نهایت همه‌ی یال‌ها استفاده می‌شود که این باعث می‌شود نفر دوم پیروز شود.

پس در کل نفر اول با شروع از ۵ یال $\{۱,۶,۱۰,۹,۲\}$ می‌تواند برنده‌ی بازی باشد.

۲۷. گزینه‌ی (ه) صحیح است.



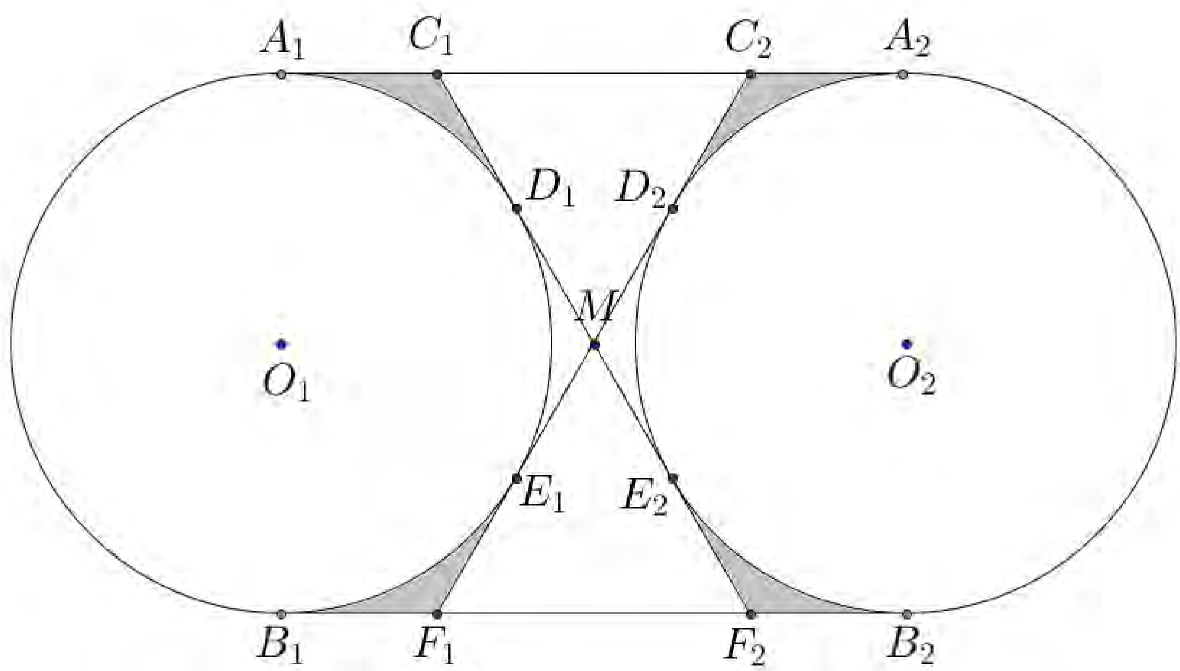
با استفاده از هر کدام از این مجموعه‌ها می‌توان مجموعه‌های مجزای زیر را پدید آورد. برای این منظور کافی است دقت کنید که عمل اشتراک را می‌توانیم با استفاده از اجتماع و مکمل داشته باشیم. تعداد کل این زیرمجموعه‌ها ۸ تا هستند که همگی از هم

مجزا هستند. این زیرمجموعه‌ها در شکل با رنگ‌های مختلف مشخص شده‌اند. (یک ناحیه بیرونی هم هست که با رنگ سفید مشخص شده است.)

حال ما می‌توانیم با کنار هم قرار دادن هر تعداد دل‌خواه از این ۸ مجموعه یک مجموعه‌ی جدید ایجاد کنیم. مثلاً با اجتماع زیر مجموعه‌ی زرد و نارنجی و آبی یک مجموعه به دست می‌آید. پس تعداد کل مجموعه‌های ممکن برابر $۲^{۸}$ است.

۲۸. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

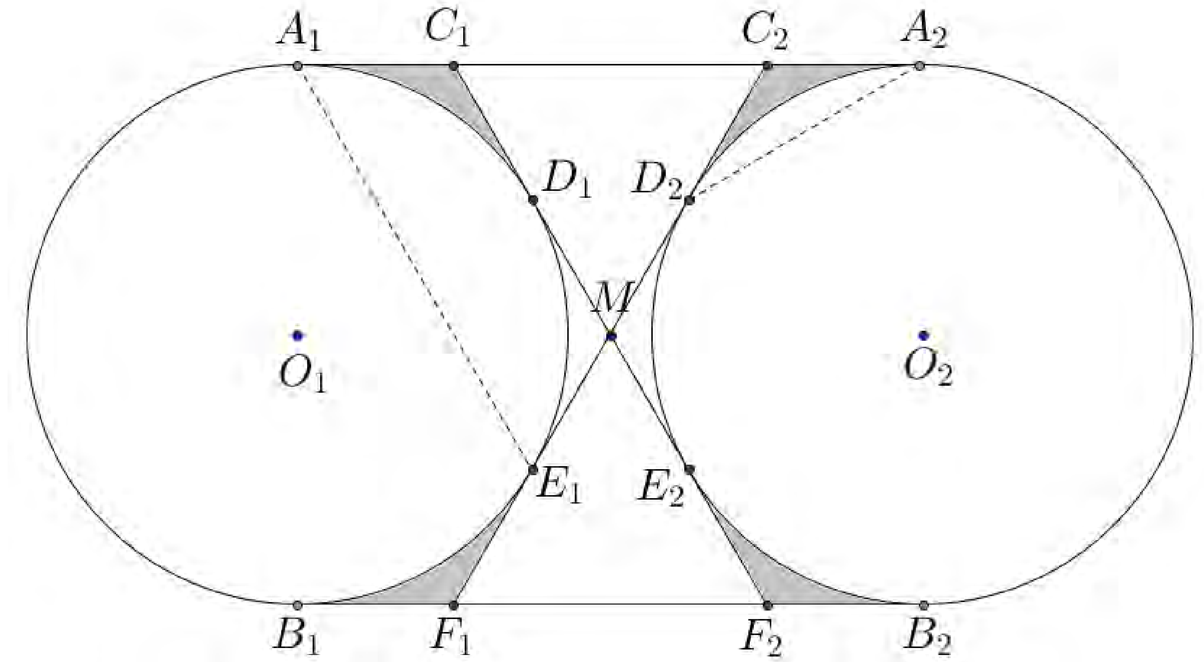
ابتدا دقت کنید که با توجه به طول شعاع دایره‌ها و فاصله‌ی بین مرکزهای آن‌ها دو دایره خارج از هم قرار دارند. حال ادعا می‌کنیم نواحی رنگی شکل زیر تنها نقاطی خارج از دایره‌ها هستند که هر خط گذرنده از آن‌ها حداقل یکی از دو دایره را قطع می‌کند. (خط‌های رسم شده مماس مشترک‌های داخلی و خارجی دو دایره هستند.)



ابتدا دقت کنید که اگر نقطه‌ای درون مثلث‌های $MC_۱C_۲$ و یا $MF_۱F_۲$ باشد خط واصل بین آن نقطه و M هیچ‌کدام از دایره‌ها را قطع نمی‌کند. اگر نقطه‌ای هم بیرون از دو دایره و چهارضلعی $A_۱A_۲B_۲B_۱$ باشد به راحتی می‌توان از آن نقطه خطی گذرند که هیچ‌کدام از دایره‌ها را قطع نکند. اگر هم نقطه‌ای درون قسمت‌های خارج از دایره‌های مثلث‌های $MD_۱E_۱$ و $MD_۲E_۲$ باشد. خط مماس بر دایره‌ی نزدیک‌تر از آن نقطه تنها در یک نقطه آن دایره را قطع می‌کند و با دایره‌ی دیگر اشتراکی ندارد. حال می‌توان این خط مماس را اندکی تغییر

داد طوری که دایره‌ی نزدیک‌تر را هم قطع نکند. حال نشان می‌دهیم که اگر نقطه‌ای در یکی از نواحی رنگی مثلاً قسمت رنگی درون مثلث $C_2A_2D_2$ باشد هر خط گذرا از آن دست‌کم یکی از دایره‌ها را قطع می‌کند.
برای این منظور از لم زیر استفاده می‌کنیم.
لم. نقطه‌ی X درون مثلث ABC قرار دارد. هر خط گذرا از X یا از یک رأس و یک ضلع مثلث عبور می‌کند یا دقیقاً دو ضلع را قطع می‌کند.
اثبات این لم به سادگی و با در نظر گرفتن دو نیم‌خطِ خط گذرنده از X انجام می‌شود.

حال در مسئله‌ی اصلی نقطه‌ای را درون ناحیه‌ی رنگی مثلث $C_2A_2D_2$ و یک خط دل‌خواه گذرنده از آن نقطه را در نظر بگیرید.



اگر ضلع A_2D_2 را قطع کند یا از یکی از رئوس مثلث بگذرد با دایره‌ی به مرکز O_2 تقاطع دارد. پس فرض کنید خط با A_2D_2 اشتراکی ندارد. بنابراین باید دو ضلع A_2C_2 و D_2C_2 را قطع کند. حال دقت کنید که از آن‌جا که این خط با C_2E_1 تقاطع دارد باید شامل نقطه‌ای درون مثلث $A_1C_2E_1$ باشد. دقت کنید که این خط با ضلع C_2E_1 از این مثلث تقاطع دارد ولی با ضلع C_2A_1 تقاطع ندارد.(زیرا تقاطع این خط با خط شامل C_2A_1 در پاره‌خط A_2C_2 است.) بنابراین طبق لم بالا این خط به ناچار باید با ضلع A_1C_1 اشتراک داشته باشد

و بنابراین این خط دایره‌ی به مرکز $O_۲$ را قطع می‌کند. با توجه به تقارن شکل اثبات ادعا برای دیگر نواحی رنگ‌شده هم مشابه است و بنابراین اثبات درستی ادعا کامل می‌شود.

بنابراین کافی است مساحت چهار ناحیه‌ی رنگ‌شده‌ی شکل را محاسبه کنیم. برای این منظور دقت کنید که $\sin(\angle D_۲MO_۲) = \frac{D_۲O_۲}{O_۲M} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ پس $\angle D_۲MO_۲ = ۶۰^\circ$ و به تبع آن با اندکی محاسبه خواهیم داشت که:

$$\angle D_۲O_۲A_۲ = ۶۰^\circ \Rightarrow \angle C_۲O_۲D_۲ = ۳۰^\circ \Rightarrow C_۲A_۲ = A_۲\,O_۲\,.\tan(۳۰^\circ) = ۱$$

پس برای محاسبه‌ی مساحت ناحیه‌ی مورد نظر داریم:

$$\text{مساحت ناحیه‌ی رنگی} = ۸ \times \text{مساحت مثلث}\,(C_۲O_۲A_۲) - \frac{۲}{۳} \times \text{مساحت دایره}$$

$$= ۸ \times \frac{۱ \times \sqrt{۳}}{۲} - \frac{۲}{۳} \times \pi(\sqrt{۳})^۲ = ۴\sqrt{۳} - ۲\pi$$

۲۹. گزینه‌ی (د) صحیح است.

راه‌حل اول. فرض کنید رنگ‌های مورد استفاده را با چهار شماره‌ی ۱، ۲، ۳ و ۴ نمایش دهیم. به این ترتیب برای رنگ‌آمیزی چهارخانه‌ی بالا راست جدول $۲۴ = ۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴$ حالت داریم. فرض کنید چهار خانه‌ی بالا سمت راست جدول به صورت زیر رنگ شده باشند.

			۴	۱
			۳	۲

در این صورت برای دو خانه‌ی اول سطر سوم باید شامل ۱ و ۴ و دو خانه‌ی اول سطر چهارم باید شامل ۲ و ۳ باشند. حال بر حسب حالت‌های مختلفی که این چهار خانه می‌توانند رنگ‌آمیزی شوند مسئله را حالت‌بندی می‌کنیم.

حالت اول.

			۴	۱
			۳	۲

۴	۱			
۲	۳			

در این حالت خانه‌ی دوم از ستون سوم در سه مربع ۲ × ۲ حاضر است، پس نمی‌تواند برابر ۱، ۴ و ۳ باشد و لذا به ناچار ۲ است. با مشخص شدن این خانه می‌توان رنگ بقیه‌ی خانه‌های این ستون و با استدلال مشابه رنگ بقیه‌ی خانه‌های جدول را به طور یک‌تا مشخص کرد.

حالت دوم.

۱	۴			
۲	۳			
۴	۱			
۳	۲			

در این حالت هم کاملاً مشابه حالت اول رنگ بقیه‌ی جدول به طور یک‌تا تعیین می‌شود.(ابتدا خانه‌ی دوم از ستون سوم که باید برابر ۲ باشد، سپس بقیه‌ی خانه‌های این ستون و به همین شکل بقیه‌ی جدول)

حالت سوم.

۱	۴			
۲	۳			
۱	۴			
۳	۲			

این حالت هم مشابه حالت‌های قبلی بقیه‌ی جدول به طور یک‌تا تعیین می‌شود با این تفاوت که ابتدا رنگ خانه‌ی سوم از ستون سوم مشخص می‌شود.

حالت چهارم.

۱	۴			
۲	۳			

			۴	۱
			۳	۲

در این جا برای انتخاب رنگ خانه‌ی اول ستون سوم دو حالت ۱ و ۲ داریم. با انتخاب رنگ این خانه رنگ بقیه‌ی ستون تعیین می‌شود. سپس برای انتخاب رنگ خانه‌ی اول ستون چهارم که رنگ کلیه‌ی خانه‌های این ستون را تعیین می‌کند هم دو حالت ۳ و ۴ داریم. در نهایت برای انتخاب رنگ خانه‌ی اول ستون پنجم هم دو حالت ۱ و ۲ را داریم. با انتخاب رنگ این خانه ستون پنجم هم تعیین می‌شود. پس در این حالت برای رنگ‌آمیزی جدول ۸ حالت داریم.

بنابراین در کل با توجه به انتخاب رنگ ۴ خانه‌ی اولیه $۲۴ \times (۱ + ۱ + ۱ + ۸) = ۲۴ \times ۱۱۲ = ۲۶۴$ حالت داریم.

راه‌حل دوم. می‌توان به سادگی نشان داد که در هر چنین جدولی یا خانه‌های همه‌ی سطرها یک در میان رنگ‌شده‌اند یا خانه‌های همه‌ی ستون‌ها. به علاوه اگر خانه‌های یک سطر به صورت یک در میان رنگ شده باشند می‌توان نشان داد که خانه‌های همه‌ی سطرها باید یک در میان رنگ شده باشند و حکم مشابه برای ستون‌ها هم درست است. پس باید تعداد جدول‌هایی را بشماریم که سطرها یا ستون‌های آن به صورت یک در میان رنگ شده اند.

در حالتی که سطرها یک در میان باشند. در سطر اول ۴ حالت برای رنگ خانه‌ی اول و ۳ حالت برای رنگ خانه‌ی دوم داریم که می‌شود ۱۲ حالت. برای سطر دوم ۲ حالت و سطر سوم نیز ۲ حالت و سطر چهارم هم ۲ حالت. که در کل ۹۶ حالت می‌شود.

در حالتی که ستون‌ها یک در میان باشند: برای ستون اول ۴ حالت برای رنگ خانه‌ی اول و ۳ حالت برای رنگ خانه‌ی دوم داریم که می‌شود ۱۲ حالت. برای ستون دوم ۲ حالت و ستون سوم نیز ۲ حالت و ستون چهارم هم ۲ حالت و هم‌چنین ستون آخر که در کل ۱۹۲ حالت می‌شود.

جدول‌هایی که هم سطر و هم ستون آن ها یک در میان است در خانه‌ی گوشه سمت چپ ۴ حالت، خانه‌ی مجاور ۳ حالت و خانه زیرین آن ۲ حالت دارد و بقیه به طور یک‌تا تعیین می‌شوند و بنابراین تعداد آن‌ها ۲۴ است.

در نهایت تعداد کل جدول‌ها به کمک اصل شمول و عدم شمول به دست می‌آید:

$$۲۴ - ۱۹۲ + ۹۶ = ۲۶۴$$

۳۰. گزینه‌ی (د) صحیح است.

گزینه‌های (الف) و (ه) به دلیل تقارن حذف می‌شوند؛ به این معنی که اگر نقطه‌ی (α, β) در هر کدام از این معادله‌ها صدق کند نقطه‌ی (β, α) هم صدق می‌کند. بنابراین باید نمودار جواب آن‌ها باید نسبت به نیم‌ساز ربع اول و سوم محورهای مختصات متقارن باشد که نمودار مسئله این طور نیست.

دلیل رد گزینه‌ی (ب) این است که اگر در معادله‌ی این گزینه قرار دهیم $y = ۰$ معادله به صورت $\cos x + x^{۲} = ۲$ در می‌آید که یک تابع زوج است یعنی به ازای جمیع مقادیر x که در این رابطه صدق می‌کند $-x$ نیز صدق می‌کند. یعنی باید نقاطی که نمودار محور x را قطع کرده نسبت به خط محور yها متقارن باشد که نمودار صورت سؤال چنین نیست.

دلیل رد گزینه‌ی (ج) این است که اگر در معادله قرار دهیم $x = ۰$ معادله به صورت $y = ۱$ تبدیل می‌شود، یعنی مجموعه‌ی جواب رابطه‌ی مربوط به این گزینه باید محور y ها را باید تنها در یک نقطه قطع کند که باز هم نمودار رسم‌شده در صورت سؤال این‌گونه نیست.

پس این ۴ گزینه رد می‌شوند و تنها گزینه‌ی (د) باقی می‌ماند که صحیح است.

سال ۱۳۸۵

زمان: ۲۴۰ دقیقه

کد سوالات: ۲

۱. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

بنابر فرض ارقام سمت چپ دو عدد $CAAB$ و $ACBC$ متفاوت هستند. پس لزوما $A = C + 1$. همچنین با توجه به ردیف‌های اول و سوم از سمت راست می‌توان گفت که $A + B = 10 + C$. از ردیف دوم (از سمت راست) هم می‌توان متوجه شد که $2 \times A + 1 = B$. حال به راحتی می‌توان این سه رقم را مشخص کرد.

۲. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

اگر a و b طول و عرض مستطیل مفروض باشد:

$$ab + 2(a + b) = 140 \text{ و } (a + b)^2 - 4ab \geq 0 \Rightarrow$$

$$ab + 4\sqrt{ab} \leq 140 \Rightarrow \left(\sqrt{ab} + 2\right)^2 \leq 144 \Longrightarrow ab \leq 10$$

۳. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

اشعه‌های نوری نواحی دایره شکل روی پرده ایجاد می‌کنند که شعاع آن‌ها بنابر رابطه‌ی تالس، به دست خواهد آمد. در نتیجه شعاع دایره‌ی تشکیل شده در پرده‌ی سمت چپ برابر دو برابر شعاع استوانه و در پرده دیگر چهار برابر شعاع استوانه است.

۴. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

می‌دانیم $\overline{abab} = 101 \times \overline{ab}$ و ۱۰۱ عددی اول است. پس $\overline{ab}$، ۷ مقسوم علیه دارد و بنابر رابطه‌ی تعداد مقسوم علیه‌ها(تعداد مقسوم علیه‌های عدد به شکل ${p_1}^{\alpha_1}{p_2}^{\alpha_2}\cdots{p_k}^{\alpha_k}$ که $p_1, p_2, \cdots, p_k$ اعدادی اول هستند برابر است با$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\cdots(\alpha_k + 1)$) می‌توان گفت که تنها عدد ۶۴ این خاصیت را داراست.

۵. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

برای رقم اول ۹ حالت ممکن است. برای رقم دوم هم با توجه به انتخاب رقم اول، ۹ حالت ممکن است. برای رقم سوم هم به همین ترتیب ۹ حالت ممکن است.

۶. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

توجه کنید که پاره‌خط واصل بین دو نقطه یک خط را هنگامی قطع می‌کند که آن دو نقطه در دو طرف آن خط حضور داشته باشند. در این سوال در دو طرف خط بودن بدین معنا است که یکی دارای مولفه‌ی y منفی و دیگری دارای مولفه‌ی y مثبت باشد.

۷. گزینه‌ی (د) صحیح است.

دو خط هستند که یکی طول و دیگری عرض را نصف می‌کنند. همچنین دو خط موازی عرض مستطیل(یکی در سمت چپ و دیگری در سمت راست خط نصف‌کننده‌ی طول مستطیل که طول مستطیل را به نسبت $1:4$ تقسیم می‌کنند.) وجود دارند که این خاصیت را دارند.

۸. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

اگر a تعداد پاسخ‌های صحیح و b تعداد پاسخ‌های نادرست او باشد، می‌دانیم

$$a, b \in \mathbb{N} \text{ و } a + b \leq 30 \text{ و } 4a - b = 89$$

پس تنها جواب‌های ممکن $a = 23$ و $b = 3$ است.

۹. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

بنابر الگوریتم غربال اراتستن، عددی که کوچک‌ترین مقسوم علیه اولش از سایر گزینه‌ها بیش‌تر باشد، دیرتر حذف می‌شود. کوچک‌ترین مقسوم علیه اول گزینه‌ها به ترتیب برابر $2, 41, 11, 3, 5$ است.

۱۰. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

به وضوح در حالتی که دوتا از این اعداد مثبت هستند، حاصل‌ضرب منفی است. پس می‌توان فرض کرد که دو تا از این اعداد مانند x و y منفی هستند و z مثبت. حال می‌توان نشان داد که $xyz \leq \frac{z^3}{4}$.

۱۱. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

توجه کنید که $2^{2^5} \equiv 256^4 \equiv 36^2 \equiv 96 (mod\ 100)$.

۱۲. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

در حالتی که دو وجه آبی باشند، تنها دو حالت متفاوت داریم. یکی اینکه دو وجه روبرو باشند و دیگری آن که دو وجه آبی مجاور باشند. به همین ترتیب نیز دو حالت برای دو وجه قرمز داریم. اگر سه وجه آبی داشته باشیم نیز دو حالت برای آن‌ها ممکن است. یکی آن که سه وجه آبی در یک رأس مشترک باشند. در این حالت سه وجه قرمز نیز در رأس روبرو به این رأس مشترک هستند. یا این که دو وجه از این سه وجه روبه روی هم باشند و سومی بین این دو قرار بگیرد. دو حالت هم مربوط به زمانی است که تنها یک وجه آبی یا تنها یک وجه قرمز داشته باشیم.

۱۳. گزینه‌ی (د) صحیح است.

$$A \cup C = B \cup C \Longrightarrow A \backslash C = B \backslash C$$

$$A \cap C = (B \cap C) \cup D \Longrightarrow A = (A \cap C) \cup A \backslash C = (B \backslash C) \cup \left((B \cap C) \cup D\right) = B \cup D$$

۱۴. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

فرض کنید P نقطه‌ای درون مثلث باشد. اضلاع این مثلث در شرط فیثاغورس برای مثلث‌های قائم‌الزاویه صدق می‌کند. پس مثلث مذکور قائم‌الزاویه است. حال نقطه‌ی P را بر ضلع به طول ۳ تصویر کنید و نام نقطه را Q بگذارید. می‌توان نشان داد که مجموع فواصل Q از سه ضلع از این مجموع برای P کم‌تر است. به همین ترتیب می‌توان نشان داد که مجموع این فواصل برای رأس قائمه‌ی مثلث از Q کم‌تر است. پس کم‌ترین مجموع فواصل را رأس قائمه‌ی مثلث دارد.

۱۵. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

این هشت وجهی در واقع از یک مربع به قطر ۱ و دو نقطه به فواصل $\frac{1}{2}$ از این مربع در بالا و پایین آن تشکیل شده است. در واقع اجتماع دو هرم مربع القاعده به سطح قاعده $\frac{1}{2}$ و ارتفاع $\frac{1}{2}$ است.

۱۶. گزینه‌ی (د) صحیح است.

فرض کنید H پای عمود از M بر AB باشد. اکنون با نوشتن قضیه فیثاغورس در مثلث BMH، طول BM به راحتی محاسبه می‌شود. از طرفی در ذوزنقه AMND مساحت برابر است با $\frac{1}{4}(1 + \mathrm{MN})$.

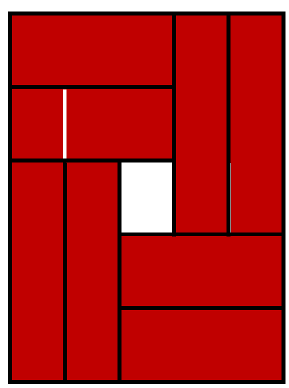
۱۷. گزینه‌ی (د) صحیح است.

بنابر شرط ماتریس A، اگر در سطر iام ماتریس ۱ داشته باشیم، در ستون iام نمی‌توانیم ۱ داشته باشیم و بالعکس. فرض کنید در t سطر درایه ۱ وجود داشته باشد. پس در t ستون هیچ درایه ۱ای وجود ندارد. پس حداکثر $\mathrm{t}(10 - \mathrm{t}) \leq 25$ درایه ۱ می‌توانیم داشته باشیم. برای حالت تساوی هم ماتریسی را در نظر بگیرید که تمامی خانه‌های ربع بالا سمت راست آن ۱ باشد.

۱۸. گزینه‌ی (د) صحیح است.

طبق قضیه‌ی تالس اگر شعاع خواسته شده r باشد، $\frac{3}{5} = \frac{\mathrm{r}}{r+10}$.

۱۹. گزینه‌ی (د) صحیح است.



۲۰. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

به وضوح اگر x ریشه‌ی این معادله باشد، $\sin(24x)$ و $\sin(32x)$ هر دو صفر باشند. به عبارتی ریشه‌ها هم به شکل $\frac{k\pi}{24}$ هستند و هم به شکل $\frac{l\pi}{32}$. اعداد مثبت بدین شکل که از بیش‌تر نیستند، به صورت $\frac{m\pi}{8}$ هستند که m عددی صحیح است که $0 \leq \mathrm{m} \leq 8$.

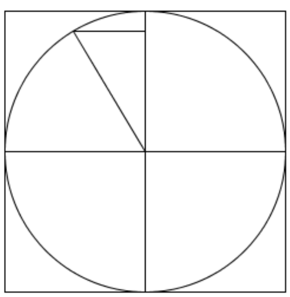
۲۱. گزینه‌ی (د) صحیح است.

می‌دانیم $\ln 9 > 1 - \frac{1}{9} - \frac{1}{81^2 \times 2}$ و $\log e > \frac{1}{3}$ و $\log 9 = \log e \times \ln 9 > \frac{467}{486} > \frac{19}{20}$. پس $20 \log 9 > 19$. همچنین به وضوح $20 \log 9 < 20$. پس 9^{20} عددی ۲۰ رقمی است.

۲۲. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

در واقع باید ۱۱ ستون دارای خانه‌ی سیاه باشند، زیرا در یک ستون نمی‌توانیم دو خانه‌ی سیاه داشته باشیم. پس در اول ما یک ستون را انتخاب می‌کنیم که فاقد خانه سیاه است. اگر این ستون یکی از دو ستون کناری جدول باشد، خانه‌های دیگر دقیقا به ۲ روش می‌توان رنگ کرد. در غیر این صورت ۴ روش مختلف می‌توان داشت.

۲۳. گزینه‌ی (د) صحیح است.



اگر نصف ضلع مربع را r فرض کنیم، فاصله‌ی این نقطه از قطر عمودی دایره برابر $r - 2$ و از قطر افقی برابر است با $r - 1$. پس بنابر رابطه‌ی فیثاغورس خواهیم داشت: $r^2 = (r-1)^2 + (r-2)^2$. پس $r = 5$.

۲۴. گزینه‌ی (د) صحیح است.

$AB = B, BA = A \Longrightarrow A^2 = ABA = BA = A$ به همین ترتیب $B^2 = B$.

۲۵. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

$$4x^2 + 4x + 32 = 4y^2 \Longrightarrow (2x+1)^2 + 31 = 4y^2$$
$$\Longrightarrow \big(2y - (2x+1)\big)\big(2y + (2x+1)\big) = 31$$
$$\Longrightarrow 2y - (2x+1) = 1, \big(2y + (2x+1)\big) = 31$$

پس تنها جواب معادله $\mathrm{x} = 7, y = 8$ است.

توجه کنید که ۳۱ اول است.

۲۶. گزینه‌ی (د) صحیح است.

هر عدد طبیعی n را می‌توان به صورت یکتا به شکل qd^2 نوشت که q حاصل‌ضرب چند عدد اول متمایز است. به راحتی ثابت می‌شود که اگر kn مربع کامل باشد آنگاه q | k. در این مسئله گزینه‌ای درست است که q در آن از ۱۰۰۰ بیش‌تر باشد.

۲۷. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

خط‌هایی که ایجاد می‌شود، از نقطه‌ای واقع بر طول می‌گذرد که فاصله‌ی آن از دو رأس روبرو مستطیل به یک اندازه است. برای این فاصله x داریم: $x^2 = 1 + (5 - x)^2$. پس $x = \frac{13}{5}$. حال مساحت ناحیه یک لایه متشکل از دو مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع قائمه‌ی ۱ و $\frac{12}{5}$ است.

۲۸. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

ما هر حرکت پاسبان را با یکی از حروف U(بالا)، D(پایین)، R(راست) و L(چپ) مشخص می‌کنیم. به وضوح باید تعداد Uها با Dها برابر باشد. همچنین تعداد Rها و Lها. پس تعداد حالات برابر است با تعداد کلمات ۶ حرفی متشکل از این حروف به گونه‌ای که در شرط فوق صدق کنند.

۲۹. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

اولاً به وضوح x^2 عددی صحیح است و هم‌چنین نامنفی است. برای $x = 0, 1$ که به وضوح برابری برقرار است. اگر $x > 1$

$$x^2 = [x^3] = x^2 + [x^2(x - 1)] \Longrightarrow 0 \leq x^2(x - 1) \leq 1$$

که تنها $\sqrt{2}$ در این شرط صدق می‌کند.

۳۰. گزینه‌ی (د) صحیح است.

فرض کنید تعداد این افراد a باشد. A را مجموعه‌ی بازی‌هایی در نظر بگیرید که یکی از این a نفر در آن پیروز شده باشد. به وضوح در $\binom{a}{2}$ بازی که این افراد با هم انجام می‌دهند در مجموعه‌ی A هستند. همچنین

این افراد در دیدار با کشتی گیران دیگر حداکثر می‌توانند $a(9-a)$ پیروزی کسب کنند. از طرفی بنابر فرض مسئله $|A| \geq 5a$. پس

$$\frac{1}{2}a(a-1)+a(9-a) \geq |A| \geq 5a \Longrightarrow \frac{1}{2}(a-1)+9-a \geq 5$$

$$\Rightarrow \mathrm{a} \leq 7$$

حال یک گروه ۷ نفره را در نظر بگیرید که هرکدام در گروه خود دقیقا ۳ نفر را برده‌اند (کافی است سه دور مجزای یالی را در نظر بگیریم که گراف کامل ۷ راسی را افراز می‌کنند.)و همگی آن‌ها ۲ نفر باقی‌مانده را شکست داده‌اند.

سال ۱۳۸۶

زمان: ۲۷۰ دقیقه

۱. گزینه‌ی ۵ صحیح است.

با توجه به اینکه مجموع زوایای مثلث ۱۸۰ درجه است، اگر یکی از زوایا بیش‌تر یا مساوی ۶۲ درجه باشد مجموع دو زاویه دیگر کم‌تر یا مساوی ۱۱۸ درجه شده، که مستوجب این است که یکی از زوایا کم‌تر یا مساوی ۵۹ درجه شود.

۲. گزینه‌ی ۳ صحیح است.

عوامل اول کوچک‌تر از ۱۵ عبارتند از ۲و۳و۵و۷و۱۱و۱۳ (شش عامل). از طرف دیگر با توجه به اینکه این اعداد نباید بر هیچ عدد مکعب کاملی بخش‌پذیر باشند، پس نمای این عوامل باید کم‌تر از ۳ باشد (۰و۱و۲). چرا که در غیر این صورت آن عامل اول به توان ۳ عددی مکعب کامل بوده که عدد مذکور را می شمارد. بدین ترتیب تعداد اعداد برابر است با $۳^۶$ یعنی ۷۲۹.

۳. گزینه‌ی ۱ صحیح است.

دقت کنید از آنجا که حاصل قدر مطلق یک عدد همواره نامنفی است، پس $|a| \geq 0$ در نتیجه $|a| + 3 > 0$ بنابر این $\left||a| + 3\right| = |a| + 3$. پس :

$$1 = \left|2 - \left||a| + 3\right|\right| = |2 - (|a| + 3)| = \left|-1 - |a|\right| = \left|1 + |a|\right|$$

حال با توجه به رابطه ی $\left|1 + |a|\right| = 1$ و این که $|a| + 1$ مثبت است داریم::

$$\left|1 + |a|\right| = |a| + 1 = 1 \ \Rightarrow \ |a| = 0 \ \Rightarrow a = 0$$

پس مسئله تنها دارای یک جواب است.

۴. گزینه‌ی ۳ صحیح است.

۱۰۰۰ برابر است با $۲^۳ \times ۵^۳$. بنابر این ارقام عدد مورد نظر یا ۱ یا ۲ یا ۵ هستند. اگر عدد مورد نظر دارای رقم ۱ بود، می توان آن را حذف کرد، پس به عددی کوچک‌تر با شرایط مذکور دست خواهیم یافت. پس تنها باید از

رقم‌های ۲و۵ استفاده کنیم. در نتیجه با توجه به اینکه می‌خواهیم کم‌ترین ارقام را داشته باشیم (چراکه عددی که دارای رقم‌های بیش‌تر است، بزرگ‌تر است) پس ارقام عبارتند از ۵و۵و۵و۸ که مجموعشان ۲۳ است.

۵. گزینه‌ی ۵ صحیح است.

M, L را به ترتیب محل برخورد DE, AK و BE, CD در می‌نظر گیریم

$$\angle CBE = 90 - \angle ECB = 30 \Rightarrow DE || CB$$

$$BKM \sim ELM \Rightarrow \frac{EL}{BK} = \frac{ME}{MB} (I)$$

$$BCM \sim EDM \Rightarrow \frac{ME}{MB} = \frac{DE}{BC} (II)$$

$$\text{قضیه تالس} \Rightarrow \begin{cases} \frac{EL}{CK} = \frac{AE}{AC} \\ \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC} \end{cases} \Rightarrow \frac{DE}{BC} = \frac{EL}{CK} (III)$$

$$\xrightarrow{I,II,III} \frac{EL}{BK} = \frac{EL}{CK} \Rightarrow BK = CK \Rightarrow \frac{BK}{BC} = \frac{1}{2}$$

۶. گزینه‌ی ۴ صحیح است.

اگر در یک مرحله به عدد ۲ رسیده باشیم، ارقام باید ۲و۱ باشند. پس اعداد ۱۲ و ۲۱ می‌باشند.

حال فرض کنید در دو مرحله به عدد ۲ رسیده باشیم. پس حاصل‌ضرب ارقام یا به ۱۲ رسیده یا به ۲۱.(چرا که حاصل‌ضرب ارقام هر عدد دو رقمی، خود عددی حداکثر دو رقمی است) در این حالت باید این دو عدد را به صورت ضرب ۲ عدد یک رقمی بنویسیم. لذا داریم:

$12=3\times4 \Rightarrow$ اعداد ۳۴ و ۴۳ به ۱۲ می‌رسند.

$12=2\times6 \Rightarrow$ اعداد ۲۶ و ۶۲ به ۱۲ می‌رسند.

$\Rightarrow 21=3\times7$اعداد ۳۷ و ۷۳ به ۲۱ می‌رسند

تا اینجا ۸ عدد حاصل شده است. اکنون با توجه به اینکه هیچکدام از ۶ عدد مرحله قبل را نمی‌توان به صورت ضرب ۲ عدد یک رقمی نوشت، پس حالت دیگری نمی‌ماند و کار خاتمه یافته است.

۷. گزینه ۵ صحیح است.

۱×۲×۳×۴ یعنی ۲۴ عدد داریم که رقم اولشان ثابت باشد. به همین ترتیب ۱×۲×۳ یعنی ۶ عدد نیز داریم که ۲ رقم اولشان ثابت باشد. رقم اول از سمت چپ عدد ۳ است بنابراین ۲۴×۲ عدد را پشت سر گذاشته‌ایم(اعدادی که رقم اولشان ۲و۱ بوده) برای رقم دوم از سمت چپ که رقم ۲ می‌باشد نیز ۶ عدد را پشت سر گذاشته‌ایم. پس ۵۴ عدد را پشت سر گذاشته‌ایم. از میان سه رقم باقی‌مانده هم به ترتیب ۱۴۵و۱۵۴و۴۱۵و۴۵۱ یعنی ۴ عدد دیگر باید جلو برویم. پس ۳۲۴۵۱، ۵۸ امین عدد است.

۸. گزینه‌ی ۴ صحیح است.

O مرکز دایره است.

$$\begin{cases} AA' \perp OA, BB' \perp OB \\ OA = OB \\ AA' = BB' \end{cases} \Rightarrow OAA' = OBB' \Rightarrow \begin{cases} OA' = OB'(I) \\ \angle AOA' = \angle BOB'(II) \end{cases}$$

$$\angle A'OB' = \angle A'OA + \angle AOB'(III)$$

$$\angle AOB = \angle B'OB + \angle AOB'(IV)$$

(اگر دو مثلث $A'OA$ و $B'OB$ هم پوشانی داشته باشند، علامت جمع فوق، علامت تفریق خواهد شد)

$$\xRightarrow{II,III,IV} \angle A'OB' = \angle AOB(V)$$

$$\overset{I}{\Rightarrow} \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB}(VI)$$

$$\xRightarrow{V,VI} AOB \sim A'OB'$$

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OA}$$

به همین ترتیب:

$$\frac{B'C'}{BC} = \frac{OB'}{OB}, \frac{C'A'}{CA} = \frac{OC'}{OC}$$
$$\Rightarrow ABC \sim A'B'C' \Rightarrow \angle B'A'C' = \angle BAC = 80$$

۹. گزینه‌ی ۲ صحیح است.

$$a = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$b = \frac{m(m+1)}{2}$$
$$a - b = 101$$
$$\Rightarrow a - b = \frac{(n-m)(n+m+1)}{2}$$
$$\Rightarrow (n-m)(n+m+1) = 202 = 2 \times 101$$
$$\Rightarrow \begin{matrix} \begin{cases} n-m=1 \\ n+m+1=202 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n=101 \\ m=100 \end{cases} \\ \begin{cases} n-m=2 \\ n+m+1=101 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n=51 \\ m=49 \end{cases} \end{matrix}$$

پس دو دسته جواب دارد.

۱۰. گزینه‌ی ۳ صحیح است.

اگر n عددی طبیعی باشد،در میان $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n}$، بزرگ‌ترین اعداد $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}, \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ می باشند.

پس بزرگ‌ترین ضریب $\binom{100}{50}$ می باشد.

$$\binom{100}{50} = \frac{100!}{50!\,50!} = \frac{100 \times 99 \times \dots \times 1}{(50 \times 49 \times \dots \times 1)^2}$$
$$= 2^{50} \frac{99 \times 97 \times \dots \times 1}{50 \times 49 \times \dots \times 1} < 2^{50} \frac{100}{50} \times \frac{98}{49} \times \dots \times \frac{2}{1} < 2^{50} \times 2^{50} = 2^{100}$$
$$= 2 \times (2^3)^{33} < 2 \times 10^{33} < 10^{34}$$

برای طرف دیگر داریم:

$$\binom{100}{50} = 2^{50}\frac{99\times 97\times \ldots \times 1}{50\times 49\times \ldots\times 1} = 2^{50}\times\frac{99}{49}\times\frac{97}{48}\times\ldots\times\frac{3}{1}\times\frac{1}{50}$$

$$> 2^{50}\times\frac{98}{49}\times\frac{96}{48}\times\ldots\times\frac{2}{1}\times\frac{2}{100} = 2^{50}\times 2^{49}\times 2\times\frac{1}{100} = \frac{2^{100}}{100}$$

$$= \frac{(2^{10})^{10}}{100} > \frac{(10^3)^{10}}{100} = 10^{28}$$

۱۱. گزینه‌ی ۱ صحیح است.

با توجه به اینکه هر قطعه از آن اول است، پس هر قطعه از آن نیز باید بسیار اول باشد. پس دو رقم سمت چپ آن نیز بسیار اول است. حال در صورتیکه با ۲۳ شروع شود، رقم سوم باید ۷ باشد زیرا ۳۷ تنها عدد بسیار اولی است که با ۳ آغاز می‌شود. به همین منوال، تنها اعدادی که می‌توانند بسیار اول باشند عبارتند از: ۲۳۷و ۳۷۳و۵۳۷و۷۳۷ . خود این اعداد نیز باید اول باشند که از این اعداد تنها ۳۷۳ اول است.(دو تا بر ۳ و دیگری بر ۱۱ بخش‌پذیر است)

۱۲. گزینه‌ی ۱ صحیح است.

با توجه به اینکه هیچ یک از احزاب بیش از نصف رای نیاورده است، پس حداکثر تعداد نمایندگان هر حزب ۱۴۲ نفر است. حال اگر از حزب اول ۱۴۲ نفر رای آورده باشند، آن‌گاه مجموعا از حزب دوم و سوم ۱۴۳ نفر رای آورده‌اند که تعداد آراء حزب دوم از ۱ تا ۱۴۲ می‌تواند باشد(آراء حزب سوم خود به خود تعیین می‌شود.).اگر از حزب اول ۱۴۱ نفر رای آورده باشند، آن‌گاه مجموع آراء دو حزب دیگر ۱۴۴ رای می‌شود و حزب دوم می‌تواند از ۲ تا ۱۴۲ باشد(زیرا اگر ۱ رای داشته باشد حزب سوم ۱۴۳ رای دارد که بیش از نصف است).به همین ترتیب هر بار تعداد حالات یکی کم‌تر می‌شود. بنابراین پاسخ برابر است با:

$$142 + 141 + \cdots + 1 = \frac{142\times 143}{2} = 10153$$

۱۳. گزینه‌ی ۳ صحیح است.

$$x-1=yz \Rightarrow x-yz=1(I)$$
$$y-1=zx \Rightarrow y-zx=1(II)$$
$$\overset{I,II}{\Rightarrow} x-yz=y-zx \Rightarrow x+zx=y+yz \Rightarrow x(1+z)=y(1+z) \overset{z\neq -1}{\Longrightarrow} x=y$$

به طریق مشابه اگر $x\neq -1$ خواهیم داشت $y=z$.پس $x=y=z$.در نتیجه $x-1=x^2$ که در این حالت جواب حقیقی نداریم.اگر $x=-1$ در نتیجه $x=y=-1$ در نتیجه $z-1=1$ پس $z=2$ که سه تایی $(-1,-1,2)$ در معادله صدق می کند.حال اگر یکی از x,y,z برابر -1 نباشد،همانند فوق تنها جواب این است که آن مجهول 2 بوده و دوتای دیگر -1 باشند.پس بدین ترتیب 3 جواب زیر را داریم:

$$(-1,-1,2),(-1,2,-1),(2,-1,-1)$$

پس اگر حداقل یکی از مجهولات مخالف -1 باشد جواب‌ها به صورت فوق خواهند بود. تنها می‌ماند اینکه همه -1 باشند که این به وضوح جواب نیست. پس 3 جواب داریم.

۱۴. گزینه‌ی ۲ صحیح است.

ابتدا به این توجه می‌کنیم که معادله زیر چند جواب مختلف دارد:

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=k, x_i\geq 1$$

برای حل به این نکته دقت می‌کنیم که حل این معادله به منزله این است که k شی مشابه را به n قسمت افراز کنیم. حال فرض کنید که این k شی کنار هم قرار گرفته‌اند حال برای افراز این اشیاء ،تعداد $n-1$ جداکننده بین این اشیاء قرار می‌دهیم. بین این k شی، $k-1$ جا برای قرار دادن این جداکننده‌ها وجود دارد.پس پاسخ عبارتست از:

$$\binom{k-1}{n-1}$$

حال می‌خواهیم این ۵ مهره‌ی سیاه به ۳ قسمت افراز کنیم که این کار را می‌توان به ۶ حالت انجام داد. اما برای قرار دادن مهره‌های سفید می‌دانیم که این مهره‌ها را در ۴ جا (قبل از قسمت اول مهره‌های سیاه، بین قسمت

اول و دوم، بین قسمت دوم و سوم و بعد از قسمت سوم) می‌توان قرار داد. به طوری که حتما بین قسمت اول و دوم و قسمت دوم و سوم، حداقل یک مهره سفید قرار داشته باشد. بنابراین داریم:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5; x_1, x_4 \geq 0; x_2, x_3 \geq 1$$

که با شرایط مطلوب ما اندکی تفاوت دارد. برای حل این مشکل ترفندی به کار می‌گیریم:

$$x'_1 = x_1 + 1; x'_4 = x_4 + 1$$
$$\Rightarrow x'_1 + x_2 + x_3 + x'_4 = 7; x'_1, x_3 x_2, x'_4 \geq 1$$

که شرایط مطلوب ماست. بنابراین پاسخ مساله عبارتست از:

$$\binom{4}{2} \times \binom{6}{3} = 6 \times 20 = 120$$

۱۵. گزینه‌ی ۵ صحیح است.

با توجه به اینکه عدد فقط عامل ۲ دارد، پس همه ۵ عدد توانی از ۲ هستند. داریم:

$$2^{276} \times 2^{276} \times 2^{277} \times 2^{278} \times 2^{279} = 2^{1386}$$
$$2^{276} + 2^{276} + 2^{277} + 2^{278} + 2^{279} = 2^{276}(1 + 1 + 2 + 4 + 8) = 2^{280}$$

که بیش‌ترین گزینه است.

۱۶. گزینه‌ی ۲ صحیح است.

$$\angle MAN = \angle M'AN' = 33 \Rightarrow MN = M'N'$$

P و P' را به ترتیب وسط MN و $M'N'$ می‌نامیم و O مرکز دایره است.

$$\begin{cases} \angle MON = \angle M'ON' = 66 \\ MO = M'O \\ NO = N'O \end{cases} \Rightarrow MON = M'ON' \Rightarrow \begin{cases} OP = OP' \\ OP \perp MN, OP' \perp M'N' \end{cases}$$

پس وترها همگی از وسط به دایره‌ای به مرکز O مماسند.

۱۷. گزینه‌ی ۳ صحیح است.

$$c = 1 - a - b - d \Rightarrow A = ab + bc + cd = ab + (b+d)(1 - a - b - d)$$
$$= -ad + (b+d)(1 - b - d)$$

از طرفی با استفاده از نابرابری حسابی هندسی داریم:

$$(b+d)(1-b-d) \leq \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow A = -ad + (b+d)(1-b-d) \leq -ad + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}$$

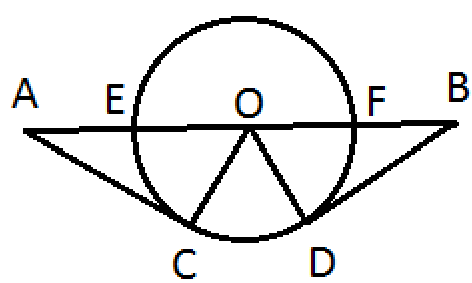
پس A کم‌تر مساوی با $\frac{1}{4}$ است و به ازای $a = d = 0, b = c = \frac{1}{2}$ مقدار $\frac{1}{4}$ را اتخاذ می کند.

در نتیجه $\frac{1}{4}$ جواب مورد نظر است.

۱۸. گزینه‌ی ۴ صحیح است.

بهترین مسیر آن است که به دریاچه مماس باشد. در این حالت داریم:

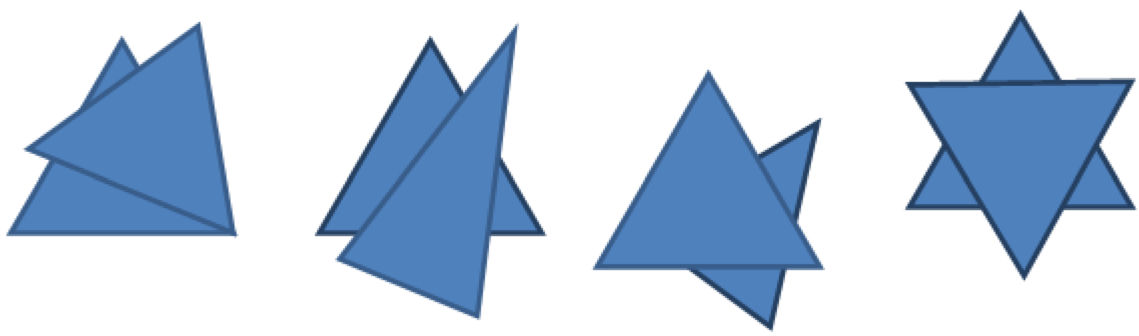
$$AB = 4 \Rightarrow AO = 2\,, OC = 1$$
$$AC^2 = AO^2 - OC^2 = 4 - 1 = 3 \Rightarrow AC = \sqrt{3}$$
$$OC = 1, AO = 2 \Rightarrow OC = \frac{1}{2}AO \Rightarrow \angle OAC = 30 \Rightarrow \angle AOC = 60 \Rightarrow \angle DOB = 60$$
$$\Rightarrow \angle COD = 60$$
$$\Rightarrow \text{کمان}\,DC = 2\pi(\text{شعاع}) \times \frac{60}{360} = 2\pi \times 1 \times \frac{1}{6} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \qquad \text{جواب} = 2\sqrt{3} + \frac{\pi}{3}$$



۱۹. گزینه‌ی ۳ صحیح است.

اضلاع هر مثلث شامل وترهایی می‌شود که رئوس آن‌ها روی دایره‌اند. از طرفی می‌توان هر ضلع مثلث را با تعداد اضلاعی از ۱۰ ضلعی که میان دو راس آن ضلع قرار دارند،مقایسه کرد. پس مثلث‌ها به صورت زیر هستند: (۸و۱و۱)،(۷و۲و۱)،(۶و۳و۱)،(۵و۴و۱)،(۶و۲و۲)،(۵و۳و۲)،(۴و۴و۲)،(۴و۳و۳) (اعداد نشان‌گر تعداد اضلاعی از ۱۰ ضلعی هستند که میان دو راس مثلث قرار گرفته‌اند.)

۲۰. گزینه‌ی ۴ صحیح است.



اشکال فوق مثال‌هایی برای ۱۲،۹،۱۰و۸ ضلع می‌باشند.

۲۱. گزینه‌ی ۲ صحیح است.

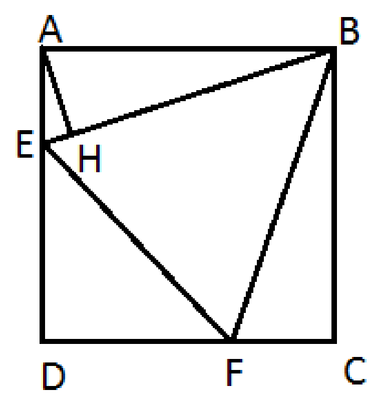
جعبه‌ها را از کوچک به بزرگ به ترتیب با شماره‌های ۱ تا ۶ شماره گذاری می‌کنیم. جعبه شماره ۵ به یک صورت درون جعبه۶ قرار می‌گیرد. حال برای قرار دادن جعبه ۴، دو حالت داریم، یکی درون جعبه ۵ و یکی بیرون آن. به همین ترتیب هر جعبه‌ای که اضافه می‌شود، یک فضا به فضاهای ممکن برای قرار دادن جعبه بعدی اضافه می‌کند. پس در کل ۵×۴×۳×۲×۱ = ۱۲۰ حالت داریم.

۲۲. گزینه‌ی ۴ صحیح است.

$$f(0) \leq 2 \Rightarrow b \leq 2$$
$$f(1) \geq 0 \Rightarrow 0 \leq a + b(I)$$
$$f(2) \leq 4 \Rightarrow 2a + b \leq 4(II)$$
$$\xRightarrow{(I),(II)} a \leq 4 \Rightarrow 8a \leq 32 \xRightarrow{(II)} 10a + b \leq 36 \Rightarrow f(10) \leq 36$$

حالت تساوی به ازای $a = ۴$ و $b = -۴$ حاصل می‌شود.

۲۳. گزینه‌ی ۵ صحیح است.



$$\begin{cases} \angle A = \angle C = 90 \\ BE = BF \\ AB = BC \end{cases} \Rightarrow ABE = CBF \Rightarrow AE = CF \Rightarrow$$
$$DF = DE$$
$$\angle ABE = \angle CBF = \frac{90 - 60}{2} = 15 \Rightarrow AH = \frac{1}{4}BE$$
$$BE = BF = EF = l$$
$$DE = DF = \frac{\sqrt{2}}{2}l$$
$$S_{ABCD} = 2S_{ABE} + S_{BEF} + S_{DEF}$$

$$\Rightarrow 1 = AH.BE + \frac{\sqrt{3}}{4}BE^2 + \frac{1}{2}DE^2$$
$$\Rightarrow 1 = \frac{1}{4}l^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}l^2 + \frac{1}{4}l^2 \Rightarrow l^2 = \frac{4}{2 + \sqrt{3}}$$
$$S_{BEF} = \frac{\sqrt{3}}{4}l^2 \Rightarrow S_{BEF} = \frac{\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}$$

۲۴. گزینه‌ی ۱ صحیح است.

$$AB^2 + AD^2 = BD^2 \Rightarrow BD = \sqrt{5}$$

H را پای ارتفاع Aمی گیریم

$$S_{ABCD} = AB \times AD = AH \times BD \Rightarrow AH = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$AP = AC = BD = \sqrt{5}$

$AH^2 + PH^2 = AP^2 \Rightarrow PH = \sqrt{\frac{21}{5}}$

$PQ = 2PH \Rightarrow PQ = \sqrt{\frac{84}{5}}$

۲۵. گزینه‌ی ۳ صحیح است.

$2^x + 2x^2 = y^2$
$x^2, y^2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2^x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \geq 0$
$x = 0 \Rightarrow 1 + 0 = y^2 \Rightarrow y = \pm 1$

حال فرض کنید $x = 2^k m$ که m عددی فرد است.

$\Rightarrow 2^{2^k m} + 2^{2k+1} m^2 = y^2$
$m = 1 \Rightarrow 2^{2^k} + 2^{2k+1} = y^2$
$(I) 2^k > 2k + 1 \Rightarrow 2^{2k+1}\left(2^{2^k - 2k - 1} + 1\right) = y^2$

چون 2^{2k+1} و $2^{2^k-2k-1} + 1$ نسبت به هم اولند،پس هر دو باید مربع کامل باشند. اما 2^{2k+1} نیست.

$(II) 2^k \leq 2k + 1 \Rightarrow k \leq 2 \Rightarrow \begin{cases} k = 0 \Rightarrow 2 + 2 = y^2 \Rightarrow y = \pm 2 \\ k = 1 \Rightarrow 4 + 8 = y^2 \text{در اعداد صحیح جواب ندارد} \\ k = 2 \Rightarrow 16 + 32 = y^2 \text{در اعداد صحیح جواب ندارد} \end{cases}$

$m \geq 3 \Rightarrow 2^k m \geq 3 \times 2^k > 2k + 1 (III)$
$\Rightarrow ۲^{2k+1}\left(2^{2^k m - 2k - 1} + m^2\right) = y^2$

که همانند بالا جواب نخواهد داشت(چون $2^{2^k m-2k-1} + m^2$ فرد است). پس ۴ تا جواب داریم.

۲۶. گزینه‌ی ۲ صحیح است.

مرکز دایره را O می‌نامیم.

$$\Rightarrow \begin{cases} OM_1 \perp AD \\ OM_2 \perp BC \\ OM_3 \perp PQ \end{cases} \Rightarrow OM_1M_2N, OM_1NM_3 \text{محاطی}$$

با توجه به این که از هر سه نقطه یک دایره می‌گذرد.

$$\Rightarrow M_1M_2NM_3 \text{ محاطی } \Rightarrow \angle M_1M_2M_3 = \angle M_1NM_3 \Rightarrow\Rightarrow \angle M_1M_2M_3 = 40 \blacksquare$$

۲۷. گزینه‌ی ۵ صحیح است.

ابتدا ثابت می‌کنیم که این عدد حتما متناوب است. برای این کار کافیست ثابت کنیم که دو رقم اول پس از تعدادی مرحله به تکرار می‌افتد. حال برای یافتن دو رقم اول کافیست که عدد را بر ۱۰۰ تقسیم کنیم و باقی‌مانده همان دو رقم اول خواهد بود. فرض کنید ۱۰۱ مرحله گذشته باشد. با توجه به اصل لانه کبوتری و با توجه به اینکه باقی‌مانده بر ۱۰۰ از ۰ تا ۹۹ (۱۰۰عدد) مختلف می‌تواند باشد، پس حداقل دو عدد یکسان در این ۱۰۰ عدد پیدا می‌شود. با توجه به اینکه هر بار در عدد ثابتی ضرب می‌کنیم لذا اعداد بعدی این دو نیز برابر خواهند بود و همین طور دو تای بعدیشان (منظور به هنگ ۱۰۰ آنهاست) و ... پس عدد اعشاری حتما متناوب است و با عنایت به این موضوع که این عدد اعشاری برای عدد ۲۰ متناوب مرکب و برای عدد ۱۰۰ متناوب ساده است، گزینه‌ی ۵ صحیح خواهد بود.

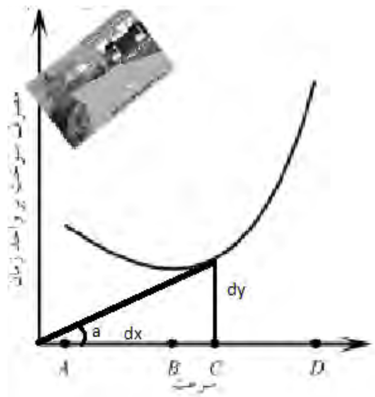
۲۸. گزینه‌ی ۳ صحیح است.

دو وجه روبروی هم را در نظر بگیرید. فرض کنید اعداد این وجوه یکی a و دیگری b باشد. فرض کنید اعداد چهار وجه دیگر زمانی که از وجه با عدد a به مکعب می نگیریم، به ترتیب c, d, e, f باشد.در نتیجه مجموع اعداد رئوس روی وجه a برابر خواهد بود با $a(cd + de + ef + fc)$.به طریق مشابه مجوع اعداد رئوس روی وجه با عدد b نیز$b(cd + de + ef + fc)$ خواهد بود. پس مجموع اعداد رئوس مکعب برابر است با$(a + b)(cd + de + ef + fc) = (a + b)(c + e)(d + f) = 231$

از طرفی با توجه به اینکه ۲۳۱ برابر ۱۱×۷×۳ است و اینکه مجموع اعداد دو وجه مقابل از ۱ بیش‌تر است، مجموع اعداد وجوه مقابل ۳ و ۷ و ۱۱ خواهد بود. پس مجموع اعداد وجوه مکعب برابر ۱۱+۷+۳ یعنی ۲۱ خواهد بود.

۲۹. گزینه‌ی ۴ صحیح است.

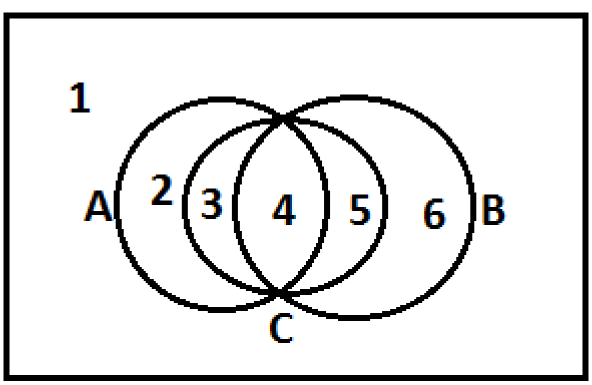
با توجه به اینکه نسبت تغییرات عمودی به تغییرات افقی(تانژانت زاویه) نشان‌گر مصرف سوخت بر مسافت است با عنایت به این موضوع که ما می‌خواهیم این مقدار به حداقل برسد(با توجه به شکل) بنابراین نقطه سوم به‌ترین نقطه می‌باشد.



$$\tan a = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\text{مصرف سوخت}}{\text{زمان}}}{\frac{\text{مسافت}}{\text{زمان}}} = \frac{\text{مصرف سوخت}}{\text{مسافت}}$$

۳۰. گزینه‌ی ۵ صحیح است.

سه مجموعه‌ی مورد نظر به صورت ذیل می‌باشند و هر کدام از اعداد در یکی از ۶ جای اشاره شده در شکل می‌توانند باشند. پس پاسخ $۶^۵$ برابر ۷۷۷۶ خواهد بود.



سال ۱۳۸۷

زمان: ۲۷۰ دقیقه

۱.گزینه‌ی (ب) صحیح است.

حاصل ضرب اولین ستاره‌ی بالا در عدد ۹، رقم دهگان ۸ دارد و لذا این ستاره تنها می‌تواند ۹ باشد و $۹ \times ۹ = ۸۱$، پس اولین ستاره‌ی پایین رقم ۱ است. حاصل‌ضرب دومین ستاره‌ی بالا در ۹ به اضافه‌ی ۸ رقم دهگان ۲ دارد پس تنها ۲ می‌تواند باشد. در نتیجه دومین ستاره‌ی پایین ۶ است. حاصل‌ضرب سومین ستاره‌ی بالا در ۹، ۲۰ است پس سومین ستاره‌ی بالا برابر ۲ است و در نهایت آخرین ستاره‌ی بالا ضرب در ۹ به اضافه ی ۲، دهگان ۱ دارد پس۱ است. در نتیجه آخرین ستاره‌ی پایین برابر یکان حاصل زیر یعنی ۱ است $۹ \times ۱ + ۲ = ۱۱$. در نتیجه حاصل‌ضرب برابر ۱۱۰۶۱ است که مجموع ارقامش برابر ۹ می‌باشد.

۲.گزینه‌ی (ه) صحیح است.

۷۰۰۰ یک عامل ۷ دارد، پس حداقل یکی از این اعداد یک عامل ۷ باید داشته باشد پس هر کدام از آنها ۲ حالت دارد(یا ۷ دارد و یا ندارد). البته حالتی که هیچ‌کدام ۷ نداشته باشند پذیرفته نیست. درنتیجه به $۲^۳ - ۱$ طریق تعداد عوامل ۷ تعیین می‌گردد. ۷۰۰۰ سه عامل ۵ و ۲ دارد پس حداقل یکی از این اعداد سه عامل ۲ و ۵ دارد و حالتی که همه‌ی آن‌ها کم‌تر از ۳ عامل ۲ و ۵ داشته باشند قابل قبول نیست و درنتیجه به $۴^۳ - ۳^۳ = ۳۷$ طریق تعداد عوامل ۲ و ۵ تعیین می‌گردد. بنابراین در کل تعداد حالت‌های ممکن برای چنین سه‌تایی‌هایی برابر ۹۵۸۳=۷×۳۷×۳۷ است.

۳.گزینه‌ی (د) صحیح است.

ارتفاع مثلث بزرگ‌تر را رسم می کنیم و $h_۳$ می‌نامیم. نسبت $h_۱$ به $h_۳$ طبق قضیه‌ی تالس ۳ به ۷ است. دو مثلث متحدالرأس با هم متشابه هستند پس نسبت ارتفاع‌ها برابر نسبت اضلاع می‌باشد. بنابراین نسبت $h_۳$ به $h_۲$ برابر ۱۰ به ۶ است، و لذا نسبت $h_۲$ به $h_۱$ برابر ۷ به ۵ یعنی ۱/۴ است.

۴.گزینه‌ی (ه) صحیح است.

چون مثلث دو میانه‌ی برابر دارد، پس مثلث متساوی‌الساقین است و میانه به طول ۸ که ارتفاع آن نیز هست بر ضلع کوچک‌تر وارد شده است. فرض کنید G مرکز ثقل مثلث و A، B و C سه رأس مثلث به ترتیب متناظر با میانه‌های به طول ۸، ۵ و ۵، و M نقطه‌ی وسط ضلع BC باشد. از آن‌جایی که مرکز ثقل میانه‌ها را به نسبت یک به دو تقسیم می‌کند، پس $GM = \frac{۸}{۳}$ و $GB = \frac{۱۰}{۳}$ چون GM عمود بر BC است، طبق قضیه‌ی فیثاغورس $MB^۲ = GB^۲ - GM^۲ = \frac{۱۰۰}{۹} - \frac{۶۴}{۹} = \frac{۳۶}{۹} = ۴$، پس $MB = ۲$ و $BC = ۴$.

۵.گزینه‌ی (ب) صحیح است.

ابتدا به جای $x^۳$ در این عبارت y را جای‌گذاری می‌کنیم و عبارت به صورت $(۱ + y + y^۲)^{۵۰}$ در می‌آید که حاصل این عبارت از جمله‌های به صورت $y^۰$، $y^۱$،... و $y^{۱۰۰}$ تشکیل شده است که هیچ کدام ضریب صفر ندارند زیرا تمام جملات عبارت اولیه مثبت هستند، پس ۱۰۱ جمله با ضریب ناصفر داریم.

۶.گزینه‌ی (ب) صحیح است.

می‌توان نوشت $(۷۱۵ + \frac{۱۳۸۷!}{۲}) \times ۲۰۰۸ \times (۱۳۸۷! + ۱۴۳۰) = ۲^۴ \times ۲۵۱ \times (\frac{۱۳۸۷!}{۲} + ۷۱۵)$ که $۷۱۵ + \frac{۱۳۸۷!}{۲}$ نسبت به ۲ و ۲۵۱ اول است. به همین ترتیب $۱۳۸۷! + ۱۴۳۰ = ۲ \times (\frac{۱۳۸۷!}{۲} + ۷۱۵)$. اگر $۷۱۵ + \frac{۱۳۸۷!}{۲}$، m مقسوم‌علیه داشته باشد، عبارت اول $m \times (۱ + ۱) \times (۴ + ۱) = ۱۰m$ مقسوم‌علیه و عبارت دوم $m \times (۱ + ۱) = ۲m$ مقسوم‌علیه خواهد داشت و بنابراین نسبت تعداد مقسوم‌علیه‌ها ۵ است.

۷.گزینه‌ی (د) صحیح است.

مجموع دو عدد متمایز بین ۱ تا ۵ اعداد بین ۳ تا ۹ می‌تواند باشد. دقت کنید که برای مجموع‌های ۹، ۸، ۳ و ۴ تنها یک حالت وجود دارد، به طور مثال برای ۴ تنها یک حالت وجود دارد ($۳ + ۱ = ۴$). اما برای عدد ۷ دو حالت وجود دارد ($۶ + ۱ = ۵ + ۲ = ۷$). برای جای‌گذاری چهار رقم در جای‌گاه‌های اول، دوم، چهارم و

پنجم $۲ \times ۴ = ۸$ حالت وجود دارد(چهار حالت برای رقم اول، دو حالت برای رقم دوم و تنها یک حالت برای رقم‌های چهارم و پنجم). از بین اعداد ۱تا ۵ یک عدد باقی می‌ماند که در جای‌گاه سوم قرار می‌گیرد. بنابراین برای هر یک از مجموع‌ها ۸ حالت وجود دارد و در کل ۸×۳=۲۴ عدد پنج‌رقمی می‌توان ساخت.(دقت کنید که برای سه مجموع ۵، ۶ و ۷ دو حالت وجود دارد که مجموع برابر آن عدد شود.)

۸.گزینه‌ی (د) صحیح است.

وقتی هر کدام از نفرات یک دور بازی خود را انجام دادند، هر نفر دو مهره به نفر سمت راستش داده و یک مهره از نفر سمت راستش و یک مهره‌ی دیگر از نفر دوم سمت راستش گرفته است، پس تعداد مهره‌های هیچ‌کس تغییر نکرده است. بنابراین بعد از ۸۰ مرحله بازی هم تعداد مهره‌های همه برابر ۱۰۰ می‌ماند. حال در هفت دور بازی باقی‌مانده، نفر هشتم تنها در بازی نفر هفتم دخیل می‌شود و از این بازی یکی از دو مهره‌ای که نفر هفتم از نفر شماره‌ی شش می‌گیرد به او می‌رسد، پس نفر هشتم دارای ۱۰۱ مهره می‌شود.

۹.گزینه‌ی (ه) صحیح است.

دونده‌ای که به محیط دایره‌ی بزرگ‌تر نزدیک‌تر است، محیط بیش‌تری را طی می‌کند پس باید نقطه‌ی پایان نزدیک‌تری داشته باشد و دونده‌ای که به محیط دایره کوچک‌تر نزدیک‌تر است باید نقطه‌ی پایان دورتری داشته باشد.

۱۰.گزینه‌ی (د) صحیح است.

$M - G = \frac{۱}{۲}(a + b - ۲\sqrt{ab}) = \frac{۱}{۲}(\sqrt{a} - \sqrt{b})^۲$ و با فرض $b \geq a$ خواهیم داشت:

$$\left|a - b\right| = b - a = (\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{b} + \sqrt{a})$$

درنهایت $k \geq \frac{M-G}{b-a} = \frac{۱}{۲}\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}$ اگر $a = ۰$ در نظر بگیریم $k \geq \frac{۱}{۲}$، در نتیجه کم‌ترین مقدار k حداقل $\frac{۱}{۲}$ است. ضمناً اگر k برابر $\frac{۱}{۲}$ باشد، از آن‌جا که $\frac{۱}{۲} \geq \frac{۱}{۲}\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}$ نامساوی را برقرار می‌کند. پس کم‌ترین مقدار ممکن برای k، همان $\frac{۱}{۲}$ است.

۱۱.گزینه‌ی (ج) صحیح است.

ازجست‌وجوی الگو استفاده کنید. به جای تا کردن کاغذ خطوطی که از روی آن‌ها در هر مرحله کاغذ تا می‌شود را رسم کنید و به جای سوراخ کردن کاغذ جاهایی در کاغذ که سوراخ ایجاد می‌شوند را علامت بزنید. به این ترتیب، بعد از گذشت مرحله‌ی اول چهار نقطه‌ی گوشه‌ای کاغذ علامت خورده می‌شوند، با گذشت دو مرحله در مرحله‌ی سوم نقطه‌ی وسط هر ضلع و مرکز مربع هم علامت می‌خورند یعنی تعداد نقطه‌های علامت خورده به ۹تا می‌رسد. با گذشت دو مرحله‌ی بعدی نقطه‌ی وسط هر ضلع و هم‌چنین مرکز چهار مربع کوچک مرحله‌ی سوم علامت می‌خورند. به همین ترتیب می‌توان حدس زد که در مرحله‌ی $۲n + ۱$ام (یعنی در یک مرحله‌ی فرد)، $k^۲$ نقطه‌ی علامت‌خورده داشته باشیم در مرحله‌ی فرد بعدی(مرحله‌ی $۲n + ۳$ام) $(۲k - ۱)^۲$ نقطه‌ی علامت‌خورده داریم. پس در مرحله‌ی ۱۱ام $۳۳^۲$ نقطه‌ی علامت‌خورده خواهیم داشت که چون نقاط روی مرز مد نظر ما نیستند، تنها $۹۶۱ = ۳۱^۲$ نقطه‌ی علامت‌خورده داریم.(اثبات این حدس هم می‌تواند به کمک استقرا انجام شود.)

۱۲.

۱۳.گزینه‌ی (د) صحیح است.

عبارت گزینه‌ی (الف) درست است، زیرا اگر $A^m = B^n$ و $B^p = C^q$، آن‌گاه $A^{mp} = B^{np} = C^{qn}$ پس A و C نیز هم‌توانند.

عبارت گزینه‌ی (ب) درست است، زیرا اگر $A^n = I^m = I$ در نتیجه اگر $n = ۱$ که $A = I$ وارون‌پذیر است و اگر $n > ۱$، $I = A^n = A \times A^{n-۱}$ پس $A^{n-۱}$ وارون A است و A وارون‌پذیر است.

عبارت گزینه‌ی (ج) درست است، زیرا

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

عبارت گزینه‌ی (ه) درست است، زیرا

$$\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}^۴ = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}^۲ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}^۲$$

بنابراین عبارت گزینه‌ی (د) غلط است. اگر ماتریسی با ماتریس همانی هم‌توان باشد باید عدد طبیعی n موجود باشد که وقتی آن ماتریس به توان n می‌رسد برابر ماتریس همانی شود. اما می‌توان به راحتی دید که اگر ماتریس $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ به توان n برسد روی قطر آن اعداد ۱ و ۲^n خواهند بود، پس هیچ توانی از این ماتریس برابر همانی نمی‌شود.

توضیح: می‌توان استدلال دیگری را نیز برای اشتباه بودن عبارت گزینه‌ی (د) به کمک دترمینان ارائه کرد. اگر $A^m = B^n$(یعنی دو ماتریس هم‌توان باشند.) $\det(A)^m = \det(\mathrm{B})^n$. اما دترمینان ماتریس همانی یک است ولی دترمینان $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}^n$ برابر ۲^n است. پس این دو ماتریس هم‌توان نیستند.

۱۴.گزینه‌ی (ه) صحیح است.

$a \neq ۱$، زیرا اگر a برابر ۱ باشد آنگاه $b = c$ که طبق فرض صورت سؤال درست نیست.

اگر $a \times b = \overline{xy}$ و $a \times c = \overline{yx}$(دقت کنید که $x \neq y$، زیرا اگر این دو برابر باشند مجدداً b و c برابر خواهند شد.) آن‌گاه $a \times b + a \times c = ۱۱x + ۱۱y = ۱۱(x+y)$ بنابراین $۱۱ \big| a(b+c)$ و چون a یک‌رقمی است و نمی‌تواند بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد، پس $۱۱ \big| b+c$. با این توصیفات خواهیم داشت:

$$(b,c) \in \{(۲,۹),(۳,۸),(۴,۷),(۵,۶),(۶,۵),(۷,۴),(۸,۳),(۹,۲)\}$$

از طرف دیگر $a(b-c) = a \times b - a \times c = ۹(x-y)$ بنابراین $۹ \big| a(b-c)$

حال روی حالت‌های مختلف a بحث می‌کنیم.

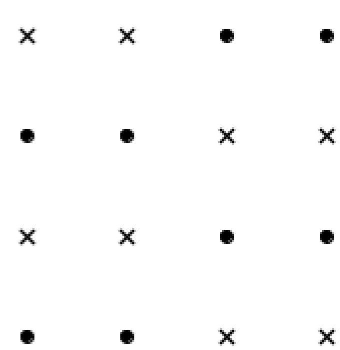
اگر $a = ۹$ باشد همه‌ی حالت‌های بالا برای زوجِ (b,c) امکان دارند.

اگر $a = ۳$ و یا $a = ۶$ آن‌گاه باید $b-c$ بر ۳ بخش‌پذیر شود که بین حالت‌های بالا تنها $(۴,۷)$ و $(۷,۴)$ این خاصیت را دارند.

و در بقیه حالات باید $۹ \big| b-c$ که هیچ b و c تک‌رقمی نابرابر چنین شرایطی ندارند. بنابراین کل حالات ۱۲تا می‌شود.

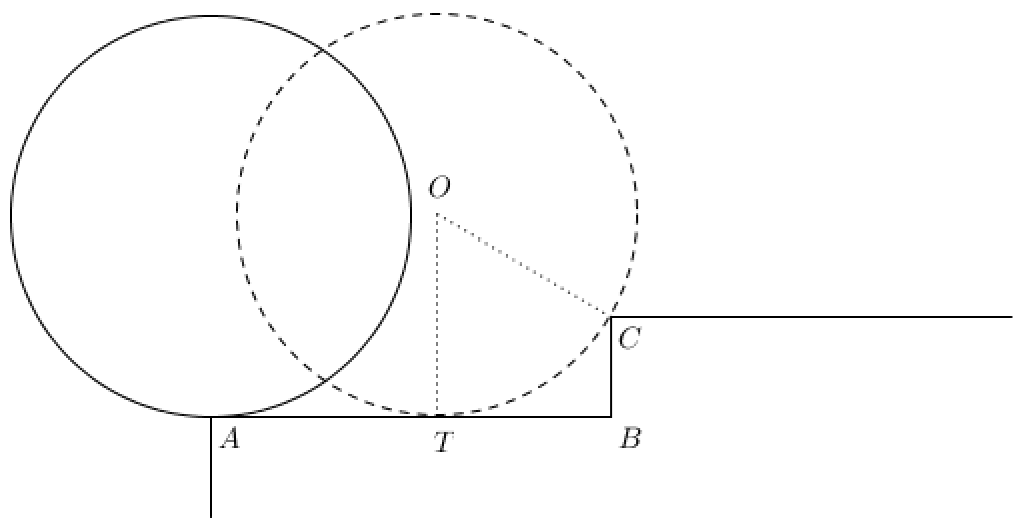
۱۵.گزینه‌ی (ج) صحیح است.

دقت کنید که اگر از یک سطر بیش از دو نقطه انتخاب کنیم، قطعاً سه‌نقطه‌ی هم‌خط یافت می‌شوند و بنابراین تعداد نقطه‌ها نمی‌تواند از ۸تا بیش‌تر باشد. برای ۸ نقطه هم اگر نقاطی که در شکل زیر با × مشخص شده‌اند را انتخاب کنیم، خاصیت مسئله را دارا هستند.



۱۶.گزینه‌ی (ه) صحیح است.

ابتدا چرخ شروع به غلطیدن روی پله‌ی اول می‌کند تا نقطه‌ای از آن به پله‌ی دوم برخورد کند.(شکل زیر)



در این صورت زاویه‌ای که چرخ به رادیان می‌چرخد، برابر طول AT تقسیم بر شعاع دایره است. زیرا طول یک کمان از دایره برابر زاویه‌ی آن به رادیان در شعاع دایره است و در این‌جا طول کمانی که یک نقطه‌ای از دایره می‌چرخد برابر طول AT است.

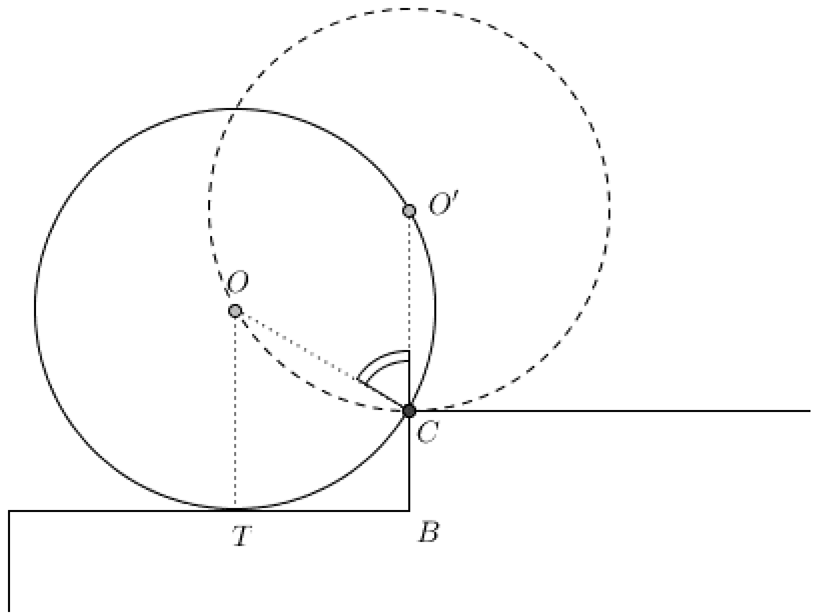
حال دقت کنید که $AT = AB - BT = ۲ - BT$. پس کافی است طول BT را پیدا کنیم.

$$BT^۲ = OC^۲ - (OT - CB)^۲ = ۱ - \frac{۱}{۴} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow BT = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow AT = ۲ - \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

دقت کنید که چون شعاع دایره یک است، زاویه‌ی طی شده هم برابر همین مقدار $۲ - \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ است.

حال چرخ حول نقطه‌ی C باید بچرخد تا به پله‌ی بالاتر منتقل شود. مقدار این چرخش برابر زاویه‌ی $\angle OCO'$ است.

$$\sin(\angle OCO') = \frac{BT}{OC} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \angle OCO' = \frac{\pi}{۳}$$



این فرآیند باید یک بار دیگر برای پله‌ی دوم هم انجام شود. پس چرخ در مجموع
$۲(۲ - \frac{\sqrt{۳}}{۲} + \frac{\pi}{۳}) = ۴ - \sqrt{۳} + \frac{۲}{۳}\pi$ زاویه می‌چرخد.

۱۷.گزینه‌ی (د) صحیح است.

از هشت رابطه‌ی اول نتیجه می‌شود:

$$x_{۲} - x_{۱} = x_{۳} - x_{۲} = \cdots = x_{۱۰} - x_{۹}$$

این مقدار مشترک را d می‌نامیم. پس $x_n = x_{۱} + (n - ۱)d$.

$$x_{۹} + x_{۱} = ۲x_{۱} + ۸d = ۲۲ \Rightarrow x_{۵} = x_{۱} + ۴d = ۱۱$$

توضیح: با راه‌حلی که ارائه شد، به رابطه‌ی آخر صورت سؤال نیازی نیست. اما به کمک این رابطه و رابطه‌ای که در بالا داریم می‌توان مقدار $x_{۱}$ و d را به تنهایی محاسبه کرد. کاری که در راه‌حل بالا انجام نشد.

۱۸.گزینه‌ی (ج) صحیح است.

اگر $m,n \leq ۸$ تعداد مستطیل های به طول m و عرض n این‌گونه تعیین می‌گردد که از ضلع عمودی مستطیل ۸×۸ دو سطر که فاصله‌ی آن‌ها به اندازه‌ی m باشد و از ضلع افقی دو ستون که فاصله‌ی آن‌ها از یک‌دیگر به اندازه‌ی n باشد انتخاب می‌کنیم که به ترتیب $۹-m$ و $۹-n$ حالت دارد. پس تعداد مستطیل‌ها با این ابعاد برابر $(۹-n)(۹-m)$ و مساحت هر کدام نیز برابر mn است پس مجموع مساحت کل این مستطیل‌ها برابر است با:

$$\sum_{m=۱}^{۸}\sum_{n=۱}^{۸}(۹-m)(۹-n)mn = ۸۱(\sum_{m=۱}^{۸} m)^۲ - ۱۸(\sum_{m=۱}^{۸} m)(\sum_{m=۱}^{۸} m^۲) + (\sum_{m=۱}^{۸} m^۲)^۲$$
$$= ۸۱ \times ۳۶^۲ - ۱۸ \times ۳۶ \times ۲۰۴ + ۲۰۴^۲ =$$
$$= ۱۰۴۹۷۶ - ۱۳۲۱۹۲ + ۴۱۶۱۶ = ۱۴۴۰۰$$

۱۹.گزینه‌ی (الف) صحیح است.

برای بدست آوردن سه رقم سمت راست، باقی‌مانده‌ی این عدد در تقسیم بر ۱۰۰۰را بدست می آوریم.

$$۲۱^{۶۴} = (۲۰+۱)^{۶۴} = \sum_{i=۰}^{۶۴}\binom{۶۴}{i}۲۰^{i} = ۱ + ۶۴ \times ۲۰ + \frac{۶۴ \times ۶۳}{۲} \times ۲۰^۲ + ۲۰^۳(\cdots) = ۸۰۷۶۸۱ + ۲۰^۳(\cdots)$$

پس سه رقم سمت راست برابر ۶۸۱ است.

۲۰.گزینه‌ی (ب) صحیح است.

اگر تصویر بر روی صفحه‌ی $x-y$ شکل سمت چپ باشد، جسم می‌تواند از لایه‌های ۵تایی که روی سایه‌هایشان قرار گرفته‌اند تشکیل شده باشد، اما چون تصویر جسم بر روی صفحه‌ی عمود براین صفحه به صورت شکل ۲ است. بنابراین باید ۲ لایه باشد که لایه‌ی اول از ۵ و لایه‌ی دوم از ۳ مکعب ۱×۱ تشکیل شده است که در مجموع ۸ مکعب می‌شوند.

۲۱.گزینه‌ی (الف) صحیح است.

لم اول. قرینه‌ی نقطه‌ی (a,b) نسبت به خط $y+۵x=۰$، نقطه‌ی $(a,b)-۲(۵,۱)\dfrac{۵a+b}{۲۶}$ خواهد بود.

روند اثبات. ابتدا معادله‌ی خط گذرنده از نقطه‌ی (a,b) و عمود بر خط $y+۵x=۰$ را می‌یابیم. قرینه‌ی نقطه‌ی (a,b) نسبت به محل برخورد این دو خط همان نقطه‌ی مورد نظر خواهد بود.

بنا بر لمِ بالا، قرینه‌ی نقطه‌ی $(a,۰)$ نسبت به این خط نقطه‌ی $(-\frac{۲۴}{۲۶}a,-\frac{۱۰}{۲۶}a)$ است و لذا قرینه‌ی خط $y=۰$ نسبت به این خط، $y=\frac{۱۰}{۲۴}x$ خواهد بود. حال دقت کنید که خط $y=\frac{۱۰}{۲۴}x$، نمودار تابع $y=x^۳$ را در سه نقطه قطع می‌کند و بنابراین قرینه‌ی این نمودار نسبت به $y+۵x=۰$ و خط $y=۰$ در سه نقطه متقاطع هستند. لذا اگر قرینه‌ی این نمودار، خود نمودارِ تابع باشد، تابع جدید نمی‌تواند یک به یک و صعودی یا نزولی باشد.

از طرف دیگر برای هر عدد حقیقیِ k'، معادله‌ی $x^۳=\frac{۱۰}{۲۴}x+k'$ جواب حقیقی دارد. این یعنی تمام خطوط به شکل $y=\frac{۱۰}{۲۴}x+k'$ و منحنی $y=x^۳$ متقاطع هستند. بنابراین قرینه‌ی نمودار $y=x^۳$ هر خط افقی را در حداقل یک نقطه قطع می‌کند و این یعنی قرینه‌ی این نمودار اگر تابع باشد، تابعی پوشا است.

با استدلالی شبیه به آن‌چه در بالا آورده شد قرینه‌ی خط $x=۰$ نسبت به خط $y+۵x=۰$، خط $y=-\frac{۲۴}{۱۰}x$ است. با توجه به نکته‌ای که در بالا توضیح داده شد، قرینه‌ی خطوط به شکل $x=k$ به صورت $y=-\frac{۲۴}{۱۰}x+k'$ در می‌آیند. حال برای این که نشان دهیم قرینه‌ی نمودار $y=x^۳$ خود نمودار یک تابع

است، ادعا می‌کنیم قرینه‌ی این نمودار هر خط به صورت $x = k$ را در دقیقاً یک نقطه قطع می‌کند. به طور معادل بعد از قرینه کردن نسبت به خط $y + ۵x = ۰$، نمودار $y = x^۳$ هر خط به صورت $y = -\frac{۲۴}{۱۰}x + k'$ را دقیقاً در یک نقطه قطع می‌کند و این هم یعنی معادله‌ی $x^۳ + \frac{۲۴}{۱۰}x - k' = ۰$ برای هر عدد حقیقی k' دقیقاً یک جواب حقیقی دارد. اولاً دقت کنید که این یک معادله‌ی درجه سه است که حداقل یک جواب حقیقی دارد. ثانیاً می‌توان به صورت زیر نشان داد تابع $P(x) = x^۳ + \frac{۲۴}{۱۰}x - k'$ یک به یک است و بنابراین این معادله تنها یک جواب می‌تواند داشته باشد.

$$\begin{aligned} P(x_۱) = P(x_۲) &\Rightarrow x_۱^۳ + \frac{۲۴}{۱۰}x_۱ - k' = x_۲^۳ + \frac{۲۴}{۱۰}x_۲ - k' \\ &\Rightarrow x_۱^۳ - x_۲^۳ + \frac{۲۴}{۱۰}x_۱ - \frac{۲۴}{۱۰}x_۲ = ۰ \\ &\Rightarrow (x_۱ - x_۲)(x_۱^۲ + x_۱x_۲ + x_۲^۲ + \frac{۲۴}{۱۰}) = ۰ \end{aligned}$$

اما $۲(x_۱^۲ + x_۱x_۲ + x_۲^۲ + \frac{۲۴}{۱۰}) = (x_۱ + x_۲)^۲ + x_۱^۲ + x_۲^۲ + ۴/۸ > ۰$ پس $x_۱ = x_۲$ و لذا $P(x)$ یک به یک است.

۲۲.گزینه‌ی (ب) صحیح است.

دو رقم سمت راست $۲^{۱۰۰}$ را به وسیله‌ی هم‌نهشتی به پیمانه‌ی ۱۰۰ به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} ۲^{۱۰۰} &\equiv ۱۰۲۴^{۱۰} \equiv ۲۴^{۱۰} \equiv (۲۰ + ۴)^{۱۰} \equiv ۴^{۱۰} + ۲۰ \times ۴^۹ \times \binom{۱۰}{۱} + ۴۰۰(\cdots) \\ &\equiv ۲^{۲۰} \equiv ۱۰۲۴^۲ \equiv ۲۴^۲ \equiv ۵۷۶ \equiv ۷۶ \end{aligned}$$

(که منظور از $\equiv$، هم‌نهشتی به پیمانه‌ی ۱۰۰ است.)

حال با توجه به این که دو رقم سمت راست ۷۶ است، جمع کردن $۲^{۱۰۰}$ با اعداد حاضر در گزینه‌های سؤال در ارقام سوم به بعد $۲^{۱۰۰}$ تأثیری ندارد، پس باید مجموع دو رقم سمت راست گزینه‌ها را بیابیم.

	دو رقم سمت راست	مجموع دو رقم سمت راست

گزینه‌ی (الف)	۹۶	۱۵
گزینه‌ی (ب)	۸۸	۱۶
گزینه‌ی (ج)	۸۴	۱۲
گزینه‌ی (د)	۸۰	۸
گزینه‌ی (ه)	۷۶	۱۴

پس بیش‌ترین مجموع ارقام مربوط به گزینه‌ی (ب) است.

۲۳. گزینه‌ی (د) صحیح است.

اولاً واضح است که ۱ باید در پایین‌ترین خانه قرار بگیرد. حال از بین ۸ عدد باقی‌مانده، ۳ عدد را به $۵۶ = \binom{۸}{۳}$ برای سه جای‌گاه سمت چپ انتخاب می‌کنیم. کوچک‌ترین عدد بین این سه عدد باید در پایین‌ترین خانه قرار بگیرد و دو عدد دیگر به دو حالت در خانه‌ی بالایی جای می‌گیرند. حال از بین ۵ عدد دیگر که باید در ۵ دایره‌ی سمت راست جای بگیرند، کوچک‌ترین عدد در پایین‌ترین خانه قرار می‌گیرد و می‌توان به ۴ طریق یکی از ۴ عدد باقی‌مانده را برای خانه‌ی تنهای ردیف سوم انتخاب کرد. ۳ عدد باقی‌مانده هم شبیه بالا به دو حالت در سه دایره‌ی باقی‌مانده قرار می‌گیرند.(عدد کوچک‌تر در دایره‌ی پایین‌تر و دو عدد دیگر به دو حالت در دو دایره‌ی بالاتر) پس در کل این عمل به $۵۶ \times ۲ \times ۴ \times ۲ = ۸۹۶$ طریق امکان دارد.

۲۴. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

اولاً a و b هر دو صحیح هستند پس ۲^{b-a} هم صحیح است و لذا $b \geq a$. اگر $b = a$، باید $b^۲ = b + ۱$ که با توجه به تفاوت زوجیت دو طرف برای هیچ عدد صحیحی امکان ندارد. بنابراین $b - a \geq ۱$ و لذا ۲^{b-a} زوج است. حال با توجه به این زوجیت a و b یک‌سان خواهد بود و لذا $b - a = ۲k$ برای یک عدد طبیعی k.

$$b^۲ = a + ۲^{۲k} \Rightarrow a = (b - ۲^k)(b + ۲^k)$$

دقت کنید از آن‌جا که a نامنفی است، $b \geq ۲^k$. حال اگر $b > ۲^k$، آن‌گاه $a = (b + ۲^k)(b - ۲^k) \geq b > a$ که امکان ندارد، پس $b = ۲^k$ و بنابراین $a = ۰$. حال معادله به

صورت $b^{۲} = ۲^b$ در می‌آید و معادلاً $۲^{۲^k} = ۲^{۲k}$. از رابطه نتیجه می‌شود که $k = ۲^{k-۱}$. اگر $k > ۳$ به سادگی با استقرا می‌توان نشان داد که $k < ۲^{k-۱}$ و $k = ۰, ۱$ جواب این معادله هستند که منجر به $b = ۲, ۴$ می‌شوند. پس این معادله دارای دو جواب $(۰, ۲)$ و $(۰, ۴)$ است.

۲۵. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

ادعا می‌کنیم نقطه‌ی P باید مرکز ارتفاعی این مثلثی باشد. به برهان خلف فرض کنید این چنین نباشد و برای مثال نقطه‌ی A روی خط عمود بر BC که از P می‌گذرد قرار نداشته باشد. دو نقطه روی خط عمود بر BC و گذرا از P وجود دارد که فاصله‌ی آن‌ها تا P برابر ۷ است. این دو نقطه را $A_۱$ و $A_۲$ می‌نامیم. به علاوه فرض کنید $l_۱$ و $l_۲$ به ترتیب خط‌های موازی با BC گذرا از $A_۱$ و $A_۲$ باشند. به وضوح دایره‌ی به شعاع ۷ به مرکز P بین این دو خط قرار دارد و بنابراین دو خط $l_۱$ و $l_۲$ در دو طرف نقطه‌ی A که روی دایره است قرار دارند. بنابراین با توجه به این که BC هم با این دو خط موازی است نقطه‌ی A بین یکی از این دو خط(مثلاً $l_۱$) و خط BC قرار دارد. لذا می‌توان نتیجه گرفت که فاصله‌ی BC با خط $l_۱$(ارتفاع نظیر $A_۱$ از مثلث $A_۱BC$) بیش‌تر از فاصله‌ی نقطه‌ی A با BC(ارتفاع نظیر A از مثلث ABC) است و چون قاعده‌ی هر دو مثلث BC است، مساحت مثلث اول بیش‌تر است که با بیش‌ترین بودن مساحت مثلث ABC تناقض دارد. بنابراین باید P روی ارتفاع نظیر A باشد. با استدلال مشابه P باید روی دو ارتفاع دیگر هم قرار داشته باشد و بنابراین مرکز ارتفاعی مثلث است.

حال اگر A' و C' به ترتیب پای ارتفاع‌های نظیر A و C باشند، می‌دانیم چهارضلعی $AC'A'C$ محاطی است و لذا

$$PC'.PC = PA'.PA \Rightarrow \frac{PC'}{PA'} = \frac{PA}{PC} = \frac{۷}{۱۴} = \frac{۱}{۲}$$

پس نسبت مورد نظر برابر $\frac{۱}{۲}$ است.

۲۶.گزینه‌ی (د) صحیح است.

$$\begin{cases}\sin x+\sin y=-\sin z\\ \cos x+\cos y=-\cos z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sin^{۲}x+\sin^{۲}y+۲\sin x\ \sin y=\sin^{۲}z\\ \cos^{۲}x+\cos^{۲}y+۲\cos x\ \cos y=\cos^{۲}z\end{cases}$$
$$\Rightarrow ۲+۲(\cos x\cos y+\sin x\sin y)=۱$$
$$\Rightarrow \cos(x-y)=\frac{-۱}{۲}$$

(ابتدا دو طرف رابطه‌ها را به توان دو رسانده و سپس دو رابطه را با هم جمع کرده‌ایم.)

حال از آن‌جا که $x,y\in(-\pi,\pi]$ نتیجه می‌گیریم $x-y\in(-۲\pi,۲\pi)$. ضمناً $\cos(x-y)=\frac{-۱}{۲}$ و بنابراین $x-y\in\{\frac{\pm۲\pi}{۳},\frac{\pm۴\pi}{۳}\}$. با استدلال کاملاً مشابه برای دیگر متغیرهای درمی یابیم $y-z,z-x\in\{\frac{\pm۲\pi}{۳},\frac{\pm۴\pi}{۳}\}$.

از آن‌جا که $(x-y)+(y-z)+(z-x)=۰$ با اندکی بررسی درمی‌یابیم تنها حالات ممکن برای این سه عدد این است که دو تا از آنها برابر $\frac{۲\pi}{۳}$ و یکی $\frac{-۴\pi}{۳}$ و در حالت دیگر دو تا برابر $\frac{-۲\pi}{۳}$ و یکی برابر $\frac{۴\pi}{۳}$ باشد.

حال با اندکی آزمون و خطا و با توجه به رابطه‌ی سوم (که تا کنون استفاده نشده) می‌توان تمام جواب‌های مسأله را پیدا کرد اما خواسته‌ی مساله مقدار $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}$ است. بنابراین چنین کاری لازم نیست، بل‌که می‌توانیم با همین اطلاعات مقدار خواسته شده را محاسبه کنیم:

$$x+y+z=۰\Rightarrow(x+y+z)^{۲}=x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}+۲xy+۲yz+۲zx=۰$$
$$\Rightarrow x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=-۲(xy+yz+zx)$$

از سوی دیگر $(x-y)^{۲}+(y-z)^{۲}+(z-x)^{۲}=(\frac{۲\pi}{۳})^{۲}+(\frac{۲\pi}{۳})^{۲}+(\frac{۴\pi}{۳})^{۲}=\frac{۸\pi^{۲}}{۳}$ و بنابراین

$$(x-y)^{۲}+(y-z)^{۲}+(z-x)^{۲}=۲(x^{۲}+y^{۲}+z^{۲})-۲(xy+yz+zx)=۳(x^{۲}+y^{۲}+z^{۲})$$
$$\Rightarrow x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=\frac{۸\pi^{۲}}{۹}$$

۲۷. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

با الگویابی و بررسی مقادیر اولیه برای A_n می‌توان حدس زد که

$$A_n = \{n, n-۱, n-۳, n-۴, , \dots\}$$

یعنی اعداد کوچک‌تر از n مثل k که باقی‌مانده‌ی $n-k$ بر ۳ برابر دو باشد در A_n نیستند. این ادعا را می‌توان به کمک استقرا ثابت کرد. فرض کنید حکم برای $A_{m-۱}$ و $A_{m-۲}$ برقرار باشد. در این صورت برای A_m

اگر $k < m$ و (به پیمانه‌ی ۳) $m-k \equiv ۰$، در صورت $k \notin A_{m-۱}$ ولی $k \in A_{m-۲}$ بنابراین نتیجه می‌گیریم که $k \in (A_{m-۱} \Delta A_{m-۲}) \cup \{m\} = A_m$.

اگر $k < m$ و (به پیمانه‌ی ۳) $m-k \equiv ۱$، در صورت $k \in A_{m-۱}$ ولی $k \notin A_{m-۲}$ بنابراین نتیجه می‌گیریم که $k \in (A_{m-۱} \Delta A_{m-۲}) \cup \{m\} = A_m$.

اگر $k < m$ و (به پیمانه‌ی ۳) $m-k \equiv ۲$، در صورت $k \in A_{m-۱}$ و ضمناً $k \in A_{m-۲}$ بنابراین نتیجه می‌گیریم که $k \notin (A_{m-۱} \Delta A_{m-۲}) \cup \{m\} = A_m$.

و اگر $k = m$ به وضوح طبق تعریف $k \in (A_{m-۱} \Delta A_{m-۲}) \cup \{m\} = A_m$.

پس حکم به طور کامل ثابت می‌شود. تنها باید اعداد ابتدایی را به عنوان پایه‌ی استقرا بررسی کرد.

حال برای $n = ۱۰۰$، تنها $۲۹ = ۷۱ - ۱۰۰$ دارای باقی‌مانده‌ی ۲ در تقسیم به ۳ است و بنابراین تنها ۷۱ در $A_{۱۰۰}$ ظاهر نمی‌شود.

۲۸.گزینه‌ی (ب) صحیح است.

باتری‌ها را از ۱ تا ۵ شماره‌گذاری می‌کنیم. ابتدا جفت‌های $\{۱, ۲\}$ و $\{۴, ۵\}$ را امتحان می‌کنیم اگر سالم بودند که چراغ‌قوه روشن شده است و به هدف خود رسیده‌ایم. اگر نه پس قطعاً باتری شماره ۳ سالم است و ضمناً چون از بین هر کدام از این جفت‌ها حتما یکی خراب بوده و فقط ۲ باتری خراب داریم در هر جفت یک باتری خراب و یک باتری سالم است. در نهایت اگر جفت $\{۱, ۳\}$ و $\{۲, ۳\}$ را امتحان کنیم حتماً در یکی از این دو امتحان چراغ‌قوه روشن می‌شود(چون یکی از ۱ و ۲ حتماً سالم است.) پس در مجموع با چهار بار امتحان حتماً می‌توان چراغ‌قوه را روشن کرد.

ضمناً ادعا می‌کنیم با سه بار امتحان لزوماً چراغ‌قوه روشن نمی‌شود. زیرا دقت کنید که حتماً باتری‌ای یافت می‌شود که در حداقل دو امتحان در چراغ‌قوه قرار داده شده باشد.(در غیر این صورت باید حداقل شش باتری داشته باشیم.) فرض کنید این باتری مشترک در امتحان‌های اول و دوم آمده باشد. در این صورت اگر این باتری مشترک و یکی از باتری‌های امتحان سوم خراب باشند، چراغ‌قوه روشن نمی‌شود.

۲۹.گزینه‌ی (ج) صحیح است.

رأس مثلث را A می‌نامیم از A عمودی بر محور رسم می‌کنیم که چون ضلع قاعده و محور موازی‌اند این خط بر قاعده نیز عمود است و آن را نصف می کند(مثلث متساوی‌الساقین است) پس می‌توان این‌گونه تصور کرد که حجم مورد نظر از یک استوانه که ارتفاع آن ۶ و شعاع قاعده‌ی آن برابر $\sqrt{۵^۲ - ۳^۲} = ۴$ است تشکیل شده که از آن دو مخروط به ارتفاع ۳و شعاع برابر شعاع استوانه بیرون آورده شده است. حال حجم استوانه برابر $۴^۲\pi \times ۶ = ۹۶\pi$ و حجم هر مخروط برابر $\frac{۱}{۳}۴^۲\pi \times ۳ = ۱۶\pi$ بنابراین حجم شکل حاصل برابر است با $۹۶\pi - ۲ \times ۱۶\pi = ۶۴\pi$.

۳۰. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

دقت کنید که این مهره به هر تعداد دل‌خواهی حرکت می‌کند ولی تعداد خانه‌هایی که از آن‌ها می‌گذرد محدود است، پس زمانی می‌رسد که از خانه‌ای که قبلاً از آن گذشته عبور می‌کند. حال خانه‌ای که مهره بعد از nاُمین حرکتش در آن قرار می‌گیرد را A_n می‌نامیم. توضیحات بالا نشان می‌دهد می‌توان دو عدد طبیعی $k < l$ یافت که $A_k = A_l$. از آن‌جا که می‌توان حرکت مهره را در جهت عکس انجام داد(۳۰ خانه به سمت چپ و ۲۰ خانه به سمت پایین حرکت کرد.) اگر $A_k = A_l$ باید $A_{k-۱} = A_{l-۱}$ و به همین ترتیب $A_{k-۲} = A_{l-۲}$ و ... تا این که $A_{k-l} = A_۰$. یعنی زمانی می‌رسد که مهره از خانه‌ی اولیه عبور می‌کند. حال m را کوچک‌ترین عدد طبیعی بگیرید که $A_m = A_۰$ در این صورت باید $A_۰, A_۱, \ldots, A_{m-۱}$ متمایز باشند زیرا در غیر این صورت، مهره زودتر از مرحله‌ی mاُم هم به خانه‌ی اولیه‌ی خود برگشته است که با فرض ما مبنی بر

کوچک‌ترین بودن m تناقض دارد. حال دقت کنید که در این شرایط کل خانه‌هایی که مهره از آن‌ها عبور می‌کند همین m خانه هستند. پس جواب مسئله $\frac{m}{۱۴۰\times ۷۲}$ است و هدف باید پیدا کردن m باشد.

با توجه به نحوه‌ی حرکت مهره بعد از مرحله‌ی nام مهره در خانه‌ای که قرار دارد که شماره‌ی ستونش باقی‌مانده‌ی تقسیم $۳۰n + ۱$ بر ۱۴۰ و شماره‌ی سطرش باقی‌مانده‌ی تقسیم $۲۰n + ۱$ بر ۷۲ باشد. بنابراین هدف ما یافتن کوچک‌ترین عدد طبیعی m است که $۳۰m + ۱ \equiv ۱$ (به پیمانه‌ی ۱۴۰) و $۲۰m + ۱ \equiv ۱$ (به پیمانه‌ی ۷۲).

$$\left.\begin{array}{l} ۱۴۰\big|۳۰m \Rightarrow ۱۴\big|۳m, (۱۴,۳) = ۱ \Rightarrow ۱۴\big|m \\ ۷۲\big|۲۰m \Rightarrow ۱۸\big|۵m, (۱۸,۵) = ۱ \Rightarrow ۱۸\big|m \end{array}\right\} \Rightarrow ۲ \times ۷ \times ۹ = [۱۴,۱۸]\big|m$$

و چون m کم‌ترین مقدار طبیعی ممکن است $m = ۲ \times ۷ \times ۹$ و بنابراین مهره به $\frac{۱}{۸۰} = \frac{۲\times۷\times۹}{۱۴۰\times۷۲} = \frac{m}{۱۴۰\times۷۲}$ از خانه‌های جدول می‌تواند برسد.

سال ۱۳۸۸

زمان: ۲۷۰ دقیقه

۱. گزینه (ب) صحیح است.

داریم که :

مساحت مثلث به ضلع واحد $=\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ و مساحت دایره به شعاع واحد $=\pi$

بنابراین می خواهیم n ای را بیابیم که $|\pi - n\frac{\sqrt{۳}}{۴}|$ کمینه باشد یا معادل آن $|n - \frac{۴\pi}{\sqrt{۳}}|$ کمینه باشد.
داریم که :

$$\pi \cong ۳.۱ \text{ و } \sqrt{۳} \cong ۱.۷ \Rightarrow \frac{۴\pi}{\sqrt{۳}} \cong ۷.۳$$

پس n برابر ۷ است.

۲-گزینه (د) صحیح است.

ابتدا حاصل ضرب اعداد جدول ضرب ۱۰ در ۱۰ را محاسبه می کنیم. توجه کنید حاصلضرب اعداد سطر i ام برابر است با $10!\times i^{10}$. در نتیجه حاصل ضرب کل اعداد جدول برابر است با : $(10!)^{20}$. اکنون می خواهیم ببینیم بزرگترین m طبیعی که به ازای آن $\sqrt[m]{(10!)^{20}}$ صحیح است چیست. توجه کنید برای اینکه این امر محقق شود باید توان همه ی عوامل اول $(10!)^{20}$ بر عدد m بخش پذیر باشد. در نتیجه بزرگترین عدد طبیعی m با این خاصیت برابر با ب.م.م توان عوامل اول در $(10!)^{20}$ است. در نتیجه با توجه به اینکه : $(10!)^{20} = 2^{160}\times 3^{80}\times 5^{40}\times 7^{20}$

در نتیجه بزرگترین m با خاصیت مذکور برابر است با : $(160,80,40,20) = 20$.

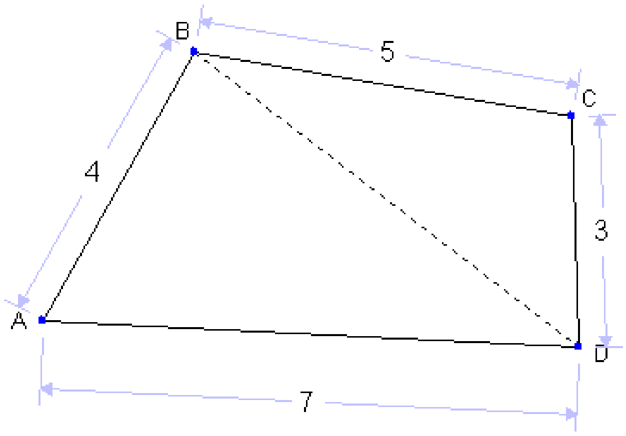
۳- گزینه (ب) صحیح است.

با توجه به این که هر سیاره لااقل یک قمر دارد، می توان گفت که مجموع جرم اقمار این منظومه با مجموع جرم سیارات این منظومه برابر است. از طرفی همان طور که گفتیم مجموع جرم سیارات برابر با مجموع جرم ستاره این منظومه است. پس در نتیجه می توان گفت که مجموع جرم اجرام این منظومه برابر با ۳ برابر جرم ستاره است. حال با توجه به این که ۱۳۲ جرم در این منظومه قرار دارد، می توان گفت که

$$\text{میانگین اجرام} = \frac{۳ \times ۱.۹۸ \times ۱۰^{۳۰}}{۱۳۲} = ۴.۵ \times ۱۰^{۲۸}$$

۴. گزینه (الف) صحیح است.

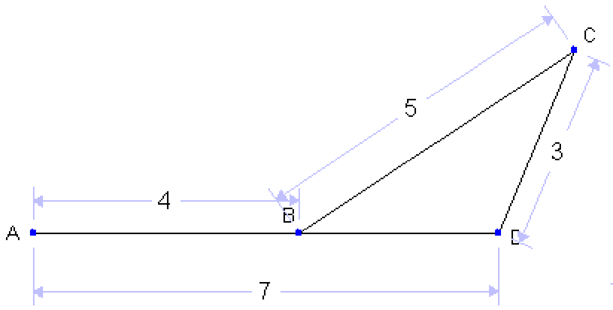
مطابق شکل:

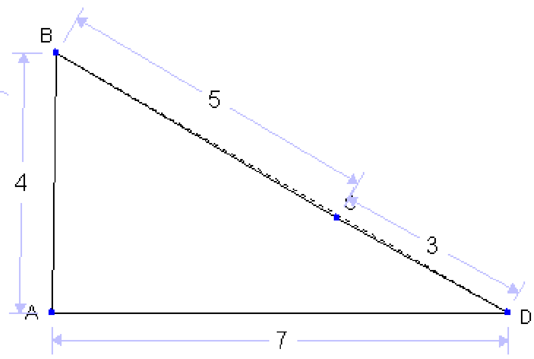


داریم که طبق نامساوی مثلث $BA + BD \geq AD$ پس $۴ + BD \geq ۷$ یا $BD \geq ۳$

همچنین داریم که $BC + CD \geq BD$ پس $۸ \geq BD$

پس داریم که $۸ \geq BD \geq ۳$ و به سادگی می توانید تحقیق کنید که هر مقداری این میان را اتخاذ می کند.





۵- گزینه (ج) صحیح است.

با توجه به این که نمره نفر اول کلاس الف بیشتر یا مساوی میانگین نمرات این کلاس است و این میانگین از میانگین کلاس ب بیشتر است، می توان گفت که نمره نفر اول کلاس الف از میانگین نمرات کلاس ب بیشتر است. در نتیجه ممکن نیست که کسی در کلاس ب نباشد که نمره اش از نفر اول کلاس الف کمتر باشد. در نتیجه حداکثر ۴۹ نفر در کلاس ب هستند که از تمامی افراد کلاس الف بیشتر است.

حال کافی است که برای ۴۹ نیز مثالی ذکر کنیم. فرض کنید ۴۹ نفر در کلاس ب نمره ۱۰۰ کسب کردند و یکی صفر شده باشد. در کلاس الف نیز همگی نمره ۹۹ را کسب کرده باشند. در نتیجه

$$\frac{۱۰۰ \times ۴۹}{۵۰} < \frac{۵۰ \times ۹۹}{۵۰}$$

در این حالت به وضوح ۴۹ نفر در کلاس ب نمره شان از تمامی افراد کلاس الف بیشتر شده است.

۶. گزینه (ب) صحیح است.

شنبه ای که مهندس ناظر برای اولین بار از تونل بازدید کرده را روز صفر بنامید.پس مطابق زیر برنامه بازدیدها را می نویسیم:

اولین بازدید	روز ۰
دومین بازدید	روز ۰+۱
سومین بازدید	روز ۰+۱+۲
چهارمین بازدید	روز ۰+۱+۲+۳
.	.
.	.
.	.
صدمین بازدید	روز ۹۹+۹۸+...+۱+۰

پس صدمین بازدید در روز $۰ + ۱ + ۲ + \cdots + ۹۹ = \frac{۹۹\times۱۰۰}{۲} = ۴۹۵۰$ انجام می شود داریم که باقیمانده ۴۹۵۰ بر ۷ برابر ۱ است لذا این بازدید در یک روز بعد از شنبه یعنی یک شنبه صورت می گیرد.

۷- گزینه (ه) صحیح است.

این فرد در روز اول به یکی از ۳ شهر تبریز، مشهد مقدس یا شیراز سفر می کند. پس مسیر مسافرتش در روز اول به سه طریق مشخص می شود. این مسافرت نیز به وسیله هواپیما، قطار یا اتوبوس صورت گیرد. پس به ۳ طریق می تواندوسیله مورد نظرش را انتخاب کند. در روز دوم با دو وسیله می تواند مسافرت کند و از شهر اول به یکی از دوسهر باقیمانده می تواند سفر کند. در روز سوم با سه وسیله به شهر باقیمانده سفر می کند. در روز چهارم نیز با دو وسیله می تواند به اصفهان بازگردد. در نتیجه تعداد راه های مسافرت او بنابر اصل ضرب برابر است با:

$$۳ \times ۳ \times ۲ \times ۲ \times ۳ \times ۱ \times ۲ \times ۱ = ۲۱۶$$

۸- گزینه (ج) صحیح است.

با تجزیه ۹۸۰۰ به عوامل اول خواهید یافت که $۹۸۰۰ = ۲^۳ \times ۵^۲ \times ۷^۲$. در نتیجه با توجه به این که ارقام از ۰ تا۹ هستند، لزوما از هرکدام از ۵ و ۷ دو مرتبه استفاده می شود. حال برای ایجاد عامل $۲^۳$ سه راه وجود دارد:

الف) از یک ۸ استفاده کنیم و درنتیجه باید برای بقیه ارقام از ۱ استفاده شود. به $\binom{۸}{۲}$ طریق می توان جایگاه ۷ ها را مشخص کرد. سپس به $\binom{۶}{۲}$ طریق می توان جایگاه ۵ها را مشخص کرد و در آخر به ۴طریق می توان جایگاه ۸ را مشخص کرد. پس در این حالت ۱۶۸۰ عدد ۸ رقمی داریم.

ب) از یک ۴ استفاده کنیم و یک ۲. به $\binom{۸}{۲}$ طریق می توان جایگاه ۷ ها را مشخص کرد. سپس به $\binom{۶}{۲}$ طریق می توان جایگاه ۵ها را مشخص کرد و به ۴ طریق جایگاه ۴و به ۳ طریق جایگاه ۲ را مشخص می کنیم. پس در این حالت ۵۰۴۰ عدد ۸ رقمی داریم.

ج) از ۳ عدد۲ استفاده می کنیم. به $\binom{۸}{۲}$ طریق می توان جایگاه ۷ ها را مشخص کرد. سپس به $\binom{۶}{۲}$ طریق می توان جایگاه ۵ها را مشخص کرد و به $\binom{۴}{۳}$ طریق می توان جایگاه ۲ ها را مشخص کرد. پس در این حالت۱۶۸۰ عدد ۸رقمی داریم.

در نتیجه در کل ۸۴۰۰ عدد ۸ رقمی با این خاصیت وجود دارد.

۹-گزینه (الف) صحیح است.

ابتدا ثابت می کنیم الف همواره درست است. فرض کنید a گنگ باشد ولی a^3 و a^4-1 گویا باشند. در اینصورت a^4 هم گویا است. علاوه بر آن $a=\frac{a^4}{a^3}$ و $a^3 \neq 0$. در نتیجه تقسیم دو عبارت گویا برابر با عبارتی گنگ شده در حالی که می دانیم حاصل تقسیم دو عدد گویا عددی گویاست. این تناقض است.

راه دیگری هم برای اثبات مسئله وجود دارد و آن ارائه مثال نقض برای بقیه گزینه هاست.

برای ب کافی است $a=\sqrt[3]{2}$ را در نظر بگیرید.

برای ج کافی است $a=\sqrt[30]{2}$ را در نظر بگیرید.

برای د کافی است $a=\sqrt{2}$ را در نظر بگیرید.

و برای ه کافی است $a=\sqrt[5]{2}$ را در نظر بگیرید.

پس گزینه الف صحیح است.

۱۰=گزینه (ب) صحیح است.

توجه کنید سوال به دنبال تعداد اعداد به فرم $2^m \times 3^n$ ای می گردد که بین ۵۰۰۰ و ۱۰۰۰۰ قرار دارند و نه خود اعداد. توجه کنید که برای هر n حداکثر یک m به دست می آید که $5000 < 2^m \times 3^n < 10000$ (اگر دو m به دست آید یعنی اینکه یک عدد و دوبرابرش در بازه $(5000,10000)$ قرار گرفته اند که این امکان ندارد). علاوه بر این می خواهیم نشان دهیم برای هر n صحیح و نامنفی که $3^n < 10000$ باشد m ای پیدا می شود که $5000 < 2^m \times 3^n < 10000$. برای این کار ابتدا $m = 0$ را در نظر می گیریم. اگر عدد 3^n از ۵۰۰۰ بیش تر باشد که چیزی که می خواستیم یافته ایم در غیر اینصورت $m = 1$ در نظر گرفته می شود. اکنون دقت کنید که امکان ندارد که $2 \times 3^n > 10000$ زیرا در اینصورت 3^n بزرگتر از ۵۰۰۰ بوده که می دانیم اینگونه نبوده است. در نتیجه $2 \times 3^n < 10000$. اگر این عدد از ۵۰۰۰ بیش تر باشد مسئله حل است. در غیر اینصورت $m = 2$ را در نظر می گیریم و روند فوق را ادامه می دهیم. توجه کنید که این روند متوقف می شود زیرا به جایی می رسیم که $2^u \times 3^n \geq 2^u > 10000$. وقتی روند متوقف شد m را یافته ایم و این m هم یکتاست. در حقیقت ما ابتدا یک عدد کوچکتر از ۱۰۰۰۰ در نظر می گیریم و در هر مرحله آن را دو برابر می کنیم. این روند را آن قدر ادامه می دهیم تا اولین مرحله ای که از ۱۰۰۰۰ بیش تر شویم. اگر مرحله ی قبل از این مرحله را درنظر بگیریم حتما عددمان در این مرحله چیزی بین ۵۰۰۰ تا ۱۰۰۰۰ بوده است.

در نتیجه جواب مسئله برابر است با تعداد اعداد صحیح و نامنفی m که $3^m < 10000$ که با یک بررسی ساده می بینیم که ۹ عدد m در رابطه بالا صدق می کنند یعنی اعداد صحیح از ۰ تا ۸ . پس گزینه ب صحیح است.

۱۱-گزینه (ه) صحیح است.

فرض کنید که $1 - x = u$ و $2y = v$ باشند در اینصورت $f(u,v) = 0$ در نتیجه مجموعه جوابی که برای u,vبه دست می آید همان شکلی است که در فرض مسئله داده شده است. اکنون :

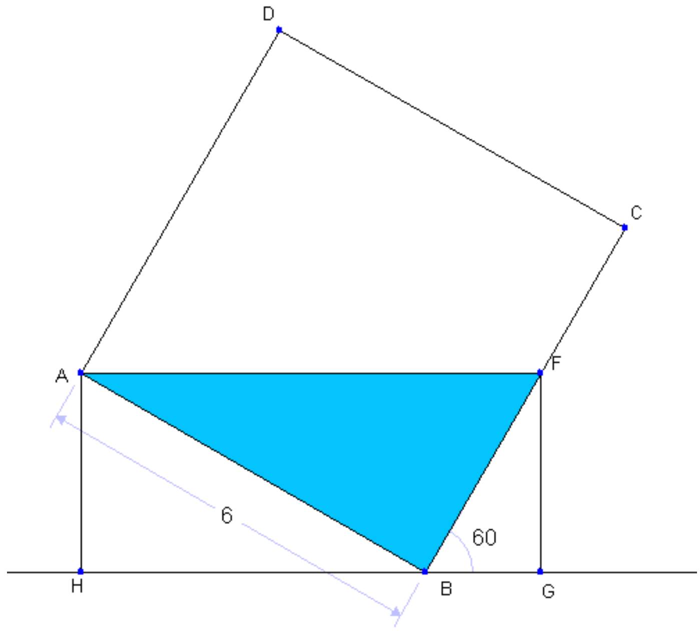
$$\begin{cases} x = 1 - u \\ y = \dfrac{v}{2} \end{cases}$$

در نتیجه برای به دست آوردن مجموعه نقاط خواسته شده باید ابتدا نموداری که در مسئله داده شده است را نسبت به محور y ها قرینه کنیم.سپس یک واحد به سمت راست انتقال دهیم. در پایان هم باید با یک

تجانس به نسبت $\frac{1}{2}$ مختص دوم همه ی نقاط را نصف کنیم (به نوعی نمودار را جمع کنیم). اگر این کارها را انجام دهیم به سادگی معلوم است که گزینه (ه) جواب مسئله است.

۱۲. گزینه (الف) صحیح است.

ابتدا $۱۰۸ = ۳ \times ۶ \times ۶$ سانتی متر مکعب آب درون مکعب قرار دارد.شکل زیر نمای کناری مکعب بعد از کج شدن است:



$$FG = AH = ۶\sin(۳۰^\circ) = ۳\,, GH = BH + BG = AH.cot(۳۰^\circ) + FG.tan(۳۰^\circ)$$
$$= ۳\left(\sqrt{۳} + \frac{۱}{\sqrt{۳}}\right) = ۴\sqrt{۳}$$

پس حجم آب باقی مانده برابر است با:

$$۶ \times (\text{مساحت مثلث } ABF) = ۶ \times \frac{۳ \times ۴\sqrt{۳}}{۲} = ۳۶\sqrt{۳}$$

داریم که $۳۶\sqrt{۳} < ۱۰۸$ پس آب بیرون می ریزد و حجم آب بیرون ریخته شده برابر $۱۰۸ - ۳۶\sqrt{۳}$ است.

۱۳- گزینه (الف) صحیح است.

توجه کنید که ۱۳۸۸ بر ۴ بخشپذیر است اما بر ۸بخشپذیر نیست. طبق معادله $y^۳ = ۲x^۲ + ۱۳۸۸$، نتیجه می گیریم $y^۳$ زوج است. پس y نیز زوج است. در نتیجه $y^۳$ بر ۸ بخشپذیر است. حال عبارت $y^۳ - ۱۳۸۸$ بر ۴ بخشپذیر است. در نتیجه لزوما $x^۲$ زوج است. پس x نیز زوج است و $۲x^۲$ بر ۸ بخشپذیر است. در نتیجه $y^۳ - ۲x^۲$ نیز بر ۸ بخشپذیر است که این گونه نیست. زیرا ۱۳۸۸ بر ۸ بخشپذیر نیست.

۱۴- گزینه (د) صحیح است.

راه اول:

فرض کنید $\overline{abcd}$ عددی چهار رقمی با این خاصیت باشد. به راحتی می توان دید که

$$\overline{abcd} - \overline{dcba} = ۹۹۹a + ۹۰b - ۹۰c - ۹۹۹d = ۹\big(۱۱۱(a-d) + ۱۰(b-c)\big)$$
$$= ۶۱۷۴$$
$$\Longrightarrow ۱۱۱(a-d) + ۱۰(b-c) = ۶۸۶$$

توجه کنید که

$$۶۸۶ \equiv ۱۱۱(a-d) \pmod{۱۰} \Longrightarrow ۶ \equiv a-d \pmod{۱۰}$$

پس با توجه به این که $a > d$ لزوما $a - d = ۶$ و بنابر رابطه فوق لزوما $b - c = ۲$.

پس با توجه با این تساوی ها می توان گفت که $۰ \le d \le ۳$ و $d < c < ۴ + d$ (چرا؟). پس کلا ۴ انتخاب برای d و ۳ انتخاب متناظر با آن برای c داریم. همچنین a و b به صورت یکتا با توجه به آن دو مشخص می گردند.در نتیجه به ۱۲ حالت می توان اعداد مطلوب را تولید کرد.

راه دوم:

داریم که

$$a > b > c > d$$

و

$$\overline{abcd} - \overline{dcba} = ۶۱۷۴$$

حال شروط برقراری رابطه بالا را بررسی می کنیم.اولا چون $a > d$ پس در محاسبه رقم یکان حاصل عبارت ده بر یک صورت می گیرد پس $۱۰ + d - a = ۴$ پس $a - d = ۶$ همین طور در این مرحله یکی از رقم c که بزرگتز صف نیز هست کم می شود.پس هنوز داریم که $۰ \le c - ۱ < b$ پس اینجا نیز باید ده بر یک بکنیم و داریم که

$b - c = ۲$ پس داریم که $۱۰ + (c - ۱) - b = ۷$ در این مرحله نیز یکی از b کم می شود ولی باز هم داریم که $b - ۱ \geq c$ پس $b - ۱ - c = ۱$ یا $b - c = ۲$ در نهایت هم داریم که برای محاسبه رقم چهارم باید a را منهای d کنیم که نتیجه می شود $a - d = ۶$ پس دو شرط $a - d = ۶$ و $b - c = ۲$ لازم و کافی هستند.

با توجه به شرط اول به سادگی به دست می آید که برای انتخاب a و d تنها ۴ حالت وجود دارد و با داشتن a و d برای انتخاب b و c تنها ۳ حالت وجود دارد.پس در کل $۳ \times ۴ = ۱۲$ حالت برای انتخاب $\overline{abcd}$ وجود دارد.

۱۵-گزینه (ه) صحیح است.

توجه کنید f یک سهمی است که ضریب درجه دوم آن منفی است پس ماکسیمم دارد. همچنین ماکسیمم آن به ازای $x = -\frac{b}{2a} = \frac{b}{2}$ رخ می دهد. از آن جایی که این مقادیر سهمی باید همواره کمتر از یا مساوی ۲ باشند پس ماکسیمم آن از ۲ نابیشتر است. پس

$$f(\frac{b}{2}) \leq 2 \Rightarrow -(\frac{b}{2}) + b(\frac{b}{2}) + c \leq 2 \Rightarrow b^2 + 4c \leq 8$$

اکنون می دانیم که فاصله ی ریشه ها برابر است با :

$$S = \left| \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{-2} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{-2} \right| = \sqrt{\Delta} = \sqrt{b^2 + 4c} \leq \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

در نتیجه کافی است مثالی ارائه دهیم. توجه کنید هر دو عدد حقیقی b,c که برای آن ها $b^2 + 4c = 8$ جواب هستند و مثال مورد نظر را می توانید بسازید . پس گزینه (ه) صحیح است.

۱۶-گزینه (ج) صحیح است.

توجه کنید از آنجایی که عدد در مبنای ۲ فقط از ۰ و ۱ تشکیل شده است در نتیجه یک عدد در این مبنا کاهشی است اگر به فرم 1111...100...000 باشد که در این عدد m بار ۱ و n بار صفر استفاده شده است. از آنجایی که ما فقط اعداد طبیعی کمتر از ۱۰۲۴ را بررسی می کنیم پس اعدادی را بررسی می کنیم که برای آن ها $m+n \le 10, m \ge 1$. اکنون می خواهیم ببینیم چه تعدادی از این اعداد در مبنای ۴ هم کاهشی هستند. توجه کنید برای تبدیل یک عدد از مبنای ۲ به مبنای ۴ از راست شروع می کنیم و به جای ۰۰ , ۰۱ , ۱۰ و ۱۱ به ترتیب ۲,۱,۰ و ۳ قرار می دهیم. اگر تعداد ارقام در مبنای ۲ فرد بود در پایان یک عدد باقی می ماند که حتما ۱ است یا معادلا ۰۱ است که به جای آن ۱ قرار می دهیم. در نتیجه اعداد بالا را به دو قسمت تقسیم می کنیم :

- اعدادی که تعداد ارقامشان در مبنای ۲ زوج است: توجه کنید همه ی این اعداد در مبنای ۴ هم کاهشی هستند (در واقع اگر دوتا دوتا تقسیم کنید و به فرم این اعداد در مبنای ۲ توجه کنید کاملا مشخص است) . فرض کنید بخواهیم تعداد اعداد طبیعی ۲k رقمی در مبنای ۲ که به فرم 11...100...0 هستند را بشماریم. توجه کنید تعداد صفر ها در این اعداد می تواند عددی بین۰ تا ۲k-۱ باشد و با تعداد صفر ها عدد یکتا معلوم می شود. پس دقیقا ۲k تا از این اعداد داریم. در نتیجه تعداد اعداد در این قسمت دقیقا برابر است با : ۳۰=۱۰+۸+۶+۴+۲
- اعدادی که تعداد ارقامشان در مبنای ۲ فرد است: اگر به مطالبی که در بالا توضیح داده شد دقت کنید می بینید که چپ ترین رقم این اعداد در مبنای ۴ حتما ۱ است. در نتیجه رقم های دیگر این عدد همگی باید ۰ یا ۱ باشند (در مبنای ۴). اما هیچکدام از این ارقام نمی توانند ۱ باشند در واقع اگر بخواهد رقمی در مبنای ۴ غیر از این چپ ترین ۱ , ۱ باشد پس این عدد به فرم 11...100...0 در مبنای ۴ است که در آن تعداد ۱ ها حداقل ۲ است و این به این معناست که این عدد در مبنای ۲ به فرم : 1010101...01000...0 است که از آنجایی که تعداد ۱ ها در مبنای ۴ حداقل ۲ تاست پس در مبنای ۲ هم حداقل یک عبارت ۱۰۱ داریم و این با فرم اولیه ی این اعداد متناقض است. در نتیجه در بین اعدادی که در مبنای ۲ فرد رقم دارند و به فرم 11...100...0 هستند فقط اعدادی می توانند مناسب باشند که دقیقا یک عدد ۱ در نمایششان داشته باشند. علاوه بر این همه ی این اعداد هم مناسب هستند. در نتیجه از آنجایی که تعداد ارقام این اعداد حداکثر ۱۰ است پس دقیقا ۵ تا از این اعداد داریم (۱ رقمی , ۳ رقمی , ۵رقمی , ۷رقمی و ۹رقمی در مبنای ۲ و از هرکدام دقیقا یکی).

در نتیجه در کل دقیقا ۳۵=۵+۳۰ تا از این اعداد کاهشی در هر دو مبنا داریم و گزینه ج صحیح است.

۱۷- گزینه (د) صحیح است.

فرض کنید $(x,y)=d$ (یعنی d ب.م.م دو عدد x و y باشد) و $x=dx'$ و $y=dy'$. در نتیجه:

$$x+y|۲x+۷y \Rightarrow d(x'+y')|d(۲x'+۷y') \Rightarrow x'+y'|۲x'+۷y'$$
$$\Rightarrow x'+y'|۵y' \Rightarrow x'+y'|۵ \Rightarrow x'+y'=۵$$

توجه کنید که $(x',y')=۱ \Rightarrow (y',x'+y')=۱$ و x' و y' هر دو طبیعی هستند. در نتیجه روابط خط آخر عبارت فوق صحیح هستند. از طرفی می توان بررسی کرد که هر دو عدد طبیعی که دارای شرط فوق باشند (یعنی $(x+y=۵(x,y))$ در شرط مسئله صدق می کنند. پس کافی است تنها تعداد (x,y) را بشماریم که در شرط فوق صدق کنند و هر دو از ۱۰۱ کمتر باشند. پس ۴ حالت ممکن است:

الف- $x'=۴\,,y'=۱ \Rightarrow dx'=x<۱۰۱ \Rightarrow ۱\leq d\leq ۲۵$

پس به ۲۵ طریق می توان d را انتخاب کرد.

ب- $x'=۳\,,y'=۲ \Rightarrow dx'=x<۱۰۱ \Rightarrow ۱\leq d\leq ۳۳$

پس به ۳۳ طریق می توان d را انتخاب کرد.

ج- $x'=۱\,,y'=۴ \Rightarrow dy'=y<۱۰۱ \Rightarrow ۱\leq d\leq ۲۵$

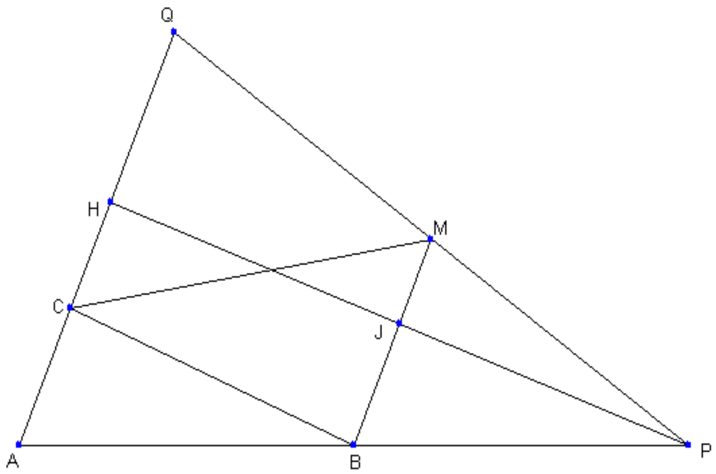
پس به ۲۵ طریق می توان d را انتخاب کرد.

ب- $x'=۲\,,y'=۳ \Rightarrow dy'=y<۱۰۱ \Rightarrow ۱\leq d\leq ۳۳$

پس به ۳۳ طریق می توان d را انتخاب کرد.

در کل جواب برابر است با $۲۵+۳۳+۲۵+۳۳=۱۱۶$.

۱۸. گزینه (ج) صحیح است.



منظور از S_{ABC} مساحت مثلث ABC است.

داریم که با توجه به شرایط مساله $MB||AQ$ و همچنین فرض کنید PH بر AQ و BM عمود است. داریم که :

$$BM=\frac{۱}{۲}AQ,\frac{۱}{۲}PH=HJ \Rightarrow \frac{S_{MBC}}{S_{APQ}}=\frac{HJ.BM}{PH.AQ}=\frac{۱}{۴} \Rightarrow S_{MBC}=\frac{۱}{۴}S_{APQ}$$

همچنین داریم که:

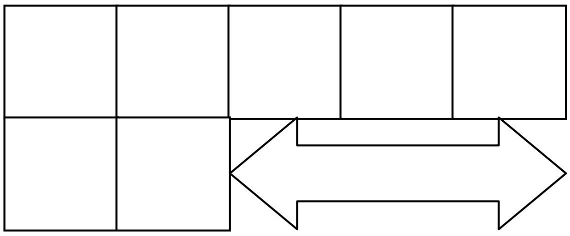
$$S_{\mathrm{ABC}} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AQ}}\mathrm{S}_{\mathrm{AQB}} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AQ}}\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AP}}\mathrm{S}_{\mathrm{APQ}} \Rightarrow \mathrm{S}_{\mathrm{APQ}} = ۶\mathrm{S}_{\mathrm{ABC}}$$

پس:

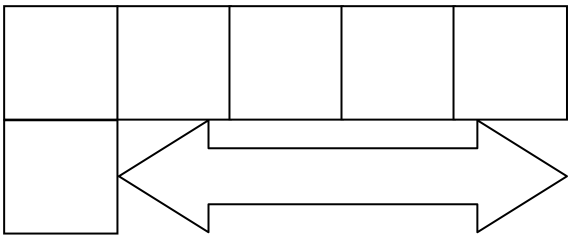
$$S_{\mathrm{MBC}} = \frac{۱}{۴}\mathrm{S}_{\mathrm{APQ}} = \frac{۳}{۲}\mathrm{S}_{\mathrm{ABC}}$$

۱۹- گزینه (ب) صحیح است.

فرض کنید تعداد حالاتی که می توان اعداد ۱ تا n ($n \geq ۴$) را در یک جدول مشابه شکل زیر چید(به طوری که اعداد در دو سطر و در دو ستون از کوچک به بزرگ چیده شده باشند) برابر باشد با b_n.



به راحتی بررسی می توان کرد که در شکلی مشابه زیر به $m - ۱$ طریق می توان اعداد ۱ تا m را جاسازی کرد(به طوری که اعداد در سطر و ستون به صورت صعودی چیده شده باشند).



حال به وضوح عدد n را در جدول فوق به دو صورت می توان جاسازی کرد(انتهای سطر اول و انتهای سطر دوم). حال در حالت اول بقیه جدول را می توان به $b_{n-۱}$ طریق اعداد را جایسازی کرد و در حالت دوم به $n - ۲$ طریق.پس می توان نتیجه گرفت که $b_n = b_{n-۱} + n - ۲$. حال با توجه به این که $b_۴ = ۲$، نتیجه می گیریم:

$$\begin{aligned} b_n = b_۴ + ۳ + ۴ + \cdots + (n-۲) &= ۲ + ۳ + \cdots + (n-۲) \\ &= \frac{(n-۱)(n-۲)}{۲} - ۱ \end{aligned}$$

پس $b_{۱۰} = ۳۵$.

۲۰. گزینه (الف) صحیح است.

ابتدا عدد n را در مبنای ۲ می نویسیم و این عملیات را بررسی می کنیم.

نشان می دهیم که عملیات فوق اولین رقم ناصفر عدد در مبنای دو را ۰ می کند و یک ۱ به انتهای آن اضافه می کند.

چرا که بزرگترین ۲^a ای که $۲^a|n$ همان ضریب اولین ۱ در نمایش مبنای ۲ عدد n است و کوچکترین ۲^b که $۲^b < n$ همان ضریب رقمی است که بعد از آخرین یک عدد n در بسط مبنای ۲ ظاهر می شود:

$$
\begin{aligned}
n &= (۰۱a_۱a_۲ \dots a_{u-۱}a_u۱۰۰ \dots ۰)_۲\\
۲^a &= (۰۰۰۰۰۰۰۰۰ \dots ۰۰۰۱۰۰ \dots ۰)_۲\\
۲^b &= (۱۰۰۰۰۰ \dots ۰۰۰۰۰۰۰۰۰ \dots ۰)_۲\\
n + ۲^b - ۲^a &= (۱۱a_۱a_۲ \dots a_{u-۱}a_u۰۰۰ \dots ۰)_۲
\end{aligned}
$$

بنابراین با این الگو از ۴۲ شروع می کنیم و داریم که $۴۲ = (۱۰۱۰۱۰)_۲$:

مرحله ۰	$(۱۰۱۰۱۰)_۲$
مرحله ۱	$(۱۱۰۱۰۰۰)_۲$
مرحله ۲	$(۱۱۱۰۰۰۰۰)_۲$
مرحله ۳	$(۱۱۱۰۰۰۰۰۰)_۲$
مرحله ۴	$(۱۱۱۰۰۰۰۰۰۰)_۲$

همانطورکه مشاهده می شود از مرحله ۲ به بعد هر بار عدد فوق دو برابر می شود.در مرحله ۲ برابر است با $۲^۵ + ۲^۶ + ۲^۷$

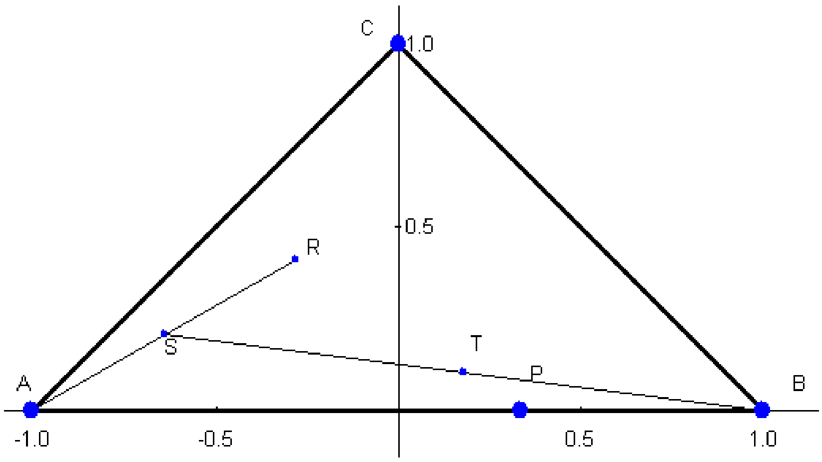
لذا در مرحله ۱۱۳ یعنی ۱۱۱ مرحله بعد به عدد $۲^{۱۱۸} + ۲^{۱۱۷} + ۲^{۱۱۶}$ یا ۷×۲^{۱۱۶} می رسیم.

۲۱. گزینه (د) صحیح است.

نشان می دهیم که در هر دو مرحله (یعنی یک مرحله با شماره زوج و بعد یک مرحله با شماره فرد) فاصله مورچه تا نقطه P روی خط AB که فاصله P تا نقطه B نصف فاصله آن از A است یک چهارم می شود.این نکته را به ۲ راه نشان می دهیم:

راه اول:

مطابق شکل مثلث را روی محور مختصات قرار دهید:



اگر مورچه ابتدا در نقطه $(x_{۲k}, y_{۲k})$ قرار داشته باشد بعد از یک مرحله به نقطه $(x_{۲k+۱}, y_{۲k+۱}) =$ $(\frac{x_{۲k}-۱}{۲}, \frac{y_{۲k}}{۲})$ می رود و سپس به نقطه
$(x_{۲k+۲}, y_{۲k+۲}) = \left(\frac{x_{۲k+۱}+۱}{۲}, \frac{y_{۲k+۱}}{۲}\right) = \left(\frac{\left(\frac{x_{۲k}-۱}{۲}\right)+۱}{۲}, \frac{y_{۲k}}{۲}\right) = (\frac{x_{۲k}+۱}{۴}, \frac{y_{۲k}}{۴})$ می رود. پس می توانیم بنویسیم:

$$\left(x_{۲k+۲} - \frac{۱}{۳}, y_{۲k+۲}\right) = \left(\frac{۱}{۴}\left(x_{۲k} - \frac{۱}{۳}\right), \frac{۱}{۴}(y_{۲k})\right)$$

پس فاصله مورچه در مرحله $۲k + ۲$ از نقطه $\frac{۱}{۳}$ برابر یک چهارم فاصله مورچه تا همین نقطه در مرحله $۲k$ است.

راه دوم:

در مراحل فرد مانند این است که تجانسی به مرکز A و نسبت $\frac{۱}{۲}$ و در مراحل فرد تجانسی به مرکز B و نسبت $\frac{۱}{۲}$ می زنیم.

این تجانس ها حرکات مورچه را مشخص می کنند.می دانیم ترکیب این دو تجانس، تجانسی به نسبت $\frac{۱}{۴}$ می شود.حال کافی است مرکز آن را بیابیم.می دانیم که مرکز تجانس تنها نقطه ای است که در اثر تجانس

ثابت می ماند.می توانید به سادگی نشان دهید که نقطه P ثابت می ماند لذا مرکز تجانس است.پس مانند بالا اثبات شد که در این دو مرحله فاصله مورچه تا نقطه P یک چهارم می شود.پس به طریق دوم نیز اثبات شد.

حال داریم که فاصله مورچه در ابتدا از نقطه P کمتر از طول AB است پس بعد از ۲۰ مرحله نیز فاصله آن از P کمتر از $\frac{AB}{۴^{۲۰}}$ می شود و به وضوح به همواره به وسط AB نزدیک تر خواهد بود.

۲۲- گزینه (د) صحیح است.

راه حل اول:

به وضوح فردی که در ابتدا، در انتهای صف حضور داشته است، تا ابد در آخر صف باقی خواهد ماند. توجه کنید که فردی که در حال حاضر نفر i صف است، پس از دستور فرمانده طبق تابع زیر جایگاهش در صف تغییر می کند:

$$\begin{cases} ۱۲۸ + \frac{i+۱}{۲} & \text{فرد } i \\ \frac{i}{۲} & \text{زوج } i \end{cases}$$

فردی که در نهایت پس از ۴۲ مرتبه دستور فرمانده در ابتدای صف قرار می گیرد را علی اکبر بنامید. به وضوح علی اکبر در مرحله قبل نفر دوم، در مرحله قبل آن نفر چهارم و $\cdots$ بوده است. به همین ترتیب می توان گفت که علی اکبر پس از ۳۴ دستور فرمانده، نفر ۲۵۶ صف بوده است. در مرحله قبل از این به راحتی می توان بررسی کرد که نفر ۲۵۵ صف بوده است. توجه کنید که $۲۵۵ = (۱۱۱۱۱۱۱۱)_۲$. در مرحله قبل از این علی اکبر در جایگاه۲۵۳ حضور داشت که $۲۵۳ = (۱۱۱۱۱۱۰۱)_۲$. به همین ترتیب اگر ادامه دهیم، هر مرحله که به عقب بازگردیم، دومین یک از سمت راست (در مبنای ۲)تبدیل به صفرخواهد شد. پس می توان نتیجه گرفت که بعد از ۲۶ دستور، علی اکبر در ابتدای صف حضور داشته است. با تکرار این روند باز می توان نتیجه گرفت که بعد از دستور دهم نیز علی اکبر در جایگاه اول قرار داشته و بعد از دستور دوم درجایگاه ۲۵۶. پس بعد از دستور اول درجایگاه ۲۵۵ قرار گرفته است. در نتیجه در اول کار علی اکبر در جایگاه ۲۵۳ صف بوده است.

راه حل دوم:

باز هم مانند بالا علی اکبر را همان سربازی که در مرحله ۴۲ در ابتدای صف قرار می گیرد بنامید.

اگر a_i مکان یکی از سربازها مثلا علی اکبر در مرحله i ام باشد به سادگی می توان نشان داد که

$$a_i \equiv ۲a_{i+۱} \ (\text{به پیمانه } ۲۵۷)$$

پس بعد از ۴۲ مرحله داریم که $(\text{به پیمانه } ۲۵۷)\ a_{۱} \equiv ۲^{۴۲} a_{۴۲}$ چون برای علی اکبر داریم $a_{۴۲} = ۱$
پس داریم که:

$$a_{۱} \equiv ۲^{۴۲} \equiv ۲۵۶^{۵} \times ۴ \equiv (-۱)^{۵} \times ۴ \equiv ۲۵۳ (\text{به پیمانه } ۲۵۷)$$

پس علی اکبر ابتدا در مکان ۲۵۳ بوده است.

۲۳-گزینه (ب) صحیح است.

چندجمله ای مورد نظر به فرم $a_5x^5 + a_4x^4 + ... + a_0$ است که ضرایب جایگشتی از اعداد ۱ تا ۶ هستند. اکنون می خواهیم این چندجمله ای بر $x^2 + x + 1$ بخش پذیر باشد. توجه کنید که : $x^3 - 1 = (x^2 + x + 1)(x - 1)$. در نتیجه اگر چندجمله ای فوق بر $x^2 + x + 1$ بخش پذیر باشد پس چندجمله ای $(a_5 + a_2)x^2 + (a_4 + a_1)x + (a_3 + a_0)$ هم بر $x^2 + x + 1$ بخش پذیر است. اگر به جای عبارت حاصل باقی مانده ی آن را بر $x^2 + x + 1$ قرار دهیم آنگاه این باقی مانده باید صفر باشد. این باقی مانده برابر است با : $(a_4 + a_1 - a_5 - a_2)x + (a_3 + a_0 - a_5 - a_2)$. صفر شدن این باقی مانده یعنی اینکه:

$$a_0 + a_3 = a_1 + a_4 = a_2 + a_5 = S$$

علاوه بر آن این اعداد جایگشتی از اعداد ۱ تا ۶ هستند پس :

$$a_0 + a_1 + ... + a_6 = 1 + 2 + ... + 6 = 21$$

در نتیجه باید $S = 7$ باشد. حال برای شمردن تعداد این ۶ تایی ها بدین نحو عمل می کنیم. ابتدا a_0 را به دلخواه به ۶ حالت انتخاب می کنیم. از روی a_0 مقدار $a_3 = 7 - a_0$ به طور یکتا به دست می آید. بعد از آن از بین ۴ عدد باقی مانده a_1 را به دلخواه تعیین می کنیم پس مشابه بالا a_4 به طور یکتا معلوم می شود و در پایان از میان ۲ عدد باقی مانده به ۲ حالت a_2 را انتخاب می کنیم و a_5 به طور یکتا تعیین می شود. پس جواب مسئله برابر است با : $2 \times 4 \times 6 = 48$ و مسئله حل است.

۲۴-گزینه (ج) صحیح است.

توجه کنید که :

$$a^3-\frac{1}{a^3}\geq k(a-\frac{1}{a})\Rightarrow (a-\frac{1}{a})(a^2+\frac{1}{a^2}+1)\geq k(a-\frac{1}{a})$$

اما $a-\frac{1}{a}>0$ پس با ساده کردن آن از طرفین معلوم می شود که باید بزرگترین k حقیقی را بیابیم که برای هر a مثبت با شرط $a-\frac{1}{a}\geq 1$ داشته باشیم :

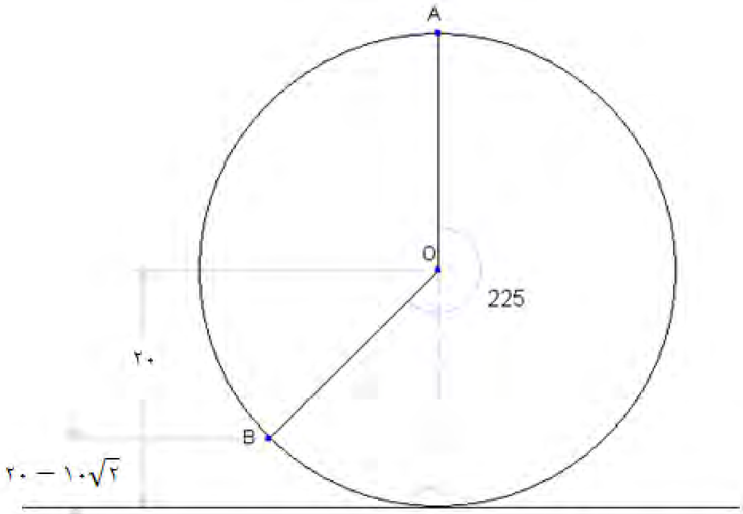
$$a^2+\frac{1}{a^2}+1\geq k\Rightarrow (a-\frac{1}{a})^2+3\geq k$$

اکنون دقت کنید که اگر عدد مثبت a به نحوی باشد که $a-\frac{1}{a}=1$ ($a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$) در این صورت در رابطه بالا به دست می آوریم که $4\geq k$. برای اینکه نشان دهیم ماکزیمم k ,۴ است تنها کافی است نشان دهیم که برای هر a با شرط $a-\frac{1}{a}\geq 1$ داریم $(a-\frac{1}{a})^2+3\geq 4$ که این هم بدیهی است. پس برای ۴ هم اثبات ارائه کردیم و هم مثالی ارائه کردیم که نشان دهیم از این عدد بزرگتر نمی توان یافت. درنتیجه گزینه

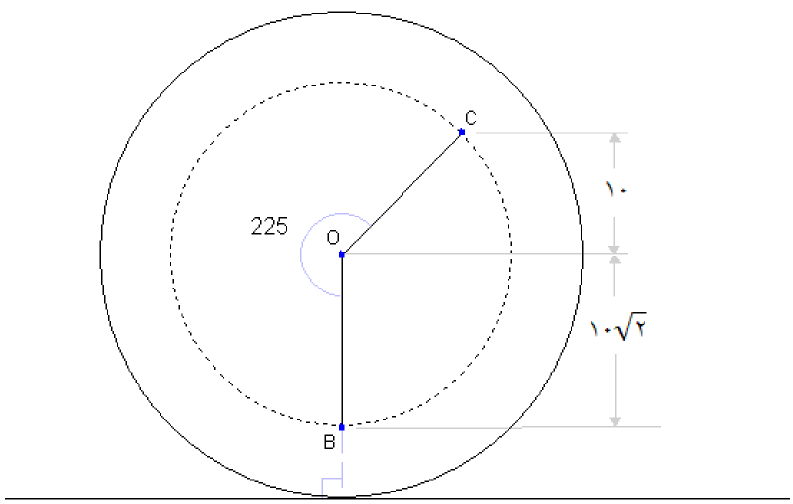
- توجه : نکته ای که باید به آن توجه کنید این است که هنگامی که به رابطه $a^2+\frac{1}{a^2}+1\geq k$ می رسید اگر از نامساوی حسابی-هندسی بهره ببرید به این نتیجه می رسید که $a^2+\frac{1}{a^2}+1\geq 3$ پس احتمالا حدس می زنید که شاید بهترین k همان ۳ باشد. البته این که در تست جواب ۳ وجود ندارد به شما کمک می کند تا احساس کنید در قسمتی اشتباه کرده اید. اما اگر در گزینه ها عدد ۳ وجود داشت توجه به این نکته که شما از فرض $a-\frac{1}{a}\geq 1$ هیچ استفاده ای نکرده اید می توانست راهنمای شما برای پیدا کردن خطا باشد.

۲۵. گزینه (ه) صحیح است.

محیط دایره عظیمه توپ برابر است با ۴۰π و توپ ۲۵π حرکت کرده است.پس در کل به اندازه $\frac{۲۵\pi}{۴۰\pi}=\frac{۵}{۸}$ دور یا ۲۲۵° چرخیده است.لذا با توجه به اینکه نقطه علامت خورده خود یک دایره عظیمه را می پیماید ارتفاع نقطه علامت خورده پس از حرکت به سمت شرق برابر $۲۰+۲۰\,cos(۲۲۵^\circ)=۲۰-۱۰\sqrt{۲}$ می شود.از اینجا به بعد در حرکت به سمت شمال هم توپ مقدار ۲۲۵° می چرخد ولی نقطه علامت خورده روی دایره ای ثابت حرکت می کند که شعاع آن برابر $۱۰\sqrt{۲}=\left(۲۰-۱۰\sqrt{۲}\right)-۲۰$ است و در ابتدا نقطه مورد نظر در پایین دایره قرار دارد. با چرخش به مقدار ۲۲۵° دیگر نقطه به ارتفاع $(۲۲۵^\circ)\cos ۲۰-۱۰\sqrt{۲}$ یا ۳۰ سانتی متر می رسد.در اشکال زیر نمای جانبی کره را در هر یک از این حرکات می بینید.



A محل نقطه پیش از حرکت به سمت شرق و B مختصات نقطه بلافاصله پس از اتمام حرکت



B محل نقطه پیش از حرکت به سمت شمال و C مختصات نقطه بلافاصله پس از اتمام حرکت

۲۶- گزینه (ج) صحیح است.

در شکل زیر دو کاشی روی جدول قرار گرفته است. با توجه به این که باید مجموع اعداد روی کاشی بر ۶ بخشپذیر باشد، لزوما $A_{۳}$ و $A_{۴}$ باید برابر باشند(چرا؟). به کمک این استدلال می توان گفت که اعداد نوشته شده در دو خانه ای که فاصله عمودی یا افقی آن ها ۲ است، برابر است.

$A_{۱}$	$B_{۱}$	$A_{۲}$	$B_{۲}$	
$C_{۱}$	$D_{۱}$	$C_{۲}$	$D_{۲}$	
$A_{۳}$	$B_{۳}$	$A_{٤}$	$B_{٤}$	
$C_{۳}$	$D_{۳}$	$C_{٤}$	$D_{٤}$	

به عبارتی اگر سطر ها و ستون ها را از چپ به راست و از بالا به پایین از ۱ تا ۱۳۸۸ شماره گذاری کنیم، خانه های با سطر فرد و ستون فرد با هم برابر هستند و این مقدار را A فرض کنید. به همین ترتیب کلیه خانه های (فرد،زوج) برابر C، تمام خانه های (زوج، فرد) برابر B و تمام خانه های (زوج،زوج) برابر D هستند. همچنین با کاشی گذاری ها، می توان ثابت کرد که

$$۲B \equiv ۲C \pmod{۶} \Rightarrow B \equiv C \pmod{۳}$$
$$۲A \equiv ۲D \pmod{۶} \Rightarrow A \equiv D \pmod{۳}$$
$$۶|۲B + A + D \Longrightarrow ۲|A + D \Longrightarrow A \equiv D \pmod{۲}$$
$$۶|۲D + B + C \Longrightarrow ۲|B + C \Longrightarrow B \equiv C \pmod{۲}$$

از روابط فوق می توان نتیجه گرفت که $B = C$ و $A = D$. در نتیجه کافی است که

$$۶|۲(A + B) \Longrightarrow ۳|A + B$$

حال A می تواند به ۶ حالت انتخاب شود و B متناظر با آن در ۲ حالت انتخاب می شود. پس جواب ۱۲ = ۲ × ۶ است.

۲۷-گزینه (ج) صحیح است.

فرض کنید A_n, B_n عباراتی باشند که از در آنها از n تا ۲ و n تا ۴ استفاده شده باشد و C_n عبارتی باشد که در آن از $4n$ تا ۲ استفاده شده باشد :

$$A_n = 2^{4^{2^{\cdots^{4}}}} \qquad B_n = 4^{2^{4^{\cdots^{2}}}} \qquad C_n = 2^{2^{2^{\cdots^{2}}}}$$

اکنون هدف ما نشان دادن نامساوی $C_n > A_n > B_n$ برای هر عدد طبیعی n بزرگتر از ۱ است. اگر این نامساوی را نشان دهیم از قرار دادن $n = 500$ جواب به دست می آید. این حکم را به روش استقرایی نشان می دهیم. به راحتی می توان این نامساوی را برای حالت پایه یعنی $n = 2$ چک کرد. اگر نامساوی برای n درست باشد برای $n+1$ می توان نوشت :

$$A_{n+1} = 2^{4^{A_n}} = 2^{2^{2A_n}} \qquad B_{n+1} = 4^{2^{B_n}} = 2^{2^{B_n+1}} \qquad C_{n+1} = 2^{2^{2^{2^{C_n}}}}$$

اکنون اگر دقت کنید $2A_n > 2B_n \geq B_n + 1$ در نتیجه $2^{2^{2A_n}} > 2^{2^{B_n+1}}$ یا معادلا : $A_{n+1} > B_{n+1}$.

اکنون می خواهیم C_{n+1}, A_{n+1} را با هم مقایسه کنیم. ثابت می کنیم که : $2^{2^{C_n}} > 2A_n$ و از آن حکم را نتیجه می گیریم. توجه کنید که اگر u عددی طبیعی باشد $2^{2^u} > 2u$ صحیح است. در نتیجه :

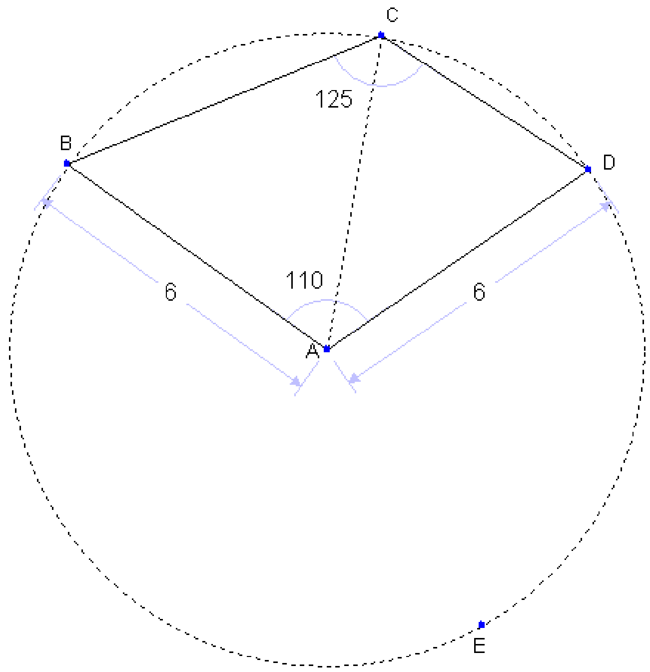
$$2^{2^{C_n}} > 2C_n > 2A_n \Rightarrow 2^{2^{2^{2^{C_n}}}} > 2^{2^{2A_n}}$$

که از آن نتیجه می شود : $C_{n+1} > A_{n+1}$.

در نتیجه چیزی که می خواستیم ثابت کنیم باستقرا ثابت شد. پس برای $n = 500$ داریم :

$C > A > B$ و در نتیجه گزینه (ج) صحیح است.

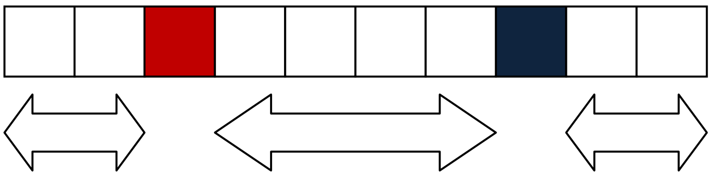
۲۸. گزینه (ج) صحیح است.



دایره به مرکز A و شعاع ۶ را اضافه می کنیم. (مطابق شکل) واضح است که B و D روی این دایره قرار دارند.نشان می دهیم که C هم روی این دایره قرار دارد. داریم که کمان BED برابر $۳۶۰\square - ۱۱۰\square = ۲۵۰\square$ است و زاویه BCD هم برابر $\frac{۲۵۰\square}{۲} = ۱۲۵\square$ است.لذا BED کمان درخور زاویه BCD است و C روی دایره قرار دارد.پس $AC = ۶$.

۲۹- گزینه (ب) صحیح است.

در هر حرکت ما قطعه جورچین را در یکی از سه ناحیه چپ، وسط و راست قرار می دهیم.



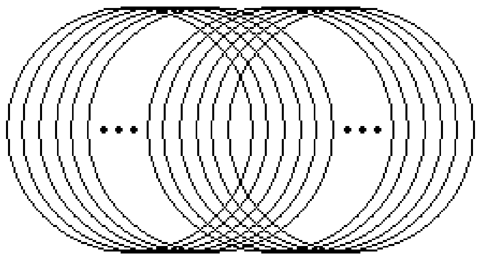
در اول تعداد روش های چیدن قطعات در ناحیه وسط را می شماریم. در ۳ مرحله ممکن است قطعات را از سمت چپ پیشروی دهیم یا از سمت راست(مثلا در مرحله اول ما می توانیم یک قطعه مجاور خانه قرمز قرار دهیم یا یک قطعه مجاور خانه آبی). قطعه آخر هم به صورت یکتا قرار خواهد گرفت. پس به ۸ طریق می توان ۴ خانه وسط را پر نمود. حال نوبت به چیدن قطعات ناحیه چپ است. در این جا دو قطعه باید قرار بگیرند که لزوما قطعه خانه ۲ زودتر از قطعه خانه ۱ پر می شود. در نتیجه برای ترکیب کردن چیدمان ناحیه چپ و وسط کافی است تعداد راه های قرار دادن دو حرکت بین ۴ حرکت خانه های وسط را شمارد. این هم بدین ترتیب است که ما می توانیم یکی از ۵ جایگاه ممکن برای قرار دادن این حرکات را به هر دو اختصاص دهیم یا دو محل مختلف اختصاص دهیم که در کل به ۱۵ طریق می توان حرکات ناحیه چپ را بین حرکات ناحیه وسط انجام داد. حال حرکات ناحیه راست را می خواهیم در بین ۶ حرکت نواحی چپ و وسط انجام دهیم. با استدلالی مشابه دو حرکت ناحیه راست

را به ۲۸ طریق می توان دو حرکت را جاسازی کرد($7 + \binom{7}{2}$). پس در کل به $8 \times 15 \times 28 = 3360$ طریق می توان جورچین را چید.

توجه کنید که در این سوال از تکنیک ادغام حرکات استفاده شده بود. یعنی ما حرکات لازم برای انجام کارهای مختلف را به طور مناسبی در هم می آمیزیم. به همین منظور مسئله را به سه حالت تقسیم کرده و سپس آن ها را در هم آمیختیم.

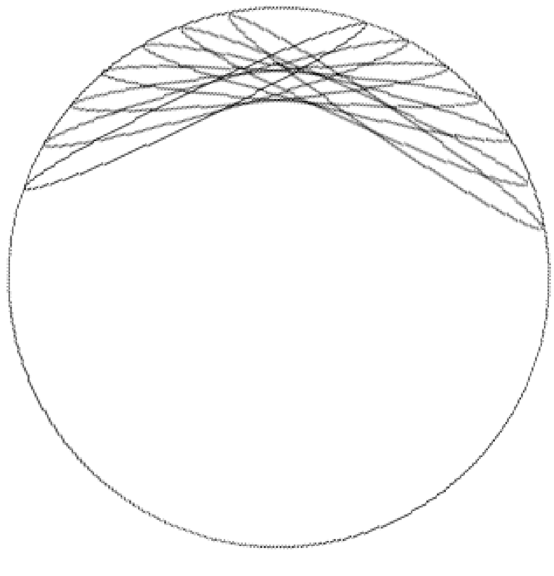
۳۰. گزینه (ه) صحیح است.

دقت کنید که اگر شرط هم صفحه بودن وجود نداشت می توانستیم بی نهایت دایره را با الگوی شکل زیر روی یک صفحه قرار دهیم:



حال مناسب است با همان الگوی بالا بی نهایت دایره را روی یک کره بچینیم. به وضوح هر سه شرط مساله را بر آورده

کرده ایم.



سال ۱۳۸۹

زمان: ۲۴۰ دقیقه

دفترچه کد ۱، سوالات جواب آخر

۱. کوچکترین عدد طبیعی که چهار مقسوم‌علیه اول دارد برابر است با ۲۱۰=۷×۵×۳×۲. بنابراین n×۱۱ باید کوچکتر از ۲۱۰ باشد که نتیجه می‌دهد n باید کمتر از ۲۰ باشد. پس **پاسخ ۱۹** است.

۲. در هر کشتی یک نفر می‌بازد؛ پس تعداد باخت‌ها برابر تعداد مبارزه‌ها است. ابتدا نشان می‌دهیم تعداد کشتی‌های برگزار شده(یا همان تعداد باخت‌ها) نمی‌تواند از ۱-۱۲×۵=۵۹ بیش‌تر باشد:

اگر بیش از ۵۹ کشتی برگزار شده باشد؛ بیش از ۵۹ باخت صورت گرفته (حداقل ۶۰تا). همچنین هیچ کشتی‌گیری نمی‌تواند بیش از ۵ باخت کسب کند (با باخت پنجم حذف شده و دیگر بازی نخواهد کرد) بنابراین همه کشتی‌–گیرها حداقل ۵ باخت خواهند داشت (۶۰>۴+۵×۱۱) که نتیجه می‌دهد همه آن‌ها از دور رقابت‌ها حذف شده‌اند ولی این نتیجه غیر ممکن است چون در بازی آخر ۲ نفر که حذف نشده‌اند با هم مسابقه می‌دهند و حداکثر یکی از آن‌ها حذف می‌شود(چون یکی می‌برد و به باخت‌هایش اضافه نمی‌شود). با توجه به به اینکه به تناقض رسیدیم (اینکه همه کشتی‌گیرها حذف می‌شوند) تعداد بازی ها نمی‌تواند از ۵۹ بیشتر باشد.

حال با ارائه یک مثال نشان می‌دهیم ممکن است ۵۹ بازی برگزار شود: برای۵۹ بازی مثالی هم وجود دارد: ابتدا در ۴ بازی کشتی‌گیر ۱۲ از ۱۱ می‌بازد و سپس کشتی‌گیر ۱۲ با هر کشتی‌گیر دیگری (۱,۲,۳,...,۱۱) ۵ بار بازی کرده و همه را می‌برد. در انتها همه کشتی‌گیرها غیر از شماره ۱۲ حذف شده‌اند و ۵×۱۱+۴=۵۹ بازی انجام شده است.

پس **پاسخ ۵۹** است.

۳. فرض کنید افراد را بر اساس نمره به صورت نزولی مرتب کرده‌ایم. داریم:

(مجموع کل نمره‌ها) = (میانگین)×(تعداد) = ۱۹۸

(نمره‌ی نفر آخر) = (مجموع کل نمره‌ها) - (مجموع نمرات ۱۰ نفر اول)

با توجه به رابطه بالا هرچه مجموع نمرات ۱۰ نفر اول بیشتر باشد نمره نفر آخر کمتر می‌شود. پس اگر بخواهیم نمره‌ی نفر اول کمینه باشد، باید مجموع نمرات بقیه بیشینه باشد. مجموع نمرات ۵ نفر اول حداکثر ۱۰۰ است و در حالتی به دست می‌آیدکه نمره‌ی همه‌ی آن‌ها ۲۰ باشد. نمره‌ی ۵ نفر بعدی بایدکمترمساوی ۱۹ باشد (زیرا نمره‌ی نفر ۶ ام ۱۹ است) پس مجموع نمرات آن‌هاحداکثر ۹۵ است و در حالتی به دست می‌آیدکه نمره‌ی همه‌شان ۱۹ باشد. بنابراین مجموع نمرات ۱۰ نفر اول حداکثر ۱۹۵ است که با این فرض، نمره‌ی نفر آخر ۳ خواهد بود و این مقدار، حداقل نمره نفر آخر می‌باشد. **پاسخ ۳** است.

۴. دنباله‌ی متناظر با تغییرات قیمت به صورت ...,۱-,۱-,۱-,۱+,۱+,۱- است. بعد از گذشت یک روز تغییر قیمت سهام برابر ۱- ریال خواهد بود، بعد از ۲+۱ روز قیمت سهام ۲+۱- نسبت به روز اول تغییر کرده و... و بعد از n+...+۳+۲+۱ روز n±...+۳-۲+۱- ریال قیمت سهام تغییر می‌کند. توجه کنید که بعد از روزهای$\frac{n(n+1)}{۲}$,...,۱,۳,۶ علامت یک‌های دنباله‌ی تغییرات عوض می‌شود.

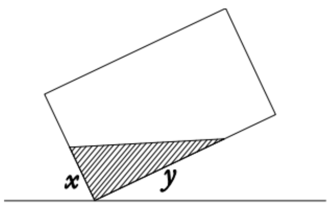
برای این که بفهمیم در روز ۳۶۵اُم در چه وضعیتی هستیم، معادله‌ی۳۶۵ > $\frac{n(n+1)}{۲}$را حل کرده و به این نتیجه می‌رسیم که ۲۷ > n. طبق گفته‌های بالا تا روز۳۵۱ (= $\frac{۲۷*۲۶}{۲}$) اُم قیمت سهام ۲۶+...۳-۲+۱- ریال تغییر می‌کند، یعنی ۱۳+ ریال. بعد از آن تا روز ۳۶۵اُم هر روز یک ریال قیمت کاهش می‌یابر ک تعداد این روزها ۱۴=۳۵۱-۳۶۵ است. نهایتا بعد از گذشت ۳۶۵ روز قیمت هر سهم برابر ۹۹۹=۱۴-۱۳+۱۰۰۰ می‌شود. **پاسخ ۹۹۹** است.

۵. ضرب ریشه‌های عبارت $x^2 + ax +$ ۱۳۸۹ برابر ۱۳۸۹ است. تجزیه ۱۳۸۹ به عوامل اول به صورت ۱۳۸۹=۳×۴۶۳ است بنابر این ۱۳۸۹ را به ۴ طریق می توان به صورت ضرب دو عدد صحیح نوشت (۱۳۸۹و۱، ۱۳۸۹-و۱-، ۴۶۳و۳، ۴۶۳-و۳-). که در هر حالت a به طور یکتا (منفیِ جمع دو ریشه) تعیین می‌شود و ۴ مقدار متفاوت برای a بدست می‌آید. پس **پاسخ ۴** است.

۶. راه حل اول: کوچکترین مضرب مشترک اعداد ۲ تا ۶، ۶۰ است پس عددی که ریشه ۲ تا ۶اُم آنصحیح است بایدریشه‌ی ۶۰اُمش هم صحیح باشد. کوچک‌ترین عدد با این ویژگی $۲^{۶۰}$ است که ۶۰+۱=۶۱ مقسوم‌علیه دارد. پس **پاسخ ۶۱** است.

راه حل دوم: اگر تجزیه به عوامل اول عددی به صورت $a = p_۱^{\propto_۱} \dots p_n^{\propto_n}$ باشد ریشه kاُم آن برابر $p_۱^{\propto_۱ \div k} \dots p_n^{\propto_n \div k}$ خواهد بود؛ پس برای طبیعی بودن ریشه kاُم a باید $\propto_i$ها بر k بخشپذیر باشند؛ در این سوال نماها باید بر کوچکترین مضرب مشترک ۲ تا ۶ یعنی ۶۰ بخشپذیر باشند؛ کوچکترین عدد طبیعی با این ویژگی $۲^{۶۰}$ بوده و ۶۱ مقسوم‌علیه دارد. **پاسخ ۶۱** است.

۷. اگر فرض کنیم آب درون محفظه به صورت روبه رو درآمده باشد رابطه‌های زیر را داریم:



حجم آب: $\frac{۱}{۲}(x \times y) \times ۲ = x.y = ۰.۸\ m^۳$

سطح تماس: $2x + 2y + 2 \times \left(\frac{1}{2}x.y\right) = 2(x+y) + 0.8$

برای مینیمم شدن سطح تماس آب با محفظه طبق روابط بالا باید $x + y$ مینیمم شود. طبق نامساوی حسابی-هندسی داریم $x + y \geq 2\sqrt{xy}$ ، درحالی در این مسئله xy ثابت(۰.۸) است. تساوی نامساوی حسابی-هندسی با فرض ثابت بودن حاصل ضرب xy وقتی حاصل می‌شود که x و y برابر باشند پس در صورت برابر بودن x و y مجموع‌شان مینیمم می‌شود و درنتیجه سطح تماس آب و محفظه مینیمم می‌شود. بنابراین زاویه سطح محفظه با افق برابر ۴۵ درجه خواهد بود لذا **پاسخ ۴۵** است.

۸. توجه کنید که کسر داده شده برابر $\binom{۲n}{n}$ است لذا همواره حاصل آن عددی طبیعی خواهد بود. ابتدا نشان می‌دهیم درصورتیکه $۲n < ۱۷^۲$ جواب موجود نمی‌باشد:

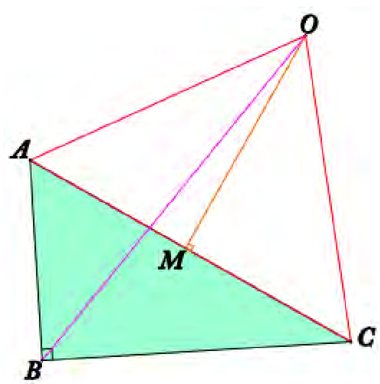
اگر $۲n < ۱۷^۲$ هر مضرب ۱۷ در تجزیه به عوامل اول دقیقا ۱ عامل ۱۷ دارد. اگر $n = ۱۷k + r$ ($۰ \leq r < ۱۷$) مخرج کسر k عامل ۱۷ خواهد داشت، همچنین خواهیم داشت:

$$۲n = ۱۷(2k) + ۲r \leq ۱۷\left(۲k\right) + ۳۲ \leq ۱۷\left(۲k + ۱\right) + ۱۵$$

پس در صورت کسر حداکثر $k + ۱$ مضرب ۱۷ خواهیم داشت و درنتیجه صورت حداکثر $k + ۱$ عامل ۱۷ خواهد داشت ولی برای اینکه کسر داده شده بر $۱۷^۲$ بخشپذیر باشد باید تعداد مضارب ۱۷ در صورت حداقل ۲تا از تعداد مضارب ۱۷ در مخرج بیشتر باشد پس ۲۸۹درصورتیکه $۲n < ۱۷^۲$ خواسته سوال ممکن نخواهد بود.

تا اینجا ثابت کردیم $۲n \geq ۱۷^۲ = ۲۸۹$. کوچکترین عدد طبیعی n که این شرط را دارد ۱۴۵ است که با آزمایش کردن آن ($n = ۱۴۵$) مشاهده می‌کنیم کسر داده شده بر $۱۷^۲$ بخشپذیر است؛ پس **پاسخ ۱۴۵** است.

۹. با توجه به برقراری قضیه فیثاغورس برای فواصل رادارها، سه رادار، مثلثی قائم‌الزاویه تشکیل می‌دهند (A، B و C). با توجه به برابر بودن فاصله هواپیما(نقطه O) از دو راس هر ضلع مثلث، این نقطه روی صفحات عمودمنصف ضلع‌ها قرار گرفته. اشتراک این سه صفحه خطی عمود بر صفحه مثلث(زمین) در وسط وتر مثلث قائم‌الزاویه(نقطه M) می‌باشد؛ پس O روی آن خط قرار دارد و شرط دیگر این است که فاصله آن از رئوس مثلث ۱۳ کیلومتر است. با استفاده از قضیه فیثاغورس در مثلث OMA طول ضلع OM که همان ارتفاع هواپیما از زمین است بدست می‌آید: $\sqrt{۱۳^۲ - ۵^۲} = ۱۲$. **پاسخ ۱۲** است.



۱۰. خطوط مطلوب را به ۲ گروه تقسیم می‌کنیم:

گروه اول: خطوط موازی دو وجه مقابل از مکعب که با توجه به تقارن ۴جانبه مکعب، یک دسته از ۴ دسته آن‌ها را مشخص می‌کنیم: (شماره مکعب‌های ۱×۱ مربوط به خطوط آورده شده)

۱-۱۳ ۲-۱۴ ۳-۱۵ ۴-۱۶ ۵-۱۷ ۶-۱۸ ۱۰-۲۲ ۱۱-۲۳ ۱۲-۲۴

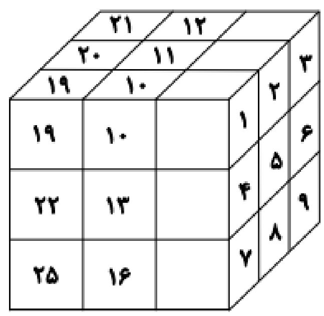
پس گروه اول ۹×۴=۳۶ خط دارد.

گروه دوم: خطوط موازی قطر اصلی مکعب. این گروه نیز با توجه به تقارن به ۴ دسته متناظر و هم‌اندازه تقسیم می‌شود که یک دسته را آورده‌ایم:

۱۴-۱ ۱۵-۲ ۱۷-۴ ۱۸-۵ ۲۳-۱۰ ۲۴-۱۱ ۲۶-۱۳

این گروه از ۷×۴=۲۸ خط تشکیل شده.

در مجموع ۲۸+۳۶ = ۶۴ خط قابل قبول وجود دارد. <u>**پاسخ ۶۴**</u> است.



دفترچه کد ۱، سوالات تستی

۱. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

چون C' دوران ۶۰ درجه C است، مثلث ACC' متساوی‌الاضلاع است. در نتیجه نسبت خواسته شده در سوال برابر ۱ است.

۲. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

با فرض طبیعی بودن کسر $\frac{۵۹۶+k}{۷۰۰-k}$، باید $۷۰۰-k|۵۹۶+k$.

از طرف دیگر $۷۰۰-k|۷۰۰-k$.

با جمع این دو رابطه خواهی داشت: $۷۰۰-k|۱۲۹۶$ پس $۷۰۰-k$ باید مقسوم‌علیه ۱۲۹۶ باشد و هر مقسوم‌علیه‌های ۱۲۹۶ که کوچکتر از ۷۰۰ باشد یک جواب قابل قبول خواهد بود. $۱۲۹۶ = ۲^۴ \times ۳^۴$، بنابراین ۲۵مقسوم‌علیه دارد که همه آن‌ها غیر از خود ۱۲۹۶ از ۷۰۰ کوچکترند و به ازای هرکدام یک جواب داریم. پس به ازای ۲۴ مقدار طبیعی برای k کسر مورد نظر طبیعی خواهد بود.

۳. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

راه حل اول: برای دستگاه مختصات، جهت افقی(راست) را محور xها و جهت عمودی(بالا) را محور yها و مبدا مختصات را منزل آقای فراموش‌کار در نظر می‌گیریم. محل وی را با (a,b) نشان می‌دهیم. با گذشت هر ساعت مقدار یکی از a یا b یک واحد تغییر می‌کند. با توجه به اینکه ۱۵ ساعت از آغاز حرکت گذشته باید داشته باشیم: $|a|+|b| \leq ۱۵$ و همچنین $|a|+|b|$ باید فرد باشد(چون با گذشت هر ساعت مقدار آن دقیقا ۱ واحد تغییر می‌کند)

پس مجموع ممکن ۱۶ است ۱، ۳، ۵،...، ۱۵ باشد. تعداد مختصات‌های ممکن با این ویژگی‌ها عبارت است از:

۴×(۲+۴+...+۱۶)−۳۲ = ۲۵۶

(ضریب ۴ به خاطر ۴ ناحیه‌ی مختصات، اعداد داخل پرانتز تعداد راه‌های نوشتن ۱تا ۱۵ به صورت مجموع دو عدد صحیح نامنفی و ۳۲ تعدادنقاطروی محورها که دوبار شمرده شده‌اند)

۴. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

اگر تعداد شکلات‌ها حداقل ۶×۶=۳۶ تا باشد با قرار دادن ۶ شکلات در ۶ ردیف اول فرض سؤال نقض می‌شود. ادعا می کنیم ۳۵ شکلات هر طوری قرار بگیرند نمی‌توانند بیش‌تر خانه‌های بیش‌تر ردیف‌ها را پر کنند؛ در هر ردیفی که بیش‌تر خانه‌هایش پر شده،حداقل ۶ شکلات قرار دارد و حداقل ۶ ردیف باید این شرایط را داشته باشند پس برای پر کردن بیش‌تر خانه‌های بیش‌تر ردیف‌ها حداقل ۶×۶=۳۶ شکلات مورد نیاز است.

۵. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

با توجه به این که PE⊥AC و PD⊥AB و DE∥BC داریم: $\angle EDP = ۴۵°$و $\angle DEP = ۶۰°$ حال با توجه به قضیه سینوس‌ها در مثلث PDE داریم $\frac{PE}{PD} = \frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}$. و داریم : $PC = \frac{PE}{\sin(۳۰°)} = ۲PE$ و

$PB = \frac{PD}{\sin(۴۵°)} = \sqrt{۲}PD$. پس داریم: $\frac{PB}{PC} = \frac{\frac{PD}{\sin(۴۵°)}}{\frac{PE}{\sin(۳۰°)}} = \frac{PD}{PE} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$.

۶. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

داریم $q^{۳} = \overline{۰.abcabc\ldots}$ پس $۱۰۰۰q^{۳} = \overline{abc.abcabc\ldots}$ و با کم کردن این دو عبارت داریم:$999q^3 = \overline{abc}$. پس $q^{۳} = \frac{\overline{abc}}{۹۹۹}$. چون q گویاست؛ هم صورت و هم مخرج $q^{۳}$ وقتیکه تا حد امکان ساده شود باید مکعب کامل باشند. با توجه به اینکه $۹۹۹ = ۳^{۳} \times ۳۷$ صورت q حداقل یک عامل ۳۷ دارد لذا کوچکترین $q^{۳}$ ممکن $\frac{۱}{۲۷}$ بوده که کوچکترین q را نتیجه می‌دهد. پس $q^{۳} = \frac{۱}{۲۷} = \frac{۳۷}{۹۹۹}$.

نتیجه می‌شود $\overline{abc} = ۳۷$ و $a + b + c = ۱۰$.

۷. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

در ابتدا مجموع مختصات برابر ۱ است و بعد از طی کردن یک چهارم مسیر به مقدار ۱- می‌رسد و بعد از پیمودن یک چهارم دیگر این مقدار دوباره ۱- می‌شود در بعد از پیمودن یک چهارم آخر این مقدار ۱ می‌شود و سپس این مسیر دوباره تکرار می‌شود که در بین گزینه‌ها فقط گزینه‌ی (ه) این خاصیت را دارد.

۸. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

چون b بین ۰و۱ است b^{1389}عددی بسیار کوچک است و با تقریب خوبی می‌توان از آن صرف نظر کرد و در نتیجه می‌توان صورت مسئله را به صورت روبه‌رو ساده کرد:$a^2 \geq Mab \rightarrow a \geq Mb \rightarrow M \leq \frac{a}{b}$. حال a را می‌توان بسیار کوچک در نظر گرفتدر این صورت M به صفر میل می‌کند. در واقع برای هر Mبزرگ‌تر از صفر a,b ای می‌توان ارائه داد که نامساوی غلط باشد.به این صورت کهb طوری انتخاب می‌کنیم که b^{1389}از Mabکم‌تر باشد و سپس a را آنقدر کوچک می‌گیریم کهa^2 را اگر به b^{1389}اضافه کنیم به Mab نرسد.

۹. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

تعداد راه‌های مطالعه‌ی این کتاب‌ها برابر تعداد راه‌های نوشتن کلمه‌ای هشت حرفی با a,b,c,d است بطوریکه از هر حرف دقیقا دو بار استفاده شود. این عدد برابر $\frac{۸!}{۲!\times۲!\times۲!\times۲!} = ۲۵۲۰$ است. (بدون هیچ محدودیت ترتیبی !۸ روش داریم؛ به محدودیت ترتیبی هر دو کتاب روش‌ها نصف می‌شوند چون دقیقا در نصف راه‌ها یک کتاب زودتر از دیگری آمده)

۱۰. گزینه‌ی (د) صحیح است.

این معادله نمی‌تواند دو ریشه در بازه‌ی $\left[۰,۱\right]$ داشته باشد زیرا در غیر این صورت ضرب دو ریشه که مقدار آن برابر b خواهد بود کمتر از ۱ می‌شود که متناقض با طبیعی بودن b است. پس این معادله حداکثر یک ریشه در این بازه دارد. و این هم وقتی رخ می‌دهد که مقدار تابع $x^{۲} - ax + b$ در نقطه صفر و نقطه ۱ مختلف‌العلامت باشد (یا یکی صفر باشد). مقدار تابع در نقطه‌ی صفر برابر b و مقدار تابع در نقطه‌ی ۱ برابر $۱ - a + b$ است. حال برای bها از ۱ تا ۱۰ مقدار b مثبت است. پس باید مقدار $۱ - a + b$ نامثبت باشد. برای $b = ۱$، a ۹ حالت، برای $b = ۲$، a ۸ حالت و....برای $b = ۹$، a ۱ حالت دارد. پس در کل تعداد زوج مرتب‌ها برابر ۴۵=۹+...+۳+۲+۱ است.

۱۱. گزینه‌ی (د) صحیح است.

تا وقتیکه عدد زوج است بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه آن نصف آن است و نتیجه‌ی عملیات ما نصف کردن عدد مورد نظر است پس در ۱۰ مرحله، عدد $۳^{۱۱} \times ۵^{۱۲}$ به دست می‌آید. حال بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه این عدد یک سوم آن است و نتیجه‌ی عملیات ما دو سوم کردن عدد مورد نظر است. حال عدد زوج شده وانجام عملیات به معنای نصف کردن آن است. پس اگر عدد بر ۳ بخش پذیر باشد بعد از دو مرحله یک سوم می شود؛ در نتیجه بعد از ۲×۱۱=۲۲ مرحله به $۵^{۱۲}$ می‌رسیم. حال بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه این عدد $\frac{۱}{۵}$ آن است و نتیجه‌ی عملیات ما چهار پنجم کردن عدد است. حال عدد بر ۴ بخش پذیر شده و طی دو مرحله‌ی بعدی دو بار بر ۲ تقسیم می شود. پس اگر عدد بر ۵ بخش پذیر باشد بعد از ۳ مرحله تقسیم بر ۵ می‌شود؛ لذا بعد از ۳×۱۲=۳۶ مرحله به ۱ می‌رسیم. پس در کل ۲۲+۳۶+۱۰=۶۸ مرحله انجام می‌شود.

۱۲. گزینه‌ی (د) صحیح است.

برای اینکه دو ساعت خراب هرکدام ۶ ساعت جلو بیفتند باید رابطه‌های زیر بر قرار باشد:

$$7K \equiv 6 \times 60 \ (mod\ 12 \times 60) \qquad , \qquad 11K \equiv 6 \times 60 \ (mod\ 12 \times 60)$$

ضرب در ۶۰ شدن پیمانه‌ها و اعداد به منظور هم واحد شدن طرفین است(همه به دقیقه).که از این رابطه‌ها به دست می‌آید $K \equiv 360 \ (mod\ 720)$ که نتیجه می‌دهد کوچک‌ترین K ممکن برابر ۳۶۰ است.

۱۳. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

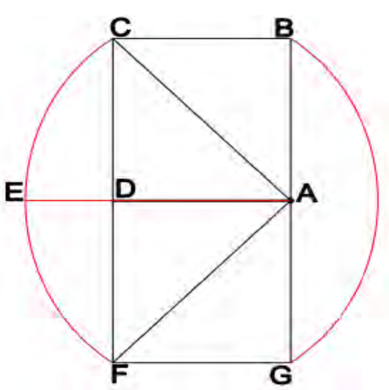
راه حل اول: اگر هر عدد را عددی سه رقمی تصور کنیم (با گذاشتن صفر به اندازه‌ی نیاز در اولش)از هر یک از ارقام ۳۰۰ بار آمده است می‌توان دید $۳۰۰ \times (۰ \times (۰ + ۱ + \cdots + ۹) + ۱ \times (۰ + ۱ + \cdots + ۹) +$ ، $۹ \times (۰ + ۱ + \cdots ۹)) = ۶۰۷۵۰۰$ ۱۰ برابر مجموع مورد نظر ماست(هرجمله از جواب ده بار در این مجموع آمده است) پس حاصل ۶۰۷۵۰ خواهد بود.

راه حل دوم: مجموعه اعداد ۹۹۹،...،۰ مجموعه اعدادی است که از نوشتن ۳ رقم از ارقام ۹،...،۰ کنار هم حاصل می‌شوند. اگر تعریف کنیم $f_۱(\overline{abc}) = ab$ و $f_۲(\overline{abc}) = bc$ و $f_۳(\overline{abc}) = ca$ تابع مورد نظر سوال حاصل جمع این سه تابع است و می‌توانیم حاصل جمع این توابع را روی مجموعه اعداد داده شده جداگانه حساب کنیم. با توجه به تقارن مجموعه اعداد ۹۹۹،...،۰ نسبت به ۳ رقم(یکان، دهگان و صدگان)، محاسبه یک مجموع و ۳ برابر کردن آن کافیست (مثلا فقط برای $f_۱$):

$$\text{جواب} = ۳ \times \sum_{i=۰}^{۹} \sum_{j=۰}^{۹} i \times j \times ۱۰$$

$$= ۳۰ \times \sum_{i=۰}^{۹} (i \times \sum_{j=۰}^{۹} j) = ۳۰ \times \sum_{i=۰}^{۹} i \times \sum_{j=۰}^{۹} j = ۳۰ \times ۴۵ \times ۴۵ = ۶۰۷۵۰$$

۱۴. گزینه‌ی (ج) صحیح است.



اگر کاغذ را چنان تا کنیم که امتداد قطر CA بر روی امتداد ضلعDA قرار گیرد آن‌گاه نقطه C بر E منطبق خواهد شد. بنابراین اگر به مرکز A کاغذ رابچرخانیم،ربع دایره ای به مرکزA و به شعاع ACو اگر به مرکز Dبچرخانیم ربع دایره‌ای به مرکز D و شعاع DB رنگ خواهد شد. تمام نقاط داخل مستطیل CBGF نیز بدون نیاز به تا کردن رنگ می‌شوند پس:

$$\text{پاسخ} = ۲\left(\frac{}{۴}\pi(\sqrt{۲} \times ۲۰)^۲ - ۲۰^۲\right) + ۲۰ \times ۴۰ = ۴۰۰\pi$$

۱۵. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

داریم: $\angle HDB = \angle C$. همچنین داریم: $\angle AEB = \angle C$. زاویه‌ی $\angle DBH$ برابر $۹۰ - \angle C$ است.اگر AH را امتداد داده تا دایره‌ی محیطی مثلث را در A' قطع کند،می‌دانیم که A'قرینه‌ی H نسبت به BC است. در نتیجه$\angle HA'D = \angle DHA' = ۹۰ - \angle C$:

در این صورت $\angle ABE = \angle AA'E = \frac{\widehat{AE}}{۲}$.پس دو مثلث HBD و ABE با یکدیگر متشابه اند. در نتیجه داریم:

$$\frac{BH}{AB} = \frac{DH}{AE} \rightarrow \frac{۳}{۸۹} = \frac{۱}{AE} \rightarrow AE = \frac{۸۹}{۳}$$

سال ۱۳۹۰

زمان: ۱۸۰ دقیقه

سؤالات کوتاه‌پاسخ بر اساس کد یک.

۱. تجزیه‌ی ۲۰۱۲ به عوامل اول به صورت $۲۰۱۲ = ۲^۲ \times ۵۰۳$ است که چون $ac = ۲۰۱۲$ پس باید دقیقاً یکی از a و c بر ۵۰۳ بخش‌پذیر باشد. حالت $۵۰۳\Big|c$ با توجه به این که $c\Big|[b,c] = ۱۳۹۰$ و این که ۱۳۹۰ بر ۵۰۳ بخش‌پذیر نیست امکان ندارد. پس $۵۰۳\Big|a$ و لذا حالت‌های زیر را داریم.

الف. $a = ۵۰۳$ و $c = ۴$. از آن‌جا که $[b,c] = ۱۳۹۰$ بر $c = ۴$ بخش‌پذیر نیست امکان ندارد.

ب. $a = ۱۰۰۶$ و $c = ۲$. از آن‌جا که $[b,c] = ۱۳۹۰$، مقدار b برابر ۶۹۵ و یا ۱۳۹۰ است که چون a و b طبق فرض مسئله عامل مشترک ندارند تنها حالت $b = ۶۹۵$ قابل قبول است که در این حالت $a + b + c = ۱۷۰۳$.

پ. $a = ۲۰۱۲$ و $c = ۱$. از آن‌جا که $[b,c] = ۱۳۹۰$، b باید برابر ۱۳۹۰ باشد که با $(a,b) = ۱$ تناقض دارد.

بنابراین پاسخ مسئله ۱۷۰۳ است.

۲. در سفر اول مجبوریم به شکرستان برویم. در ۱۱ سفر بعدی، در سفرهای فرد به یکی از توابع شکرستان می‌رویم و در سفرهای زوج به شکرستان بازمی‌گردیم. پس تنها سفرهای فرد که شش‌تا هستند را بررسی می‌کنیم. می‌دانیم که دقیقاً یکی از این سفرها به سماقستان است. برای انتخاب این سفر از بین ۶ سفر ۶ حالت داریم. برای مقصد هر کدام از ۵ سفر دیگر هم ۲ گزینه‌ی نمکستان و فلفلستان وجود دارد. پس طبق اصل ضرب پاسخ مسئله $۶ \times ۲^۵ = ۱۹۲$ است.

۳. بیش‌ترین مقدار ممکن برای $۳ab + ۴bc$ برابر ۹۰۰ است. برای اثبات این حکم ابتدا یک لم را بیان و اثبات می‌کنیم.

لم. برای هر دو عدد حقیقی x و y، $۴xy \leq (x+y)^۲$.

اثبات. $(x+y)^۲ - ۴xy = (x-y)^۲ \geq ۰$.

$$۳ab + ۴bc = ۴(a+c)b - ab \leq ۴(a+c)b \leq ((a+b)+c)^۲ = ۹۰۰$$

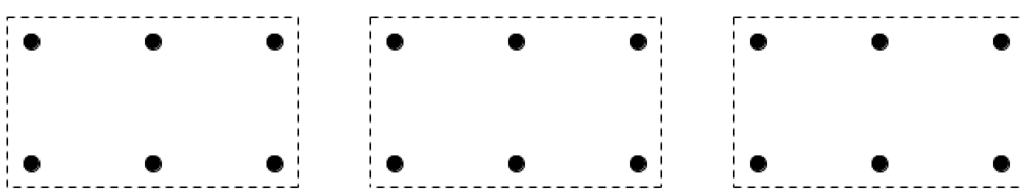
و تساوی زمانی است که $ab = ۰$ و $a + c = b = ۱۵$ و لذا $a = ۰$ و $b = c = ۱۵$.

۴. دقت کنید که اگر در چنین عبارتی مجموع اعدادی که علامت آن‌ها منفی است برابر S باشد، عدد حاصل برابر $۲۸ - ۲S$ خواهد بود.($۱ + ۲ + \cdots + ۷ = ۲۸$)

به علاوه دقت کنید اگر با یک ترکیب از مثبت و منفی‌ها به عددی مثبت برسیم، اگر به جای مثبت‌ها منفی و به جای منفی‌ها مثبت قرار دهیم به عددی منفی می‌رسیم و بالعکس. پس تعداد حالت‌هایی که به مثبت می‌رسیم دقیقاً برابر تعداد حالت‌هایی است که به منفی می‌رسیم. با این توضیحات باید تعداد حالت‌هایی را پیدا کنیم که به حاصل صفر می‌رسیم.

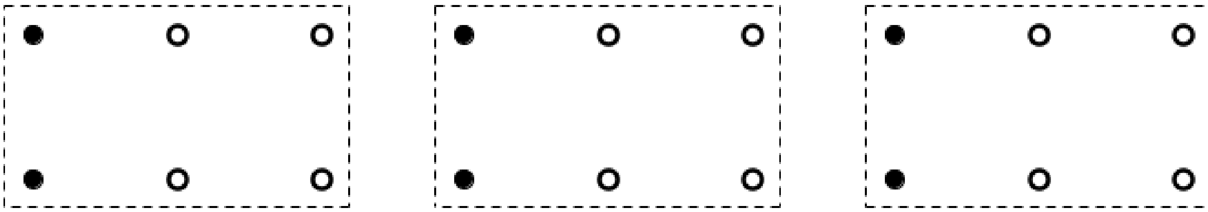
طبق توضیحات ابتدایی برای این که عدد حاصل برابر صفر شود باید مجموع اعدادی که علامت آن‌ها منفی است برابر ۱۴ باشد. پس باید تعداد حالت‌های انتخاب چنین اعدادی را بشماریم. حال اگر بزرگ‌ترین عدد انتخاب شده ۷ باشد، باید مجموع اعداد دیگر برابر ۷ شود که حالت‌های ممکن $\{۱,۶\}$، $\{۲,۵\}$، $\{۳,۴\}$ و $\{۱,۲,۴\}$ است. اگر بزرگ‌ترین عدد انتخاب شده ۶ باشد، باید مجموع اعداد دیگر ۸ شود که حالت‌های ممکن $\{۵,۳\}$، $\{۱,۲,۵\}$ و $\{۱,۳,۴\}$ هستند و اگر بزرگ‌ترین عدد انتخاب‌شده ۵ باشد، باید مجموع اعداد دیگر ۹ شود که فقط حالت $\{۲,۳,۴\}$ این طور است. بنابراین در هشت حالت به حاصل صفر می‌رسیم و در غیر از این هشت حالت در نیمی از حالات به مثبت و در نیم دیگر به منفی می‌رسیم و چون تعداد کل علامت‌گذاری‌های ممکن $۲^۷$تا است، تعداد حالت‌های منجر به عدد مثبت $\frac{۲^۷-۸}{۲} = ۶۰$ است.

۵. چراغ‌ها را مطابق شکل زیر به سه دسته تقسیم می‌کنیم.

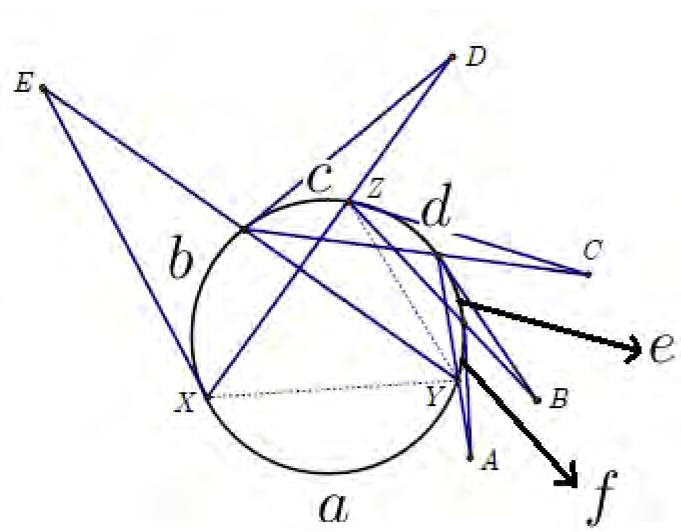


اگر در یک دسته بیش‌تر از ۴ چراغ خاموش باشد، پس یکی از دو چراغ وسطی این آن دسته خاموش است. توجه کنید از آن‌جا که این چراغ از پنج چراغ دیگرِ هم‌دسته‌اش فاصله‌ای کم‌تر از ۶۰ متر دارد، با این فرض که در هم‌سایگیِ ۶۰متریِ هر چراغ خاموش حداکثر سه چراغ خاموش دیگر قرار دارد تناقض دارد. پس در

هر دسته حداکثر چهار چراغ خاموش داریم و بنابراین در کل حداکثر ۱۲ چراغ می‌تواند خاموش باشد. شکل زیر مثالی برای ۱۲ چراغ را نمایش می‌دهد. (دایره‌های توخالی چراغ‌های خاموش هستند.)



۶. مانند شکل روبه‌رو کمان‌های را نام‌گذاری می‌کنیم. در این صورت معلومات سؤال معادل این خواهد بود که



$$e - f = ۸^\circ, d - e = ۱۴^\circ,$$
$$c - d = ۲۰^\circ, b - c = ۲۶^\circ,$$
$$a - b = ۳۲^\circ$$

هم‌چنین می‌دانیم $a + b + c + d + e + f = ۳۶۰^\circ$.حال همه‌ی زاویه‌ها را برحسب f می‌نویسیم و در رابطه‌ی بالا قرار می‌دهیم.

$$f + \overbrace{(f + ۸^\circ)}^{e} + \overbrace{(f + ۸^\circ + ۱۴^\circ)}^{d} + \overbrace{(f + ۸^\circ + ۱۴^\circ + ۲۰^\circ)}^{c} +$$
$$\overbrace{(f + ۸^\circ + ۱۴^\circ + ۲۰^\circ + ۲۶^\circ)}^{b} + \overbrace{(f + ۸^\circ + ۱۴^\circ + ۲۰^\circ + ۲۶^\circ + ۳۲^\circ)}^{a} = ۳۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow ۶f + ۲۴۰^\circ = ۳۶۰^\circ \Rightarrow f = ۲۰^\circ \Rightarrow c = ۶۲^\circ, b = ۸۸^\circ$$
$$\Rightarrow \angle XYZ = \frac{b + c}{۲} = \frac{۶۲^\circ + ۸۸^\circ}{۲} = ۷۵^\circ$$

۷. توجه کنید که اگر تجزیه‌ی عدد طبیعی n به صورت حاصل‌ضرب اعداد اول به شکل $p_{۱}^{\alpha_{۱}}p_{۲}^{\alpha_{۲}}\cdots p_{k}^{\alpha_{k}}$ باشد، تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت آن که با نماد $\mathrm{d}(n)$ نمایش می‌دهیم برابر $(\alpha_{۱}+۱)(\alpha_{۲}+۱)\cdots(\alpha_{k}+۱)$ خواهد بود.

طبق فرض‌های صورت سؤال در مورد تعداد مقسوم‌علیه‌های این اعداد، a باید به شکل $p^{۲}$ و b باید به شکل $q^{۳}$ و یا rs باشد که p، q، r و s اعداد اول هستند و $r \neq s$. بنابراین ab باید به شکل $q^{۳}p^{۲}$ و یا $rsp^{۲}$ باشد. حال حالت‌های زیر متصور هستند.

الف. $ab = q^{۳}p^{۲}$. اگر $p = q$، $\mathrm{d}(ab) = ۶$ و اگر $p \neq q$، $d(ab) = ۱۲$ که هیچ‌کدام قابل قبول نیستند.

ب. $ab = rsp^{۲}$. اگر r، s و p سه عدد اول متمایز باشند، $\mathrm{d}(ab) = ۱۲$ که باز هم قابل‌قبول نیست. بنابراین p با یکی از r و s برابر است که می‌توان فرض کرد $p = r$. در این صورت $ab = sp^{۳}$ و لذا $\mathrm{d}(ab) = ۸$ که حالت مورد قبول است.

بنابراین b به شکل ps است و لذا $b^{۲} = p^{۲}s^{۲}$ و این نتیجه می‌دهد که تعداد مقسوم‌علیه‌های $b^{۲}$ برابر ۹ است.

۸. برای انتخاب خانه‌ای از سطر اول که مهره در آن قرار می‌گیرد ۴ حالت داریم. با انتخاب مهره‌ی سطر اول در یکی از خانه‌های سطر دوم نمی‌توان مهره قرار داد، پس برای انتخاب خانه‌ای که مهره‌ی سطر دوم در آن قرار می‌گیرد ۳ حالت داریم. به همین ترتیب برای انتخاب خانه‌هایی از سطر سوم و چهارم که مهره در آن‌ها قرار می‌گیرد به ترتیب ۲ و۱ حالت داریم. پس پاسخ مسئله برابر است با $۲۴ = ۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴$.

۹. اگر پای عمود وارد از C بر ضلع AB را H بنامیم، مثلث AHC مثلثی قائم‌الزاویه‌ای با وتر به طول $۱۴\sqrt{۳}$ است که $\angle CAH = ۶۰^{\circ}$. پس

$$AH = AC.\cos(\angle CAH) = AC.\cos(۶۰^{\circ}) = ۱۴\sqrt{۳} \times \frac{۱}{۲} = ۷\sqrt{۳} = AB$$

و لذا B همان نقطه‌ی H است و این یعنی مثلث ABC خود قائم‌الزاویه است ($\angle B = ۹۰^{\circ}$) و طبق قضیه‌ی فیثاغورس $BC = \sqrt{۱۴^{۲} \times ۳ - ۷^{۲} \times ۳} = ۷\sqrt{۹} = ۲۱$.

حال طول YZ را برحسب BX محاسبه می‌کنیم. طبق قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث YZS داریم:

$$YZ^{۲} = ZS^{۲} + YS^{۲} = BX^{۲} + (YX - ZB)^{۲}$$

طبق قضیه‌ی تالس و از آن‌جا که $YX \parallel AB$، $\frac{YX}{AB} = \frac{CX}{BC}$ و لذا $YX = ۷\sqrt{۳}\,\frac{۲۱-BX}{۲۱} = \frac{۲۱-BX}{\sqrt{۳}}$.

از طرف دیگر با توجه به این که $\angle ZXB = ۳۰^{\circ}$ و $\frac{ZB}{BX} = \tan(\angle ZXB) = \tan(۳۰^{\circ}) = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$ به دست می‌آوریم که $ZB = \frac{BX}{\sqrt{۳}}$.

با جای‌گذاری دو رابطه‌ی اخیر در عبارت مربوط به YZ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
&YZ^{۲} = BX^{۲} + (\frac{۲۱ - ۲BX}{\sqrt{۳}})^{۲} \\
\Rightarrow\ & ۳YZ^{۲} = ۷BX^{۲} - ۸۴BX + ۴۴۱ = ۷(BX^{۲} - ۱۲BX + ۳۶) + ۱۸۹ \\
\Rightarrow\ & YZ^{۲} = \frac{۷}{۳}(BX - ۶)^{۲} + \frac{۱۸۹}{۳} \geq \frac{۱۸۹}{۳}
\end{aligned}$$

بنابراین کم‌ترین مقدار $YZ^{۲}$ برابر $\frac{۱۸۹}{۳}$ است و زمانی به این مقدار می‌رسیم که $BX = ۶$ باشد.

۱۰. اعدادی بر ۲ یا ۳ بخش‌پذیر هستند که باقی‌مانده‌ی تقسیم آن‌ها بر ۶، یکی از اعداد ۰، ۲، ۳ و ۴ باشد، معادلاً به فرم $۶k$، $۶k + ۲$، $۶k + ۳$ و یا $۶k + ۴$ باشد. بنابراین داریم

$$\begin{aligned}
P(x) &= \sum_{\substack{(n,۶)\neq ۱ \\ ۱\leq n\leq ۱۲۰}} x^{n} \\
&= \sum_{۱\leq ۶k\leq ۱۲۰} x^{۶k} + \sum_{۱\leq ۶k+۲\leq ۱۲۰} x^{۶k+۲} + \sum_{۱\leq ۶k+۳\leq ۱۲۰} x^{۶k+۳} + \sum_{۱\leq ۶k+۴\leq ۱۲۰} x^{۶k+۴} \\
&= \sum_{k=۰}^{۱۹} x^{۶k+۶} + \sum_{k=۰}^{۱۹} x^{۶k+۲} + \sum_{k=۰}^{۱۹} x^{۶k+۳} + \sum_{k=۰}^{۱۹} x^{۶k+۴} \\
&= (x^{۶} + x^{۲} + x^{۳} + x^{۴})(\sum_{k=۰}^{۱۹} x^{۶k}) \\
&= x^{۲}(۱ + x + x^{۲} + x^{۴})(۱ + x^{۶} + x^{۱۲} + \cdots + x^{۱۱۴})
\end{aligned}$$

حال دقت کنید که همه‌ی جملات عبارت $x^{۶} + x^{۱۲} + \cdots + x^{۱۱۴}$ نامنفی هستند و لذا

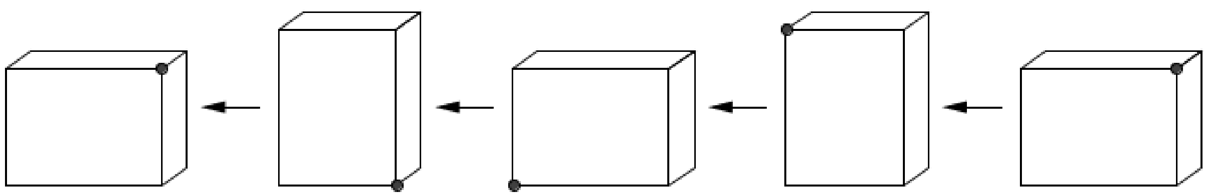
$$۱ + x^۶ + x^{۱۲} + \cdots + x^{۱۱۴} > ۰$$

و بنابراین این چندجمله‌ای ریشه‌ی حقیقی ندارد. از طرف دیگر $۱ + x + x^۲$ یک چندجمله‌ای درجه دوم است که همواره مقدار آن مثبت است و با توجه به نامنفی بودن $x^۴$، $۱ + x + x^۲ + x^۴$ هم همواره مثبت است و ریشه‌ی حقیقی ندارد. پس تنها ریشه‌ی چندجمله‌ای $P(x)$ همان صفر است.

سؤالات تستی بر اساس کد یک.

۱. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

جسم به شکل زیر روی زمین غلطیده:



(دقت کنید که نسبت عمق مکعب که برابر ۶ است به دلیل راحتی در رسم رعایت نشده است و ضمناً نقطه‌ی پررنگ در شکل‌های بالا محل نقطه‌ی A را در هر گام مشخص می‌کند.)

در هر مرحله مکعب مستطیل حول ضلع پایین سمت چپ چرخیده است. پس

در چرخش اول نقطه‌ی A، ربع دایره‌ای به شعاع ۵ را طی می‌کند. بنابراین مسافتی به طول $\frac{۵}{۲}\pi = \frac{۲\pi \times ۵}{۴}$ را طی کرده است.

در چرخش دوم نقطه‌ی A، ربع دایره‌ای به شعاع ۴ را طی می‌کند. بنابراین مسافتی به طول $۲\pi = \frac{۲\pi \times ۴}{۴}$ را طی کرده است.

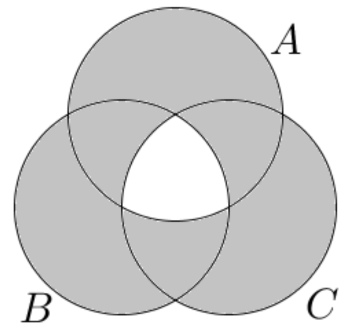
در چرخش سوم نقطه‌ی A، ثابت مانده و بنابراین مسافتی طی نکرده است.

در چرخش چهارم نقطه‌ی A، ربع دایره‌ای به شعاع ۳ را طی می‌کند. بنابراین مسافتی به طول $\frac{۳}{۲}\pi = \frac{۲\pi \times ۳}{۴}$ را طی کرده است.

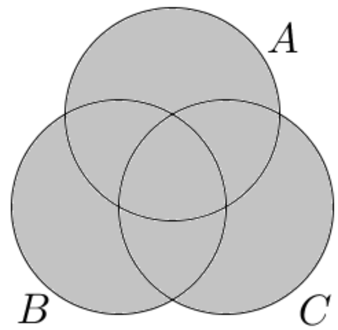
بنابراین در کل این نقطه مسافت $\frac{۵}{۲}\pi + ۲\pi + \frac{۳}{۲}\pi = ۶\pi$ را طی کرده است.

۲. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

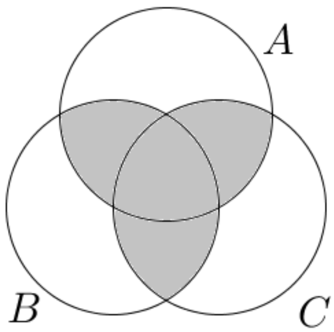
از نمودار ون برای حل این سؤال استفاده می‌کنیم.



گزینه‌ی الف



گزینه‌ی ب

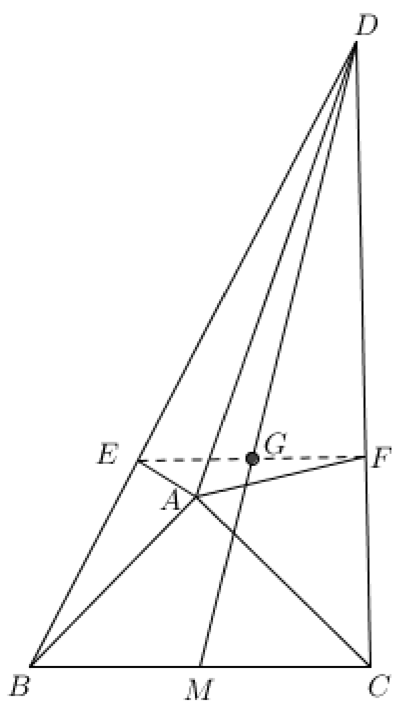


گزینه‌ی ج و د

۳. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

اگر حاصل‌ضرب اعداد دو دسته برابر A باشد، $۳۰! = ۱\times۲\times\times\cdots\times۳۰ = A^{۲}$. اما در $۳۰!$ تنها یک عامل ۲۳ وجود دارد، پس امکان ندارد که $۳۰!$ مربع کامل باشد. بنابراین چنین عملی ممکن نیست.

۴. گزینه‌ی (ج) صحیح است.



با توجه به این که پاره‌خط‌های AE و AF نیم‌ساز هستند، $\frac{DE}{EB} = \frac{AD}{AB} = \frac{AD}{AC} = \frac{DF}{FC}$ و بنا بر قضیه‌ی تالس $EF \parallel BC$. حال چون EF از مرکز ثقل مثلث BCD می‌گذرد نتیجه می‌گیریم $\frac{DE}{EB} = \frac{DG}{GM} = \frac{۲}{۱}$ (M وسط ضلع BC است.) و بنابراین $\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{EB} = ۲$. پس $AD = ۲AB = ۲۰$.

۵. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

ابتدا دقت کنید که

$$x^۴ - x^۲ - ۲x - ۱ = x^۴ - (x+۱)^۲ = (x^۲ - x - ۱)(x^۲ + x + ۱)$$

عبارت $x^۲ + x + ۱ = (x + \frac{۱}{۲})^۲ + \frac{۳}{۴}$ همواره مثبت است پس علامت چندجمله‌ای صورت سؤال با علامت چندجمله‌ای $x^۲ - x - ۱$ یک‌سان است. عبارت $x^۲ - x - ۱$ یک سهمی است که دارای دو ریشه‌ی $\frac{۱\pm\sqrt{۵}}{۲}$ است، پس برای مقادیر بزرگ‌تر از ریشه‌ی بزرگ‌تر و کوچک‌تر از ریشه‌ی کوچک‌تر یعنی $(-\infty, \frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}] \cup [\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}, \infty)$ که اجتماع دو نیم‌خط است، مقدار چندجمله‌ای نامنفی است.

۶. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

چون مقدار عبارت طبیعی شده و با توجه به این که صورت کسر مثبت است، مخرج کسر هم باید مثبت باشد و بنابراین $a > b$. از طرف دیگر دقت کنید که $a - b \big| a + b$ معادل این است که $a - b \big| ۲b$.

حال مسئله را بر حسب مقادیر مختلف b حالت‌بندی می‌کنیم.

$b = ۱$، $a - ۱ \big| ۲$ پس $a - ۱ \in \{۱, ۲\}$ و لذا $a \in \{۲, ۳\}$. دو حالت دارد.

$b = ۲$، $a - ۲ \big| ۴$ پس $a - ۲ \in \{۱, ۲, ۴\}$ و لذا $a \in \{۳, ۴, ۶\}$. سه حالت دارد.

$b = ۳$، $a - ۳ \big| ۶$ پس $a - ۳ \in \{۱, ۲, ۳, ۶\}$ و لذا $a \in \{۴, ۵, ۶, ۹\}$. چهار حالت دارد.

$b = ۴$، $a - ۴ \big| ۸$ پس $a - ۴ \in \{۱, ۲, ۴, ۸\}$ و لذا $a \in \{۵, ۶, ۸\}$. سه حالت دارد.

$b = ۵$، $a - ۵ \big| ۱۰$ پس $a - ۵ \in \{۱, ۲, ۵, ۱۰\}$ و لذا $a \in \{۶, ۷, ۱۰\}$. سه حالت دارد.

$b = ۶$، $a - ۶ \big| ۱۲$ پس $a - ۶ \in \{۱, ۲, ۳, ۴, ۶, ۱۲\}$ و لذا $a \in \{۷, ۸, ۹, ۱۰\}$. چهار حالت دارد.

$b = ۷$، $a - ۷ \big| ۱۴$ پس $a - ۷ \in \{۱, ۲, ۷, ۱۴\}$ و لذا $a \in \{۸, ۹\}$. دو حالت دارد.

$b = ۸$، $a - ۸ \big| ۱۶$ پس $a - ۸ \in \{۱, ۲, ۴, ۸, ۱۶\}$ و لذا $a \in \{۹, ۱۰\}$. دو حالت دارد.

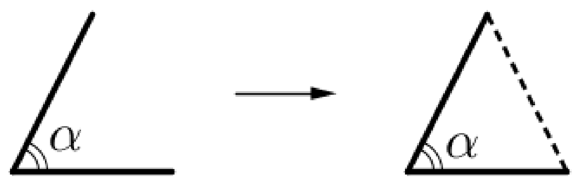
$b = ۹$، $a - ۹ \big| ۱۸$ پس $a - ۹ \in \{۱, ۲, ۳, ۶, ۹, ۱۸\}$ و لذا $a \in \{۱۰\}$. یک حالت دارد.

$b = ۱۰$، $a - ۱۰ \big| ۲۰$ پس $a - ۱۰ \in \{۱, ۲, ۴, ۵, ۱۰, ۲۰\}$ که چنین حالتی برای a امکان ندارد.

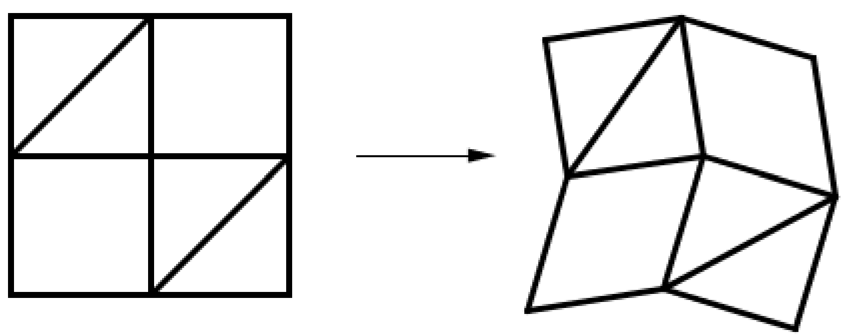
پس در کل به $۲۴ = ۱ + ۲ + ۲ + ۴ + ۳ + ۳ + ۴ + ۳ + ۲$ حالت می‌توان این دو عدد را انتخاب کرد.

۷. گزینه‌ی (د) صحیح است.

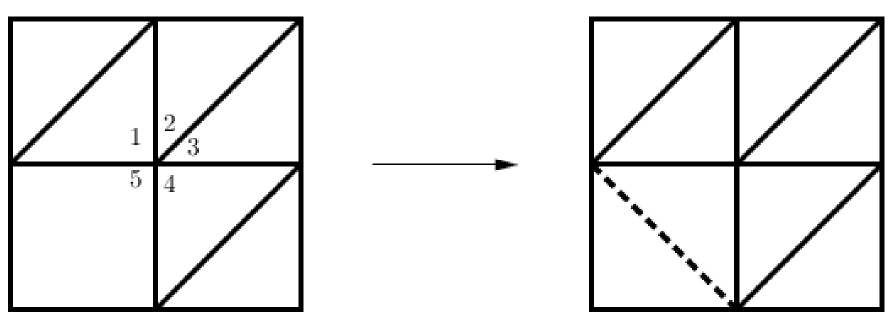
ابتدا توجه کنید که مثلث‌ها نمی‌توانند تغییر شکل بدهند و در نتیجه زوایای درون هر مثلث ثابت هستند. از طرف دیگر اگر در یک لولا زاویه‌ی لولا ثابت باشد، با استفاده از قواعد هم‌نهشتی مثلث‌ها می‌توان نشان داد که کل لولا باید ثابت بماند، پس می‌توان ضلع مقابل لولا را اضافه کرد، طوری که در انعطاف‌پذیری شکل تغییری ایجاد نشود. یعنی در شکل زیر اگر α ثابت باشد، می‌توان چوبی در روبه‌روی این زاویه‌ی α اضافه کرد، به گونه‌ای که به صورت سمت راست در آید.



توجه کنید که سومین شکل (از سمت راست) را می‌توان با حرکت دادن به صورت زیر تغییر داد. پس سه شکل اول قابل انعطاف هستند.



اما در شکل چهارم با توجه به توضیحات بالا که مثلث‌ها ثابت هستند، زاویه‌های شماره‌ی ۱، ۲، ۳ و ۴ ثابت هستند. بنابراین زاویه‌ی ۵ هم باید ثابت باشد. پس با توجه به توضیحات بالا می‌توان تکه‌چوبی را بدون تغییر در انعطاف‌پذیری به شکل اضافه کرد طوری که همه‌ی چندضلعی‌های شکل مثلث شوند و به این ترتیب شکل غیرقابل انعطاف است.



پس در کل سه تا از شکل‌ها می‌توانند تغییر کنند.

۸. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

با توجه به نامساوی حسابی، هندسی می‌دانیم که $a^۲ + b^۲ = \left|a\right|^۲ + \left|b\right|^۲ \geq ۲\left|ab\right|$، پس ناحیه‌ی مورد سؤال زیرمجموعه‌ی $\{(x,y) : \left|y\right| < \frac{x}{۲}\}$ است. از طرف دیگر اگر $x = \sqrt{a}.\sin\theta$ و $y = \sqrt{a}.\cos\theta$ باشد، $(x^۲ + y^۲, xy) = (a, \frac{۱}{۲}a\sin(۲\theta))$ و $\frac{۱}{۲}a\sin(۲\theta)$ برای مقادیر مختلف θ، کل بازه‌ی $[-\frac{a}{۲}, \frac{a}{۲}]$ را می‌پوشاند. پس در کل مجموعه‌ی مورد نظر، $\{(x,y) : \left|y\right| < \frac{x}{۲}\}$ است.

۹. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

فرض کنید بعد از گذشت n ثانیه ملخ خورده شود. اگر وزغ بعد از خوردن ملخ به جای این که سرجای خود بایستد، با همان حرکت‌های ملخ خود را به جای نخستین ملخ برساند، n حرکت قبل از خوردن ملخ انجام داده و بعد از خوردن او هم n حرکت دیگر انجام داده است، پس در کل $۲n$ حرکت کرده است. بالعکس اگر وزغ با $۲n$ حرکت ۲متر را طی کند، می‌توان n حرکت اول را حرکات وزغ و n حرکت بعدی را برعکس حرکات ملخ در نظر گرفت. در واقع ما تناظری بین تعداد راه‌های خورده شدن ملخ توسط وزغ و راه طی کردن مسیر ۲ متر با تعداد زوجی حرکت توسط وزغ برقرار کرده‌ایم. پس باید تعداد زوج حرکت‌هایی را بشماریم که وزغ در آن ۲ متر به جلو می‌رود. اگر به جای ۲۵ و ۵۰ سانتی‌متر، طول حرکات را ۱ و ۲ و کل مسیر را ۸ بگیریم، باید تعداد زوج‌حرکت‌هایی را بشماریم که در آن ۸ واحد طی می‌شود. تعریف می‌کنیم:

$O_n =$ تعداد فرد حرکت‌هایی که در آن n واحد طی می‌شود.

$E_n =$ تعداد زوج حرکت‌هایی که در آن n واحد طی می‌شود.

با توجه به حرکات وزغ که در هر مرحله یک یا دو واحد طی می‌کند به روابط بازگشتی زیر می‌رسیم:

$$E_{n+۱} = O_n + O_{n-۱}$$
$$O_{n+۱} = E_n + E_{n-۱}$$

و هدف یافتن $E_۸$ است. به کمک جدول زیر و با توجه به این که $E_۱ = ۰$ و $O_۱ = O_۲ = E_۲ = ۱$ این محاسبه را انجام می‌دهیم.

n	۱	2	3	4	5	6	7	8
O_n	1	1	1	3	4	6	11	17
E_n	0	1	2	2	4	7	10	**17**

پس پاسخ عدد ۱۷ است.

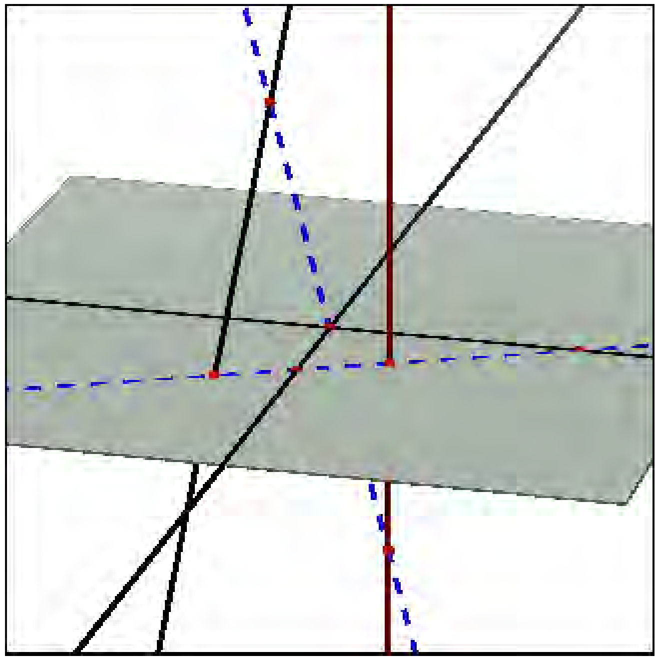
۱۰. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

فرض کنید $l_۱$، $l_۲$، $l_۳$ و $l_۴$ ۴ خط صورت سؤال باشند که $l_۱$ و $l_۲$ در نقطه‌ی P متقاطع هستند. اگر خط l هر چهار خط را قطع کند با توجه به این که $l_۱$ و $l_۲$ را هم قطع می‌کند یا باید از نقطه‌ی P بگذرد یا در صفحه‌ی شامل $l_۱$ و $l_۲$ که صفحه‌ای یک‌تاست قرار دارد.

اگر چنین خطی که از نقطه‌ی P می‌گذرد موجود باشد، خطی یک‌تاست زیرا در غیر این صورت اگر l و l' دو خط با این خاصیت باشند، با توجه به این که هر دو شامل نقطه‌ی P هستند در یک صفحه قرار می‌گیرند و چون $l_۳$ و $l_۴$ با هر دو خط تقاطع دارند، آن‌ها نیز باید در همین صفحه باشند که در این صورت باید با هم متقاطع یا موازی باشند که خلاف فرض ماست.

اگر چنین خطی با در صفحه‌ی شامل $l_۱$ و $l_۲$ باشد، از آن‌جا که اشتراک این صفحه با $l_۳$ و $l_۴$ حداکثر در یک نقطه است.(اگر بیش‌تر از یک نقطه اشتراک داشته باشد کل خط باید در این صفحه باشد که باعث می‌شود با $l_۱$ و $l_۲$ موازی و یا متقاطع شود که خلاف فرض است.) پس باید خط l از این دو نقطه بگذرد و بنابراین خط مورد نظر در این حالت هم یک‌تا است.

پس در کل حداکثر دو خط می‌توان داشت. می‌توان مطابق شکل زیر خط‌ها را با توجه توضیحات بالا به گونه‌ای طراحی کرد که دو خط متقاطع با هر چهارتای آن‌ها موجود باشند.(خطوط قطعه‌قطعه دو خط مورد نظر هستند.)



۱۱. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

فرض کنید x و y دو عدد حقیقی باشند که $xy^۲ + ۴x^۲y + ۵ = ۰$ و $x > ۰$، در این صورت $y < ۰$ زیرا اگر $y \geq ۰$، $xy^۲ + ۴x^۲y + ۵ > ۰$ که به وضوح تناقض است.

حال دقت کنید که

$$xy^۲ + ۴x^۲y + ۵ = ۰ \Rightarrow (\frac{y}{x})^۲ + ۴(\frac{y}{x}) = \frac{-۵}{x^۳} < ۰ \Rightarrow (\frac{y}{x} + ۴)(\frac{y}{x}) < ۰$$

حال چون $\frac{y}{x} < ۰$، $\frac{y}{x} + ۴ > ۰$ و معادلاً $y > -۴x$. پس $a \geq -۴$.

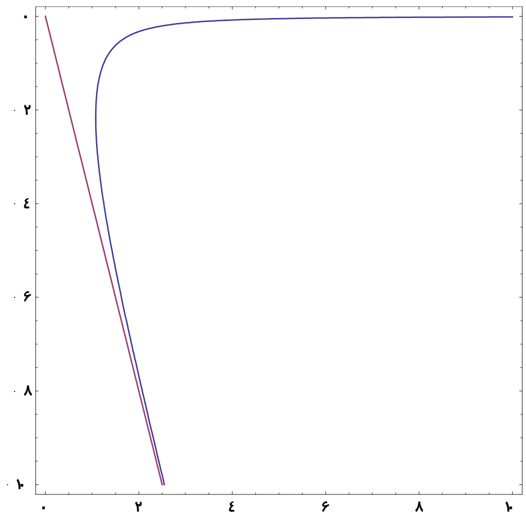
حال ادعا می‌کنیم $a = -۴$. برای این منظور نشان می‌دهیم برای هر $-۴ < a < ۰$ می‌توان $x \in \mathbb{R}^+$ و $y \in \mathbb{R}^-$ یافت که $xy^۲ + ۴x^۲y + ۵ = ۰ (\star)$ و ضمناً $y = ax$.

اگر $y = ax$ را در رابطه‌ی $(\star)$ جای‌گزین کنیم، داریم:

$$a^۲x^۳ + ۴ax^۳ + ۵ = ۰ \Leftrightarrow x^۳ = \frac{-۵}{a(۴ + a)} \Leftrightarrow x = \sqrt[۳]{\frac{-۵}{a(۴ + a)}}$$

که چون $-۴ < a < ۰$، عدد x که در بالا به دست آمده مثبت است و زوج x و $y = ax$ در رابطه‌ی $(\star)$ صدق می‌کنند. پس بزرگ‌ترین مقدار ممکن برای a همان -۴ است.

توضیح: در شکل زیر مجموعه نقاطی در ناحیه‌ی چهارم مختصات که در رابطه‌ی $(\star)$ صدق می‌کنند و هم‌چنین نمودار خط $y=-۴x$ را می‌بینید. همان‌طور که مشاهده می‌کنید تمام نمودار در این ناحیه در بالای این خط قرار دارد.



۱۲. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

طبق رابطه‌ی صورت سؤال $x+y=z(xy-۲)$ و چون x، y و z طبیعی و در نتیجه مثبت هستند، $xy-۲$ هم طبیعی است و به علاوه $xy-۲\,|\,x+y\ (\star)$ و لذا $xy-۲\leq x+y$. ادعا می‌کنیم که یکی از x و y کم‌تر از ۳ است. به برهان خلف فرض کنید $x,y\geq ۳$. حال داریم:

$$xy-۲\leq x+y \Rightarrow xy-x-y\leq ۲ \Rightarrow (x-۱)(y-۱)=xy-x-y+۱\leq ۳$$

که رابطه‌ی آخر با توجه به این که $x-۱\geq ۲$ و $y-۱\geq ۲$ امکان ندارد.

حال مسئله را بر حسب x و y حالت‌بندی می‌کنیم.

حالت اول. $x=۱$. طبق $(\star)$ باید $y-۲\,|\,y+۱$، معادلاً $y-۲\,|\,۳$ و لذا $y-۲\in\{-۳,-۱,۱,۳\}$. این حالت در نهایت با توجه به طبیعی بودن x، y و $xy-۲$ منجر به جواب‌های $(۱,۳,۴)$ و $(۱,۵,۲)$ می‌شود. (منظور از سه‌تایی $(۱,۵,۲)$، $x=۱$، $y=۵$ و $z=۲$ است!)

حالت دوم. $x=۲$. در این حالت طبق رابطه‌ی $(\star)$ باید $۲y-۲\,|\,y+۲$ که این نتیجه می‌دهد $۲y-۲\,|\,(۲y-۲)-۲(y+۲)$ و لذا $y-۱\,|\,۳$. بنابراین $y-۱\in\{-۳,-۱,۱,۳\}$. این حالت در نهایت توجه به طبیعی بودن x، y و $xy-۲$ منجر به جواب‌های $(۲,۲,۲)$ و $(۲,۴,۱)$ می‌شود.

حالت سوم. $y = ۱$. کاملاً شبیه حالت اول به جواب‌های $(۳,۱,۴)$ و $(۵,۱,۲)$ منجر می‌شود. (دقت کنید که به دلیل تقارن رابطه‌ی صورت سؤال نسبت به x و y اگر (x,y,z) جواب باشد، (y,x,z) هم جواب است.)

حالت چهارم. $y = ۲$. این حالت هم مشابه حالت دوم به $(۲,۲,۲)$ و $(۴,۲,۱)$ منجر می‌شود که جواب $(۲,۲,۲)$ تکراری است. پس در کل مسئله ۷ جواب دارد.

۱۳. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

یک برنامه‌ریزی غذایی برای تعدادی روز در رستوران را "متنوع" می‌نامیم اگر غذای هر دو روز متوالی متفاوت باشد. حال a_n را تعداد روش‌های مختلف برنامه‌ریزیِ متنوع برای n روز در نظر بگیرید با این شرط که غذای روز اول و آخر نیز متفاوت باشد. به همین ترتیب b_n را تعداد روش‌های مختلف برنامه‌ریزیِ متنوع رستوران برای n روز در نظر بگیرید با این شرط که غذای روز اول و آخر یک‌سان باشد. با این ادبیات هدف ما در مسئله یافتن $a_۷$ است.

دقت کنید که اگر یک برنامه‌ریزی متنوع برای n روز داشته باشیم که غذای روز اول و آخر آن یک‌سان باشد، با حذف روز nاُم از برنامه به یک برنامه‌ریزی متنوع برای $n - ۱$ روز می‌رسیم که غذای روز اول و آخر آن متفاوت است. یعنی $b_n = a_{n-۱}$.

از طرف دیگر $a_n + b_n$ تعداد کل روش‌های برنامه‌ریزی متنوع برای رستوران است(با این تفاوت که هیچ رابطه‌ای بین غذای روز اول و آخر نداریم). در یک برنامه‌ریزی متنوعِ n روزه، برای انتخاب غذای روز اول سه حالت داریم. بعد از انتخاب غذای روز اول، برای انتخاب غذای روزهای بعد هر کدام ۲ حالت خواهیم داشت(غذای هر روز باید با غذای روز قبلش متفاوت باشد). پس تعداد کل چنین برنامه‌ریزی‌هایی $۳ \times \underbrace{۲ \times ۲ \times \cdots \times ۲}_{n-۱}$ است و این یعنی $a_n + b_n = ۳ \times ۲^{n-۱}$. حال داریم:

$$a_n + b_n = ۳ \times ۲^{n-۱} \overset{a_n = b_{n-۱}}{\Rightarrow} a_n = ۳ \times ۲^{n-۱} - a_{n-۱}$$
$$a_n = ۳ \times ۲^{n-۱} - (۳ \times ۲^{n-۲} - a_{n-۲}) = ۳ \times ۲^{n-۲} + a_{n-۲}$$

با توجه به این رابطه‌ی بازگشتی برای $a_۷$ داریم:

$$a_۷ = ۳ \times ۲^۵ + a_۵ = ۳ \times (۲^۵ + ۲^۳) + a_۳ = ۳ \times (۲^۵ + ۲^۳ + ۲^۱) + a_۱$$

که $a_۱ = ۰$(در برنامه‌ریزی برای یک روز حتماً غذای روز اول و آخر یکی می‌شود!) و در نتیجه $a_۷ = ۳ \times ۴۲ = ۱۲۶$.

۱۴. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

با جمع و تفریق کردن دو رابطه به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x^۲ + y = xy^۲ \\ y^۲ + x = yx^۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^۲ + y^۲ + (x+y)(۱-xy) = ۰ \ \ (\mathrm{I}) \\ x^۲ - y^۲ + (x-y)(xy-۱) = ۰ \ \ (\mathrm{II}) \end{cases}$$

با استفاده از (II) خواهیم داشت:

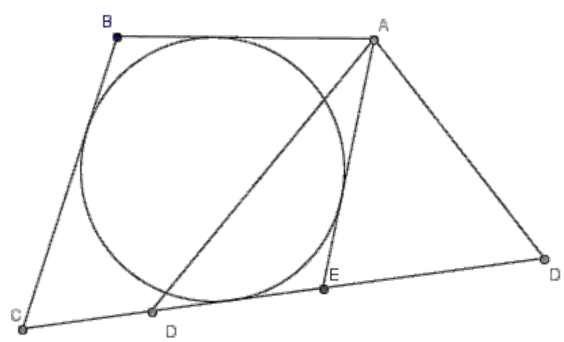
$$(x-y)(x+y+xy-۱) = ۰$$

پس $x = y$ و یا $x + y = ۱ - xy$. اگر $x + y = ۱ - xy$ با توجه به (I) باید داشته باشیم $x^۲ + y^۲ + (x+y)^۲ = ۰$ که این نتیجه می‌دهد $x = y = ۰$. پس در هر صورت $x = y$:

$$x = y \Rightarrow x + x^۲ = x^۳ \Rightarrow x(x^۲ - x - ۱) = ۰ \Rightarrow x = ۰, \frac{۱ \pm \sqrt{۵}}{۲}$$

پس دستگاه معادلات، ۳ جواب حقیقی دارد.

۱۵. ادعا: با فرض محیطی نبودن چهارضلعی $ABCD$ ادعا می‌کنیم که دایره‌ی مماس بر AB, BC, CD (ω)، ضلع DA را قطع می‌کند اگر و تنها اگر $BC + AD > BA + CD$.



اثبات ادعا: سه حالت محتمل است:

حالت اول. AD، ω را قطع نکند.

در این صورت مماس AX را رسم کرده و چون چهارضلعی $ABCX$ محیطی است، $AB + CX = BC + AX$ و همچنین طبق نابرابری مثلث داریم که $AX + XD > AD$ پس

$$AD + BC - XD < AX + BC = AB + CX$$
$$\Rightarrow AD + BC < AB + CX + XD = AB + CD$$

و می‌بینیم که در این حالت حکم برقرار است.

حالت دوم. AD بر ω مماس باشد.

در این حالت چهارضلعی $ABCD$ محیطی می‌شود که خلاف فرض است.

حالت سوم: AD، ω را در دو نقطه قطع کند.

در این حالت نیز مماس AX را رسم می‌کرده و باز هم $AB + CX = BC + AX$ همچنین بنابر نابربری مثلث $AD + DX > AX$ پس

$$DX + AD + BC > AX + BC = AB + CX$$
$$\Rightarrow AD + BC > AB + CX - DX = AB + CD$$

و در این حالت نیز حکم تصدیق می‌شود.

پس ادعا در کل صادق است.

حال به سؤال بر می‌گردیم. طبق فرض سؤال می‌دانیم دقیقاً یکی از مقادیر $AB + CD$ و $AD + BC$ از دیگری کوچک‌تر است. بدون کاسته شدن از کلیت مسئله فرض می‌کنیم $AD + BC > AB + CD$. در این صورت دقیقاً دو دایره‌ای که بر اضلاع AB, CD مماس نیستند کاملا درون چهارضلعی قرار خواهند داشت. پس گزینه‌ی (د) درست می‌باشد.

گزینه‌ی (د) صحیح است.

سال ۱۳۹۱

زمان: ۱۸۰ دقیقه

۱- پاسخ : ۵ ؛ توجه کنید که در یک خانواده‌ی n نفری، n نفر زندگی می‌کنند! پس پاسخ سؤال این‌گونه محاسبه می‌شود: $\frac{2\times ۱۰}{۲\times ۱۰+۳\times ۳۰+۴\times ۳۰+۵\times ۱۰+۶\times ۲۰} = \frac{۲۰}{۴۰۰} = ٪۵$

۲- پاسخ : ۴ ؛ $(a+۱)(b+۱) = ab \Rightarrow ab+a+b+۱ = ab \Rightarrow a = -(b+۱)$ پس اکنون داریم که

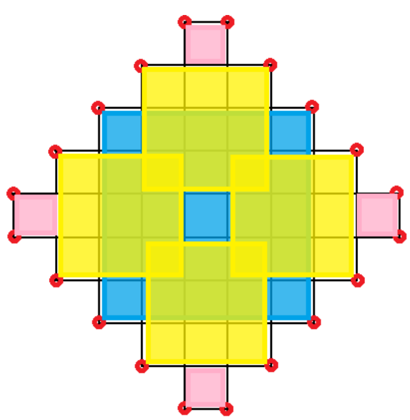
$$\frac{a^۲}{b} = \frac{(b+۱)^۲}{b} = ۲+b+\frac{۱}{b}$$

و با استفاده از نامساوی حسابی هندسی داریم: $۲+b+\frac{۱}{b} \geq ۲+۲\sqrt{b\times\frac{۱}{b}} = ۴$ و این مقدار با قرار دادن $a=-۲$ و $b=۱$ به دست می‌آید.

۳- پاسخ : ۲ ؛ توجه کنید که عدد ۳ تنها می‌تواند کنار عدد ۱ قرار گیرد. عدد ۱ تنها می‌تواند کنار اعداد ۳ و ۲ قرار گیرد. عدد ۲ تنها می‌تواند کنار عددهای ۴و ۱ قرار گیرد و عدد ۴ تنها می‌تواند کنار عدد ۲ قرار گیرد. با این توضیحات اعداد ۳ و ۴ نمی‌توانند به عنوان رقم دوم یا سوم قرار گیرند، پس یکی از آن‌ها در جای‌گاه اول و دیگری در جای‌گاه چهارم است. اکنون با اندکی بررسی می‌فهمیم که در کل دو عدد خوب داریم: ۳۱۲۴ و ۴۲۱۳.

۴- پاسخ : ۵ ؛ عمود وارد از نقاط A و B بر خط CD را به ترتیب X و Y می‌نامیم. از آن‌جایی که در مثلث قائم‌الزاویه، ضلع مقابل به زاویه‌ی ۳۰ درجه نصف وتر است، پس CY و DX برابر ۱ هستند. پس CD برابر ۱ + ۴ + ۱ = ۶ است. طبق قضیه‌ی تالس می‌دانیم $\frac{AB}{CD} = \frac{BE}{DE}$ پس مقدار خواسته‌شده برابر $\frac{۲}{۳} = \frac{۴}{۶}$ است.

۵- پاسخ : ۹ ؛ گوشه‌های تیز شکل(نقاط قرمز) را در نظر بگیرید. تعداد این گوشه‌ها ۲۰ تا است و پس از پوشانده شدن شکل، این گوشه‌ها، توسط رئوس مهرها پوشانده می‌شوند. توجه کنید که به جز مهر مربعی ۵×۵ که می‌تواند ۴ تا گوشه را بپوشاند، دیگر مهرها حداکثر می‌توانند ۲ گوشه را بپوشانند. همچنین استفاده‌ی بیش از یک بار مهر ۵×۵ موجب رنگی شدن خانه‌ی جدیدی نمی‌گردد(چون تنها یک راه برای قرار دادن یک مهر ۵×۵ در جدول داریم). پس اگر n بار از مهرها استفاده کنیم تعداد گوشه‌های پوشانده شده از $۴ + ۲(n - ۱)$ بیشتر نیست. این مقدار باید حداقل ۲۰ باشد، پس n حداقل ۹ است. در شکل می‌بینیم که ۹ مهر برای این کار کافی نیز هست.



۶- پاسخ : ۴ ؛ توجه کنید که $y \neq -۱$ زیرا در غیر این صورت با توجه به عبارت دوم نتیجه می‌گیریم که $۱۱ = -۱$. اکنون با استفاده از عبارت دوم، داریم که: $\left(x+۱\right)\left(y+۱\right) = ۱۲ \Rightarrow x = \frac{۱۲}{y+۱} - ۱ = \frac{۱۱-y}{y+۱}$ با جای‌گذاری x در عبارت اول داریم :

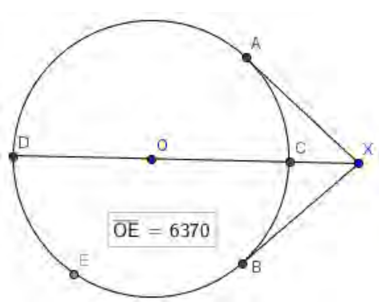
$$\left(\frac{۱۱-y}{y+۱}\right)^{۲} y + \frac{۱۱-y}{y+۱} y^{۲} = ۳۰ \Rightarrow \frac{۱۱-y}{y+۱} y \left(\frac{۱۱-y}{y+۱} + y\right) = ۳۰$$

$$\Rightarrow \left(\frac{۱۱-y}{y+۱}\right) y \left(\frac{۱۱+y^{۲}}{y+۱}\right) = ۳۰$$

$$\Rightarrow \left(۱۱-y\right)\left(۱۱+y^{۲}\right) y = ۳۰\left(y+۱\right)^{۲} \Rightarrow ۱۲۱y - ۱۱y^{۲} + ۱۱y^{۳} - y^{۴} = ۳۰y^{۲} + ۶۰y + ۳۰$$

$$\Rightarrow y^{۴} - ۱۱y^{۳} + ۴۱y^{۲} - ۶۱y + ۳۰ = ۰$$

ریشه‌های چندجمله‌ای به دست آمده برابر ۱، ۲، ۳ و ۵ است. پس ۴ جواب داریم.



۷- پاسخ : 1824 ؛ می‌توان صورت سؤال را مانند شکل زیر تفسیر کرد. پس از صورت سؤال داریم که : $XC = ۲۵۶ , OC = OD = ۶۳۷۰$ و سؤال از ما طول XA را می‌خواهد. طبق رابطه‌ی قوت نقطه‌ی X داریم:

$XA^{۲} = XC.XD = ۲۵۶ \times \left(۲ \times ۶۳۷۰ + ۲۵۶\right)$ پس $XA =$ ۱۸۲۴.

۸- پاسخ : ۲ ؛ اگر یکی از a یا b یا c یا d برابر یک باشد، تمام اعداد یک هستند و این خود یک جواب برای مسئله است. اکنون به دنبال دیگر جواب‌ها هستیم پس فرض می‌کنیم این اعداد همگی بزرگ‌تر مساوی ۲ اند. از

ضرب سه رابطه داریم: $a^b b^c c^d d^a = a^۲ b^۲ c^۲ d^۲$ ولی چون فرض کردیم همه‌ی چهار عدد مسئله بزرگ‌تر مساوی ۲ هستند خواهیم داشت: $a^b b^c c^d d^a \geq a^۲ b^۲ c^۲ d^۲$. پس اکنون حالت تساوی رخ داده‌است و در نتیجه تمام اعداد ۲ هستند. این نیز یک جواب درست است. پس در کل ۲ جواب داریم.

۹- پاسخ : ۹۶۰ ؛ از خانه‌های سطر بالایی شروع می‌کنیم و روی هر خانه تعداد راه‌های رسیدن به خانه‌ی E را با شروع حرکت از آن خانه می‌نویسیم. همین کار را برای سطرهای پایینی هم انجام می‌دهیم. اگر برای خانه‌ی X، خانه‌هایی از سطر بالایی را در نظر بگیریم که می‌توان از X به آن‌ها رفت، طبق اصل جمع تعداد راه‌های رسیدن از X به E(با شروع حرکت از خود خانه‌ی X) برابر مجموع تعداد راه‌های رسیدن از خانه‌های بالایی آن خانه به E است. پس شکل زیر به دست می‌آید و جواب ۹۶۰ است.

	E:۱	۱	۱	
	۳	۳	۳	۳
۱۲	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲
۴۸	۴۸	۴۸	۴۸	
۹۶	۹۶		۴۸	۴۸
۲۴۰	۲۴۰	۲۴۰	۲۴۰	
S:۹۶۰	۹۶۰	۹۶۰	۹۶۰	۹۶۰

۱۰- پاسخ : ۳۷ ؛ فرض کنید که $a_۱ < a_۲ < a_۳ < a_۴ < \cdots < a_n$ اعدادی باشند که ویژگی سوال را دارا هستند و فرض کنید $a_۱ = Xb_۱^۲$. که X عددی خالی از مربع(یعنی بر هیچ مربع کاملی بخش‌پذیر نیست) است.

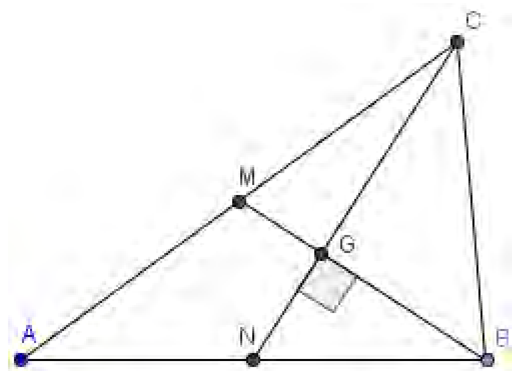
اکنون توجه کنید که طبق ادعای سؤال می‌توان نتیجه گرفت که برای هر $i \geq ۲$: $a_i = X \times b_i^۲$. و چون b_iها اعداد متمایز بزرگ‌تر از ا و کوچک‌تر مساوی $\sqrt{۱۳۹۱}$ هستند پس تعداد کل اعداد حداکثر = $\left\lfloor\sqrt{۱۳۹۱}\right\rfloor$ ۳۷ است. حال توجه کنید که ۳۷ عدد $۱^۲$ و $۲^۲$ و ... و $۳۷^۲$ در شرایط سوال صدق می‌کنند. پس جواب سوال ۳۷ است.

۱۱- پاسخ : ۴ ؛ کافی است توجه کنید که $(x^y)^z = x^{y\times z}$ پس به سادگی و با استقرا می‌توان نشان داد که مقدار مورد نظر برابر $a^{a^{b-۱}}$ است.

۱۲- پاسخ : ۱۳ ؛ با توجه به این که میانه‌ها یکدیگر را به نسبت یک به دو قطع می‌کنند، دو مثلث MGN و BGC با نسبت یک به دو متشابه اند پس $MN = \frac{BC}{۲}$. حال با استفاده از قضیه فیثاغورس داریم:

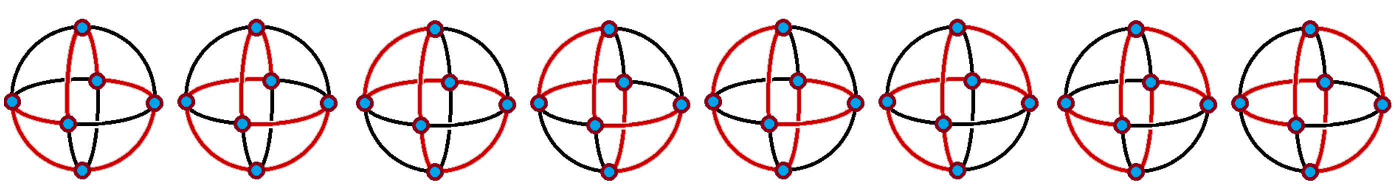
$$MC^۲ + NB^۲ = MG^۲ + CG^۲ + NG^۲ + BG^۲ = BC^۲ + MN^۲ = BC^۲\left(۱ + \frac{۱}{۴}\right)$$

حال با جایگذاری مقادیر MC و NB داریم: $MC^۲ + NB^۲ = ۱۱^۲ + \left(\frac{۱۹}{۲}\right)^۲ = \frac{۴۸۴+۳۶۱}{۴} = \frac{۸۴۵}{۴}$ پس مقدار $BC^۲$ برابر $۱۶۹ = \frac{۸۴۵}{۴} \times \frac{۴}{۵}$ خواهد بود و بنابراین BC برابر ۱۳ است.



۱۳- پاسخ : ۳۲ ؛ به علت تقارنِ «نمکستان»ها، تعداد راه‌های رسیدن از «شکرستان» به «نمکستان شمالی» را حساب می‌کنیم و چهار برابر این عدد جواب مسأله خواهد بود. با حالت‌بندی کاملاً ساده به این نتیجه می‌رسیم که تمام راه‌های موجود دقیقاً ۸ راه (جهت‌دار) نمایش داده شده در شکل زیر هستند. پس ۳۲ حالت داریم.

(می‌توان برحسب این‌که نمکستان پشتی شهر چندم سفر است، حالت‌بندی را انجام داد.)

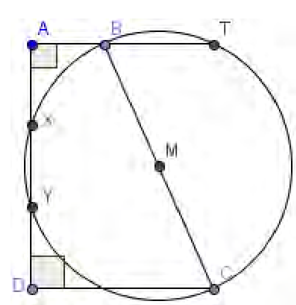


۱۴- پاسخ : ۱ ؛ فرض کنید برد f اعداد $a_1, a_2, \dots, a_n$ و برد g اعداد $b_1, b_2, \dots, b_n$ باشند. برد حاصل‌جمع حداکثر می‌تواند اعداد $a_i + b_j (i \le n, j \le m)$ باشد و مثال برای این حداکثر می‌تواند این‌گونه باشد: f تابعی است که به اعداد طبیعی، باقی‌مانده‌ی آن‌ها به n را اختصاص می‌دهد و به بقیه‌ی اعداد صفر می‌دهد. g تابعی است که به عدد طبیعی x ، n برابر باقی‌مانده‌ی $\left[\frac{x}{n}\right]$ در تقسیم بر m را اختصاص می‌دهد و به بقیه‌ی اعداد صفر می‌دهد. به سادگی می‌توان دید که mn عدد متمایز خواهیم داشت.

برد حاصل ضرب حداکثر می‌تواند اعداد $a_i \times b_j (i \le n, j \le m)$ باشد و مثال برای این حداکثر می‌تواند این‌گونه باشد: f تابعی است که به اعداد طبیعی دو به توان باقی‌مانده‌ی آن‌ها به n را اختصاص می‌دهد و به بقیه‌ی اعداد یک می‌دهد. g تابعی است که به عدد طبیعی x ، دو به توان n برابر باقی‌مانده‌ی $\left[\frac{x}{n}\right]$ در تقسیم بر m را اختصاص می‌دهد و به بقیه‌ی اعداد یک می‌دهد. به همان سادگی می‌توان دید که این mn عدد نیز متمایز اند.

در مورد ترکیب توابع چون برد تابع f ، m عضوی است پس خروجی $f \circ g$ نیز حداکثر m عضو دارد. از طرفی چون تابع g حداکثر n خروجی دارد پس $f \circ g$ نیز نمی‌تواند بیش از n خروجی داشته باشد. پس حداکثر اعضای برد $\min\{m, n\}$ است. برای این حالت یک مثال می‌تواند این باشد که : f به اعداد ۱ تا n خودشان و به بقیه‌ی اعداد ۱ را نسبت می‌دهد. هم‌چنین g به اعداد ۱ تا m خودشان و به بقیه‌ی اعداد ۱ را نسبت می‌دهد. به سادگی می‌توان دید که این مثال حداکثر ادعا شده را می‌دهد. پس جواب گزینه‌ی ۱ است.

۱۵- پاسخ : ۲ ؛ از رابطه‌ی قوت داریم: $AX \times AY = AB \times AT = ۱ \times DC = q$ از طرفی $AX = YD$ پس: $AX + AY = AY + YD = AD = r$ و چون $(x - AX)(x - AY) = x^۲ - (AX + AY)x + AX \times AY$ پس پاسخ سوال $x^۲ - rx + q$ است.



۱۶- پاسخ : ۳ ؛ دقت کنید که اگر تعداد عوامل ۳ در صورت و مخرج کسر متفاوت باشد، بعد از ساده کردن دقیقاً یکی از صورت و مخرج بر ۳ بخش‌پذیر است و دیگری نیست و در نتیجه حاصل جمع آن‌ها نمی‌تواند بر ۳ بخشپذیر باشد. پس تنها باید کسرهایی را بررسی کنیم که صورت آن‌ها دو عامل ۳ دارد. این کسرها بعد از ساده کردن به شکل $\frac{n}{۱۰}$ در می‌آید که n بر ۳ بخش‌پذیر نیست. دقت کنید که ضرب صورت و مخرج کسر در عددی که بر ۳ بخشپذیر نیست ویژگی مورد نظر را تغییر نمی‌دهد پس کافی است این کسرها بررسی شوند. با بررسی این کسرها می‌بینیم که تنها سه کسر $\frac{۲}{۱۰}$، $\frac{۱}{۲} = \frac{۵}{۱۰}$ و $\frac{۴}{۵} = \frac{۸}{۱۰}$ این خاصیت را دارا هستند. پس پاسخ مسئله برابر ۳ است.

۱۷- پاسخ : ۳۰۰ ؛ توجه کنید که در مرحله n، روی هر خانه، تعداد گشت‌های به طول n از مبدأ به آن خانه نوشته می‌شود. پس برای حل سوال باید تعداد گشت‌های از مبدأ به خانه‌ی (۱,۱) را حساب کنیم. این معادل شمارش تعداد دنباله‌های به طول ۶ از حروف U، R، D و L است که $R = L + ۱$ و $U = D + ۱$ و به علاوه حاصل‌جمع آن‌ها برابر شش است. توجه کنید که حروف U، R ، D و L نمایش‌گر بالا و راست و پایین و چپ هستند. پس سه حالت داریم.

حالت ۱. $L = ۰, R = ۱, D = ۲, U = ۳$ در این حالت تعداد دنباله‌ها برابر $۶۰ = \frac{۶!}{۰!۱!۲!۳!}$ است.

حالت ۲. $L = ۱, R = ۲, D = ۱, U = ۲$ در این حالت تعداد دنباله‌ها برابر $۱۸۰ = \frac{۶!}{۱!۲!۱!۲!}$ است.

حالت ۳. $L = ۲, R = ۳, D = ۱, U = ۰$ در این حالت تعداد دنباله‌ها برابر $۶۰ = \frac{۶!}{۲!۳!۰!۱!}$ است.

پس در کل $۳۰۰ = ۶۰ + ۱۸۰ + ۶۰$ حالت داریم.

۱۸- پاسخ : ۲ ؛ فرض کنید اعداد ما $p < q < r < s$ باشند. داریم: $pq < pr < ps, qr < qs < rs$
پس دو حالت داریم:

حالت ۱: $pq = ۲, pr = ۸, ps = ۹, qr = ۳۲, qs = ۳۶, rs = ۱۴۴$ در این حالت با تقسیم روابط داریم که:

$$\frac{q}{p} = ۴, \frac{r}{p} = ۱۶, \frac{s}{p} = ۱۸$$

و با توجه به این که $pq = ۲$ پس $p = \frac{۱}{۲}\sqrt{۲}$ و در نتیجه $q = ۲\sqrt{۲}$ ، $r = ۸\sqrt{۲}$ و $s = ۹\sqrt{۲}$.

حالت ۲: $pq = ۲, pr = ۸, qr = ۹, ps = ۳۲, qs = ۳۶, rs = ۱۴۴$ در این حالت با تقسیم روابط داریم که:

$$\frac{q}{p} = \frac{۹}{۸}, \frac{r}{p} = \frac{۹}{۲}, \frac{s}{p} = ۱۸$$

و با توجه به این که $pq = ۲$ پس $p = \frac{۴}{۳}$ و در نتیجه $q = \frac{۳}{۲}$ ، $r = ۶$ و $s = ۲۴$.

و توجه کنید که هر دوی این جواب‌ها درست هستند.

۱۹- پاسخ : ۳ ؛

مثال نقض برای گزینه‌ی ۱ : از آنجایی که همیشه $p_i \geq ۲$ ، f هیچ عددی نمی‌تواند ۲ باشد.

مثال نقض برای گزینه‌ی ۲ : $f\left(۲\right) = ۱ = f\left(۳\right)$. پس f یک به یک نیست.

مثال نقض برای گزینه‌ی ۴ : $m = ۴, n = ۸ \Rightarrow f\left(۴\right)f\left(۸\right) = ۴ \times ۹ = ۳۶ > ۲۵ = f\left(۳۲\right)$

مثال نقض برای گزینه‌ی ۵ : $m = ۲, n = ۲ \Rightarrow f\left(۲\right)f\left(۲\right) = ۱ \times ۱ = ۱ < ۴ = f\left(۴\right)$

دلیل درستی گزینه‌ی ۳ : خروجی تابع نمی‌تواند از یک عامل اول تنها یکی داشته باشد زیرا توان هر p_i ،r_i است و اعداد اول(p_i ها)، بزرگتر مساوی دو هستند. حال ادعا می‌کنیم که این شرط کافی نیز هست یعنی اعداد به شکل $p_1^{r_1}p_2^{r_2} \ldots p_k^{r_k} \left(r_i \geq ۲\right)$ دقیقا در برد هستند. اثبات ادعا: فرض کنید بخواهیم خروجی تابع عدد $p_1^{r_1}p_2^{r_2} \ldots p_k^{r_k} \left(r_i \geq ۲\right)$ باشد. توجه کنید که هر عدد بزرگتر مساوی ۲ را می‌توان به صورت جمع مضارب نامنفی از ۲ و ۳ نوشت پس فرض کنید $r_i = ۲a_i + ۳b_i$. اکنون توجه کنید که خروجی تابع برای $۲^{p_1^{a_1}p_2^{a_2}\ldots p_k^{a_k}}۳^{p_1^{b_1}p_2^{b_2}\ldots p_k^{b_k}}$ برابر $p_k^{۲a_1+۳b_1}p_2^{۲a_2+۳b_2} \ldots p_k^{۲a_k+۳b_k}$ است که این همان مقدار مورد نظر است. همچنین چون اعداد معرفی شده نسبت به ضرب بسته‌اند، گزینه‌ی ۳ درست است.

۲۰- پاسخ : ۴ ؛ اگر چرخ را ۶ بار ۶۰ درجه بچرخانیم، میله هر بار مقدار ثابتی را جارو می‌کند و در نهایت یک دور کامل می‌زند. پس از ۳۶۰ درجه چرخش، دایره‌ی بزرگی به شعاع $۱۰۰\sqrt{۲}$ ایجاد خواهد شد. درون این دایره، دایره‌ای به شعاع ۱۰۰ است که خود چرخ بوده و در نتیجه جارو نمی‌شود. پس مساحت جارو شده برابر

$$(۱۰۰\sqrt{۲})^{۲} - \pi\,(۱۰۰)^{۲} = ۱۰۰\pi \simeq ۳۱۴$$

است. حال توجه کنید که این مساحت برای ۶ بار چرخش است. پس مساحت جارو شده پس از طی ۶۰ درجه $\frac{۳۱۴}{۶}$ است و نزدیکترین عدد صحیح به این مساحت ۵۰ است.

۲۱- پاسخ : ۵۲ ؛ می‌دانیم $a_{n+۲} = \max\{a_{n+۱} - ۱\,, a_n + ۱\}$ پس $a_n \le a_{n+۲} - ۱$. با چند بار استفاده از این رابطه داریم: $a_۴ \le a_۶ - ۱ \le a_۸ - ۲ \le \cdots \le a_{۱۰۰} - ۴۸ \le ۵۲$. $a_۴ = \max\{a_۳ - ۱, a_۲ + ۱\}$ پس $a_۳ \le ۵۳$ و چون $a_n \le a_{n+۲} - ۱$ پس $a_۱ \le a_۳ - ۱ \le ۵۲$. پس ثابت کردیم که اولین عضو دنباله کم‌تر مساوی ۵۲ است. حال برای این کران بالا مثال می‌آوریم: $a_{۲n+۱} = ۵۲ + n$ و $a_{۲n} = ۵۱ + n$.

۲۲- پاسخ : ۵ ؛ ادعا می‌کنیم که احسان هر گونه بازی کند حسام می‌تواند بازی را ببرد. برای اثبات ادعا این الگوریتم را برای حسام ارایه می‌دهیم. (این الگوریتم را می‌توان نوعی تقلید دانست.)

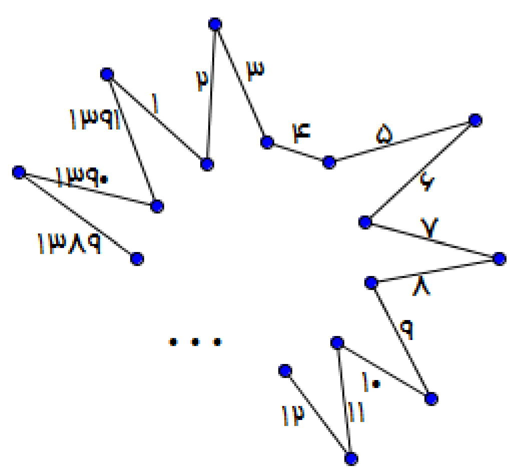
الگوریتم: اگر احسان مهره‌ای قرار داد، مهره‌ای کنار آن مهره قرار بده و اگر احسان مهره‌ای را بالا برد، مهره‌ای که کنار مهره‌ی حرکت داده شده بود را بالا ببر. با این الگوریتم پس از هر حرکت حسام، سطرها یا کاملاً پر و یا کاملاً خالی می‌شوند. پس احسان در هنگام حرکتش یا باید یک سطر را نیمه‌پر کند که حسام می‌تواند الگوریتم را اجرا کند و یا باید یک خانه از یک سطر پر را یک واحد بالا(به سطر تمام خالی بالایی) ببرد و در این حالت نیز حسام می‌تواند طبق الگوریتم حرکت خود را انجام دهد. پس برای هر حرکت احسان، حسام یک حرکت تضمین شده دارد که وضعیت بازی را مناسب برای حرکات بعدی می‌کند. چون بازی بالاخره تمام می‌شود پس در نهایت کسی بدون حرکت می‌ماند. این فرد حسام نیست پس احسان است! پس حسام بازی را می‌برد.

۲۳- پاسخ : ۱۰ ؛ ب.م.م x و y را برابر d می‌گیریم. x و y را حاصل تقسیم x و y بر d می‌گیریم. پس داریم:

$$x^۲ + y^۲ = xy(x,y) + [x,y] = \left(d^۲\right)\left(x'^۲ + y'^۲\right) = d^۳x'y' + dx'y'$$
$$\Rightarrow d(dx' - y')(dy' - x') = ۰$$

و چون $y \geq x \Rightarrow y' \geq x'$ پس $(dx' - y') = ۰ \Rightarrow y' = dx'$ و چون x و y نسبت به هم اول هستند، نتیجه می‌گیریم $x' = ۱ , y' = d$. پس جواب‌ها دقیقاً d و $d^۲$ ها هستند که ۱۰ تا از این جواب‌ها در بازه‌ی ۱ تا ۱۰۰ هستند.

۲۴- پاسخ : ۱۳۹۰ ؛ یک ضلع را در نظر بگیرید. دو سر این ضلع در چند ضلعی دو زاویه‌ی داخلی داریم. این ضلع «ناجور» است اگر و تنها اگر یکی از این دو زاویه بیش‌تر از ۱۸۰ درجه و یکی از این دو زاویه کم‌تر از ۱۸۰ درجه باشد. در غیر این صورت هر دو ضلع کناری در یک طرف پاره‌خط قرار می‌گیرند. اکنون ادعا می‌کنیم که نمی‌توان ۱۳۹۱ضلعیِ ناجور داشت. زیرا اگر تمام ضلع‌ها ناجور باشند، زوایا یکی در میان کم‌تر و بیش‌تر از ۱۸۰ درجه هستند و چون ۱۳۹۱ فرد است این موضوع امکان ندارد. مثال برای ۱۳۹۰ را در زیر مشاهده کنید:



۲۵- پاسخ : ۱۴ ؛ هنگامی که دایره‌ی nاُم را اضافه می‌کنیم حداکثر در $(n - ۱)$ ۲ نقطه با دیگر دایره‌ها برخورد دارد. از طرفی هر دایره که اضافه می‌کنیم به تعداد کمان‌هایش ناحیه‌ها را زیاد می‌کند. پس دایره‌ی اول دو ناحیه ایجاد می‌کند. دایره‌ی دوم دو ناحیه‌ی جدید اضافه می‌کند. دایره‌ی سوم حداکثر $۴ = ۲ \times ۲$ ناحیه‌ی اضافه ایجاد می‌کند و دایره‌ی چهارم حداکثر $۶ = ۳ \times ۲$ ناحیه‌ی جدید ایجاد می‌کند. پس در کل حداکثر

$۱۴ = ۶ + ۴ + ۲ + ۲$ ناحیه خواهیم داشت. توجه کنید هر گونه که ۴ دایره روی کره بگذاریم که هر دوتایی متقاطع باشند و هیچ سه تایی در یک نقطه به هم نرسند ۱۴ ناحیه خواهیم داشت.