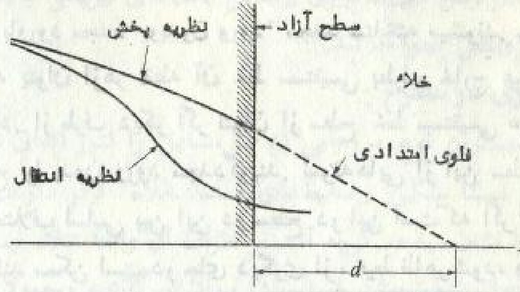
ومحاسبه آن در نزدیکی یک سطح آزاد که نشان داده شده است مشاهده میشود. گرچه در داخل محیط دو جواب خیلی نزدیک بهم هستند، ولی در نزدیک سطح خیلی بایک دیگر تفاوت دارند.



ش ۰-۸- فولوی نوترون بصورت تابعی از مکان در نزدیکی یک‌سطح آزاد از روی نظریهٔ پخش وانتقال

برای سطح آزاد خمیده (مثلا لبه خارجی راکتورهای استوانه‌ای یا کروی) فاصله امتدادی از فرمولی که تاحدی پیچیده‌تر از معادلهٔ ۰-۱۰ است بدست میآید وبه شعاع خمیدگی سطح R بستگی دارد. در هر صورت درحد شعاع خمیدگی بزرگ d به سمت مقدار سطح آزاد مسطح میل میکند، یعنی بشکل

$$\frac{d}{R} \longrightarrow 0 \cdot$$

بنابر این میتوان معادلهٔ ۰-۱۰ را در روی سطوح راکتورهای استوانه‌ای یا کروی بکار برد بشرطی که (همانطور که معمولا هم هست) $d << R$ باشد.

ازنظر معادلهٔ ۰-۹٤ اگر جواب معادله پخش بطور خطی بعد از سطح امتداد یابد، این جواب در نقطه‌ای به فاصله d از سطح ازبین میرود. (ش ۰-۸). این‌گونه امتداد دادن فولو در حل معادله پخش خطای قابل اغماضی را وارد میکند، زیرا بطوری که در زیر نشان داده شده است معمولا d نسبت به ابعاد سیستم‌های عملی خیلی کوچک است. بنابر این میتوان شرط ساده‌تر زیر را جانشین شرط مرزی (i) نمود.

(i) جواب معادله پخش در فاصلهٔ امتدادی بعد از لبه سطح آزاد صفر میشود. ε(R+d)=0

باید تاکید شود که این شرط مرزی فقط یک وسیله ریاضی برای ساده کردن مسئله ویافتن جواب‌های معادله پخش میباشد.

در حقیقت در فاصله امتدادی فولوی نوترون ازبین نمیرود وجواب‌هایی که به این وسیله بدست میآیند در نزدیکی مرز، فولوی صحیح را بدست نمیدهند.

از معادلهٔ ۰-٤۱ یادآوری میشود که ضریب پخش بطور تقریبی از رابطهٔ

$$D = \frac{\lambda_{tr}}{3}$$

بدست میآید بطوری که از معادلهٔ ۰-۱۰ فاصله امتدادی برابر است باحدود D ۲. برای اغلب محیط‌های پخش D در حدود یک سانتیمتر یا کمتر است، ودر نتیجه d هیچوقت بیش از ۲ سانتیمتر نیست وغالباً خیلی کمتر است. ازطرف دیگر اغلب راکتورها ازنظر ابعاد در حدود چندمتر میباشند، بطوری که در بسیاری از محاسبات میتوان از فاصله امتدادی بطورکلی صرف نظر نمود. در این حالت‌ها فرض میشود که فولو درسطح عملی راکتور ازبین میرود. d<2cm ε(R+d)=0

شرایط مرزی در روی یک سطح مشترک :

در مسایلی که شامل پخش نوترون در سیستم‌های محتوی چند مادهٔ مختلف است باید بدانیم چگونه جریان وفولوی نوترون‌ها، در طرفین سطح مشترک بین محیط‌های مختلف بهم مربوط میشوند. این امر به مطلبی که به شرایط مرزی فصل مشترک معروف است منتهی میشود. برای بدست آوردن این روابط عبور نوترون را از فصل مشترک بین دو ناحیه A و B در نظر بگیرید. مولفه عمودی دانسیتهٔ جریان نوترون که در ناحیهٔ A روی فصل مشترک حساب شود برابر است باتعداد خالص نوترون‌هایی که ناحیهٔ A راترک میکنند. چون نوترونهانمیتوانند در سطح مشترک انباشته شوند، این کمیت برابر تعداد نوترون‌ها برسانتیمتر مربع برثانیه است که وارد B میشوند. همچنین این کمیت بنوبه خود مساوی با مولفه عمودی دانسیتهٔ جریان است که در ناحیهٔ محاسبهٔ شده باشد. این شرط مرزی برحسب علایم اختصاری بشکل زیر است:

$$(J_A)_n = (J_B)_n \qquad \text{(ii)}$$

که زیرنویس n مولفه‌ای از J عمود برسطح را نشان میدهد. میتوان توجه نمود که شرط مرزی ((ii)) دقیق بوده وبراساس نظریهٔ پخش بنا نشده است. چون نوترون‌ها در فصل مشترک بین دو محیط بدون مانع عبور میکنند، تابع توزیع دانسیتهٔ نوترون باید در دو طرف مرز پیوسته باشد. در نتیجه فولو که به سادگی انتگرال این تابع در زاویهٔ فضایی است (قسمت ۰-۱) نیز باید پیوسته باشد.

(III) فولو در عبور از مرز بین دومحیط مختلف پیوسته است

در بسیاری از راکتورها اغلب لایه‌های نسبتاً نازک مواد ساختمانی برای جدا کردن قسمت‌های مختلف سیستم‌ها بکار میروند، مثلا هسته راکتور اغلب بوسیلهٔ یک ظرف[1] با دیواره نازک از باز تابنده یاپتو[2] جدا میشود، گاهی در چنین دستگاه‌هائی میتوان باجانشین

کردن یک شرط مرزی بجای ناحیه ساختمانی، بدست آوردن جواب مسئله پخش را تسریع کرد.

این کار را بشرطی میتوان کرد که پویش آزاد متوسط نوترون در ماده ساختمانی خیلی بیش از ضخامت ساختمانی باشد. در این حالت میتوان به آسانی نشان داد که فولو در طی این ناحیه ساختمانی تقریباً ثابت است، ولی دانسیته جریان به مقداری برابر تعداد نوترون‌هایی که جذب ماده میشوند کاهش مییابد.

بنابر این شرایط مرزی برای سطح مشترك نازك عبارتند از:

$$\Phi_A = \Phi_B \qquad \text{(iv)}$$

$$\boxed{(J_A)_n = (J_B)_n + X\Sigma_a\Phi_A} \qquad \text{(iv')}$$

که در آن Σ_a سطح مقطع جذب ماکروسکپی ساختمان بوده و X ضخامت آن است. در بکار بردن این شرط مرزی باید دقت کرد که مولفه‌های عمودی هنگامی که مثبت در نظرگرفته میشوند جهت آنها از ناحیه A بسمت ناحیه B باشد. اگر فرض شود که جهت مولفه‌های عمودی برخلاف این باشد، علامت دومین عبارت در معادلهٔ منفی است.

شرایط دیگر :

شرایط مرزی فوق همراه با معادله پخش جواب جالبی برای هرگونه مسئله پخش فیزیکی که شامل یک یا چند محیط پخش و یا سطوح آزاد باشد بدست میدهد. گرچه برای بدست آوردن جواب صحیح شرایط دیگری لازم نیست، اغلب بهتر است در حدود محدودیت‌های نظریه پخش برای بدست آوردن جواب از بعضی شرایط فیزیکی نسبتاً روشن دیگـــر استفاده شود.

برای مثال، فولوی منفی یا موهومی مفهومی ندارد و بنابر این جواب صحیح معادلهٔ پخش باید حقیقی و غیر منفی (مثبت) باشد. البته این شرط را تنها در مورد ناحیه‌هایی میتوان بکار برد که معادلهٔ پخش در آنها صادق باشد. بنابر این در بدست آوردن فولو در یک قسمت از کند کننده که بوسیله خلاء احاطه شده باشد، این حقیقت که جواب در خلاء منفی است معنی ندارد چون معادلهٔ پخش در آنجا صادق نیست.

بطور خلاصه در ناحیه‌هایی که معادلهٔ پخش صدق میکند باید جواب معادلهٔ پخش حقیقی، غیر منفی و دارای یک مقدار باشد.

فولوی نوترون همچنین هیچوقت نمیتواند بی‌نهایت باشد. گرچه این گفته از نظر تکنیکی صحیح است، در این فصل خواهیم دید که جواب بعضی مسائل پخشی فرضی گاهی شامل نقاطی میشوند که فولو در آنجا بی‌نهایت است، این امر در مسایلی اتفاق می‌افتد که توزیع چشمه نوترون بوسیلهٔ تابعی نشان داده میشود کـه خود در بعضی نقاط بی‌نهایت است. ولی این روش خود وسیله ریاضی دیگری است، زیرا دانسیتهٔ هیچ چشمه حقیقی بی‌نهایت نیست و حالات خاصی که این توابع برای فولو معرفی میکنند هیچگونه اهمیت فیزیکی ندارند. باوجود اینکه

باید عملا فولوی نوترون همیشه معین باشد ولی برای جواب معادلهٔ پخش شرط دیگری که نسبتاً کمتر محدود کننده است وجود دارد.

(Vi) جواب معادلهٔ پخش باید در ناحیه‌هایی که معادلهٔ پخش صادق است محدود باشد بجز (نه الزاماً) در نقاط منفصل توزیع چشمه.

لازم است تأکید شود که شرایط (V) و (Vi) خودبخود در تابعی صدق می‌کنند (فقط یک تابع) که در معادلهٔ پخش و شرایط مرزی قبلی صدق می‌نمایند. شرایط (V) و (Vi) چیز تازه‌ای به جواب نمی‌افزایند. باوجود این بطوری که کراراً در این فصل دیده خواهد شد، این شرایط تازه اغلب وسیله‌ای برای حذف تابع های بی‌ربط میباشند.

۵-۹- جواب‌های مقدماتی پایدار معادلهٔ پخش :

یافتن جواب‌هایی برای معادلهٔ ۵-۴۸ که در شرایط مرزی بحث شده در قسمت قبل صدق کنند همیشه آسان نیست. ولی در حالات بخصوصی عملیات ریاضی آن کاملا روشن است و در این قسمت بمنظور نمایش نحوهٔ عمل چند مسئله از این نوع در نظرگرفته می‌شود. باید دانست که این مسایل الزاماً تاحدی مصنوعی هستند، زیرا علاوه برنکات دیگر فرض شده است که همه نوترون‌ها با یک انرژی آزاد و پخش میشوند. مسایل واقعی‌تر در فصل‌های بعدی بحث خواهند شد.

قبل از ادامهٔ کار اگر معادلهٔ ۵-۴۸ را بصورت زیر بنویسیم موجب تسهیلاتی میشود:

$$\nabla^2\Phi - \frac{1}{L^2}\Phi = -\frac{S}{d} \qquad (۵-۵۲)$$

در این معادله ثابت L^2 بصورت زیر تعریف میشود:

$$L^2 = \frac{D}{\Sigma_a} \qquad (۵-۵۳)$$

کمیت L بطور مکرر در معادلات تئوری راکتور ظاهر میشود و به نام طول پخش[1] معروف است. چون D و Σ_a بترتیب دارای ابعاد C_m و C_m^{-1} هستند، از معادله ۵-۵۳ میتوان به آسانی دید کـه L دارای بعد Cm است. اهمیت فیزیکی طـول پخش در قسمت ۵-۱۰ بحث خواهد شد، در حال حاضر باید L را فقط بعنوان یک پارامتر که در معادلهٔ پخش ظاهر میشود در نظرگرفت.

چشمه سطحی[2] بی‌نهایت بزرگی را در نظر بگیرید که در هرثانیه S نوترون بازای واحد سطح (به میزان ثابت) در یک محیط همگن بی‌نهایت بزرگ آزاد می کند. چون سطح چشمه و

1- Diffusion length
2- Planar source

محیط هردو بی‌نهایت بزرگ هستند، فولو درهر نقطه محیط میتواند فقط تابع فاصله از سطح باشد. اگر این فاصله را x بنامیم معادلهٔ ۵-۵۲ بشکل زیر در میآید:

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2}-\frac{1}{L^2}\Phi=-\frac{S(x)}{D} \qquad (۵-۵۴)$$

تابع دانسیتهٔ چشمه یعنی $S(x)$ در معادلهٔ ۵-۵۴ تابعی غیر عادی از x است. چون در خود محیط چشمه‌ای وجود ندارد $S(x)$ درهر جای محیط صفر است. ولی در $x=0$ تابع $S(x)$ بی‌نهایت میباشد. علت این امر این است که درقسمت ۵-۳ دانسیته بصورت تعداد نوترون‌های آزاد شده در ثانیه بازای واحد حجم تعریف شده بود. وقتی نوترون‌ها ازصفحه بی‌نهایت نازکی آزاد شوند، الزاماً دانسیته نوترون در روی سطح بی‌نهایت است زیرا تعدادمعینی نوترون در حجمی برابر صفر تولید شده است.

توابعی از قبیل $S(x)$ که در همه جا برابر صفر هستند بجز در $x=0$ را میتوان برحسب تابع دلتای دیراک[1] $\delta(x)$ نشان داد، که بوسیلهٔ معادلهٔ زیر تعریف میشود.

$$\delta(x)=0, \quad x\neq 0$$

$$\int_a^b \delta(x)dx=\begin{cases}1 & ، \ a<0<b\\ 0 & ، \ \text{سایر حالات}\end{cases} \qquad (۵-۵۵)$$

این تابع نسبتاً غیرعادی در ضمیمه دوم بیشتر توضیح داده شده است. در هر صورت $S(x)$ را میتوان بصورت زیر نوشت:

$$S(x)=S\delta(x) \qquad (۵-۵۶)$$

از روی معادلهٔ ۵-۵۵ تعداد کل نوترون‌هایی که در هرثانیه بازای واحد سطح از سطح چشمه آزاد میشوند عبارت است از:

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} S(x)dx=S\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\delta(x)dx=S$$

که ϵ می‌تواند هرمقداری را در شرایط مربوط اتخاذ نماید. باقرار دادن معادلهٔ ۵-۵۶ در معادلهٔ ۵-۵۴ معادله پخش باین صورت درمیآید.

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2}-\frac{1}{L^2}\Phi=-\frac{S\delta(x)}{D} \qquad (۵-۵۷)$$

این یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی، غیرهمگن، معمولی است ومیتوان آنرا به روش‌هایی که

1- Dirac Delta

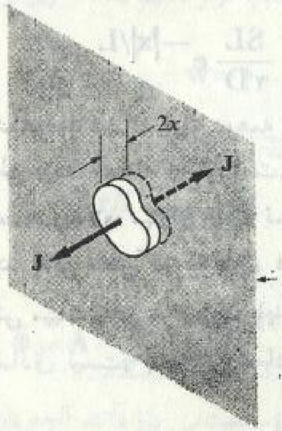
معمولا برای معادلات غیرهمگن بکار میرود حل کرد. (بعضی از این روش‌ها در قسمت ۵-۱۰ بحث شده است). شکل غیرعادی تابعی که در عبارت غیر همگن ظاهر میشود حل معادله را به هیچوجه پیچیده نمیکند. ولی برای اینگونه مسایل روش فیزیکی‌تری وجود دارد. اولا توجه خواهد شد که جز در $X=0$ معادلهٔ ۵-۵۷ معادلهٔ همگن ساده زیر است:

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2}-\frac{1}{L^2}\Phi=0, x\neq 0 \qquad (۵-۵۸)$$

اکنون میتوان اثر چشمه در $x=0$ را بجای استفاده مستقیم از تابع دانسیته چشمه بوسیله یک شرط چشمه منظور کرد. برای بدست آوردن شرط چشمه یک جعبه قرصی شکل کوچک باسطح واحد وضخامت $2x$ در روی صفحه چشمه مطابق شکل ۵-۹ ساخته میشود. باتوجه به تقارن مسئله عبور خالص نوترون هاازدو انتهای جعبه قرصی شکل برابر است با $2J(x)$ که در آن $J(x)$ اندازه (بزرگی) دانسیته جریان نوترون در هریک از دو انتهاست. چون صفحه سطح چشمه بی‌نهایت بزرگ است جریان خالص نوترون در جوانب جعبه وجود نخواهد داشت. در حد، وقتی x به صفر نزدیک میشود جریان خالص نوترون به خارج جعبه باید مساوی S باشد ونتیجه میشود که:

$$\lim_{x\to 0} J(x)=\frac{S}{2} \qquad (۵-۵۹)$$

این نتیجه، شرط چشمه لازم است*. معادله ۵-۵۸ دارای جواب عمومی زیر است:



ش ۵-۹- نحوهٔ ساختمان برای بدست آوردن شرط چشمه سطحی

---

* میتوان توجه نمود که اگر چشمه‌ها بطور غیر یکنواخت ازصفحه آزاد شوند یا اگر صفحه محدود باشدنه بی‌نهایت بزرگ باز این شرط همچنین صادق است. در این حالت جریان خالص نوترونی از جوانب جعبه وجود خواهد داشت. ولی این جریان درحد نهایی یعنی وقتی که اندازهٔ جعبه به‌صفر میرسد ازبین میرود و معادلهٔ ۵-۵۹ باز مجدداً بدست میآید.

$$\Phi = Ae^{-x/L} + Ce^{x/L}$$

که در آن A و C اعداد ثابتی هستند که باید تعیین شوند*. اکنون اگر فقط مقادیر مثبت x را در نظر بگیریم، پیداست که باید C برابر صفر گرفته شود، وگرنه با بزرگ شدن x فولو بی‌نهایت بزرگ خواهد شد. ضریب ثابت A را میتوان از روی شرط مرزی بدست آورد. از قانون فیک داریم:

$$J = -D\frac{d\Phi}{dx} = \frac{DA}{L}e^{-x/L}$$

$\lim_{x \to 0} J(x) = \frac{S}{2}$

از قرار دادن این رابطه در معادلهٔ ۵-۹ نتیجه میشود.

$$A = \frac{SL}{2D}$$

وبنابر این

$$\Phi = \frac{SL}{2D}e^{-x/L}$$

این نتیجه فقط برای مقادیر مثبت x صادق است. ولی بعلت تقارن مسئله میتوان تنها با قرار دادن قدر مطلق (x) بجای خود x جوابی بدست آورد که برای همه مقادیر x صدق میکند. بنابر این داریم

$$\Phi = \frac{SL}{2D}e^{-|x|/L} \qquad (۶۰ - ۵)$$

از روی معادلهٔ ۵-۶۰ مشاهده خواهد شد که فولو درهمه جا متناسب است با قدرت چشمه یعنی S ، این در حقیقت نتیجه خطی بودن معادله پخش است. پس اگر مثلا شدت چشمه دو برابر شود فولو نیز دو برابر خواهد شد. بعلاوه میتوان توجه نمود که طول پخش بصورت یک طول افت[1] برای فولو ظاهر میشود. بدین معنی که در طول هر L سانتی‌متر از صفحه چشمه فولو باندازهٔ یک ضریب e کاهش مییابد. در هر صورت باید بخاطر داشت که قانون فیک تا فاصله چند پویش آزاد از چشمه صادق نیست. بنابر این معادلهٔ ۵-۶۰ در نزدیکی x=0 صدق نمی‌کند.

چشمه نقطه‌ای در یک محیط بی‌نهایت بزرگ؛

اکنون یک چشمه نقطه‌ای را که در هر ثانیه S نوترون بطور ایزوتروپ در محیط

* ضریب ثابت B در تئوری راکتور مفهوم خاصی دارد ومعمولا برای آن منظور نگهداری میشود.

1- Relaxation length

بی‌نهایت بزرگ آزاد میکند در نظر بگیرند. اگر فرض شود که نقطه چشمه نقطه‌ای روی مرکز یک دستگاه مختصات کروی قرار دارد، روشن است که فولو فقط به r بستگی دارد. وقتی شکل لاپلاسینی را که در معادلهٔ ۵-۴۷ داده‌شده است بکار ببریم، فقط عبارت اولیه باقی میماند ومعادلهٔ پخش به‌شکل زیر است.

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}r^2\frac{d\Phi}{dr} - \frac{1}{L^2}\Phi = 0 \qquad (۶۱ - ۵)$$

مگر در مبداء یعنی r=0 شرایط چشمه مناسب برای این مسئله با کشیدن یک کره کوچک در اطراف چشمه ومحاسبه تعداد خالص نوترون‌هایی که در هر ثانیه از سطح آن‌عبور میکنند بدست میاید. اگر شعاع کره r باشد این تعداد درست برابر است با $4\pi r^2 J(r)$ بطوری که در حدوقتی r به‌صفر میل میکند شرط زیر بدست میاید:

$$\lim_{r\to 0} r^2 J(r) = \frac{S}{4\pi} \qquad (۶۲ - ۵)$$

برای حل کردن معادلهٔ ۵-۶۱ معرفی یک متغیر جدید w که بشکل زیر تعریف میشود باعث سهولت امر خواهد شد.

$$W = r\Phi \qquad (۶۳ - ۵)$$

وقتی معادلهٔ ۵-۶۳ را در معادلهٔ ۵-۶۱ قرار دهیم معادله زیر برای W بدست میاید.

$$\frac{d^2w}{dr^2} - \frac{1}{L^2}w = 0$$

جواب عمومی این معادله چنین است:

$$W = Ae^{-r/L} + Ce^{r/L}$$

وبنابر این Φ برابر است با:

$$\Phi = A\frac{e^{-r/L}}{r} + C\frac{e^{r/L}}{r}$$

که در آن A و C اعداد ثابت معلوم هستند. بازمانند آنچه در نمونهٔ قبلی دیدیم باید وقتی r بسمت بی‌نهایت میل میکند Φ ثابت بماند و C باید صفر باشد. A از روی شرط چشمه یعنی معادله ۵-۶۲ بدست میاید.

پس:

$$J = -D\frac{d\Phi}{dr} = DA\left(\frac{1}{rL} + \frac{1}{r^2}\right)e^{-r/L}$$

و :

$$A=\frac{S}{4\pi D}$$

بالاخره فولو بوسیلهٔ رابطهٔ زیر بدست میآید:

$$\Phi=\frac{Se^{-r/L}}{4\pi Dr} \qquad (۶۴-۵)$$

توجه خواهدشد که در این مثال باز فولو متناسب است باقدرت چشمه یعنی S . ولی برخلاف مسئله چشمه سطحی قبل، Φ در روی چشمه بی‌نهایت است. همانطورکه در قسمت ۵-۸ اشاره شد این مهم نیست چون ازیک طرف چشمه های نقطه‌ای عملا وجود ندارند. واز طرف دیگر جوابی که در معادلهٔ ۵-۶۴ داده شده است در نزدیکی چشمه صادق نیست.

۳

سیستم‌هایی با سطح آزاد :

یک تیغه[1] بی‌نهایت بزرگ به ضخامت a که شامل فاصله استدادی نیز میشود تصورکنید که در مرکزش یک چشمه سطحی بی‌نهایت بزرگ که درهر ثانیه S نوترون بازای واحد سطح آزاد میکند داشته باشد. چون بعد شامل فاصله استدادی نیز میشود ضخامت فیزیکی این تیغه $(a-2d)$ میباشد که در آن $d=0.71\lambda_{tr}$.بافرض اینکه صفر سیستم مختصات در مرکز تیغه قرار دارد، معادلهٔ پخش باز همان معادلهٔ ۵-۸ میباشد. شرط چشمه بوسیلهٔ معادلهٔ ۵-۹ داده شده وشرایط مرزی چنین هستند.

$$\Phi\left(\pm\frac{a}{2}\right)=0$$

برای مقادیر مثبت x جواب عمومی به‌این شکل است.

$$\Phi=Ae^{-x/L}+Ce^{x/L} \qquad (۶۵-۵)$$

و با توجه به شرط مرزی در $\frac{a}{2}$

$$\Phi\left(\frac{a}{2}\right)=Ae^{-a/2L}+Ce^{a/2L}=0$$

بطوریکه :

$$C=-Ae^{-a/L}$$

از قرار دادن این نتیجه در معادلهٔ ۵-۶۵ نتیجه میشود.

$$\Phi=A\left[e^{-x/L}-e^{-(a-x)/L}\right]$$

1- Slab

مقدار ثابت A از شرط چشمه یعنی معادلهٔ ۵-۹ به روش معمولی بدست میآید وعبارتست از:

$$A=\frac{SL}{2D}\left(1+e^{-a/L}\right)^{-1}$$

بنابر این برای مقادیر مثبت Φ،x بوسیلهٔ رابطهٔ زیر داده میشود:

$$\Phi=\frac{SL}{2D}\,\frac{e^{-x/L}-e^{-(a-x)/L}}{1+e^{-a/L}}$$

باتوجه به تقارن مساله ، از جایگزینی $|x|$ بجای x میتوان جوابی یافت که برای کلیه مقادیر x صادق باشد یعنی :

$$\Phi=\frac{SL}{2D}\,\frac{e^{-|x|/L}-e^{-(a-|x|)/L}}{1+e^{-a/L}} \qquad (۶۶-۵)$$

اگر صورت ومخرج معادلهٔ ۵-۶۶ در $e^{a/2L}$ ضرب شوند میتوان جواب آن را بشکل مناسب‌تر زیر نوشت:

$$\Phi=\frac{SL}{2D}\,\frac{\mathrm{Sinh}[(a-2|x|)/2L]}{\mathrm{Cosh}(a/2L)} \qquad (۶۷-۵)$$

که در آن توابع هیپربولیکی بصورت زیر تعیین میشوند.

$$\mathrm{Sinh}x=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\ ,\ \mathrm{Cosh}x=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$$

این توابع را میتوانستیم از اول مسئله بکار بریم، زیرا جواب عمومی معادلهٔ ۵-۸ را میتوان بصورت زیر نیز نوشت:

$$\Phi=A\mathrm{Cosh}\frac{x}{L}+C\mathrm{Sinh}\frac{x}{L}$$

البته هردو روش منتج به‌یک جواب نهایی میشوند، وانتخاب روش بسته به سلیقه است. ولی بطورکلی بهتر است ، توابع هیپربولیکی را برای مسایلی که شامل محیطهای محدودهستند نظیر مسئله فوق وتوابع نمایی برای محیطهای نامحدود بکار برد. دلیل این امر این است که SinhX دارای صفری است که هنگام سروکار بامحیط محدود خاصیت مفیدی دارد. در حالی که‌توابع نمایی‌فاقد چنین صفری میباشند ومستقیماً ومتشابهاً یکی از توابع‌نمایی در بی‌نهایت بوده در حالی که هردو تابع هیپربولیکی در بی‌نهایت منفصل هستند. بعلاوه CoshX تابعی است زوج ومیتوان از آن بطور طبیعی در مسایلی که فلوتابع زوج باشد استفاده نمود.

مسایل چند ناحیه‌ای[1] :

در مسایلی که شامل دو یا چند محیط مختلف هستند شرایط مرزی فصل مشترک باید در هریک از فصل مشترک‌هایی که محیط‌ها را ازهم جدا میکنند برقرار باشند. بعنوان نمونه یک تیغه بی‌نهایت بزرگ به ضخامت a را در نظر بگیرید که در مرکزش یک چشمه سطحی داشته باشد که در هر ثانیه S نوترون به ازای واحد سطح پخش‌میکند نظیر[2] مسئله قبلی ولی در اینجا بوسیله یک محیط بی‌نهایت ضخیم احاطه شده است. بازیر نویس‌های ۱ و ۲ که بترتیب داخلی‌ترین وخارجی‌ترین ناحیه‌ها را مشخص می‌کنند، فولو بوسیلهٔ معادلهٔ پخش زیر تعیین میشود.

$$\frac{d^2\Phi_1}{dx^2} - \frac{1}{L_1^2}\Phi_1 = 0 \qquad (۶۸ — ۵)$$

برای :

$$|x| < a/2 \text{ و } x \neq 0$$

$$\frac{d^2\Phi_2}{dx^2} - \frac{1}{L_2^2}\Phi_2 = 0 \qquad (۶۹ — ۵)$$

برای $|x| > a/2$ شرایط مرزی زیر باید صدق کنند:

(i) باید هنگامیکه $|x| \longrightarrow \infty$ مقدار Φ_2 ثابت بماند.

(ii) (شرط چشمه) $\displaystyle \lim_{x\to 0} J(x) = \frac{S}{2}$

(iii) $\displaystyle \Phi_1\left(\pm\frac{a}{2}\right) = \Phi_2\left(\pm\frac{a}{2}\right)$

(iv) $\displaystyle D_1\frac{d\Phi_1}{dx}\bigg|_{x=\pm a/2} = D_2\frac{d\Phi_2}{dx}\bigg|_{x=\pm\frac{a}{2}}$

جواب‌های کلی مناسب برای معادلهٔ ۵-۶۸ و ۵-۶۹ عبارتند از:

$$\Phi_1 = A_1\operatorname{Cosh}\frac{x}{L_1} + C_1\operatorname{Sinh}\frac{x}{L_1} \qquad (۷۰ — ۵)$$

و

$$\Phi_2 = A_2 e^{-x/L_2} + C_2 e^{x/L_2} \qquad (۷۱ — ۵)$$

1- Multi region

که چهار عدد ثابت A_1 ، A_2 ، C_1 و C_2 باید تعیین شوند. اگر برای یک لحظه توجه خود را روی مقادیر مثبت X متمرکز کنیم از شرط (i) میتوان به آسانی دید که $C_2 = 0$ سپس با استفاده از شرایط (ii) به روش معمولی داریم.

$$C_1 = -\frac{SL_1}{2D_1}$$

بنابر این فقط محاسبه A_1 و A_2 باقی میماند. این‌ها را میتوان بااستفاده از شرطهای (iii) و (iV) بدست آورد. از شرط (iii) ومعادله‌های ۵-۷۰ و ۵-۷۱ نتیجه میشود :

$$A_1\operatorname{Cosh}\frac{a}{2L_1} - \frac{SL_1}{2D_1}\operatorname{Sinh}\frac{a}{2L_1} = A_2 e^{-a/2L_2} \qquad (۷۲ — ۵)$$

وبهمین طریق از شرط (iV) داریم

$$\frac{D_1A_1}{L_1}\operatorname{Sinh}\frac{a}{2L_1} + \frac{S}{2}\operatorname{Cosh}\frac{a}{2L_1} = \frac{D_2A_2}{L_2}e^{-a/2L_2} \qquad (۷۳ — ۵)$$

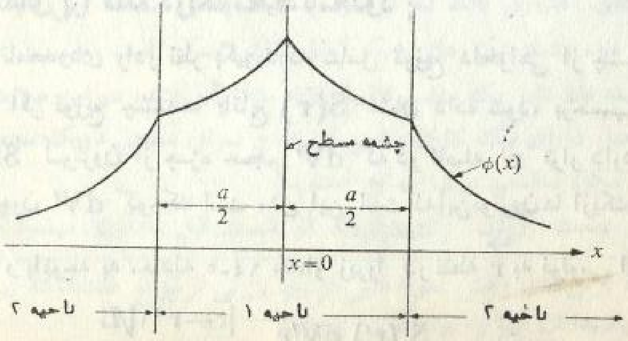
وقتی این معادلات برای A_1 و A_2 حل شوند نتایج زیر حاصل میشود:

$$A_1 = \frac{SL_1}{2D_1}\;\frac{D_1L_2\operatorname{Cosh}(a/2L_1) + D_2L_1\operatorname{Sinh}(a/2L_1)}{D_2L_1\operatorname{Cosh}(a/2L_1) + D_1L_2\operatorname{Sinh}(a/2L_1)} \qquad (۷۴ — ۵)$$

و

$$A_2 = \frac{SL_1L_2}{2}\;\frac{e^{a/2L_2}}{D_2L_1\operatorname{Cnsh}(a/2L_1) + D_1L_2\operatorname{Sinh}(a/2L_1)} \qquad (۷۵ — ۵)$$

بامعلوم شدن همه مقادیر ثابت جواب معادله کامل است. باز از روی عبارات مربوط به A_1 ، A_2 و C_1 باید توجه نمود که علیرغم طبیعت پیچیده مسئله Φ ،هنوز در همه جامتناسب است با

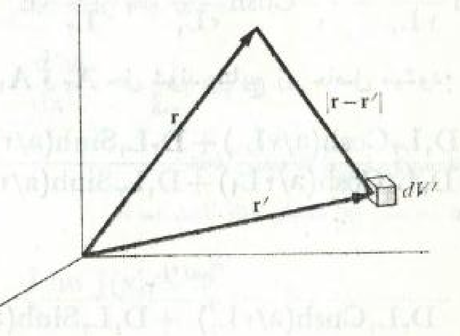


ش ۵-۱- فولوی نوترون دریک مسئله پخش ساده دو ناحیه‌ای

قدرت چشمه S . فولوی حاصل در شکل ۵-۱۰ نشان داده شده است. از شکل پیداست که گرچه Φ در $x = \pm a/2$ پیوسته است مشتق آن یعنی $\frac{d\Phi}{dx}$ پیوسته نمی‌باشد. علت این امر آن‌است که کمیت $D\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)$ است که پیوسته میباشد نه $\frac{d\Phi}{dx}$ وضرایب بخش D_1 و D_2 بطورکلی باهم متفاوتند.

۵-۱۰- مسایل کلی پخش :

بعلت انتخاب انواع بخصوصی توزیع چشمه‌ها یعنی چشمه‌های سطحی، چشمه‌های نقطه‌ای وغیره مسایل بحث شده در قسمت قبل نسبتاً ساده بودند. ولی اغلب لازم است مسایل پیچیده‌تری شامل توزیع دلخواه چشمه را در نظرگرفت. روش های ریاضی که در این مسایل مفید هستند بستگی باین امر دارد که محیط پخش کننده محدود یاغیر محدود باشد.



ش ۵-۱۱- شکل هندسی برای محاسبه فولوی حاصل از چشمه‌هایی که دریک محیط نامحدود توزیع شده باشند

چشمه‌های پراکنده دریک محیط نامحدود :

محیط نامحدودی رادر نظر بگیرید که شامل توزیع دلخواهی از چشمه‌های نوترون ایزوتروپ باشد اگر توزیع چشمه‌ها باتابع $S(\bar{r})$ نشان داده شود، برحسب تعریف درهر ثانیه $S(r')dV'$ نوترون از جزء حجم dV' که در فاصله r' قرار دارد آزاد می‌شود (ش ۵-۱۱). چون dV' کوچک است مثل این است که‌این‌نوترون‌ها ازیک‌چشمه نقطه‌ای آزاد شده باشند و باتوجه به معادله ۵-۶۴ مقدار زیررا درنقطه $\vec{r}$ به فولوی افزائید.

$$d\Phi(\bar{r}) = \frac{S(r')\,dV' e^{-|\bar{r}-\bar{r}'|/L}}{4\pi D|\bar{r}-\bar{r}'|} \qquad (۵-۷۶)$$

در اینجا $(r-r')$فاصلهٔ بین نقاطی است که بوسیلهٔ بردارهای r و r' مشخص می‌شوند. معادلهٔ ۵-۷۶ شکل کلی‌تری از معادلهٔ ۵-۶۴ است که برای چشمه نقطه‌ای که در مبداء قرارگرفته باشد یعنی برای $r'=0$ بدست آمد. فولوی کلی در $\bar{r}$ به سادگی برابر است با مجموع فولوهای‌جزیی $d\varphi$ که از تمام‌چشمه‌هادر سراسر محیط‌حاصل‌میشود ، نتیجه‌میگردد که:

$$\Phi(r) = \int_{\text{همه فضا}} S(r') \frac{e^{-|r-r'|/L}}{4\pi D|r'-r|} dV' \qquad (۵-۷۷)$$

باتوجه باین نتیجه، مسئله یافتن فولو درهر نقطه ازیک محیط بی‌نهایت که ازیک توزیع دلخواه چشمه‌ها حاصل میشود به محاسبهٔ انتگرال فوق کاهش میباید. کمیتی که بوسیلهٔ رابطه

$$G_{pt}(\bar{r}, r') = \frac{e^{-|r-r'|/L}}{4\pi D(\bar{r}-r')} \qquad (۵-۷۸)$$

تعیین میشود ودر انتگرال معادله ۵-۷۷ ظاهر میگردد، بنام کرنل پخش نقطه‌ای[1] برای یک محیط نامحدود* معروف است. مشاهده خواهد شد که $G_{pt}(r_1 - r')$ برابر است با فولوی نوترون در نقطه $\bar{r}$ که ازیک چشمه نقطه‌ای واحد که در نقطه r' واقع شده باشدحاصل میشود. معادلهٔ ۵-۷۷ رامیتوان برحسب کرنل پخش بصورت زیر نوشت:

$$\Phi(\bar{r}) = \int_{\text{همه فضا}} S(\bar{r}') G_{pt}(\bar{r}, \bar{r}') dV' \qquad (۵-۷۹)$$

کرنل پخش نقطه‌ای که در معادلهٔ ۵-۷۸ داده شده است برای مسایلی مناسب است که شامل چشمه‌های اختیاری باشد که در سراسر محیط پخش شده‌اند ولی هرگاه چشمه‌ها بطرز متقارنی توزیع شده باشند شکل های دیگر کرنل پخش ممکن است مناسب‌تر باشد برای نمونه اگر توزیع چشمه فقط تابع یک متغییر قائم‌الزاویه مثلا X باشد، در این صورت هم چشمه‌ها و هم فولوی حاصل دارای یک تقارن سطحی هستند و کرنل سطحی دریک محیط نامحدود یعنی $G_{pl}(x,x')$ شکل مناسب برای مسئله است.

برای بدست آوردن $G_{pl}(x,x')$ از قسمت قبل یادآوری میشود که فولوی حاصل

---

* کرنل‌های پخش نمونه‌هایی ازگروه بزرگی از توابع هستند که فیزیکدانان و ریاضیدانان آنها را توابع گرین[2] می‌نامند.

1- Point diffusion ternel

ازیک چشمه سطحی در ۰=x از رابطهٔ ۵-۰۶ بدست میاید:

$$\Phi = \frac{SL}{2D} e^{-(x)/L}$$

که در آن S قدرت چشمه است. اگر سطح چشمه در x' واقع شده بود، Φ بوسیله رابطه زیر داده میشد.

$$\Phi = \frac{SL}{2D} e^{-(x-x')/L} \qquad (۸۰ - ۵)$$

اگر اکنون توزیع چشمه عملی یعنی $S(x')$ به تیغه‌های نازکی به ضخامت dx' تقسیم شود، هرتیغه معادل بایک چشمه سطحی با قدرت $S(x')dx'$ است. بااستدلالی شبیه استدلال فوق نتیجه میشود که در فولوهرنقطه مساوی است با:

$$\Phi(x) = \frac{L}{2D} \int_{-\infty}^{+\infty} S(x') e^{-(x-x')/L} dx' \qquad (۸۱ - ۵)$$

پس اگر $G_{pl}(x,x')$ بشکل زیر تعیین شود.

$$G_{pe}(x,x') = \frac{L}{rD} e^{-(x-x')/L} \qquad (۸۲ - ۵)$$

فولو را میتوان بصورت زیر نوشت

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(x')\, G_{pl}(x,x')dx' \qquad (۸۳ - ۵)$$

کرنل‌های پخش متعدد دیگری در مسائل آخر فصل بحث شده‌اند، اگر توزیع چشمه تابع فقط یک متغیر فضایی باشدگاهی پیدا کردن فولو باحل مستقیم معادله پخش آسان‌تر است، زیرا معادلهٔ پخش در این حالت بیک معادلهٔ دیفرانسیل معمولی تبدیل خواهد شد. برای چشمه‌هایی که تقارن سطحی دارند این معادله عبارتست از:

$$\frac{d^2\Phi(x)}{dx^2} - \frac{1}{L^2}\Phi(x) = -\frac{S(x)}{D} \qquad (۸۴ - ۵)$$

وبرای چشمه‌هایی که بطرزکروی متقارن هستند چنین است.

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr} r^2 \frac{d\Phi(r)}{dr} - \frac{1}{L^2}\Phi(r) = -\frac{S(r)}{D} \qquad (۸۵ - ۵)$$

و بهمین ترتیب الاآخر. بطورکلی معادلهٔ دیفرانسیل بشکل زیر است:

$$M\Phi(x) = f(x) \qquad (۸۶ - ۵)$$

که در آن M یک اپراتور دیفرانسیل خطی درجه دوم است.

جواب کامل این نوع معادلات غیرهمگن مجموع دو جواب مستقل معادلهٔ همگن زیر باضافه جواب خصوصی میباشد.

$$M\Phi(x) = 0 \qquad (۸۷ - ۵)$$

اگر جواب‌های معادلهٔ ۵-۸۷ با $\Phi_{h_1}(x)$ و $\Phi_{h_2}(x)$ و جواب خصوصی با $\Phi_p(x)$ نشان داده شود میتوان فولو را بصورت زیر نوشت:

$$\Phi(x) = A\Phi_{h_1}(x) + C\Phi_{h_2}(x) + \Phi_p(x) \qquad (۸۸ - ۵)$$

که در آن A و C مقادیر ثابت هستند.

در بسیاری از مسایل میتوان $\Phi_p(x)$ رابا بررسی یاحدس‌زدن (روش‌ضرایب نامعین) پیدا کرد. اگر این اقدامات با عدم موفقیت روبرو شوند میتوان $\Phi_p(x)$ را برحسب توابع $\Phi_{h_1}(x)$ و $\Phi_{h_2}(x)$ از روی فرمول زیر* بدست آورد:

$$\Phi_p(x) = \Phi_{h_2}(x) \int_a^x \frac{f(x')\Phi_{h_1}(x')dx'}{W[\Phi_{h_1}(x'),\Phi_{h_2}(x')]} \qquad (۸۹ - ۵)$$

$$- \overset{\Phi_{h_1}(x)}{\cancel{(x)\Phi_{h_1}}} \int_b^x \frac{f(x')\Phi_{h_2}(x')}{W[\Phi_{h_1}(x')\Phi_{h_2}(x')]} dx'$$

در این رابطه $W[\Phi_{h_1}(x'), \Phi_{h_2}(x')]$ رونسکیان[1] توابع است وبوسیله رابطهٔ زیر تعریف میشود.

$$W[\Phi_{h_1}(x),\Phi_{h_2}(x)] = \begin{vmatrix} \Phi_{h_1}(x) & \Phi_{h_1}(x) \\ \Phi'_{h_1}(x) & \Phi'_{h_2}(x) \end{vmatrix} \qquad (۹۰ - ۵)$$

حدود a و b در انتگرال‌های معادلهٔ ۵-۸۹ وثابت‌های A و C در معادله ۵-۸۸ باید طوری انتخاب شوند که شرایط مرزی مسئله رعایت شوند.

---

* برای نمونه به صفحه ۲۹ ریاضی پیشرفته برای مهندسین نوشته هیلدبراند، ف. ب انگلوود کلیفز، نیوجرزی: پرنتش هال، ۱۹۴۷ صفحه ۲۹ مراجعه شود.
(F.B. Hildebrand, Englewood Cliffs — Prentice Hall)

۱- Wronskian

**گرچه بنظر میرسد ثابت‌های نامعلوم چهارعدد باشند، فقطدوتاهستند یعنی a و b رانمیتوان مستقل از A و C انتخاب کرد و برعکس.

بعنوان نمونه این روش، جواب معادله پخش را برای یک چشمه سطحی نامحدود در یک محیط نامحدود (معادلهٔ ۵-۵۷) که قبلا بابکاربرد ن شرط چشمه بررسی شد در نظر بگیرید جواب‌های صحیح این معادله همگن عبارتند از:

$$\Phi_{h_1}(x)=e^{-x/L} \qquad (۵-۹۱)$$

و

$$\Phi_{h_2}(x)=e^{x/L} \qquad (۵-۹۲)$$

به آسانی دیده میشود که رونسکیان این توابع عبارت از:

$$W[\Phi_{h_1}(x),\Phi_{h_2}(x)]=\frac{۲}{L} \qquad (۵-۹۳)$$

تابع ناهمگن $f(x)=-S\delta(x)/D$ است لذا از معادلات ۵-۸۸ و۵-۸۹ داریم.

$$\Phi(x)=Ae^{-x/L}+Ce^{x/L}+\frac{SL}{۲D}e^{x/L}\int_{x}^{\infty}\delta(x')e^{-x'/L}\,\cancel{dx}\;dx'$$

$$+\frac{SL}{۲D}e^{-x/L}\int_{-\infty}^{x}\delta(x')e^{x'/L}\,dx' \qquad (۵-۹٤)$$

حدود انتگرال هادر این معادله طوری انتخاب شده‌اند که در $\pm\infty$ هیچیک از جملات سوم و چهارم بی‌نهایت نیستند. (توجه کنید که در انتگرال اول حدود بالا وپایین باهم عوض شده‌اند، بنابر این آن جمله مثبت است) اولین عبارت معادلهٔ ۵-۹٤ در $x=-\infty$ بی‌نهایت است و عبارت دوم در $x=+\infty$ بی‌نهایت میباشد. بنابر این هردو ثابت A و C بایدصفر فرض شوند. بالاخره باتوجه به تعریف تابع دلتا اولین انتگرال وقتی صفر میشود که $x>0$ باشد در حالی که جملهٔ دوم وقتی صفر است که $x<0$ باشد. نتیجه میشود که معادلهٔ ۵-۹٤ به شکل زیر تقلیل مییابد.

$$\Phi(x)=\frac{SL}{۲D}e^{-(x)/L}$$

که قبلا بدست آمده بود. (معادلهٔ ۵-۶۰)

چشمه‌های توزیع شده در یک محیط محدود :

هرگاه چشمه‌ها در یک محیط محدود طوری توزیع شده باشند که معادلهٔ پخش به یک معادلهٔ دیفرانسیل معمولی تبدیل شود، فولو رامیتوان یااز طریق بررسی یااز روی

معادلات ۵-۸۸ و۵-۸۹ بدست آورد. فولو را میتوان بروش دیگری بنام روش توابع ویژه[1] نیز تعیین کرد. بعنوان یک نمونه از این روش یک تیغه نامحدود باضخامت امتداد یافته a را در نظر بگیرید، که شامل توزیع چشمه $S(x)$ باشد. برای ساده کردن موضوع فرض خواهد شد که این چشمه ها بطور متقارن نسبت به صفحه میانه تیغه توزیع شده‌اند. به عبارت دیگر، تابع $S(x)$ تابع زوج از x است، یعنی $S(-x)=S(x)$ که در آن x ازمرکز اندازه‌گرفته شده است. فولو در تیغه نیز الزاماً باید یک تابع زوج باشد زیرا توزیع متقارن چشمه‌ها نمیتواند منتج به فولوی غیر متقارن شود. چون فولو تابع x است معادلهٔ پخش چنین است:

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2}-\frac{۱}{L^2}\Phi=-\frac{S}{D} \qquad (۵-۹۵)$$

وشرایط مرزی عبارتند از :

$$\Phi(a/۲)=\Phi(-a/۲)=0$$

فکر اصلی روش توابع ویژه این است که میتوان برای معادلهٔ پخش جوابی برحسب جواب‌های یک معادلهٔ دیفرانسیل دیگر بدست آورد. پس به این منظور معادلهٔ

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+B^2\varphi=0 \qquad (۵-۹۶)$$

را در نظر بگیرید که در آن B یک ثابت است وتابع φ لازم است که همان شرایط مرزی مربوط به فولو را رعایت کند. چون فرض شده است که φ یک تابع زوج باشد، لازم است که فقط جواب‌های زوج معادلهٔ ۵-۹۶ بررسی شوند. بنابر این گرچه جواب عمومی معادلهٔ ۵-۹۶ عبارتست از:

$$\varphi=ACosBx+CSinBx \qquad (۵-۹۷)$$

ثابت C را میتوان صفر فرض کرد، زیرا SinBX تابعی است فرد.

شرط مرزی در $x=a/۲$ (یادر $x=-a/۲$) فرقی نمیکند که کدام یک بکار برده شود زیرا کسینوس یک تابع زوج است) میدهد.

$$\varphi(a/۲)=ACos\frac{Ba}{۲}=0 \qquad (۵-۹۸)$$

این معادله میتواند باقرار دادن $A=0$ که منتج به جواب جزیی $\varphi=0$ میشود، یا بالازم دانستن $Cos(Ba/۲)=0$ برقرار شود. این خود بشرطی برقرار میشود که B مقادیر بخصوصی بخود بگیرد نظیر B_n یعنی:

۱- Method of eigen funetion

$$B_n=\frac{n\pi}{a} \qquad (۵ — ۹۹)$$

که در آن n یک عدد صحیح فرد است.

اعداد B_n بنام کمیتهای ویژه[1] معروفند وجواب‌های معادلهٔ ۵-۹۶ که به این مقادیر ویژه مربوط میشوند توابع ویژه نامیده میشوند، بنابر این جواب

$$\varphi_n(x)=\mathrm{Cos}\,\frac{n\pi x}{a} \qquad (۵ — ۱۰۰)$$

توابع ویژه ان ام مربوط به n امین مقادیر ویژه B_n است. توجه خواهد شد که φ_n در در معادله دیفرانسیل (معادله ۵-۹۶) وهم در شرایط مرزی صدق میکند. از روی تشابه با سایل صوتی توابع ویژه‌مربوط به کمترین مقدار n یعنی $n=۱$ تابع ویژه اساسی یااولین هارمونیک نامیده میشود. همه توابع ویژه دیگر هارمونیک‌های بالاتر تلقی میشوند.

یکی از مهمترین خواص توابع ویژه این است که‌انتگرال حاصل ضرب دو تابع ویژه مختلف در ناحیه‌ای که بوسیله شرایط مرزی مشخص میشود صفر است*. به‌این ترتیب با انتگرال گیری مستقیم میتوان به‌آسانی نشان داد که :

$$\int_{-a/۲}^{a/۲}\varphi_m(x)\varphi_n(x)\,dx=\int_{-a/۲}^{a/۲}\mathrm{Cos}\,\frac{n\pi x}{a}\,\mathrm{Cps}\,\frac{n\pi x}{a}\,dx$$

وقتی صفر میشود که m برابر n نباشد. هرگاه $m=n$ باشد، انتگرال دیگر صفر نیست و مقدارش $\frac{a}{۲}$ است. این خاصیت توابع ویژه بعنوان متعامد بودن شناخته شده است وگویند این نوع توابع نسبت به یکدیگر متعامد هستند.

بعلت خاصیت متعامد بودن توابع ویژه میتوان هر تابعی راکه تاحدی خوب رفتار/کند (وبسیاری راکه خوب‌رفتار نمیکنند) بصورت یک سری از توابع ویژه بسط داد. ولی چون توابع φ_n که در بالا بحث شد زوج هستند، آنها را میتوان‌فقط برای بسط توابع زوج،

1- Eigenvalue
2- Weighting function
3- Bessel function

* بطور کلی برای اینکه انتگرال ازبین برود لازم است دو کمیت ویژه را در تابع دیگری بنام تابع وزنی[2] ضرب کرد. بعنوان مثال برای بحث دربارهٔ انتگرال‌گیری از تابع[3] بسل به ضمیمه مراجعه شود.

بکار برد (برای حالت عمومی رجوع شود به مسئله ۵-۳۰). برای روشن شدن مطلب، تابع زوج $f(x)$ راکه از بقیه جهات اختیاری است در نظر بگیرید. بسط آنرا برحسب توابع ویژه میتوان بانوشتن:

$$f(x)=\sum_{n\ \text{فرد}}C_n\varphi_n(x) \qquad (۵ — ۱۰۱)$$

انجام داد. ثابت C_n رامیتوان باضرب کردن دو طرف این معادله در $\varphi_m(x)$ وانتگرال‌گیری آن از $x=-a/۲$ تا $a/۲$ تعیین کرد، یعنی[1]:

$$\int_{-a/۲}^{a/۲}f(x)\varphi_m(x)dx=\sum_{n\ \text{فرد}}C_n\int_{-a/۲}^{a/۲}\varphi_n(x)\varphi_m(x)dx$$

انتگرال طرف راست این‌معادله ازبین میرود، مگر اینکه $m=n$ باشد، ودر نتیجه تمام جمع فوق به‌یک جمله یعنی m امین جمله کاهش مییابد. پس داریم

$$C_m=\frac{۲}{a}\int_{-a/۲}^{a/۲}f(x)\varphi_m(x)dx \qquad (۵ — ۱۰۲)$$

همه ثابت‌های معادلهٔ ۵-۱۰۱ را میتوان بوسیله این فرمول حساب کرد. این روش بسط یک تابع اختیاری برحسب تابع ویژه در تئوری نظریه راکتور بسیار بکار میرود ودر سراسر این کتاب مورد استفاده قرار خواهدگرفت.

اکنون برگردیم به‌مسئله اصلی یعنی حل معادلهٔ پخش (معادلهٔ ۵-۹۵)، این کار را میتوان به این طریق انجام داد که اول هردو تابع $\Phi(x)$ و $S(x)$ را بصورت سری توابع ویژه بسط دهیم، یعنی:

$$\varphi(x)=\sum_{n\ \text{فرد}}A_n\varphi_n(x) \qquad (۵ — ۱۰۳)$$

و :

$$S(x)=\sum_{n\ \text{فرد}}S_n\varphi_n(x) \qquad (۵ — ۱۰۴)$$

چون توزیع چشمه $S(x)$ را میدانیم، ثابت S_n را میتوان بااستفاده از معادله (۵-۱۲) حساب کرد ومسئله به بدست آوردن ثابت A_n کاهش مییابد.

از قرار دادن معادلات ۵-۱۰۳ و ۵-۱۰۴ در معادلهٔ ۵-۹۵ نتیجه میشود:

1- Orthogonalitg

$$\sum_{n\ \text{فرد}} A_n\left[\frac{d^2\varphi_n}{dx^2}-\frac{1}{L^2}\varphi_n\right]=-\frac{1}{D}\sum_{n\ \text{فرد}} S_n\varphi_n$$ (۱۰۰ — ۵)

چون φ_n در معادلهٔ زیر صدق میکند.

$$\frac{d^2\varphi_n}{dx^2}+B^2{}_n\varphi_n=0$$

که در آن B_n از معادلهٔ ۵-۹۹ بدست میآید. معادلهٔ ۵-۱۰۰ را میتوان بهاین صورت نیز نوشت:

$$\sum_{n\ \text{فرد}} A_n\left(B_n^2+\frac{1}{L^2}\right)\varphi_n=\frac{1}{D}\sum_{n\ \text{فرد}} S_n\varphi_n$$ (۱۰۶ — ۵)

اکنون ازنظر متعامد بودن توابع φ_n عبارت‌های m امین معادلهٔ ۵-۱۰۶ باید برابر باشند*. بطوری که:

$$A_n=\frac{S_n/D}{B_n^2+1/L^2}=\frac{S_n/\Sigma_a}{1+B_n^2L^2}$$ (۱۰۷ — ۵)

در این معادله از تعریف L^2 استفاده شده است معادلهٔ ۵-۵۳. اگر این نتیجه را در معادلهٔ ۵-۱۰۳ قرار دهیم، فولو بشکل زیر بدست میآید.

$$\Phi(x)=\frac{1}{\Sigma_a}\sum_{n\ \text{فرد}}\frac{S_n\varphi_n(x)}{1+B_n^2L^2}$$ (۱۰۸ — ۵)

معادلهٔ ۵-۱۰۸ جواب کامل معادله است $\Phi(x)$ هم در معادلهٔ پخش و هم در شرایط مرزی صدق میکند.

جالب است اگر جواب معادله را یک قدم جلوتر ببریم. از روی معادلهٔ ۵-۱۰۲ ثابت‌های S_n بوسیلهٔ انتگرال زیر داده میشوند.

$$S_n=\frac{2}{a}\int_{-a/2}^{a/2}S(x)\varphi_n(x)\,dx$$ (۱۰۹ — ۵)

---

* برای مشاهده جزییات اینکار طرفین معادلهٔ (۵-۱۰۶) را در φ_m ضرب کرده و از $-\frac{a}{2}$ تا $+\frac{a}{2}$ انتگرال بگیرید. فقط جملات m ام را درطرفین معادله باقی خواهند ماند ومعادله ۵-۱۰۷ نتیجه میشود.

از قرار دادن این عبارت در معادلهٔ ۵-۱۰۸ وبکار بردن x' بجای x بمنظورجلوگیری از اشتباه نتیجه چنین است.

$$\Phi(x)=\frac{2}{a\Sigma_a}\sum_{n\ \text{فرد}}\frac{\varphi_n(x)}{1+B_n^2L^2}\int_{-a/2}^{a/2}S(x')\varphi_n(x')\,dx'$$ (۱۱۰ — ۵)

با کمی جابجایی میتوان این معادله را بصورت زیر نوشت:

$$\Phi(x)=\int_{-a/2}^{a/2}S(x')\left[\frac{2}{a\Sigma_a}\sum_{n\ \text{فرد}}\frac{\varphi_n(x)\varphi_n(x')}{1+B_n^2L^2}\right]dx'$$ (۱۱۱ — ۵)

مشاهده میشود که عبارت داخل کروشه کرنل پخش برای این مسئله است،پس بانوشتن:

$$G(x,x')=\frac{2}{a\Sigma_a}\sum_{n\ \text{فرد}}\frac{\varphi_n(x)\varphi_n(x')}{1+B_n^2L^2}$$ (۱۱۲ — ۵)

فولو چنین خواهد شد :

$$\Phi(x)=\int_{-a/2}^{a/2}S(x')\,G(x,x')\,dx'$$ (۱۱۳ — ۵)

این نتیجه به سادگی عمومیت دادن معادلهٔ ۵-۸۳ به‌یک سیستم محدود میباشد. یکی از مزایای بزرگ روش توابع ویژه این است که میتوان آنرا بدون اشکال به مسایلی که شامل چند محیط هستند تعمیم داد. به این ترتیب میتوان به آسانی نشان داد که کرنل هر ناحیه معین که بوسیلهٔ یک سطح آزاد پوشیده شده باشد همیشه به شکل زیر است.

$$G(r,r')=\text{ثابت}\times\sum\frac{\varphi_n(r)\varphi_n(r')}{1+B_n^2L^2}$$ (۱۱۴ — ۵)

که در آن توابع $\varphi_n(\bar{r})$ در معادلهٔ

$$\nabla^2\varphi_n(r)+B_n^2\varphi_n(r)=0$$ (۱۱۵ — ۵)

صدق میکنند، ودر روی سطح امتدادی محیط ازبین میروند. پس فولوی حاصل از توزیع چشمهٔ عمومی $\varphi_n(\bar{r})$ بشکل زیر است:

$$\Phi(r)=\int_V S(r')\,G(r,r')\,dV'$$ (۱۱۶ — ۵)

که در آن V حجم ناحیه است.

روش‌های عددی :

بسیاری از مسایل پخش راکه در عمل باآن مواجه میشویم نمیتوان باروش تحلیلی که در فوق بحث شد حل کرد. این مسایل را باید باروش‌های عددی حل نمود. محاسبات عددی نیز حتی در جایی که راه حل تحلیلی مسئله معلوم است مکرر بکار میروند زیرا حل مستقیم معادله پخش به روش‌های عددی کمتر از محاسبه یک عبارت تحلیلی پیچیده ودقیق وقت‌گیر است. این موضوع بخصوص وقتی حقیقت داردکه در مورد مطالعات پارامتری راکتورها دقیقاً محاسبات چندین مرتبه تکرار شوند، باپیدایش ماشین‌های محاسبه مدرن وسریع انجام محاسبات بااستفاده از معادلهٔ انتقال ومعادله پخش امکان پذیر شده است و برنامه‌های متعددی که معمولا کدنامیده میشوند، برای حل مسایل مختلف بااین معادلات تهیه شده‌اند.چون معادلهٔ انتقال پیچیده‌تر از معادلهٔ پخش است ،انجام محاسباتی که کدهای انتقال را بکار میبرند معمولا در ماشین حسابگر وقت بیشتری گرفته میشود وبنابر این بکار بردن آنها ازکدهای مشابه پخش‌گرانتر است. باوجود این چون محاسبات انتقال جواب‌های دقیق‌تری میدهند تا محاسباتی که‌براساس نظریه پخش انجام شود ، و باتوجه‌به‌توانایی روزافزون ماشینی های حسابگر مدرن، درطرح ریزی راکتورهای هسته‌ای کدهای انتقال بسرعت جانشین کدهای پخش میشوند.

گرچه بحث روش‌های عددی از حدود این کتاب خارج است، میتوان اشاره کرد که این روش‌ها معمولا درگروه وسیع بزرگ یعنی انتگرال‌گیری عددی[1] ومونت کارلو[2]* قرار میگیرند. گروه اول اصولا از روش‌های متعددی برای انتگرال‌گیری عددی ازیک معادلهٔ دیفرانسیل یامعادلهٔ انتگرال تشکیل شده است. این روش‌ها در اصل مشابه قانون سیمسون[3] برای محاسبه انتگرال‌ها میباشد که از دوره ریاضیات مقدماتی با آن آشنا هستیم. مونت کارلو روش خیلی متفاوتی را برای محاسبهٔ انتگرال‌ها نشان میدهد. در این روش تاریخچهٔ عمر هر یک از نوترون‌ها جزءبجزء در ماشین حسابگر تکرار میشود. بخاطر داریم که در هرمرحله از یک عمر نوترون رفتار آتیه‌اش بوسیلهٔ توابع توزیع احتمال مختلف تعیین میشود.مثلا محل یک واکنش بوسیله تابع $P(x)=\Sigma_t e^{-\Sigma_t x}$ (معادله ۲-۱۲)داده میشود. نوع واکنشی که بوقوع می‌پیوندد از روی نسبت‌سطح مقطع‌ها تعیین‌میشود. (برای مثال $\sigma s/\sigma t$احتمال این است که یک واکنش پراکندگی الاستیک است). زاویهٔ پراکندگی‌نوترون (اگر پراکنده

* مونت کارلو نام رمزی بودکه در زمان جنگ جهانی دوم در آزمایشگاه لوس آلامو[4] باین روش داده شد.

1- Numerieal integration
2- Monte carlo
3- Simpson
4- Los Allames

شود) بوسیله سطح مقطع دیفرانسیل $\sigma_s(\theta)$ معین میشود و بهمین ترتیب تاآخر. در یک محاسبهٔ مونت کارلو از این توزیع احتمال‌های مختلف چنان نمونه‌گیری میکندکه تاریخچهٔ حساب شده نوترون‌ها درست عین آنچه عملا در مسئلهٔ فیزیکی اتفاق می‌افتد دوباره بعمل میآید. بنابر این بدست آوردن توزیع نوترون برای همهٔ مسایلی که شامل انتقال نوترون هستند بااین روش ممکن است. متاسفانه این روش چندکمبود جدی نیز دارد، (بخصوص زمان‌های محاسبه اغلب خیلی طولانی هستند) ودر محاسبات راکتور آنقدرکه روش‌های عددی فوق الذکر مورد استفاده قرار میگیرند بکار نمیرود. (یک مسئله ساده‌که روش مونت کارلو را نمایش میدهد در مسئله ۵-۴ داده شده است).

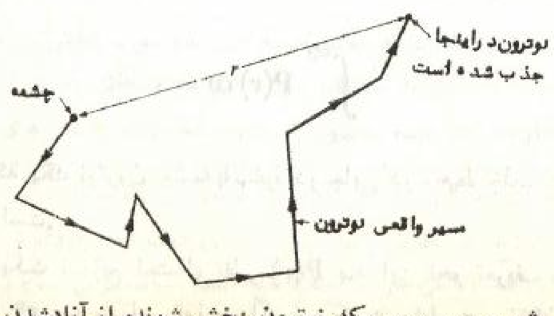
برای بحث کامل روش‌های عددی، شامل مونت کارلو، خواننده باید به منابع داده در آخر فصل رجوع کند.

اطلاعات مربوط به کدهای ماشین‌های حسابگر نیز در منابع آخر فصل درج شده است.

۵-۱۱- طول پخش[1] :

درقسمت ۵-۹ نشان داده شدکه L طول افت برای فولویی[1] است که بوسیلهٔ یک چشمه سطحی دریک محیط محدود تولید شده است، بعبارت دیگر فولوی حاصل از این چشمه در فاصلهٔ L باندازه یک ضریب e کاهش میبابد. ولی این یک حالت خاص است وداشتن تعبیر عمومی‌تری برای طول پخش مناسب بنظر میرسد. بدین منظور یک چشمه نقطه‌ای در نظر بگیرید که در محیط نامحدودی تعداد S نوترون در ثانیه آزاد میکند. این نوترون‌ها با پیمودن مسیر پیچیده‌ای نظیر آنچه در شکل ۵-۱۲ نشان داده شده است به‌اطراف پخش میشوند تااینکه بالاخره جذب شوند. هیچیک از آنها نمیتوانتند فرارکنند زیرا محیط بی‌نهایت بزرگ است. براساس معادلهٔ ۵-۴۶فولو درفاصلهٔ r از این چشمه از رابطهٔ زیر بدست میآید:

$$\Phi(r)=\frac{Se^{-r/L}}{4\pi Dr}$$



ش ۵-۱۲ مسیر یک نوترون پخش شونده از آزادشدن تاجذب

1- Diffusion length

بنابر این dN یعنی تعداد نوترون‌هایی که درهر ثانیه دریک لایه کروی شکل با حجم $dV = 4\pi r^2 dr$ ودر فاصله r و $r+dr$ جذب میشوند برابر است با:

$$dN = \Sigma_a \varphi(r) dv = \frac{S\Sigma_a}{D} re^{-r/L} dr$$

چون برحسب تعریف $L^2 = D/\Sigma_a$، این رابطه را میتوان بصورت زیر نیز نوشت:

$$dN = \frac{S}{L^2} re^{-r/L} dr$$

اگر در هرثانیه جمعاً S نوترون از چشمه آزاد شود و dN نوترون در فاصلهٔ بین r و $r+dr$ جذب شود، پیداست که $P(r)dr$ یعنی احتمال اینکه یک نوترون آزاد شده از چشمه در dr جذب شود برابر است با dN/S، یعنی:

$$P(r)\,dr = \frac{dN}{S} = \frac{r}{L^2} e^{-r/L} dr$$

وتابع توزیع احتمال $P(r)$ چنین است:

$$P(r) = \frac{r}{L^2} e^{-r/L} \qquad (۵-۱۱۷)$$

که در آن n یک عدد صحیح است، میتوان بآسانی دید که:

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}} \qquad (۵-۱۱۸)$$

باتوجه به فرمول زیر

$$\int_0^\infty P(r)\,dr = 1$$

بنابر این احتمال اینکه یک نوترون چشمه بالاخره در جایی در محیط جذب شود همانطورکه باید باشد برابر یک است.

ممان n ام یک توزیع احتمال نظیر $P(r)$ به این نحو تعریف میشود که برابر است باسیانگین مقدار r^n در سرتاسر توزیع. اگر این کمیت رابا $\overline{r^n}$ نشان دهیم خواهیم داشت.

$$\overline{r^n} = \int_0^\infty r^n P(r)\,dr \qquad (۵-۱۱۹)$$

بااستفاده از معادلات ۵-۱۱۷ و ۵-۱۱۸ میتوان ممان‌های $P(r)$ را به آسانی بدست آورد. بدلایلی که در فصل ۹ بحث خواهد شد ممان دوم $P(r)$ است که در تئوری راکتور همه مهمتر است. این ممان برابر است با:

$$\overline{r^2} = \frac{1}{L^2} \int_0^\infty r^3 e^{-r/L} dr = 6L^2$$

پس نتیجه میشود.

$$L^2 = \frac{1}{6} \overline{r^2} \qquad (۵-۱۲۰)$$

بعبارت دیگر مربع طول پخش برابر است بایک ششم میانگین مربع پرواز[1] کلاغ* که یک نوترون از محل آزاد شدن تانقطه جذب طی میکند. ضمناً ضریب L^2 به دلیلی که روشن است سطح پخش نامیده میشود. این بحث طول پخش تماماً براساس نظریهٔ پخش بنا شده است. ولی حالات بسیاری وجود دارندکه بعلت پراکنده شدن غیر ایزوتوپ در مختصات آزمایشگاهی، تغییرات سریع فولو، یابه دلایلی دیگر نظریه پخش در آنها صادق نیست. با وجود این تعریف یک طول پخش بازهم مناسب است ودراین‌حالت‌معادلهٔ ۵-۱۲۰ بعنوان تعریف L^2 پذیرفته شده است. پس اگر نظریهٔ پخش صادق باشد یانباشد L^2 بصورت $\overline{r^2}/6$ تعریف میشود. تنها اگر نظریهٔ پخش صادق باشد L^2 همچنین بوسیلهٔ رابطهٔ $L^2 = D/\Sigma_a$ داده میشود. روش‌های اندازه‌گیری L در حالت مهم نوترون‌های حرارتی در بخش ۸ بحث خواهد شد.

۵-۱۲ ـ قضیهٔ دو طرفه[1]

در اینجا مناسب است که یک نظریهٔ مهم در مورد پخش نوترون‌ها بدست آوریم. این قضیه که بنام قضیه دوطرفه معروف است، در قسمت‌های بعدی این کتاب درتعدادی از مسایل عملی بکار خواهد رفت، بخصوص در مورد محاسبات راکتورهای ناهمگن در فصل.

* بنظر میرسد کلاغ ها قبل از پایین آمدن در خط حرکت کنند. بنابر این فاصله پرواز کلاغ کوتاه‌ترین فاصله بین نقطه‌ای است که نوترون در آن بوجود آمده و نقطه‌ای که بالاخره در آن جذب شده است میباشد (ش ۵-۱۲)

۱- Reciprocitg theorem

فرض کنید $G(\bar{r},\bar{r}')$ فولوی تک سرعت در حالت پایدار در $\bar{r}'$ باشد که از یک چشمهٔ واحد در نقطهٔ $\bar{r}'$ در یک محیط یکنواخت محدود یانامحدود که در آن قانون‌فیک صادق است حاصل شده باشد. تابع $G(\bar{r},\bar{r}')$ کرنل پخش نقطه‌ای تک سرعته برای محیط مورد نظر میباشد. برای حالت خاص محیط نامحدود ویکنواخت $G(\bar{r},\bar{r}')$ همان تابع $G_{pt}(\bar{r},\bar{r}')$ است که در قسمت ۵-۱۰ بدست آوریم. اگر محیط محدود باشد $G(\bar{r},\bar{r}')$ در سطح امتدادی ازبین میرود ، اگر محیط نامحدود باشد $G(\bar{r},\bar{r}')$ دربی‌نهایت‌صفر میشود. براساس‌معادلهٔ ۵-۴۳، $G(\bar{r},\bar{r}')$ بوسیلهٔ معادلهٔ

$$\operatorname{div} D \operatorname{grad} G(r,r') - \Sigma_a G(r,r') = -\delta(r-r') \qquad (۵ - ۱۲۱)$$

تعیین میشود که در آن D و Σ_a ممکن است توابعی از r باشند و div و grad روی متغیر r عمل کنند، زیرا r' صرفاً نقطهٔ چشمه است. باچشمه‌ای که در نقطهٔ r'' قرارگرفته باشد، معادلهٔ پخش چنین میشود:

$$\operatorname{div} D \operatorname{grad} G(r,r'') - \Sigma_a G(r,r'') = -\delta(r-r'') \qquad (۵ - ۱۲۲)$$

اکنون اگر معادلهٔ ۵-۱۲۱ را در $G(\bar{r},\bar{r}'')$ و معادلهٔ ۵-۱۲۲ را در $G(\bar{r},\bar{r}')$ ضرب کنیم ومعادلات حاصل را ازهم کسر نموده ودر حجم محیط انتگرال بگیریم نتیجه میشود که:

$$\int_V \Big[G(r,r'') \operatorname{div} D \operatorname{grad} G(r,r') - G(r,r') \operatorname{div} D \operatorname{grad} G(r,r'') \Big] dv \qquad (۵ - ۱۲۳)$$

$$= \int_V G(r,r'')\,\delta(r-r')\,dv + \int_V G(r,r')\,\delta(r-r'')\,dv$$

$$= -G(\bar{r}',\bar{r}'') + G(\bar{r}'',\bar{r}')$$

عبارت سمت چپ این معادله را میتوان بااستفاده اتحاد زیر

$$f \operatorname{div} D \operatorname{grad} g = \operatorname{div}(f D \operatorname{grad} g) - D \operatorname{grad} f . \operatorname{grad} g \qquad (۵ - ۱۲۴)$$

تغییر شکل داد ، به این ترتیب:

$$\int_V G(r,r'') \operatorname{div} D \operatorname{grad} G(r,r')\,dv \qquad (۵ - ۱۲۵)$$

$$- \int_V G(r,r') \operatorname{div} D \operatorname{grad} G(\bar{r},r'')\,dv$$

$$= \int_V \operatorname{div} D \Big[G(r,r'') \operatorname{grad} G(r,r') - G(r,r') \operatorname{grad} G(r,r'') \Big] dv$$

$$= \int_A D \Big[G(r,r'') \operatorname{grad} G(r,r') - G(r,r') \operatorname{grad} G(r,r'') \Big] \cdot \bar{n} dA$$

در معادله‌فوق‌قضیه‌دیورژانس استفاده‌شده*است.ولی‌چون هردوتابع $G(\bar{r},\bar{r}')$ و $G(\bar{r}',\bar{r}'')$ روی سطح صفر میشوند این انتگرال صفر است واز معادلهٔ ۵-۱۳۳ نتیجه میشود که:

$$G(r',r'') = G(r'',r') \qquad (۵ - ۱۲۶)$$

بنابر به‌تعریف اولین متغییر در تابع G نقطه‌ای است که فولو در آنجا مطالعه میشود، دومین متغیر محل چشمه است. بنابر این معادلهٔ ۵-۱۲۶ نشان میدهد که میتوان محل نقطهٔ مورد بررسی وچشمه راباهم‌عوض کرد. یعنی فولوی‌تک سرعته در $\bar{r}'$ که‌از یک چشمهٔ واحد در r'' مشاهده میشود وقتی چشمه‌به r'' منتقل‌شده باشد یکی است. این قضیه دوطرفه است.

این نتیجه کلی‌تر از آنچه است که ممکن است از روش بدست آوردن آن در فوق که براساس نظریه پخش بنا شده بود بنظر برسد.به این ترتیب‌میتوان نشان داد که معادلهٔ ۵-۱۲۶ سخت پابرجا است، خواه نظریهٔ پخش صادق باشد یانباشد. درهر صورت لازم به تاکید است که قضیهٔ دوطرفه فقط در مورد **حالات** تک سرعته صدق میکند. (لازمهٔ دقیق قضیه دوطرفه این است که عامل انتگرال دیفرانسیل که فولو را تعیین میکند باید سلف آوژوان[1] باشد. این شرط در تمام مسا ل تک سرعته برقرار است. اپراتورهای سلف آدژوان در فصل ۱۵ بحث خواهند شد).

* معادله (۵-۱۲۵) یکی از شکل‌های قضیه‌گرین است (به‌هر کتاب درباره ریاضیات پیشرفته رجوع شود).

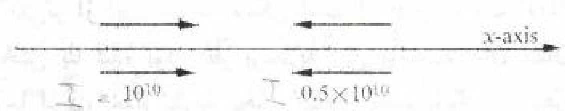
1- Self adjoint

مسایل :

[توجه: نوترون‌ها را باید تک انرژی در نظرگرفت وهرکجا لازم باشد باید سطح مقطع هارادر $0/025eV$ محاسبه نمود مگراینکه بغیر از این ذکر شده باشد].

۵-۱- دریک نقطه درقطعه‌ای ازگرافیت این حالت جالب مشاهده میشود که نوترون‌ها فقط در جهت Xهای مثبت ومنفی حرکت میکنند (به‌شکل ۵-۱۳ مراجعه شود). وهمه دارای انرژی $0/025eV$ هستند. در هرثانیه 10^{10} نوترون از واحد سطح عمود برمحور X ها در جهت مثبت عبور میکند و $0/5\times10^{10}$ نوترون در ثانیه در جهت منفی از واحد سطح عمود بر محور Xها میگذرند.

الف- فولو وجریان نوترون رادر این نقطه حساب کنید. ب- دانسیته برخورد رابیابید.



ش ۵-۱۳

۵-۲- دو شعاع نوترون تک انرژی که دانسیتهٔ هریک 5×10^{8} نوترون برسانتیمتر مربع‌ثانیه است یکدیگر را بازاویه ۴۵ قطع میکنند. فولو جریان نوترون رادر ناحیهٔ محل تقاطع دو شعاع حساب کنید.

۵-۳- تابع توزیع دانسیتهٔ نوترون درنقطهٔ r به‌این شکل است:

$$n(r,\omega) = ne^{-z/\lambda}(1+\cos\theta)$$

که در آن n و λ ثابتند و θ زاویه بین ω ومحور z است. مقادیر زیر را در نقطه $\bar{r}$ حساب کنید. الف- دانسیته جریان ب- فولوی نوترون‌ها. پ- جریان نوترون.

۵-۴- در نقطه‌ای بخصوص در راکتور، تابع‌توزیع‌دانسیته نوترون‌ها از رابطه زیر بدست میآید.

$$n(r,E,\omega) = nE^{1/2}e^{-aE}\cos\frac{\theta}{2}$$

که در آن n و a ثابتندو θ زاویه بین ω ومحور z است. مطلوب است محاسبهٔ الف- دانسیته کلی نوترون. ب- فولوی تابع انرژی. پ- جریان نوترون.

۵-۵- نشان دهید که تابع توزیع دانسیتهٔ نوترون درهر نقطه ازیک شعاع هم جهت از نوترون‌های تک هم انرژی که در امتداد محور X ها حرکت میکننداز رابطهٔ زیر بدست‌میآید.

$$n(X,\bar{\omega}) = \frac{n}{4\pi}\delta(\mu-1)$$

که در آن n دانسیته نوترون، $\delta(\mu-1)$ تابع دلتای دیراک، و μ کسینوس زاویه بین ω ومحور X هامیباشد.

۵-۶- نقطه‌ای را در نظر بگیرید که در آن فولوایزوترپ است، یعنی جایی که تعداد نوترون‌های وارد شده به زاویه‌های فضایی dω حول تمام جهات ω مساوی است.

الف- نشان دهید که تابع توزیع دانسیته نوترون بارابطه زیر

$$n(\bar{\omega}) = \frac{\Phi}{4\pi V}$$

داده میشود که در آن Φ فولوی نوترون است.

ب- نشان دهید که قدر مطلق دانسیتهٔ نوترون‌هایی که در هرجهت حرکت میکنند برابر است با:

$$J^{+} = \frac{\Phi}{4}$$

پ- در این نقطه جریان کلی چقدر است؟

۵-۷- واحد سطحی را روی سطح یک محیط نیمه محدود مثلا ناحیه‌ای که بوسیله $0 \leqslant X < \infty$ تعریف میشود درنظر بگیرید. الف- اگر فولو در داخل محیط مقداری ثابت ودر خارج آن صفر وپراکندگی در دستگاه‌مختصات آزمایشگاهی‌ایزوتروپ باشد،نشان دهید تعداد نوترون‌هایی که از این سطح عبورکرده وبه زاویهٔ فضایی dω حول محور ω وارد میشود متناسب است با کسینوس زاویه بین ω وعمود برسطح. این نتیجه قانون کسینوس[1] لامبر نامیده میشود. ب- اگر در حقیقت فولو ازیک مقدار نزدیک صفر روی سطح نسبت به‌فاصله در داخل محیط افزایش یابد، نظیر آنچه که در اغلب مسایل عملی اتفاق می‌افتد، چگونگی اثر آن را روی توزیع زاویه‌ای نوترون‌هایی که از واحد مسافت سطح آزاد میشوند ازنظرکیفی بحث کنید.

1- Lambert Cosine law

۵-۸- در سراسر یک اتاقک کروی که محتوی مخلوطی از گاز H^3 و H^2 در دمای زیاد ($r\sim 10^{8}$°K) ودانسیتهٔ کم میباشد نوترون بطور یکنواخت وایزوتروپ تولید میشود.

(نوترون‌ها از فیسیون $^3H(d,n)^4He$ و $^2H(d,n)^3He$ سرچشمه میگیرند) نشان دهید که فولو وجریان نوترون درهر نقطه روی سطح اتاقک بترتیب از رابطه‌های

$$\bar{J}=\frac{SRa_r}{3} \quad \text{و} \quad \Phi=\frac{SR}{2}$$

بدست میآید که در آن S دانسیتهٔ چشمهٔ (نوترون برسانتیمتر مکعب در ثانیه)، R شعاع اتاقک r و a_r یک بردار واحد شعاعی[1] است، پویش آزاد نوترون در محیط اساساً بی‌نهایت است.

توجه: اگر مبداء مختصات روی سطح اتاقک انتخاب شود تاحد زیادی محاسبات را ساده‌تر میکند.]

۵-۹- چشمه های ایزوتروپ نوترون بطور یکنواخت در سطح خارجی یک محیط پخش کننده نیمه بی‌نهایت توزیع شده است. اگر ازهر سانتیمتر مربع درهر ثانیه S نوترون آزاد شود، نشان دهید که فولوی نوترون‌های برخورد نکرده در محیط بوسیله رابطهٔ زیر حاصل میشود.

$$\Phi_n(X)=\frac{S}{2}E_1(\Sigma_t X)$$

که در آن (رجوع شود به ضمیمهٔ دوم)

$$E_1(z)=\int_z^{\infty}\frac{e^{-z}}{z}\,dz$$

۵-۱۰- یک هدف کروی در یک شعاع یک جهته نوترون باشدت I قرارگرفته است. مساحت شعاع از مساحت سطح مقطع کره بزرگتر است. نشان دهید که میزان کل واکنش در داخل کره در این شعاع برابر است بامیزان واکنش که کره کاملا دریک فولوی ایزوتروپ با بزرگی I فرو رفته باشد.

۵-۱۱- بامحاسبهٔ مستقیم نشان دهید که عبارات درجه دوم در بدست آوردن قانون فیک بطور یکسان ازبین میروند.

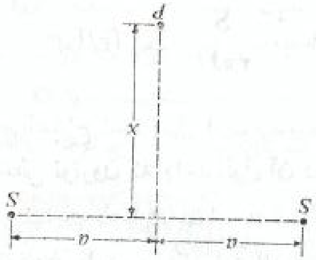
۵-۱۲- بااستفاده از معادلهٔ ۵-۳۸ ضریب پخش مواد زیر را در 0.025 eV بدست آورید.

الف- آهن، ب- اورانیم طبیعی، پ- اورانیومی که تا ۲/۰٪ در ^{235}U غنی شده باشد.

1- Unit radial vector

۵-۱۳- هرگاه $\mu=0$ و $\Sigma_a/\Sigma_t \ll 1$ باشد نشان دهید که معادلهٔ ۵-۳۸ به‌معادلهٔ ۵-۳۷ تبدیل میشود.

۵-۱۴- دوچشمه نقطه‌ای ایزوتروپ که هریک S نوترون در ثانیه آزاد میکنند در یک محیط پخش نامحدود مطابق شکل ۵-۱۴ قرارگرفته‌اند.



شکل ۵ - ٤

الف- فولورا در نقطهٔ P بدست آورید. ب- جریان نوترون را در نقطهٔ P بیابید.

۵-۱۵- سه‌چشمه نقطه‌ای ایزوتروپ که هریک S نوترون در ثانیه آزاد میکنند درکند کنندهٔ بی‌نهایت بزرگی روی رئوس یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a قرارگرفته‌اند. فولو وجریان نوترون را در نقطه‌وسط هرضلع مثلث بدست آورید.

۵-۱۶- کره برهنه‌ای بشعاع a ازکند کننده شامل‌چشمه هایی است که بطور یکنواخت توزیع شده‌اند وهریک S نوترون در ثانیه برسانتیمتر مکعب از خود آزاد میکنند. الف- فولو و جریان نوترون را در داخل کره پیدا کنید ب- جریان نوترون در خارج‌ازکره چقدر است.؟ پ- احتمال اینکه یک نوترون چشمه ازکره بخارج نشت نکند چقدر است؟

۵-۱۷- چشمه‌های نوترون طبق تابع $S(y,z)$ روی صفحه $X=0$ توزیع شده‌اند. نشان دهید که شرط چشمه بصورت زیر است.

$$\lim_{x\to 0} J_X(x,y,z)=\frac{S(y,z)}{2}$$

۵-۱۸- یک نوترون ۰٫۰۲۵ الکترون ولتی بطور عمودی به‌یک قطعه‌گرافیت بضخامت ۱۰۰ سانتیمتر برخورد میکند. الف- احتمال اینکه این نوترون بدون برخورداز قطعه‌گرافیت عبور کند چقدر است؟ ب- احتمال اینکه بالاخره پس از برخوردهایی از قطعه‌گرافیت عبور کند چیست؟ پ- احتمال اینکه ازگرافیت منعکس شود چقدر است؟.

۵-۱۹- یک چشمه خطی بی‌نهایت طویل در هرثانیه S نوترون از واحد طول در یک محیط همگن بی‌نهایت بزرگ آزاد میکند. نشان دهید که شرط چشمه مناسب چنین است.

$$\lim_{r \to 0} rJ(r) = \frac{S}{2\pi}$$

وفولو بارابطهٔ زیر داده میشود.

$$\Phi = \frac{S}{2\pi D} K_0(r/L)$$

که در آن K_0 نوع دوم تابع اصلاح شدهٔ بسل است (ضمیمه دوم).

۵-۲۰- یک چشمه خطی نوترون که واحد طول آن در هرثانیه S نوترون آزاد می کند در امتداد محور یک استوانه بی‌نهایت طویل به‌شعاع a قرارگرفته است.

الف- فولو جریان نوترون را در داخل استوانه پیدا کنید. ب- جریان نوترون در خارج استوانه چقدر است؟ پ- احتمال اینکه یک نوترون چشمه از استوانه فرار نکند چیست؟

۵-۲۱- چشمه‌های تک انرژی از نوترون که هریک S نوترون در ثانیه برسانتیمتر مکعب آزاد میکنند بطور یکنواخت دریک کند کننده نامحدود توزیع شده‌اند.

الف- نشان دهید که فولو بوسیلهٔ رابطهٔ زیر داده میشود.

$$\Phi_0 = \frac{S}{\Sigma_a}$$

ب- اگر یک لایهٔ جاذب نازک بی‌نهایت وسیع در $X=0$ وارد محیط شود، نشان دهید که فولو بشکل زیر در خواهد آمد.

$$\Phi(X) = \Phi_0\left[1 - \frac{\gamma e^{-|X|/L}}{\gamma + (2D/L)}\right]$$

که در آن $\gamma = \Sigma_a' t$ و Σ_a' و t بترتیب سطح مقطع جذب وضخامت لایه جاذب است ، پارامتر های دیگر به کند کننده مربوط میشوند. راهنمایی، بالایهٔ جاذب طبق شرط چشمه زیر رفتار کنید.

$$\lim_{X \to 0} J(X) = -\Sigma_a' t\, \Phi(0)/2$$

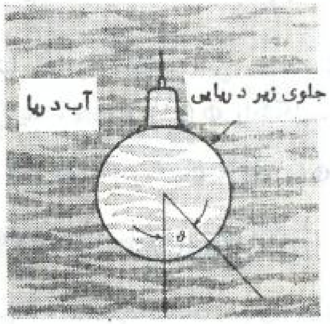
۵-۲۲- یک شعاع یک جهتهٔ نوترون باشدت I به یک محیط پخش نیمه بی‌نهایت برخورد میکند. فولو در داخل محیط رامیتوان به‌دو طریق بدست آورد.

(۱)- باحل معادلهٔ پخش در شرط مرزی $I = J^+(0)$ ، یا (۲)- بادر نظرگرفتن دانستهٔ برخورد بعنوان‌چشمه توزیع شده در داخل محیط. بااستفاده از این دو روش فولو را حساب کرده ومنحنی تغییرات آنرا رسم کنید ودرستی هریک از این دو روش رابحث نمایید.

۵-۲۳- فولوی نوترون در سطح یک زیردریایی غوطه‌ور از رابطه:

$$\Phi = a + b\cos\theta$$

بدست میآید که در آن a و b ثابت هستند و θ یک زاویهٔ استوانه‌ای است که نسبت به خط قایم اندازه‌گیری شده باشد. (ش ۵-۱۰) فولو را در آب دریای اطراف آن حساب کنید. [راهنمایی: با استفاده از روش جدا کردن متغییرها معادلهٔ پخش را در دستگاه مختصات استوانه‌ای حل کنید. (به یک کتاب دربارهٔ ریاضیات پیشرفته یا به قسمت ۹-۳ مراجعه شود]



ش ۵-۱۰

۵-۲۴- دو ناحیه پخش کننده مجاور هم A و B را در نظر بگیرید. A محتوی چشمه‌های نوترون است ولی B نیست. آلبید[1] ویا ضریب انعکاس β برای ناحیه B نسبت به A بصورت نسبت $\beta = \frac{J_{out}}{J_{in}}$ تعریف میشود که J_{in} و J_{out} بترتیب جریان نوترون ورودی به B وخروجی از آن هستند که در فصل مشترک دو محیط محاسبه شده‌اند. الف- اگر ناحیه B یک قطعه بی‌نهایت وسیع باضخامت a باشد نشان دهید که آلبید مربوط به آن بافرمول زیر داده میشود .

$$\beta = \frac{1 - (2D/L)\coth(a/L)}{1 + (2D/L)\coth(a/L)}$$

که در آن همه پارامترها به ناحیهٔ B مربوط میشوند.

ب- اگر ناحیه B آب باشد، β را بصورت تابعی از a رسم کنید.

1- Albedo

پ ـ وقتی که ناحیه B بی‌نهایت ضخیم باشد β را برای چهار کند کننده H_2O ، D_2O ، Be و C حساب کنید.

۵-۲۵- کره‌ای بشعاع a از مادهٔ کند کننده A دریک‌محیط بی‌نهایت بزرگ‌از کند کنندهٔ B فرو برده شده است. یک چشمه ایزوتروپ که در هرثانیه S نوترون آزاد میکند در مرکز کند کننده A قرار دارد. فلوی نوترون در سراسر این سیستم را بیابید.

۵-۲۶- یک محیط یکنواخت وبی‌نهایت بزرگ راکه عاری از چشمه نوترون است ولی محتوی نوترون میباشد در نظر بگیرید. الفـ اگر پراکندگی در سیستم مختصات آزمایشگاهی ایزوتروپ باشد نشان دهید که فولو در معادلهٔ انتگرال زیر صدق میکند.

$$\Phi(r) = \frac{\Sigma_s{}^*}{4\pi} \int \Phi(\bar{r}') \frac{e^{-\Sigma_t |\bar{r}-\bar{r}'|}}{|\bar{r}-\bar{r}'|^2}$$

که این انتگرال در سراسر فضا محاسبه میشود .این معادله شکل انتگرالی معادله انتقال است. بـ بمنظور سادگی فرض کنید $r=0$ و $\Phi(r')$ رابشکل سری تیلور زیر بسط دهید.

$$\Phi(\bar{r}') = \Phi(0) + X\,\Phi_X(0) + y\,\Phi_y(0) + z\Phi_z(0) + \frac{1}{2}X^2\,\Phi_{XX}(0) + \frac{1}{2}XY\Phi_{XY}(0) + \cdots$$

که مشتق‌گیری بوسیله زیرنویس‌ها مشخص‌شده است. باقرار دادن‌مستقیم نتیجه فوق‌درمعادلهٔ انتگرال نشان دهید که اگر از جملات درجه دوم ببعد سری صرف نظر کنیم فولو در معادلهٔ پخش صدق خواهد کرد و D از رابطهٔ ۵-۳۷ بدست میآید.

این نتیجه‌را میتوان بشکل زیر تعمیم‌داد. هرگاه سری کامل‌در معادله انتگرال‌قرار داده شود دیده میشود که پس‌از انتگرال‌گیری فقط جملاتی‌را که بشکل $\nabla^2\Phi$ ، $\nabla^4\Phi$ ، $\nabla^{2n}\Phi$ هستند باقی میمانند وفولو در این صورت تنها بشرطی در معادله پخش صدق خواهد کرد که D از رابطهٔ زیر

$$\frac{\Sigma_s}{2}\sqrt{\frac{D}{\Sigma_a}}\ \mathrm{Ln}\left[\frac{\Sigma_t + \sqrt{\Sigma_a/D}}{\Sigma_t - \sqrt{\Sigma_a/D}}\right]$$

حساب شود. این یک‌روش‌بدست آوردن‌معادلهٔ ۵-۳۸ برای‌حالت پراکندگی ایزوتروپ($\mu=0$) میباشد.

* درمتن انگلیسی زیرنویس S از Σ_s اشتباهاً حذف شده است که در اینجا تصحیح میشود - م.

۵-۲۷- الف: باحل معادلهٔ پخش برای یک چشمه سطحی که در X' قرار دارد، نشان دهید که کرنل‌پخش برای یک تیغه بی‌نهایت بزرگ به ضخامت a بوسیله رابطه زیر داده میشود.

$$G(X,X') = \frac{L}{D\,\mathrm{Sinh}\,(a/L)} \begin{cases} \mathrm{Sin\,h}\frac{1}{L}\left(\frac{a}{2} - X\right)\mathrm{Sin\,h}\frac{1}{L}\left(\frac{a}{2} + X'\right), X > X' \\ \mathrm{Sin\,h}\frac{1}{L}\left(\frac{a}{2} + X\right)\mathrm{Sin\,h}\frac{1}{L}\left(\frac{a}{2} - X'\right), X < X' \end{cases}$$

بـ بابکار بردن این کرنل فولوی نوترون را در تیغه‌ای که شامل چشمه‌هایی باشد که بطور یکنواخت توزیع شده ودر هرثانیه S نوترون بازای هرسانتیمتر مکعب آزاد میکنند حساب کنید.

۵-۲۸- الف: بامحاسبه فولوی حاصل ازیک پوسته نازک کروی بشعاع r' از چشمه‌های نروتوون نشان دهید که کرنل برای توزیع چشمه‌ای دریک محیط نامحدود که تقارن کروی داشته باشد از رابطهٔ زیر بدست میآید.

$$G(r,r') = \frac{L}{8\pi r r' D} \begin{cases} \left[e^{-(r-r')/L} - e^{-(r'+r)/L}\right], r > r' \\ \left[e^{-(r'-r)/L} - e^{-(r'+r)/L}\right], r < r' \end{cases}$$

[راهنمایی: ازشرط چشمه

$$4\pi (r')^2 \lim_{\in \to 0} \left[J_r(r'+\in) - J_r(r'-\in) \right] = 1$$

استفاده کنید].

بـ بااستفاده از این کرنل فولو را در هر نقطه ازیک محیط نامحدود که‌شامل چشمه‌هایی باشد که بطور یکنواخت توزیع شده ودر هر ثانیه S نوترون برسانتیمتر مکعب آزاد میکنند حساب کنید.

۵-۲۹- بابکار بردن کرنل‌پخش که‌در مسئله ۵-۲۸ بدست‌آمد فولو را در سراسریک کره بشعاع R که شامل چشمه‌های نوترونی است که بطور یکنواخت توزیع شده ودر هر ثانیه S نروتون برسانتیمتر مکعب آزاد میکنند حساب کنید.

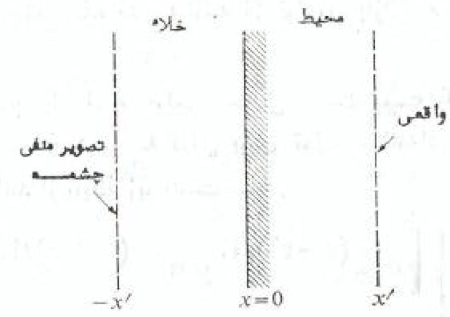
۵-۳۰ - کرنل پخش $G(X,X')$ برای یک محیط نیمه بی‌نهایت یعنی ناحیه $0 \leqslant X < \infty$ را میتوان بافرض اینکه برای هرچشمه سطحی در X' یک چشمه سطحی منفی در $-X'$ وجود دارد (ش ۵-۱۶)واینکه‌بمنظور انجام‌محاسبات محیطتا ∞ — امتداد یافته است حساب کرد.

در این صورت فولوی حاصل از دو چشمه سطحی در معادلهٔ پخش صدق میکند و در روی سطح محیط ازبین میرود. این روش بنام روش تصاویر[1] مشهور است.

الف- بهاین طریق نشان دهید که کرنل پخش برای یک محیط نیمه بی‌نهایت چنین است.

$$G(X,X')=\frac{L}{2D}\left[e^{-|X-X'|/L}-e^{-|X'+X|/L}\right]$$

ب- این کرنل رابکار برده فولورا در یک محیط نیمه بی‌نهایت که محتوی چشمه‌های نوترونی باشد که بطور یکنواخت توزیع شده‌اند حساب کنید.



ش ۵-۱۶

۵-۳۱- چشمه‌های نوترون در یک تیغه برهنه بی‌نهایت که ضخامت امتدادی آن a است طبق رابطهٔ $S(X)=S(X+a/2)$ توزیع شده‌اند که در آن S یک ثابت است و X ازمرکز تیغه اندازه‌گرفته‌میشود. نشان دهید که فولو در داخل تیغه از رابطهٔ زیر بدست میآید.

$$\Phi=\frac{Sa}{\Sigma_a}\left[\frac{X}{a}+\frac{1}{2}-\frac{\operatorname{Sinh}[(X+a/2)/L]}{\operatorname{Sin h}(a/L)}\right]$$

۵-۳۲- ثابت کنید که:

$$\int_{-a/2}^{a/2}\operatorname{Cos}\frac{m\pi X}{a}\operatorname{Cos}\frac{n\pi X}{a}\,dX$$

صفر میشود مگر اینکه $m=n$ باشد.

۵-۳۳- تابع زیر را برحسب تابع ویژه تیغه بسط دهید.

$$f(X)=A(a^2-4X^2),\quad -a/2\leqslant X\leqslant a/2$$

1- Method of images.

۵-۳۴- یک تیغه برهنه ازکندکننده باضخامت امتدادی a محتوی چشمه نوترونی است که بطور یکنواخت توزیع شده ودر هرثانیه S نوترون بازای هر سانتیمتر مکعب آزاد میکند.

فولو جریان حرارتی را درقطعه به روش‌های زیر بیابید:

الف- باحل مستقیم معادلهٔ پخش. ب- باستفاده از روش توابع ویژه، نشان دهید که دو جواب معادل هم هستند.

۵-۳۵- توابع ویژه‌که در قسمت ۵-۱۰ بدست آمدند توابع زوجی از X هستند وبه این دلیل برای مسایلی‌که شامل توزیع چشمه‌هایی است‌که آنها نیز نسبت به X زوج هستند مناسبند. الف- نشان دهید‌که توابع ویژه برای توزیع چشمه‌های نامشخص در یک تیغه مناسب هستند بشکل زیرند.

$$\varphi_n=\begin{cases}\operatorname{Cos}\dfrac{n\pi X}{a}, & n=\text{فرد}\\[2ex] \operatorname{Sin}\dfrac{n\pi X}{a}, & n=\text{زوج}\end{cases}$$

ب- نشان‌دهید‌که این توابع یک مجموعه متعامد تشکیل میدهند.

۵-۳۶- یک چشمه نوترون‌که درهر ثانیه S نوترون بازای سانتیمتر مربع آزاد میکند در مرکز تیغه برهنه ونامحدودی بضخامت a ازیک کند کننده قرار گرفته است.

الف- میزان جذب نوترون درتیغه را بیابید. ب- میزان نشت نوترون بخارج از تیغه را پیدا کنید. پ- احتمال اینکه یک نوترون از چشمه آزاد شده واز تیغه فرار نکند چقدر است؟

۵-۳۷- تیغه نامحدودی را در نظر بگیرید که‌محتوی توزیع دلخواهی از چشمه‌های نوترون‌که در قسمت ۵-۱۰ بروش توابع ویژه بحث شده در حالت تعادل باید تعداد کل نوترون‌هایی‌که توسط چشمه‌ها در داخل تیغه آزاد میشود مساوی باشد با تعدادی‌که در تیغه جذب میشود باضافه تعدادی‌که‌از تیغه فرار میکنند ، بابکار بردن عبارتی که‌در معادلهٔ ۵-۱۱ برای $\Phi(X)$ داده شده این شرط را ثابت کنید.

۵-۳۸- یک مکعب برهنه ازکندکننده بضلع a در مرکزش شامل یک چشمه نقطه‌ای ایزوتروپ است‌که درهرثانیه S نوترون آزاد میکند.

الف نشان دهید که‌فولو از رابطهٔ زیر بدست میآید.

$$\varphi=\frac{8S}{a^3\Sigma_a}\sum_{n,m,l\ \text{فرد}}\frac{1}{1+B^2_{mnl}L^2}\operatorname{Cos}\frac{l\pi X}{a}\operatorname{Cos}\frac{m\pi y}{a}\operatorname{Cos}\frac{n\pi z}{a}$$

که در آن داریم

$$B^2_{lmn} = (l^2+m^2+n^2)\left(\frac{\pi}{a}\right)^2$$

ب- عبارتی برای احتمال فرار یک نوترون چشمه از مکعب بدست آورید.
[راهنمایی: در قسمت (الف) فولو Φ را بصورت سری تابع ویژه سه‌گانه بسط دهید و باقرار دادن این سری در معادلهٔ پخش Al_{mn} را بدست آورید].

$$\Phi = \sum A_{lmn} \mathrm{Cos}\frac{l\pi x}{a} \mathrm{Cos}\frac{m\pi y}{a} \mathrm{Cos}\frac{n\pi z}{a}$$

۵-۳۹- یک چشمه نقطه‌ای از ایزوتروپ که S نوترون در ثانیه آزاد میکند در مرکز یک استوانهٔ قایم از کند کننده بشعاع R وارتفاع H قرارگرفته است.
الف- بافرض اینکه مبداء مختصات استوانه‌ای در مرکز این استوانه قرارگرفته باشد، نشان دهید که تابع چشمه از رابطهٔ زیر بدست میآید:

$$S(r,z) = \frac{S\,\delta(r)\,\delta(z)}{\pi r}$$

ب- نشان دهید که فولو از رابطهٔ زیر

$$\Phi(r,z) = \frac{2S}{\Sigma_a V} \sum_{\substack{m\ \text{فرد} \\ n=1,2,3,\dots}} \frac{\mathrm{Cos}(m\pi z/H)\,J_0(x_n r/R)}{(1+B^2_{mn}L^2)\,J_1^2(x_n)}$$

بدست میآید که در آن V حجم استوانه بوده و n، X_n امین صفر $J_0(X)$ یعنی $J_0(X_n)=0$ میباشد و

$$B^2_{mn} = \left(\frac{m\pi}{H}\right)^2 + \left(\frac{X_n}{R}\right)^2$$

[راهنمایی: در قسمت الف به ضمیمه دوم مراجعه شود در قسمت ب، متعامد بودن تابع‌بسل را که در ضمیمهٔ دوم بحث شده است بکار برید وهردوی $S(r,z)$ و $\Phi(r,z)$ را بصورت سری‌های دوگانه تابع ویژه یعنی:

$$\Phi(r,z) = \sum A_{mn} \mathrm{Cos}\left(\frac{m\pi z}{H}\right) J_0\left(\frac{X_n r}{R}\right)$$

بسط دهید. A_{mn} راباقرار داردن در معادله پخش بدست آورید].

۵-۴۰- اصل اساسی محاسبه مونت‌کارلو را میتوان در مثال زیر دید.

یک استاد دانشگاه از ناحیهٔ شمالی ایالت نیویورک که به‌شهر نیویورک رفته برای یک‌گردش دلخواه در مرکز مانهاتان (قسمت کارتزیان شهر) در هر چهار راه او بایک سکه دومرتبه شیرو خط میکند. چنانچه هردو مرتبه شیر باشد بطرف شمال اگر مرتبه اول شیر ودوم خط باشد بطرف شرق، اگر هردو خط باشد بطرف جنوب واگر مرتبه اول خط ودوم شیر باشد بطرف مغرب میرود. باشیروخط کردن، این راه‌پیمایی را تکرار نموده وفاصلهٔ متوسطی را که او نظیر پرواز کلاغ از اتاق خود در YMCA پس ازطی‌مسافت کلی در چهار راه پیموده است تخمین بزنید، فرض کنید که فاصلهٔ چهارراه‌ها مساوی است.

۵-۴۱- یک چشمه نوترون نقطه‌ای در یک محیط نامحدودی که نوترون را جذب میکند ولی پراکنده نمیکند، یعنی $\Sigma_a \gg \Sigma_S$ قرارگرفته است .
الف- تابع توزیع احتمالی راکه جذب نوترون‌ها رابیان کند پیدا کنید.
ب- ممان دوم این تابع را حساب کرده وباممان دوم مشابه یک محیط پخش کننده مقایسه کنید.

۵-۴۲ - یک چشمه‌نقطه‌ای ایزوتروپ‌تک‌انرژی که در هرثانیه S نوترون آزاد می کند بفاصله $\frac{R}{2}$ از مرکز یک کره بشعاع R از کند کننده‌ای قرار دارد . عبارتی برای نشان دادن فولو در مرکز کره بدست آورید.