بسم ا... الرحمن الرحیم

سیستم های کنترل دیجیتال

Digital Control Systems

دکتر محمدرضا رمضانی

مراجع

1. K. Ogata, Discrete-time control systems, Prentice Hall, 1995

۲- اسلایدهای درس کنترل دیجیتال دانشگاه علم و صنعت دکتر بلندی و دکتر اسمعیل زاده

- سرفصل مطالب
- نظریه نمونه برداری ضربه ای
- سیستم های کنترل زمان گسسته و نمونه بردارهای ضربه ای
- نگهدارنده مرتبه صفر

فصل سوم

مطالب زمینه ای برای تحلیل حوزه – z

مقدمه

این فصل مطالب زمینه ای لازم را برای تحلیل و طراحی سیستم های کنترل زمان – گسسته SISO و Time invariant در حوزه z را ارائه می دهد.

❑ مزیت اصلی روش تبدیل Z آن است که مهندسین را قادر می سازد که روشهای طراحی زمان – پیوسته مرسوم را به سیستم های زمان – گسسته ای که ممکن است قسمتی زمان – گسسته و قسمتی زمان – پیوسته باشند، اعمال کنند.

کاربرد پذیری و محدودیتهای تحلیل و طراحی حوزه Z

تحلیل و طراحی حوزه Z سیستم های کنترل زمان – گسسته سرراست و مفید است. لیکن روش تبدیل Z محدودیتهایی دربر دارد که به صورت زیر بیان می شوند:

❑ از لحاظ ریاضی، فرآیند نمونه برداری با نمونه برداری ضربه ای تقریب زده می شود. یعنی، سیگنال نمونه برداری شده با قطاری از ضربه ها که شدت آنها با اندازه سیگنال ورودی در لحظه های نمونه برداری برابر است، تقریب زده می شود. این رفتار ریاضی تنها وقتی معتبر است که طول زمان نمونه برداری در مقایسه با بزرگ ترین ثابت زمانی موجود در سیستم کوچک باشد.

❑ روش تبدیل Z تنها برای سیستم هایی نتایج دقیق ارائه می دهد که بتوان در آنها سیگنال های موجود را با مقادیر آنها در زمانهای نمونه برداری دقیقاً نمایش داد. یعنی، سیگنالهایی که میان دو لحظه نمونه برداری متوالی، خیلی از هم متفاوت نباشند. عکس تبدیل Z خروجی سیستم، $X(z)$ ، فقط مقدار $x(kT)$ را که برابر $x(t)$ در لحظه های نمونه برداری است به دست می دهد. در مورد رفتار خروجی میان دو لحظه نمونه برداری متوالی هیچ اطلاعاتی در دسترس نیست.

- برای پیدا کردن پاسخ میان دو لحظه نمونه برداری چندین روش در دسترس است

۱- تبدیل Z اصلاح شده ۲- روش تبدیل لاپلاس ۳- روش فضای حالت

- روش تبدیل Z که توابع تبدیل پالسی را بکار می برد، اساساً برای تحلیل و ترکیب سیستم های کنترل زمان – گسسته خطی تغییر ناپذیر با زمان تک ورودی – تک خروجی سودمند است. برای سیستم های کنترل زمان – گسسته خطی یا غیر خطی تغییر ناپذیر با زمان چند ورودی – چند خروجی روش فضای حالت مناسب تر است.

5

سیستم های کنترل زمان – گسسته و نمونه برداری ضربه ای

- نمونه برداری ضربه ای

در نمونه بردار معمولی، کلیدی بسته می شود تا یک سیگنال ورودی را در هر دوره تناوب نمونه برداری T بپذیرد. در عمل، مدت نمونه برداری در مقایسه با پر اهمیت ترین ثابت زمانی دستگاه بسیار کوتاه است. یک نمونه بردار، سیگنال زمان – پیوسته را به قطاری از پالسها که در لحظه های نمونه برداری $t=0,T,2T,\ldots$ ظاهر می شوند تبدیل می کند، که در آن T دوره تناوب نمونه برداری است.

- نگهدار داده ها

مداری است که داده های نمونه برداری شده را به یک سیگنال زمان – پیوسته تبدیل می کند.

6

Ideal sampler

- Assumptions :
  - Sampling operation is uniform : only one sampling rate exists in the system
  - All samplers in the system are synchronized and have the same sampling frequency.

7

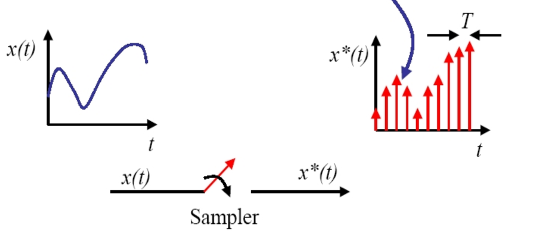
Ideal sampler

- Consider a fictitious sampler : an impulse sampler.
- The output is a train of impulses that begins with t=0 with the sampling period =T and the strength of each impulse = the sample value of the continuous-time signal.

8

Ideal sampler

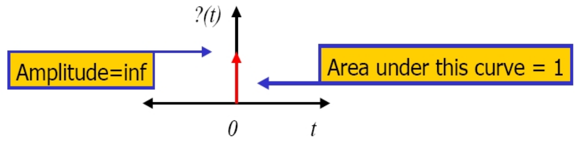
Impulse amplitude=infinity, the area under the curve equals to the amplitude of input signal.



9

Unit impulse

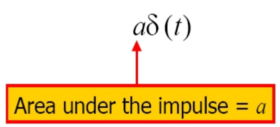
- When a mathematician talks about an unit impulse, it is a mathematical function which has infinite amplitude but unit area (strength).



10

Impulse

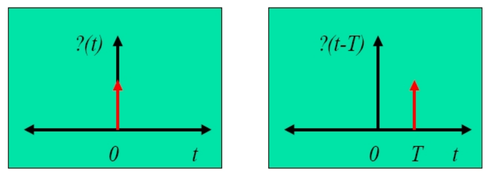
- To say that the impulse has area (strength) other than unit area, we use:



11

Impulse

- When we want the impulse to occur at time other than zero, we use: $\delta(t-T)$



12

Impulse

- Note that the impulse has symmetry property: $\delta(t)=\delta(-t)$
- Another important property of impulse is

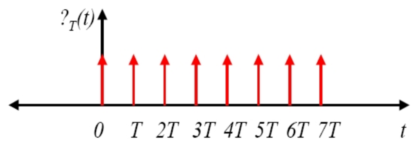
$$\int_a^b f(t)\delta(t-t_0)dt=\begin{cases} f(t_0) & a\le t_0\le b \\ 0 & t_0 \text{ is outside } [a,b] \end{cases}$$

13

Impulse train

- To have impulses occur at regular time interval, we use

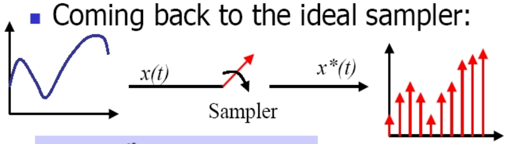
$$\delta_T(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\delta(t-kT)$$



14

Ideal sampler

- Coming back to the ideal sampler:



$$x^*(t)=\sum_{k=0}^{\infty}x(kT)\delta(t-kT)$$

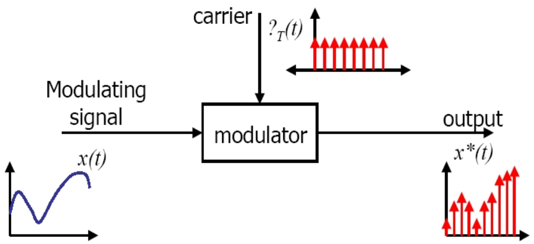
Impulse train at regular interval

Strength=amplitude of $x(t)$ at time kT

15

Ideal sampler

- We may call this ideal sampling process the impulse modulation.



16

Ideal sampler

- Note that, the sampled signal $x^*(t)$ is still continuous-time signal.

$$x^*(t) = x(0)\delta(0) + x(T)\delta(t-T) + \cdots + x(kT)\delta(t-kT) + \cdots$$

Ideal sampler

- Next, consider the Laplace transform of the sampled signal.

$$\begin{aligned}X^*(s) &= \mathcal{L}\left[x^*(t)\right]\\ &= x(0)\mathcal{L}\left[\delta(0)\right] + x(T)\mathcal{L}\left[\delta(t-T)\right] + \cdots + x(kT)\mathcal{L}\left[\delta(t-kT)\right] + \cdots\\ &= x(0) + x(T)e^{-Ts} + \cdots + x(kT)e^{-kTs} + \cdots\\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-kTs}\end{aligned}$$

Ideal sampler

- Note that the Laplace transform of the sampled signal is very similar to the z-transform.

$$\boxed{X^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-kTs}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}e^{Ts} &= z\\ s &= \frac{1}{T}\ln z\end{aligned}}$$

Ideal sampler

- We get

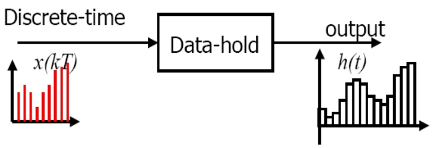
$$X^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-kTs}$$

$$X^*(s)\Big|_{s=\frac{1}{T}\ln z} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k}$$

$$\boxed{X(z) = Z\left[x(k)\right] = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k}}$$ By definition

Data-hold circuit

- Data-hold is a process of generating a continuous-time output signal $h(t)$ from a discrete-time sequence $x(kT)$.



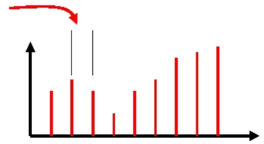
21

Data-hold circuit

- The signal h(t) during the time interval $kT?t?(k+1)T$ may be approximated by a polynomial as

$$h(kT+\tau)=a_n\tau^n+a_{n-1}\tau^{n-1}+\mathrm{K}\ +a_1\tau+a_0$$

- where $0\le\tau<T$



22

❑

فرآیند بوجود آوردن یک سیگنال زمان – پیوسته $h(t)$ از یک دنباله زمان – گسسته $X(kT)$ است. در فاصله زمانی سیگنال $h(t)$ را می توان یک چند جمله ای بر حسب به صورت زیر تقریب زد :

$$h(kT+\tau)=a_n\tau^n+a_{n-1}\tau^{n-1}+\ldots+a_1\tau+a_o$$

بنابراین :

$$h(kT)=x(kT)$$

$$h(kT+\tau)=a_n\tau^n+a_{n-1}\tau^{n-1}+\ldots+a_1\tau+x(kT)$$

23

❑ نگهدار مرتبه **n** ام

✓ نگهدار مرتبه **n** ام، **n+1** داده گسسته قبلی را برای به وجود آوردن یک سیگنال بکار می برد. یعنی :

$$x(kT),\ldots,x((k-n+1)T),x((k-n)T)$$

$n=1$ ⟶ نگهدار مرتبه اول

24

❑ **نکته**

به علت اینکه یک نگهدار مرتبه بالا برای برونیابی یک سیگنال زمان – پیوسته میان لحظه کنونی نمونه برداری و لحظه بعدی نمونه برداری از نمونه های قبلی استفاده می کند، با افزایش تعداد نمونه های قبلی، دقت تقریب زنی سیگنال زمان پیوسته بهتر می شود. اما این دقت بهتر به بهای تاخیر زمانی بیشتر حاصل می شود.

❑ **نکته**

در سیستم های کنترل حلقه بسته، هر تاخیر زمانی اضافه شده در حلقه، پایداری سیستم را کاهش خواهد داد و در برخی موارد حتی ممکن است ناپایداری سیستم را نیز موجب شود.

❑ **نکته**

ساده ترین مدار نگه دار زمانی بدست می آید که ***n=0*** باشد :

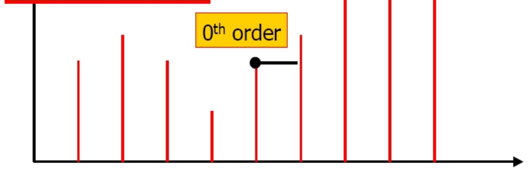
$$h(kT+\tau)=x(kT)$$

Data-hold circuit

- The polynomial nth-order

$$h(kT+\tau)=a_n\tau^n+a_{n-1}\tau^{n-1}+\ldots+a_1\tau+x(kT)$$

$$h(kT+\tau)=x(kT)$$

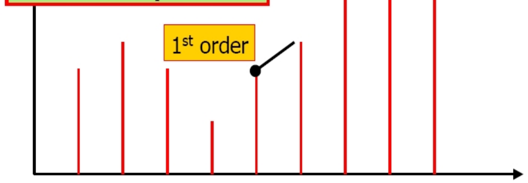


Data-hold circuit

- And call 1st order hold circuit

$$h(kT+\tau)=a_n\tau^n+a_{n-1}\tau^{n-1}+\ldots+a_1\tau+x(kT)$$

$$h(kT+\tau)=a_1\tau+x(kT)$$

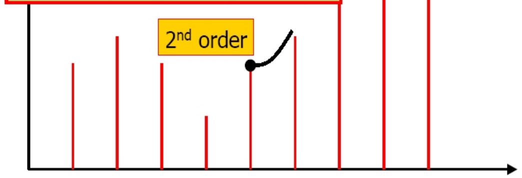


Data-hold circuit

- Or 2nd order hold circuit

$$h(kT+\tau)=a_n\tau^n+a_{n-1}\tau^{n-1}+\ldots+a_1\tau+x(kT)$$

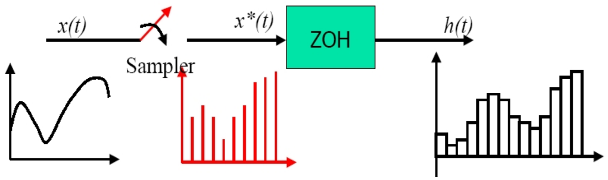
$$h(kT+\tau)=a_2\tau^2+a_1\tau+x(kT)$$



Data-hold circuit

- We will use the simplest Zero-Order hold circuit (ZOH).

$$\boxed{h(kT+\tau)=x(kT)}$$



29

ZOH

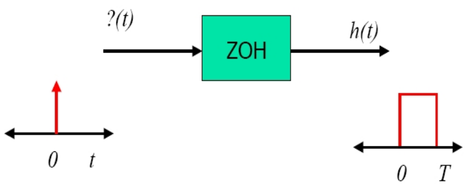
- We will now look at the transfer function of the ZOH.
- Test the ZOH by applying to input the impulse function ?(t) which has the Laplace transform of

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\}=1$$

30

ZOH

- The output is



$$1(t)-1(t-T)$$

31

ZOH

- Taking the Laplace transform of the output signal

$$\mathcal{L}\{1(t)-1(t-T)\}=\frac{1}{s}-\frac{e^{-sT}}{s}$$

$$=\frac{1-e^{-sT}}{s}$$

32

ZOH

- The transfer function of the ZOH is

$$\boxed{ZOH(s) = \frac{\mathcal{L}\{1(t) - 1(t-T)\}}{\mathcal{L}\{\delta(t)\}} = \frac{1-e^{-sT}}{s}}$$

33

Example Ogata Ex 3-3

- Finding the z-transform of

$$X(s) = \frac{1-e^{-sT}}{s}\frac{1}{s+1}$$

$$X(z) = Z\left\{\frac{1-e^{-sT}}{s}\frac{1}{s+1}\right\}$$

34

Example Ogata Ex 3-3

$$X(z) = Z\left\{\frac{1-e^{-sT}}{s}G(s)\right\}$$

$$= Z\left\{\left(1-e^{-sT}\right)\boxed{\frac{G(s)}{s}}\right\}$$

$$= Z\left\{\left(1-e^{-sT}\right)G_1(s)\right\}$$

$$= Z\left\{G_1(s) - e^{-sT}G_1(s)\right\}$$

35

Example Ogata Ex 3-3

$$X(z) = Z\left\{G_1(s) - e^{-sT}G_1(s)\right\}$$

$$= Z\left\{G_1(s)\right\} - Z\left\{e^{-sT}G_1(s)\right\}$$

In time-domain

$$= Z\left\{g_1(t)\right\} - Z\left\{g_1(t-T)\right\}$$

$$= G_1(z) - z^{-1}G_1(z)$$

$$= (1-z^{-1})G_1(z)$$

36

Example Ogata Ex 3-3

$$X(z) = (1 - z^{-1}) G_1(z)$$

$$= (1 - z^{-1}) Z\left\{ \frac{1}{s(s+1)} \right\}$$

$$= (1 - z^{-1}) Z\left\{ \frac{1}{s} - \frac{1}{(s+1)} \right\}$$

$$= (1 - z^{-1}) \left(\frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-T} z^{-1}} \right)$$

Example Ogata Ex 3-3

$$X(z) = (1 - z^{-1}) \left(\frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-T} z^{-1}} \right)$$

$$= \frac{\left(1 - e^{-T}\right) z^{-1}}{1 - e^{-T} z^{-1}}$$