تستهای تکمیلی فصل ۱ ـ مبحث تابع (سؤالات سطح ۲)

۱. اگر $f(x)=x-\sqrt{x}$ و $g(x)=\ln x$، برد تابع $g\circ f$ کدام است؟ (مکانیک ماشین‌های کشاورزی ۸۲)

۱) $(1,+\infty)$ ۲) $(-\infty,-1)$ ۳) $(-\infty,+\infty)$ ۴) $(0,+\infty)$

حل: گزینه ۳ درست است. $g\circ f(x)=\ln(x-\sqrt{x})$ پس ابتدا برد $f(x)=x-\sqrt{x}$ را تعیین می‌کنیم.

$$f(x)=(\sqrt{x}-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}\geq -\frac{1}{4}$$

بنابراین $f(x)$ همه مقادیر بزرگتر از صفر را اتخاذ می‌کند. با توجه به نمودار تابع لگاریتمی در صفحه ۳۱ هنگامی‌که متغییر مستقل تمام اعداد مثبت را می‌پوشاند، مقدار تابع کل $\mathbb{R}$ را پوشش می‌دهد ولذا برد برابر $\mathbb{R}$ است.

۲. فاصله بین دو کانون در نمودار درجه دوم $4x^2-8x+y^2=0$ برابر است با:

۱) $\sqrt{5}$ ۲) $2\sqrt{5}$ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) $2\sqrt{3}$

حل: گزینه ۴ درست است. معادله داده شده مربوط به بیضی است. آن را به‌صورت استاندارد می‌نویسیم.

$$4(x-1)^2+y^2-4=0 \implies (x-1)^2+\frac{y^2}{4}=1 \implies a=1,b=2 \implies c^2=b^2-a^2=3$$

و فاصله دو کانون $2c=2\sqrt{3}$ است.

۳. اگر توابع f و g در تساوی $f(x+T_1)=2-f(x)$ و $g(x+T_2)=\frac{1-g(x)}{1+g(x)}$ برای اعداد حقیقی و مثبت T_1 و T_2 صدق کنند، دوره تناوب $f(x)$ و $g(x)$ به ترتیب برابر است با:

۱) $2T_1,3T_2$ ۲) $2T_1,2T_2$ ۳) $T_1,2T_2$ ۴) $3T_1,3T_2$

حل: گزینه ۲ درست است. با توجه به فرضیات سؤال:

$$f(x+2T_1)=f\big((x+T_1)+T_1\big)=2-f(x+T_1)=2-\big(2-f(x)\big)=f(x)$$

$$g(x+2T_2)=g\big((x+T_2)+T_2\big)=\frac{1-g(x+T_2)}{1+g(x+T_2)}=\frac{1-\dfrac{1-g(x)}{1+g(x)}}{1+\dfrac{1-g(x)}{1+g(x)}}=\frac{\dfrac{2g(x)}{1+g(x)}}{\dfrac{2}{1+g(x)}}=g(x)$$

پس دوره تناوب f و g به ترتیب برابر $2T_1$ و $2T_2$ است.

۴. در بسط عبارت $(1-\frac{x}{2}+\frac{1}{\sqrt{x}})^8$ مجموع ضرایب x^3 کدام است؟

۱) $-\frac{7}{8}$ ۲) $\frac{77}{4}$ ۳) $\frac{77}{24}$ ۴) $\frac{7}{12}$

حل: گزینه ۲ درست است. با قرار دادن $a=1,b=-\frac{x}{2},c=\frac{1}{\sqrt{x}}=x^{-\frac{1}{2}}$ و $n=8$ در فرمول (۱ ــ ۹) در صفحه ۳۸، جمله عمومی عبارت است از:

$$\frac{8!}{i!j!k!}(1)^i(-\frac{x}{2})^j(x^{-\frac{1}{2}})^k=\frac{8!(-\frac{1}{2})^j}{i!j!k!}x^{j-\frac{k}{2}} \quad , \quad i+j+k=8$$

جمله شامل x^3 وقتی ایجاد می‌شود که $j-\frac{k}{2}=3$ پس $k=2j-6$ و با جایگذاری در رابطه $i+j+k=8$ داریم $i=14-3j$. با توجه به این که $i\geq 0$ و $k\geq 0$ پس $3\leq j\leq\frac{14}{3}$ ولذا $j=3,4$. ضریب جملات شامل

$x^{۳}$ برابر است با:

$$A_j = \frac{۸!(-\frac{۱}{۲})^j}{(۱۴-۳j)!j!(۲j-۶)!} \qquad , \qquad j = ۳,۴$$

پس ضریب $x^{۳}$ در کل مجموع برابر است با:

$$x^{۳}\ \text{ضریب} = A_۳ + A_۴ = \frac{۸!(-\frac{۱}{۲})^{۳}}{۵!۳!} + \frac{۸!(-\frac{۱}{۲})^{۴}}{۲!۴!۲!} = -۷ + \frac{۱۰۵}{۴} = \frac{۷۷}{۴}$$

۵. برای $۲\pi > x > \frac{۳\pi}{۲}$ مقدار $\cos^{-۱}(\sin x)$ برابر است با: **(فلسفه ۸۰)**

۱) $x + \frac{\pi}{۲}$ ‏ ۲) $\pi - x$ ‏ ۳) $x - \pi$ ‏ ۴) $\frac{۵\pi}{۲} - x$

حل: گزینه ۴ درست است.

روش اول. حالت خاص $x = \frac{۱۱\pi}{۶}$ را در نظر بگیرید آنگاه $\cos^{-۱}(\sin x) = \cos^{-۱}(-\frac{۱}{۲}) = \frac{۲\pi}{۳}$ و فقط گزینه (۴) به ازای $x = \frac{۱۱\pi}{۶}$ برابر $\frac{۲\pi}{۳}$ است.

روش دوم. توجه کنید که $\cos\left(\frac{۵\pi}{۲} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{۲} - x\right) = \sin x$ و از طرفی:

$$-۲\pi < -x < -\frac{۳\pi}{۲} \implies \frac{\pi}{۲} < \frac{۵\pi}{۲} - x < \pi \implies \cos^{-۱}(\sin x) = \cos^{-۱}\left(\cos\left(\frac{۵\pi}{۲} - x\right)\right) = \frac{۵\pi}{۲} - x$$

توجه کنید که برای $۰ \le \alpha \le \pi$ داریم $\cos^{-۱}(\cos\alpha) = \alpha$ و چون $\pi > \frac{۵\pi}{۲} - x > \frac{\pi}{۲}$ پس تساوی بالا درست است.

روش سوم. مانند تست ۱۱ در صفحه ۳۰ از مشتق استفاده کنید.

۶. اگر f و g توابع با ضوابط $f(x) = x^{۲} + ۲x$ و $g(x) = x^{۳}$ باشند، معادله $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$ چند ریشه متمایز دارد؟ **(ژئوفیزیک ۸۲)**

۱) ۱ ‏ ۲) ۲ ‏ ۳) ۳ ‏ ۴) ۶

حل: گزینه ۲ درست است. توابع $f \circ g$ و $g \circ f$ را تشکیل می‌دهیم.

$$(f \circ g)(x) = f(x^{۳}) = x^{۶} + ۲x^{۳} \quad \text{و} \quad (g \circ f)(x) = g(x^{۲} + ۲x) = (x^{۲} + ۲x)^{۳}$$

$$\implies x^{۳}(x^{۳} + ۲) = x^{۳}(x + ۲)^{۳} \implies x = ۰ \quad \text{و} \quad x^{۳} + ۲ = (x + ۲)^{۳}$$

از معادله دوم نتیجه می‌شود:

$$x^{۳} + ۲ = x^{۳} + ۶x^{۲} + ۱۲x + ۸ \implies ۶x^{۲} + ۱۲x + ۶ = ۰ \implies x^{۲} + ۲x + ۱ = ۰ \implies x = -۱$$

پس معادله دارای دو جواب متمایز است.

۷. برد تابع $f(x) = \sqrt{\log(۱ - x^{۲})}$ کدام است؟ **(سیستم ـ آزاد ۷۶)**

۱) $[۰,۱]$ ‏ ۲) $\{۰\}$ ‏ ۳) $\mathbb{R}^+$ ‏ ۴) $\emptyset$

حل: گزینه ۲ درست است. ابتدا دامنه f را به دست می‌آوریم. باید $۰ < ۱ - x^{۲}$ و $\log(۱ - x^{۲}) \ge ۰$ از نابرابری دوم داریم:

$$\log(۱ - x^{۲}) \ge ۰ = \log ۱ \implies ۱ - x^{۲} \ge ۱ \implies -x^{۲} \ge ۰ \implies x = ۰$$

و چون $x = ۰$ در نابرابری اول صدق می‌کند پس $D_f = \{۰\}$ و لذا $R_f = \{f(۰)\} = \{۰\}$.

خودآزمایی ۱ ـ سطح ۱

۱. مجموعه x هایی که در نامساوی $8 < \frac{3}{7x-1} < 4$ صدق می‌کند، کدام است؟

(ژئوفیزیک و سیستم ۸۱)

۱) $\{x : \frac{11}{56} < x < \frac{1}{4}\}$
۲) $\{x : \frac{11}{56} < x < \frac{7}{8}\}$
۳) $\{x : \frac{1}{4} < x < \frac{24}{7}\}$
۴) $\{x : \frac{11}{56} < x < \frac{24}{7}\}$

۲. اگر $3f(x+2) - f(x) = 4$ و مبدأ مختصات نقطه‌ای از نمودار f باشد، آنگاه مقدار $f(8)$ کدام است؟

(سیستم ۸۰)

۱) $\frac{150}{81}$
۲) $\frac{160}{81}$
۳) $\frac{170}{81}$
۴) $\frac{180}{81}$

۳. دامنه تابع $f(x) = \sqrt{x^2 - |x|}$ کدام فاصله است؟ (صنایع غذایی ۷۷)

۱) $\mathbb{R} - (-1, 1)$
۲) $\mathbb{R} - (0, 1)$
۳) $\mathbb{R} - (-1, 0)$
۴) $(\mathbb{R} - (-1, 1)) \cup \{0\}$

۴. برد تابع $f(x) = \frac{2}{1+x^2}$ در کدام فاصله است؟ (صنایع غذایی ۷۸)

۱) $[0, 2]$
۲) $(0, 2]$
۳) $(0, 4]$
۴) $[0, 4]$

۵. برد تابع $f(x) = \frac{|x|}{|x|+1}$ کدام است؟ (صنایع ـ آزاد ۷۸)

۱) $[0, 1)$
۲) $[0, +\infty)$
۳) $\mathbb{R}$
۴) $(-\infty, 0]$

۶. اگر $f(x) = \frac{1}{1-x}$ آنگاه $f \circ f \circ f(x)$ کدام است؟ (ژئو فیزیک ۷۹)

۱) $\frac{1}{x}$
۲) $1 - x$
۳) x
۴) $\frac{1}{1-x}$

۷. درصورتی که $f(x) = \ln x^9$ و $g(x) = \sqrt[3]{x^2}$ و $h(x) = e^x$ ضابطه تابع $f\big(g\big(h(x)\big)\big)$ کدام است؟

(سیستم ۸۰)

۱) $6x$
۲) $9x$
۳) $10x$
۴) e^{9x}

۸. اگر $f(x) = x^3 + 3x + 4$ نمودار f^{-1} ازکدام نقطه می‌گذرد؟ (صنایع غذایی ۷۷)

۱) $(-1, 1)$
۲) $(-1, 0)$
۳) $(0, -1)$
۴) $(1, 1)$

۹. ضابطه معکوس $f(x) = 1 + \sqrt{1+x}$ به کدام‌صورت است؟ (آبیاری و زه‌کشی ۷۸)

۱) $x^2 - 2x \ , \ x \geq 1$
۲) $x^2 - 2x \ , \ x < 1$
۳) $x^2 - 2x$
۴) $x^2 + 2x \ , \ x < -1$

۱۰. توابع $f(x) = \frac{1}{[|x|+1]|x|}$ و $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2}}$ در کدام مورد صدق می‌کند؟ (سیستم ۸۲)

۱) مجموعه مقادیر g شامل دامنه g است.
۲) دامنه‌های f و g برابرند.
۳) دامنه f زیر مجموعه مقادیر g است.
۴) مجموعه مقادیر f شامل دامنه f است.

۱۱. دامنه تابع $f(x) = \sqrt{1 - \log_2(x-2)}$ کدام فاصله است؟ (ژئوفیزیک ۷۷)

۱) $[3, 4)$
۲) $(3, 4]$
۳) $[2, 4)$
۴) $(2, 4]$

۱۲. اگر $\log_{۲} A = ۵$ آنگاه $\log_{\frac{۱}{۲}} A$ کدام است؟ **(ژئوفیزیک ۷۹)**

۱) -۵ ۲) $-\frac{۵}{۲}$ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) ۳

۱۳. حاصل $\dfrac{x^{\log_a y}}{y^{\log_a x}}$ کدام است؟ **(ژئوفیزیک ۷۹)**

۱) $\log_x(\frac{x}{y})$ ۲) $\log_y x$ ۳) $\log_x y$ ۴) ۱

۱۴. برد تابع $f(x) = ۲^{۴x-x^۲}$ برابر است با:

۱) $(۰, ۱۶]$ ۲) $(۰, +\infty)$ ۳) $[۱, ۱۶]$ ۴) $(۱, +\infty)$

۱۵. برد تابع با ضابطه $f(x) = ۲^{x-[x]}$ کدام است؟ **(هوافضا ۸۱)**

۱) $(۰, ۱]$ ۲) $[۱, ۲]$ ۳) $[۱, ۲)$ ۴) $(۰, ۱)$

۱۶. معکوس تابع $f(x) = \dfrac{e^x - ۱}{e^x + ۱}$ برابر است با:

۱) $\ln \dfrac{x+۱}{x-۱}$ ۲) $\ln \dfrac{x+۱}{۱-x}$ ۳) $\ln \dfrac{x-۱}{x+۱}$ ۴) $\ln \dfrac{۱-x}{x+۱}$

۱۷. مقدار $\cosh^۲ x - \sinh^۲ x$ برابر است با: **(انرژی ـ آزاد ۸۲)**

۱) ۱ ۲) ۰ ۳) $\dfrac{(۱-\cosh ۲x)}{۲}$ ۴) $\dfrac{(۱-\sinh ۲x)}{۲}$

۱۸. مقدار $\tanh(\ln ۳)$ کدام است؟ **(صنایع غذایی ۷۷)**

۱) $\frac{۳}{۵}$ ۲) $\frac{۴}{۵}$ ۳) $\frac{۵}{۴}$ ۴) $\frac{۵}{۳}$

۱۹. برد (Range) تابع $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ کدام است؟ **(معدن ۸۰)**

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $(-۱, ۱)$ ۳) $\mathbb{R}^+$ ۴) $(۰, \frac{۱}{۲})$

۲۰. دامنه تابع $f(x) = \cosh^{-۱} \sqrt{x + \frac{۱}{۲}}$ برابر است با:

۱) $[-\frac{۱}{۲}, +\infty)$ ۲) $[۰, +\infty)$ ۳) $[\frac{۱}{۲}, +\infty)$ ۴) $[-\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲}]$

۲۱. اگر $x > ۰$، $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{۲}$ آنگاه $f^{-۱}(\frac{۵}{۴})$ کدام است؟ **(ژئوفیزیک ۷۷)**

۱) $\ln ۳$ ۲) $\ln ۲$ ۳) $\ln \sqrt{۲}$ ۴) $\ln \sqrt{۳}$

۲۲. تعداد جملات بسط $(a+b+c)^۵$ برابر است با:

۱) ۳۵ ۲) ۲۰ ۳) ۲۱ ۴) ۱۸

۲۳. مجموع ضرایب بسط $(x+y-z)^۴$ برابر است با:

۱) ۲ ۲) ۱۶ ۳) ۳۲ ۴) ۱

۲۴. در بسط $(\frac{x^۲}{۲} - \frac{۱}{x})^۹$ ضریب جمله‌ای که فاقد x است، کدام است؟ **(مدیریت ۸۲)**

۱) $\frac{۷}{۲}$ ۲) $-\frac{۷}{۲}$ ۳) $\frac{۲۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۲۱}{۲}$

۲۵. ضریب جمله $x^۲$ در بسط دوجمله‌ای $(x - \frac{۱}{۲\sqrt{x}})^۸$ کدام است؟ **(حسابداری ۷۶)**

۱) $-\frac{۳۵}{۸}$ ۲) $-\frac{۳۳}{۱۶}$ ۳) $-\frac{۳۳}{۱۶}$ ۴) $\frac{۳۵}{۸}$

خودآزمایی ۱ ـ سطح ۲

۱. اگر معادله $ax^{۲} - ۴y^{۲} = ۱۲$ معادله یک هذلولی متساوی الساقین باشد، فاصله بین کانون‌های آن کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $۶\sqrt{۲}$ ۴) $۲\sqrt{۶}$

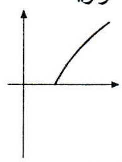
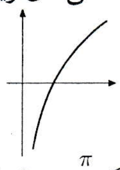
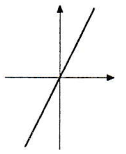
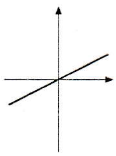
۲. برد تابع $f(x) = \text{Arcsin}(x^{۲} - \frac{۱}{۲})$ برابر است با:

۱) $[\frac{\pi}{۶}, \frac{\pi}{۲}]$ ۲) $[-\frac{\pi}{۶}, \frac{\pi}{۶}]$ ۳) $[-\frac{\pi}{۶}, \frac{\pi}{۲}]$ ۴) $[۰, \frac{\pi}{۲}]$

۳. در بسط عبارت $(x - \frac{۲}{x} + \sqrt{۲})^{۷}$ به صورت توان‌های صعودی، ضریب $x^{۵}$ چقدر است؟

۱) ۲۸ ۲) ۲۱ ۳) ۳۰ ۴) ۱۴

۴. تابع $y = f(x)$ به ازای $x > ۰$ تعریف شده و نمودار y نسبت به $\log_{۱۰} x$ خط راست گذرنده از مبدأ مختصات با ضریب زاویه ۱ است. کدامیک از منحنی‌های زیر نمودار y نسبت به $\ln x$ است؟ (فلسفه ۸۱)

۱)  ۲)  ۳)  ۴) 

۵. اگر $\cosh x = \sec\theta$ و $-\frac{\pi}{۲} < \theta < ۰$ و $x > ۰$ حاصل $\tanh x$ برابر است با:

۱) $\sin\theta$ ۲) $-\sin\theta$ ۳) $\pm\sin\theta$ ۴) $-\cos\theta$

۶. برد تابع با ضابطه $f(x) = \frac{(x+۱)^{۲}}{x^{۲}+۱}$ در کدام فاصله است؟ (آبیاری و زه‌کشی ۷۸)

۱) $[۰, ۱]$ ۲) $[۰, ۲]$ ۳) $[۰, ۲)$ ۴) $\mathbb{R} - (۰, ۱)$

۷. اگر f در فاصله $(-\infty, ۰)$ دارای یک ریشه و در فاصله $(۰, +\infty)$ دارای دو ریشه متمایز باشد و $f(۰) = -۱$، تعداد ریشه‌های $y = |f(|x|)|$ برابر است با:

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۸. نقطه‌های متحرک M و N روی منحنی درجه دوم $۴x^{۲} + ۲y^{۲} = ۶$ حرکت می‌کند. بیشترین فاصله این دو نقطه عبارت است از:

۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) $\sqrt{\frac{۳}{۲}}$ ۴) $۴\sqrt{۳}$

۹. تعداد جملات گویا در عبارت $(\sqrt{۵} + \sqrt[۴]{۷})^{۲۰}$ برابر است با:

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۱۰. دوره تناوب اصلی تابع $f(x) = \sin^{۴} x + \cos^{۴} x$ برابراست با:

۱) ۲π ۲) π ۳) $\frac{\pi}{۲}$ ۴) $\frac{۳\pi}{۲}$

فصل ۲

حد و پیوستگی

۲–۱ قضایای حدی

تعریف. فرض کنید f در یک همسایگی محذوف x_0 (یک بازه باز حول x_0 به جز x_0) تعریف شده باشد. می‌گوییم حد تابع f وقتی x به x_0 میل می‌کند برابر L است و می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$، هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$ عدد $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ موجود باشد که

$$0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon$$

اگر f در یک همسایگی باز x_0 از سمت راست یعنی $(x_0, x_0 + \delta')$ تعریف شود می‌گوییم حد راست تابع f در x_0 برابر L است و می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = L$ هرگاه:

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 \ : \ 0 < x - x_0 < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon$$

به‌طور مشابه حد چپ f در x_0 برابر L است یعنی $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = L$ هرگاه:

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 \ : \ -\delta < x - x_0 < 0 \implies |f(x) - L| < \varepsilon$$

نکته ۱. **شرط لازم برای وجود حد، این است که تابع f در یک همسایگی محذوف x_0 تعریف شود ولذا چنانچه تابع در همسایگی محذوف یک نقطه تعریف نشود، در آن نقطه حد نخواهد داشت.**

به همین ترتیب شرط لازم برای وجود حد راست (چپ) این است که تابع f در یک همسایگی محذوف x_0 از راست (چپ) تعریف شود.

نکته ۲. **شرط لازم و کافی برای وجود حد f آن است که حد چپ و راست آن موجود و برابر باشند.**

مثال ۱. تابع $f(x) = [x]$ در نقاط x_0 اگر $x_0 \in \mathbb{Z}$ فاقد حد است و اگر $x_0 \notin \mathbb{Z}$ حد دارد. زیرا اگر $x_0 = n \in \mathbb{Z}$ آن‌گاه وقتی $x \to x_0^+$ می‌توان فرض کرد که $n < x < n + 1$ پس $[x] = n$ و لذا $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = n$ اما اگر $x \to x_0^-$ می‌توان فرض کرد که $n - 1 < x < n$ پس $[x] = n - 1$ و لذا $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = n - 1$ پس در $x_0 = n$ حد ندارد.
اما اگر $x_0 \notin \mathbb{Z}$ آن‌گاه در یک همسایگی محذوف و مناسب x_0 داریم $[x] = [x_0]$ و بنابراین $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = [x_0]$.

با توجه به توضیحات بالا می‌توان گفت:

نکته ۳. اگر $n \in \mathbb{Z}$ آنگاه $[n^+] = n$ و $[n^-] = n - 1$.

بنابراین در توابع شامل جزء صحیح اگر عبارت داخل براکت به عددی صحیح میل کند، باید نوع آنرا (از لحاظ چپ یا راست بودن) بررسی نماییم.

تذکر ۱. اگر $\lim\limits_{x\to x_\circ} f(x)=L$ آنگاه با نزدیک کردن x به $x_\circ$ معمولاً مقادیر $f(x)$ نزدیک به L است و برابر L نمی‌باشد. اما اگر تابع f در همسایگی محذوف $x_\circ$ تابع ثابت $f(x)=L$ باشد، آنگاه مقدار تابع دقیقاً برابر L خواهد بود. مثلاً در تابع جزء صحیح اگر حد تابع در $x_\circ$ برابر L شود آنگاه تابع در همسایگی محذوف $x_\circ$ برابر L است و اصطلاحاً حد تابع برابر L مطلق است.

نکته ۴. فرض کنید $\lim\limits_{x\to x_\circ} f(x)=L$ در این صورت:

الف) اگر $f(x)$ در همسایگی نقطه $x_\circ$ صعودی اکید باشد آنگاه $\lim\limits_{x\to x_\circ^+} f(x)=L^+$ و $\lim\limits_{x\to x_\circ^-} f(x)=L^-$ و به عبارتی $f(x_\circ^+)=L^+$ و $f(x_\circ^-)=L^-$.

ب) اگر $f(x)$ در همسایگی نقطه $x_\circ$ نزولی اکید باشد آنگاه $\lim\limits_{x\to x_\circ^+} f(x)=L^-$ و $\lim\limits_{x\to x_\circ^-} f(x)=L^+$ و به عبارتی $f(x_\circ^+)=L^-$ و $f(x_\circ^-)=L^+$.

قضیه ۱. حد تابع f در $x_\circ$ در صورت وجود منحصر به فرد است.

قضیه ۲. اگر تابع f در $x_\circ$ دارای حد باشد، در یک همسایگی محذوف $x_\circ$ کراندار است.

قضیه ۳. اگر $\lim\limits_{x\to x_\circ} f(x)=L_1$ و $\lim\limits_{x\to x_\circ} g(x)=L_2$ آن‌گاه:

۱) $\lim\limits_{x\to x_\circ}(f\pm g)(x)=L_1\pm L_2$.

۲) $\lim\limits_{x\to x_\circ}(fg)(x)=L_1L_2$ بنابراین $\lim\limits_{x\to x_\circ} f^n(x)=L_1^n$.

۳) اگر $L_2\neq \circ$ آن‌گاه $\lim\limits_{x\to x_\circ}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{L_1}{L_2}$.

۴) اگر n عددی فرد باشد $\lim\limits_{x\to x_\circ}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{L_1}$ و اگر n زوج باشد به شرط آن که $L_1>\circ$ رابطه اخیر برقرار است.

۵) $\lim\limits_{x\to x_\circ}|f(x)|=|L_1|$.

نکته ۵. در محاسبه حد اگر مخرج صفر مطلق باشد، (مستقل از آنکه صورت کسر چه حالتی است) حد وجود ندارد.

نکته ۶. در قسمت (۴) از قضیه قبل اگر $\lim\limits_{x\to x_\circ} f(x)=\circ$ و n زوج باشد و تابع $f(x)$ در یک همسایگی محذوف $x_\circ$ مثبت باشد یعنی $f(x)\to\circ^+$ آن‌گاه حکم همچنان معتبر است. واضح است که اگر $f(x)\to\circ^-$ آنگاه حد وجود نخواهد داشت.

نکته ۷. اگر f در $x_\circ$ فاقد حد و g دارای حد باشد، $f\pm g$ و $\sqrt[n]{f}$ در $x_\circ$ حد ندارد. **همچنین اگر $\lim\limits_{x\to x_\circ} g(x)\neq\circ$ تابع fg نیز در $x_\circ$ حد ندارد.**

تذکر ۲. اگر $\lim\limits_{x\to x_\circ}|f(x)|$ موجود باشد، نتیجه‌ای در مورد وجود حد f در $x_\circ$ نمی‌توان گرفت. اما اگر $\lim\limits_{x\to x_\circ}|f(x)|=\circ$ آن‌گاه $\lim\limits_{x\to x_\circ} f(x)=\circ$.

تست ۱ حاصل $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{[x^۲]-[x]^۲}{x^۲-۱}$ کدام است؟ (نساجی ۷۴)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) $\dfrac{۱}{۲}$ ۴) موجود نمی‌باشد.

حل: گزینه ۱ درست است. چون داخل جزء صحیح به یک میل می‌کند، باید حد چپ و راست را جداگانه بررسی نمود. وقتی $x\to ۱^+$ داریم $x^۲\to ۱^+$ و لذا صورت کسر برابر $[۱^+]-[۱^+]^۲=۱-۱=۰$ است و چون صورت صفر مطلق است، حد برابر صفر می‌شود. در حالتی که $x\to ۱^-$ داریم $[x^۲]=[۱^-]=۰$ و $[x]^۲=[۱^-]^۲=۰$ پس صورت کسر برابر صفر مطلق بوده و لذا حد صفر می‌شود.

تست ۲ اگر $f(x)=\left[\dfrac{x-۷}{x+۱}\right]$ حد چپ f در $x=۱$ برابر است با:

۱) -۲ ۲) -۳ ۳) -۴ ۴) وجود ندارد.

حل: گزینه ۳ درست است. حد داخل جزء صحیح یعنی $g(x)=\dfrac{x-۷}{x+۱}$ در $x=۱$ برابر -۳ است. اما چون $-۳\in\mathbb{Z}$ باید نوع -۳ را مشخص نماییم.

روش اول. برای این کار کافی است $g(x)-(-۳)=g(x)+۳$ را تعیین علامت کنیم.

$$g(x)+۳=\frac{x-۷}{x+۱}+۳=\frac{۴x-۴}{x+۱}=\frac{۴(x-۱)}{x+۱}$$

حال چون $x\to ۱^-$ صورت کسر منفی و مخرج آن مثبت است و لذا $g(x)+۳<۰$ یعنی $g(x)+۳\to ۰^-$ پس $g(x)\to -۳^-$ و لذا حد تابع $[-۳^-]=-۴$ است.

روش دوم. اگر $g(x)=\dfrac{x-۷}{x+۱}$ آنگاه $g'(x)=\dfrac{۸}{(x+۱)^۲}>۰$ و لذا تابع g صعودی اکید است و بنا به نکته ۴ در صفحه قبل داریم $g(۱^-)=-۳^-$ و لذا حد تابع $[-۳^-]=-۴$ است.

تست ۳ حاصل $\lim\limits_{x\to ۰^-}\sqrt[۴]{\log_{\frac{۱}{۲}}(x+۱)}$ و $\lim\limits_{x\to ۰^-}[\cosh x]$ به ترتیب برابر است با:

۱) ۰, ۰ ۲) ۰, ۱ ۳) وجود ندارد, ۰ ۴) وجود ندارد, ۱

حل: گزینه ۲ درست است. وقتی $x\to ۰^-$ عبارت زیر رادیکال صفر می‌شود. اما چون فرجه زوج است با توجه به نکته ۶ باید نوع آن را مشخص نماییم. تابع لگاریتمی زیر رادیکال نزولی اکید است.(این موضوع را با مشتق گرفتن یا با توجه به نمودار آن در صفحه ۳۱ می‌توان تحقیق نمود.) و لذا بنا به نکته ۴ در صفحه قبل زیررادیکال ۰^+ است و لذا حد صفر می‌شود. در مورد دومین حد، عبارت داخل براکت برابر یک است با توجه به نمودار $y=\cosh x$ یا نزولی بودن آن در همسایگی چپ عدد صفر و نکته ۴ داریم $\cosh ۰^-=۱^+$ پس حد برابر $[۱^+]=۱$ است.

تست ۴ حاصل $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{x^۲}{[۱-\cos x]}$ برابر است با:

۱) ۰ ۲) $\dfrac{۱}{۲}$ ۳) ۲ ۴) وجود ندارد.

حل: گزینه ۴ درست است. وقتی $x\to ۰$ داریم $۱-\cos x\to ۰$ اما چون $\cos x\leq ۱$ پس $۱-\cos x\geq ۰$ یعنی $۱-\cos x\to ۰^+$ پس وقتی x در یک همسایگی محذوف $x_۰=۰$ قرار دارد، $[۱-\cos x]$ برابر $[۰^+]=۰$ است. یعنی تابع در یک همسایگی محذوف $x_۰=۰$ تعریف نمی‌شود، پس حد وجود ندارد. توجه کنید که بحث انجام شده در حالت خاص در واقع اثبات نکته ۵ در صفحه قبل است.

تست ۵ اگر $f(x)=g(x)=[1-x^2]$ (که در آن $[x]$ جزء صحیح x است.) در این‌صورت $\lim_{x\to 1}(g\circ f)(x)$ عبارتست از: (ریاضی ۷۶)

۱) 0 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) وجود ندارد.

حل: گزینه ۴ درست است. باتوجه به اینکه $\lim_{x\to 1}(1-x^2)=0$ عددی صحیح است پس باید حد چپ و راست جداگانه بررسی شود.

وقتی $x\to 1^+$ داریم $1-x^2\to 0^-$ پس $f(x)\to[0^-]=-1$ پس $f(x)$ برابر ۱− مطلق است.(یعنی در یک همسایگی راست عدد ۱ و درواقع $1<x<\sqrt{2}$، $f(x)$ تابع ثابت ۱− است.) پس در این همسایگی:

$$f(x)=-1\Longrightarrow g\circ f(x)=g(-1)=0\Longrightarrow g\circ f \text{ حد راست } =0$$

وقتی $x\to 1^-$ داریم $1-x^2\to 0^+$ پس $f(x)\to[0^+]=0$ و لذا $f(x)$ برابر صفر مطلق است.(یعنی در یک همسایگی چپ عدد ۱ و در واقع $0<x<1$، $f(x)$ تابع ثابت صفر است.) پس در این همسایگی:

$$f(x)=0\Longrightarrow g\circ f(x)=g(0)=1\Longrightarrow g\circ f \text{ حد چپ } =1$$

چون حد چپ و راست نابرابر هستند، پس $g\circ f$ در $x=1$ فاقد حد است.

قضیه ۴. فرض کنید در یک همسایگی محذوف x_0 داریم $f(x)<g(x)$. اگر $\lim_{x\to x_0}f(x)=L_1$ و $\lim_{x\to x_0}g(x)=L_2$، آن‌گاه $L_1\le L_2$.

قضیه ۵. اگر $\lim_{x\to x_0}f(x)=L$ و $L\neq 0$ در یک همسایگی محذوف x_0 تابع $f(x)$ و L هم علامت هستند.

تذکر۳. اگر $L=0$ هیچ نتیجه‌ای در مورد علامت f نمی‌توان گرفت.

قضیه ۶.(قضیه فشردگی) اگر در یک همسایگی محذوف x_0 داشته باشیم $g(x)<f(x)<h(x)$ و $\lim_{x\to x_0}g(x)=\lim_{x\to x_0}h(x)=L$ آن‌گاه $\lim_{x\to x_0}f(x)=L$.

نتیجه ۷. اگر $\lim_{x\to x_0}f(x)=0$ و $g(x)$ در یک همسایگی محذوف x_0 کراندار باشد آن‌گاه $\lim_{x\to x_0}(fg)(x)=0$ به عبارتی <u>حاصلضرب صفر در کراندار برابر صفر است.</u>

تذکر۴. کلیه قضایای حدی برای حد چپ و راست هم معتبر هستند.

مثال ۲. مقدار $\lim_{x\to 1}(x^2-1)\cos\frac{1}{x-1}$ را محاسبه کنید.

تابع $\cos\frac{1}{x-1}$ کراندار است زیرا $\left|\cos\frac{1}{x-1}\right|\le 1$ و $\lim_{x\to 1}(x^2-1)=0$ پس حد مورد نظر ضرب صفر در کراندار و بنابراین صفر است.

تست ۶ تابع $g(x)=(x^2+ax+9)f(x)$ فقط در یک نقطه دارای حد است. اگر f تابعی کراندار باشد که در هیچ نقطه‌ای حد ندارد، a کدام است؟

۱) ± 3 ۲) ± 6

۳) ± 9 ۴) باید تابع f مشخص باشد.

حل: گزینه ۲ درست است. چون f در هیچ نقطه‌ای حد ندارد و x^2+ax+9 در همهٔ نقاط حد دارد، بنا به

نکته ۷ در صفحه ۶۲ در نقاطی که حد این تابع صفر نشود $g(x)$ حد ندارد. اما چون f کراندار است اگر $\lim\limits_{x\to x_\circ}(x^۲+ax+۹)=\circ$ تابع g در $x_\circ$ حدی برابر صفر دارد و چون $x^۲+ax+۹$ باید در یک نقطه صفر شود پس باید دارای ریشه مضاعف باشد و لذا $\Delta=a^۲-۳۶=\circ$ پس $a=\pm۶$.

تست ۷ هرگاه $f(x)=\begin{cases}۱ & \text{گویا } x\\ -۱ & \text{اصم } x\end{cases}$ باشد، آنگاه $\lim\limits_{x\to۱}\left(\ln x^{|x|}\right)e^{f(x)}$ برابر است با:

۱) $e^{-۱}$ ۲) صفر ۳) e ۴) e^e

حل: گزینه ۲ درست است. چون $\lim\limits_{x\to۱}\ln x^{|x|}=\ln ۱=\circ$ و $e^{f(x)}=\begin{cases}e & \text{گویا } x\\ e^{-۱} & \text{اصم } x\end{cases}$ بنابراین $e^{f(x)}$ در همسایگی $x=۱$ کراندار است (در واقع $e^{-۱}\le e^{f(x)}\le e$) و بنابراین حد مورد نظر حاصلضرب صفر در کراندار و لذا برابر صفر است.

۲ـ۲ حدهای بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت

۱) اگر با نزدیک شدن x به $x_\circ$ مقادیر تابع f به‌طور بی‌کران افزایش یا کاهش یابند می‌گوییم حد تابع f در $x_\circ$ برابر $+\infty$ یا $-\infty$ است.

این حالت عموماً وقتی رخ می‌دهد که در مخرج تابع f، صفر ظاهر شود در واقع:
اگر $\lim\limits_{x\to x_\circ}f(x)=L$ و $\lim\limits_{x\to x_\circ}g(x)=\circ$ به شرط آن که $L\neq\circ$ آن‌گاه حد $\lim\limits_{x\to x_\circ}\dfrac{f}{g}$ ممکن است برابر $\pm\infty$ شود و برای تعیین علامت بینهایت کافی است علامت کسر تعیین شود. به این ترتیب که علامت $f(x)$ (یعنی علامت L) و علامت $g(x)$ یعنی ($\circ^-$ یا $\circ^+$) را بررسی کنیم و با توجه به آن علامت بینهایت مشخص می‌شود.

نکته ۸. اگر حد $g(x)$ صفر بدون علامت باشد (دائماً تغییر علامت دهد.) و $\lim\limits_{x\to x_\circ}f(x)\neq\circ$، حد تابع علامت مشخص ندارد و لذا $\dfrac{f}{g}$ فاقد حد است.

تذکر۵. موارد ذکر شده برای $x_\circ^+$ و $x_\circ^-$ نیز معتبر هستند.

۲) اگر با بزرگ شدن یا کوچک شدن مقدار x به‌طور بیکران، تابع f به عدد مشخص L نزدیک شود می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=L$ یا $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=L$.

۳) اگر وقتی x به‌طور بی‌کران بزرگ می‌شود، مقدار f به‌طور بی‌کران افزایش یابد می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.
به‌طور مشابه سایر حالت‌های حدی در بینهایت تعریف می‌شوند.

نکته ۹. با توجه به نمودار لگاریتم در صفحه ۳۱ برای $\circ<a<۱$ داریم $\log_a(\circ^+)=+\infty$ و برای $a>۱$ داریم $\log_a(\circ^+)=-\infty$.

نکته ۱۰. با توجه به نمودار تابع نمایی در صفحه ۳۱ وضعیت حدی در بینهایت به صورت زیر است.

۱) $\circ<a<۱\implies a^{+\infty}=\circ\quad,\quad a^{-\infty}=+\infty$

۲) $a>۱\implies a^{+\infty}=+\infty\quad,\quad a^{-\infty}=\circ$

نکته ۱۱. توابع متناوب (به جز تابع ثابت) در بینهایت فاقد حد هستند.

مثال ۳. حدود داده شده را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x\to 0}\frac{x+2}{x^3-x^2}$ ب) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}^+}\frac{\sin x}{\tan x-1}$ ج) $\lim_{x\to 2^-}\frac{[x^2]-4}{x^2-4}$

د) $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x\sin\frac{1}{x}}$ هـ) $\lim_{x\to 0}2^{\coth x}$

الف) $x+2\to 2>0$ و $x^3-x^2=x^2(x-1)\to 0^-$ پس حد برابر $-\infty=\frac{2}{0^-}$ است.

ب) $\sin x\to\frac{\sqrt{2}}{2}>0$ و $\tan x-1\to 0$ اما چون $\tan x$ تابعی صعودی اکید است پس در $\frac{\pi}{4}^+$ مقدار آن 1^+ می‌شود یعنی مخرج 0^+ است پس $+\infty=\frac{\text{عدد مثبت}}{0^+}=$ حد .

ج) وقتی $x\to 2^-$ داریم $x^2\to 4^-$ پس $[x^2]-4=[4^-]-4=3-4=-1<0$ و چون x^2-4 در اطراف $x=2$ صعودی است پس $x^2-4\to 0^-$ و حد برابر $+\infty=\frac{-1}{0^-}$ است.

د) $\lim_{x\to 0^+}x\sin\frac{1}{x}$ به صورت صفر در کراندار و لذا برابر صفر است. بنابراین حد به صورت $\frac{1}{0}$ بوده و باید علامت صفر مخرج (یعنی $x\sin\frac{1}{x}$) مشخص گردد. اما توجه کنید که حول 0^+ تابع $\sin\frac{1}{x}$ بین -1 و 1 نوسان می‌کند ولذا $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$ تغییر علامت می‌دهد. مثلاً در $x_1=\frac{1}{2k\pi+\frac{\pi}{2}}$ داریم $f(x_1)>0$ و در $x_2=\frac{1}{2k\pi-\frac{\pi}{2}}$ داریم $f(x_2)<0$. پس $f(x)$ دارای علامت ثابتی نمی‌باشد و لذا بنا به نکته ۸ در صفحه قبل حد وجود ندارد.

هـ) با توجه به نمودار $y=\coth x$ در صفحه ۳۳ حد در صفر برابر بینهایت است. چون وضعیت 2^∞ برای $+\infty$ و $-\infty$ با توجه به نکته ۱۰ متفاوت است، پس باید حد چپ و راست را جداگانه محاسبه نمود.

$$\begin{cases}x\to 0^+\implies \coth x\to +\infty\implies 2^{\coth x}\to 2^{+\infty}=+\infty\\ x\to 0^-\implies \coth x\to -\infty\implies 2^{\coth x}\to 2^{-\infty}=0\end{cases}\implies \text{حد وجود ندارد.}$$

$\boxed{\text{تست ۸}}$ حد عبارت $\frac{x-1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$ وقتی $x\to 1$ برابر است با: **(معدن ۸۲)**

۱) 0 ۲) $-\infty$ ۳) $+\infty$ ۴) 2

حل: گزینه ۱ درست است. چون $\frac{1}{x-1}\to\pm\infty$ باید حد چپ و راست را جدا کرد.

$$x\to 1^+\implies 2^{\frac{1}{x-1}}\to 2^{+\infty}=+\infty\implies \text{حد}=\frac{0}{\infty}=0$$

$$x\to 1^-\implies 2^{\frac{1}{x-1}}\to 2^{-\infty}=0\implies \text{حد}=\frac{0}{1}=0$$

$\boxed{\text{تست ۹}}$ مقدار حد $\lim_{x\to+\infty}\left(a^{\frac{1}{x}}-1\right)^x$ ، $a>1$ کدام است؟ **(مکانیک ۷۵)**

۱) 0 ۲) 1 ۳) $\ln a$ ۴) ∞

حل: گزینه ۱ درست است. چون $a>1$ پس تابع نمایی $f(u)=a^u$ صعودی اکید بوده و بنابراین داریم $a^{\frac{1}{x}}-1=a^{0^+}-1=1^+-1=0^+$ پس حد مورد نظر $0=(0^+)^{+\infty}$ است.

تذکر ۶. توجه کنید که اگر در این تست شرط $0<a<1$ مطرح شود، $a^{\frac{1}{x}}-1\to 0^-$ و لذا پایه عبارت نمایی منفی می‌شود. اما می‌دانیم که در توابع نمایی باید پایه مثبت باشد و لذا حد موجود نخواهد بود.

۲ـ۳ صورتهای نامعین (صور مبهم)

در محاسبه حدود گاهی با حالت‌هایی مواجه می‌شویم که مقدار حد در آن‌ها با توجه به مسائل مختلف جواب‌های متفاوتی دارند. این حالت‌ها که **حالات مبهم** نامیده می‌شوند عبارتند از:

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \times \infty, \infty - \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$$

توجه کنید که در حالتهای مبهم عدد صفر یا یک باید به صورت حدی باشند. مثلاً 1^∞ در صورتی‌که عدد یک به صورت مطلق باشد، حالت مبهم نبوده و برابر یک است.(به تستهای ۴۷ تا ۵۰ در صفحه ۸۱ توجه کنید.)
حالت‌های مبهم ذکر شده به $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ قابل تبدیل هستند پس ابتدا این دو حالت را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۲ـ۳ـ۱ حالت $\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$

برای رفع ابهام در این دو حالت به‌طور کلی عامل ایجاد ابهام را باید از صورت و مخرج حذف کرد.

مثال ۴. حاصل هر یک از حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x^5-1}$ ب) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2+x\sqrt{x^2+x+1}}{4x^2+x-1}$

الف) حالت $\frac{0}{0}$ است. چون $x \to 1$ باید توانی از $x-1$ درصورت و مخرج موجود باشند، با توجه به رابطه $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ کافی است صورت و مخرج کسر را در a^2+ab+b^2 ضرب کنیم که $a=\sqrt[3]{x}$ و $b=1$ پس حد برابر است با:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{(x-1)(x^4+\cdots+1)} \times \frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1} = \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)\times 15} = \frac{1}{15}$$

ب) حالت $\frac{\infty}{\infty}$ است پس باید در صورت و مخرج از بیشترین توان x فاکتور بگیریم.

$$\text{حد} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}})}{x^2(4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2})} = \frac{1+\sqrt{1+0}}{4+0} = \frac{1}{2}$$

تذکر۷. اتحادهای زیر را به خاطر بسپارید.

۱) $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b^1+a^{n-3}b^2+\cdots+b^{n-1})$ و $n\in\mathbb{N}$

۲) $a^n-b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b^1+a^{n-3}b^2-\cdots-b^{n-1})$ و $n\in\mathbb{N}$ زوج

۲) $a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b^1+a^{n-3}b^2-\cdots+b^{n-1})$ و $n\in\mathbb{N}$ فرد

۲ـ۳ـ۲ هم‌ارزی

گاهی شناسایی عامل ایجاد ابهام ساده نیست. در این موارد برای محاسبه حدود در حالت $\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$ غالباً از قواعد هم‌ارزی و قاعده هوپیتال استفاده می‌شود.

تعریف. دو تابع f و g را در $x_0 \in [-\infty,+\infty]$ **هم‌ارز** می‌گوییم و می‌نویسیم $f \underset{x\to x_0}{\sim} g$ هرگاه $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$.

مثال ۵. اگر در $x = 0$، $x^3 - 4x^2 \sim Ax^n$ مقدار A و n را بیابید.

$$1 = \lim_{x \to 0} \frac{x^3 - 4x^2}{Ax^n} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2(x-4)}{Ax^n} = \lim_{x \to 0} \frac{-4x^2}{Ax^n} \Longrightarrow A = -4 \;\;,\;\; n = 2$$

نکته ۱۲. اگر $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ و $L \neq 0, \infty$ **در این صورت** $f(x) \sim L$ **وقتی** $x \to x_0$.

تذکر ۸. در محاسبه حدود توابع می‌توانیم به جای هر تابع هم‌ارز آن را قرار دهیم و سپس حد حاصل را محاسبه کنیم به شرط آن که وقتی با جمع و تفریق سروکار داریم عبارات هم‌ارز (که تا توان یکسان نوشته شده‌اند) یکدیگر را حذف نکنند.

تذکر ۹. از هم‌ارزی معمولاً برای حالتی که حد تابع صفر یا بینهایت است استفاده می‌شود به این صورت که اگر $\lim_{x \to x_0} f(x)$ برابر صفر یا بینهایت شود باید توانی از عامل ایجاد صفر یا بینهایت را در $f(x)$ مشخص کنیم یعنی اعداد مناسب α و A را طوری بیابیم که $f(x) \sim A(x - x_0)^\alpha$ بدین ترتیب اگر این عمل در صورت و مخرج انجام شود، حالت مبهم را می‌توان رفع ابهام کرد.

تعریف. اگر $\lim_{x \to x_0} f(x)$ برابر صفر شود اما صفر مطلق نباشد، $f(x)$ را یک **بی‌نهایت کوچک** و اگر برابر بینهایت شود آن را یک **بی‌نهایت بزرگ** می‌نامند. در این صورت اگر $f(x) \sim A(x - x_0)^\alpha$، صفر یا بینهایت تابع $f(x)$ را از مرتبه α نامیده و $A(x - x_0)^\alpha$ را **جزاصلی** بی‌نهایت کوچک یا بی‌نهایت بزرگ f می‌نامیم.

معمولاً وقتی حد f برابر صفر شود، قواعد هم‌ارزی را در $x_0 = 0$ مطرح می‌کنیم زیرا با یک تغییر متغیر می‌توان فرض کرد $x \to 0$.

قواعد هم‌ارزی در $x_0 = 0$

۱) هر چندجمله‌ای با جمله‌ای از خود که دارای کمترین توان است هم‌ارز می‌باشد.

۲) توابع زیر و معکوس آنها با x هم‌ارز هستند.

$$\sin x \;\text{و}\; \tan x \;\text{و}\; \sinh x \;\text{و}\; \tanh x \;\text{و}\; e^x - 1 \;\text{و}\; \ln(x+1)$$

۳) $\cosh x - 1 \sim \frac{x^2}{2}$ و $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ و به طور کلی برای $\alpha \neq 0$ داریم:

$$1 - \cos^\alpha x \sim \frac{\alpha}{2}x^2 \;\;\text{و}\;\; \cosh^\alpha x - 1 \sim \frac{\alpha}{2}x^2$$

۴) **(هم ارزی برنولی)** برای هر $\alpha \neq 0$ داریم $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$.

تذکر ۱۰. اگر $g(x)$ در x_0 یک بی‌نهایت کوچک باشد یعنی $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ اما $g(x)$ صفر مطلق نباشد، می‌توان در فرمول‌های بالا به جای x از $g(x)$ استفاده کرد.

نکته ۱۳. اگر $x \to 1$ آن‌گاه $\ln x \sim x - 1$.

مثال ۶. برای محاسبه $\lim_{x \to 0} \frac{(x+2)(e^x - 1)}{x^3 + 2x}$ با توجه به این که $e^x - 1 \sim x$ و $x + 2 \to 2$ و $x^3 + 2x \sim 2x$ صورت و مخرج کسر هم‌ارز $2x$ و حد برابر $\lim_{x \to 0} \frac{2x}{2x} = 1$ خواهد بود.

مثال ۷. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{2\sqrt{1+x^2}-2}$ را محاسبه کنید.

چون $\cos x \to 1$ بنا به نکته ۱۳ داریم $\ln(\cos x) \sim \cos x - 1 \sim -\dfrac{x^2}{2}$ و ضمناً بنا به هم ارزی برنولی $\sqrt{1+x^2}-1 \sim \dfrac{1}{2}x^2$، پس $\text{حد} = \lim_{x\to 0}\dfrac{\frac{-x^2}{2}}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$.

تست ۱۰ حاصل $\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos 2x)}{\ln(\cos 3x)}$ کدام است؟ (آمار و ریاضی ۷۸)

۱) $\frac{4}{9}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{3}{2}$

حل: گزینه ۱ درست است. چون $\cos 2x \to 1$ و $\cos 3x \to 1$ با توجه به نکته ۱۳ در صفحه قبل:

$$\text{کسر} \sim \frac{\cos 2x - 1}{\cos 3x - 1} \sim \frac{-\frac{1}{2}(2x)^2}{-\frac{1}{2}(3x)^2} \to \frac{4}{9}$$

تست ۱۱ $\lim_{x\to 2}\dfrac{\mathrm{Arcsin}(x-2)}{\mathrm{Arctan}(x^2-4)}$ برابر است:

۱) ۰ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{6}$

حل: گزینه ۲ درست است. چون آرگومان توابع به صفر میل می‌کنند:

$$\text{کسر} \sim \frac{x-2}{x^2-4} = \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} \to \frac{1}{4}$$

تست ۱۲ $\lim_{x\to 0}\dfrac{\log_5(1+x)}{x}$ برابر است با: (مواد ۷۶)

۱) $\log_5 e$ ۲) $\log 5$ ۳) $\ln 5$ ۴) $\dfrac{1}{\log 5}$

حل: گزینه ۱ درست است. از فرمول تغییر مبنای لگاریتم داریم:

$$\log_5(1+x) = \frac{\ln(1+x)}{\ln 5} \sim \frac{x}{\ln 5} \Longrightarrow \text{حد} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{\ln 5}}{x} = \frac{1}{\ln 5} = \frac{1}{\log_e 5} = \log_5 e$$

تست ۱۳ $\lim_{x\to 0}\dfrac{(a^x-1)\ln(1+x)}{(\mathrm{Arctan}x)^2}$: (معدن ۷۶، مواد ۸۰)

۱) ۱ ۲) ۰ ۳) $(\ln a)^2$ ۴) $\ln a$

حل: گزینه ۴ درست است.

$$a^x - 1 = e^{x\ln a} - 1 \sim x\ln a \Longrightarrow \text{کسر} \sim \frac{(x\ln a)(x)}{x^2} \to \ln a$$

نکته ۱۴. با محاسباتی که در دو تست قبل دیدیم در $x=0$ برای $a>0$ و $a\neq 1$ داریم:

$$\log_a(x+1) \sim \frac{x}{\ln a} \quad \text{و} \quad a^x - 1 \sim x\ln a$$

تست ۱۴ حاصل $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin 10x}{\sin 4x}$ کدام است؟

۱) -1 ۲) ۱ ۳) $-\frac{5}{2}$ ۴) $\frac{5}{2}$

حل: گزینه ۳ درست است. برای استفاده از هم‌ارزی از تغییر متغیر $x = t + \frac{\pi}{2}$ استفاده می‌کنیم تا $t \to 0$.

$$\frac{\sin 10x}{\sin 4x} = \frac{\sin(10t+5\pi)}{\sin(4t+2\pi)} = \frac{-\sin 10t}{\sin 4t} \sim \frac{-10t}{4t} \to -\frac{10}{4} = -\frac{5}{2}$$

توجه کنید که حل این نوع تستها با استفاده از قاعده هوپیتال ساده‌تراست.

تست ۱۵ حد $\lim_{x\to 0} \frac{[x+\frac{1}{2}]}{x}$ کدام است؟ (ریاضی ۷۷)

۱) -1 ۲) 0 ۳) 1 ۴) ∞

حل: گزینه ۲ درست است. حد به صورت $\frac{0}{0}$ است اما عبارت داخل براکت وقتی $x \to 0$ نزدیک $\frac{1}{2}$ بوده و لذا صورت کسر برابر صفر (مطلق) است. پس این سؤال حالت مبهم نبوده و با توجه به اینکه مخرج صفر حدی است، حاصل صفر می‌شود.

مثال ۸. حاصل $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^4 - x^3}$ را محاسبه کنید.

چون $\tan x - \sin x \sim x - x = 0$ پس از رابطه هم‌ارزی به طور مستقیم نمی‌توان استفاده کرد اما:

$$\text{کسر} = \frac{\tan x(1-\cos x)}{x^4 - x^3} \sim \frac{x \cdot \frac{x^2}{2}}{-x^3} \to -\frac{1}{2}$$

در هم‌ارزی وقتی $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$، هدف ما یافتن کوچکترین توان از عامل صفرکننده یعنی عبارتی به شکل Ax^α بود که در محاسبات به جای f جایگذاری شود. عبارت Ax^α در واقع جملهٔ با کمترین توان از سری مک لوران تابع f است. سری مک لوران در صفحه ۵۲۸ مورد بررسی قرار می‌گیرد. در آن جا خواهیم دید که تحت شرایطی مناسب برای تابع f می‌توان گفت $f(x)$ با یک چندجمله‌ای (بی‌نهایت جمله‌ای) در $x = 0$ برابر است و با توجه به این که چندجمله‌ای‌ها در $x = 0$ با جمله دارای کمترین توان خود هم‌ارز هستند، در محاسبه حدود، Ax^α را به جای تابع f به کار می‌بریم. این تساوی‌ها به ما اجازه خواهند داد که در محاسبه حدود، به جای هر تابع سری متناظر آن را تا جایی بنویسیم که عبارات در جمع و تفریق یکدیگر را حذف نکنند. این تساوی‌ها (سری مک لوران توابع) عبارتند از:

۱) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$

۲) $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \cdots$

۳) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$

۴) $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots$

۵) $\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$

۶) $\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$

۷) $\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$

۸) $\sin^{-1} x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\times 3}{2\times 4}\frac{x^5}{5} + \cdots$

۹) $\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$

۱۰) $\sinh^{-1} x = x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\times 3}{2\times 4}\frac{x^5}{5} - \cdots$

۱۱) $\tanh^{-1} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots$

۱۲) $(1+x)^r = 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2!}x^2 + \cdots$

تذکر۱۱. اگر $g(x)$ یک بی‌نهایت کوچک باشد، در محاسبه می‌توان به جای x قرار داد $g(x)$.

تذکر۱۲. روش به دست آوردن این فرمول‌ها را در قضیه ۱۱ در صفحه ۱۵۶ خواهیم دید، اما بررسی دقیق‌تر در بخش سری‌ها انجام می‌گیرد.

تذکر۱۳. همان طور که در فرمول‌های بالا مشاهده می‌کنید به جز $\tan x$ فرمول بقیه توابع نظام خاصی دارد و فرمولهای توابع مثلثاتی و هیپربولیک متناظر، به هم شبیه است.(به عنوان مثال فرمولهای (۱) و (۶) فقط در علامت جملات با یکدیگر متفاوت هستند.)

نکته ۱۵. در استفاده از فرمولهای مک‌لورن قوانین زیر را رعایت کنید.

۱) در عمل جمع و تفریق بسط مک لورن را تا کوچکترین توانی بنویسید که جملات همدیگر را حذف نکنند.

۲) در عمل جمع و تفریق باید بسط همه توابع را تا توان یکسان نوشت.

۳) اگر مخرج هم‌ارز x^n باشد، به جای استفاده از قاعده (۱) کافی است بسط صورت را فقط تا جمله x^n بنویسیم.

تذکر۱۴. توجه کنید که هنگام استفاده از قاعده (۳) چنانچه صورت کسر برابر صفر شود، لازم نیست بسط صورت را تا توانهای بیشتر نوشت و حاصل حد برابر صفر است.

تذکر۱۵. اگر $x \to \circ$ و مخرج کسر هم ارز x^n باشد، شرط لازم و کافی برای آنکه حد کسر برابر صفر باشد آن است که بسط مک‌لورن صورت پس از نوشته شدن تا جمله x^n برابر صفر شود.

مثال ۹. حاصل $\lim\limits_{x\to\circ} \dfrac{\sinh x - x\cosh x + \frac{1}{3}x^3}{x^2\tan^3 x}$ را به دست آورید.

چون مخرج کسر هم ارز x^5 است بنا به قاعده (۳) باید بسط مک لورن صورت را تا x^5 بنویسیم. با استفاده از فرمول‌های (۶) و (۷) داریم:

$$\sinh x - x\cosh x + \frac{1}{3}x^3 \sim (x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}) - x(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}) + \frac{x^3}{3} = \frac{x^5}{120} - \frac{x^5}{24} = -\frac{x^5}{30}$$

پس حد برابر $-\frac{1}{30}$ است.

مثال ۱۰. مطلوب است محاسبه $\lim\limits_{x\to\circ} \dfrac{e^x - \sin x + \cos x - 2}{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}$.

روش اول. از هم ارزی برنولی مخرج کسر هم‌ارز $\frac{x^2}{3}$ و بنا به قاعده (۳) کافی است صورت کسر تا توان دوم نوشته شود.

$$\text{صورت کسر} \sim (1 + x + \frac{x^2}{2}) - (x + \circ x^2) + (1 - \frac{x^2}{2}) - 2 = \circ \Longrightarrow \text{حد} = \circ$$

روش دوم.[1] بدون استفاده از قاعده (۳)، صورت کسر را به شکل $(e^x - 1) - \sin x + (\cos x - 1)$ می‌نویسیم. در این صورت:

$$e^x - 1 \sim x \;,\; \sin x \sim x \;,\; 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2 \implies \text{صورت کسر} \sim x - x - \frac{1}{2}x^2 = -\frac{1}{2}x^2$$

$$\text{مخرج کسر} \sim \frac{x^2}{3} \implies \text{حد} = -\frac{3}{2}$$

آنچه در روش دوم اشاره شد نادرست است، زیرا در صورت کسر هم‌ارزی $1 - \cos x$ تا توان ۲ و سایر هم‌ارزی‌ها تا توان ۱ نوشته شده است و بنابراین قانون شماره (۲) را رعایت نکرده‌ایم. در واقع هم‌ارزی $e^x - 1 \sim x$ در اینجا نادرست است، زیرا جمله بعدی آن که در روش اول نوشته شد، را حذف کرده‌ایم. بنابراین:

بهتر است در جمع و تفریق از بسط مک‌لورن استفاده کنیم تا جمله‌های تاثیر گذار بسط را حذف نکنیم.

---

[1] این روشی است که برخی دانشجویان در کلاس از آن استفاده کردند.

$\boxed{\text{تست ۱۶}}$ حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x^2-\cosh x^2}{x^4}$ کدام است؟ (فلسفه ۸۰)

۱) 0 ۲) -1 ۳) 1 ۴) $-\infty$

حل: گزینه ۲ درست است. کافی است بسط مک‌لورن صورت را تا x^4 بنویسیم.

$$\text{کسر}\sim\frac{(1-\frac{1}{2}x^4)-(1+\frac{1}{2}x^4)}{x^4}=-1$$

$\boxed{\text{تست ۱۷}}$ مقدار $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x-\tan 2x-\tan x}{x-x\cos x}$ برابر است با:

۱) 6 ۲) 12 ۳) -6 ۴) -12

حل: گزینه ۲ درست است. مخرج کسر $x-x\cos x=x(1-\cos x)\sim\frac{1}{2}x^3$ است.

روش اول. بسط مک‌لورن صورت را تا جمله دارای x^3 می‌نویسم.

$$\text{کسر}\sim\frac{\left(3x+\frac{(3x)^3}{3}\right)-\left(2x+\frac{(2x)^3}{3}\right)-\left(x+\frac{x^3}{3}\right)}{\frac{1}{2}x^3}=\frac{6x^3}{\frac{1}{2}x^3}=12$$

روش دوم. می‌دانیم اگر $\alpha+\beta+\gamma=0$ آنگاه $\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$ حال چون $3x+(-2x)+(-x)=0$ داریم:

$$\tan 3x-\tan 2x-\tan x=\tan(3x)+\tan(-2x)+\tan(-x)=(\tan 3x)\big(\tan(-2x)\big)\big(\tan(-x)\big)$$

$$\sim(3x)(-2x)(-x)=6x^3\implies \text{حد}=12$$

$\boxed{\text{تست ۱۸}}$ عدد طبیعی n چقدر باشد که $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^n x-x^n}{x^6}$ عددی غیر صفر شود؟

۱) 3 ۲) 4 ۳) 2 ۴) 6

حل: گزینه ۲ درست است. باید n طوری تعیین شود که صفر صورت از مرتبه ۶ باشد. زیرا اگر مرتبه صفر صورت از ۶ بیشتر باشد، حد برابر صفر و اگر کمتر از ۶ باشد، حد برابر بینهایت است. اگر از اتحاد $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+\cdots+b^{n-1})$ برای $a=\tan x, b=x$ در صورت استفاده کنیم با توجه به این که $a\sim x\ ,\ b\sim x$ پس $a^{n-1}+\ldots+b^{n-1}\sim\underbrace{x^{n-1}+\cdots+x^{n-1}}_{n\ \text{تا}}=nx^{n-1}$ و بنابراین:

$$\tan^n x-x^n\sim(\tan x-x)(nx^{n-1})\sim\frac{x^3}{3}.(nx^{n-1})=\frac{n}{3}x^{n+2}\implies n+2=6\implies n=4$$

قواعد هم‌ارزی در بی‌نهایت

در قواعد زیر به جز قانون رشد، فرض بر این است که $x\to\pm\infty$.

۱) هر چندجمله‌ای با جمله‌ای از خود که دارای بیشترین توان باشد، هم‌ارز است.

۲) هم‌ارزی رادیکال‌ها:

$$n\in\mathbb{N}:\ \sqrt[n]{ax^n+bx^{n-1}+\ldots}\sim\begin{cases}\sqrt[n]{a}(x+\frac{b}{na}) & n\ \text{فرد}\\ \sqrt[n]{a}|x+\frac{b}{na}| & n\ \text{زوج}\end{cases}$$

در عمل بهتر است از ضریب x^n فاکتور گرفته و قاعده زیر را به‌خاطر بسپارید.

$$n \in \mathbb{N}:\ \sqrt[n]{x^n + bx^{n-1} + \dots} \sim \begin{cases} x + \dfrac{b}{n} & n \text{ فرد} \\ |x + \dfrac{b}{n}| & n \text{ زوج} \end{cases}$$

۳) $x \sim [x]$ یعنی اگر عبارت داخل جزء صحیح به بینهایت میل کند، می‌توان جزء صحیح را حذف نمود.

۴) قوانین رشد

اگر f, g در x_0 حدی برابر بینهایت داشته باشند و $\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$ می‌گوییم $f(x)$ رشد بیشتری نسبت به $g(x)$ در x_0 دارد در این حالت در $x = x_0$ داریم $f(x) + g(x) \sim f(x)$ و می‌نویسیم: $f(x) \gg g(x)$

وقتی $x \to +\infty$ قوانین رشد به صورت زیر است.

$$a^x \gg b^x \gg x^\alpha \gg x^\beta \gg \log_c x \qquad a > b > 1,\ c > 0,\ c \neq 1,\ \alpha > \beta > 0$$

نکته ۱۶. اگر $\log x$ به توان یک عدد ثابت برسد، رشد آن همچنان از چندجمله‌ای‌ها (x^β) کمتر خواهد بود.

نکته ۱۷. چنانچه $0 < b < a < 1$ آنگاه وقتی $x \to +\infty$ داریم $b^x + a^x \sim a^x$.

نتیجه ۸. برای هر $\alpha, \beta > 0$ داریم $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha (\log_c x)^\beta = 0$ و خصوصاً $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x = 0$

تذکر۱۶. در مقایسه دو عبارت نمایی باید اختلاف توانهای آنها عددی ثابت باشد.(قسمت «ب» در مثال بعدی را ملاحظه کنید.)

مثال ۱۱. حاصل هر یک از حدود زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^3 + x + 1}}{\sqrt{x^2 - x - 2}}$ ب) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{3^{x+1} + 2^{2x+1}}{3^{x+2} + 4^{x-1}}$

الف) با استفاده از هم‌ارزی چندجمله‌ای‌ها:

$$\text{کسر} \sim \frac{\sqrt[3]{x^3}}{\sqrt{x^2}} = \frac{x}{|x|} = \frac{x}{-x} \to -1$$

ب) ابتدا باید اختلاف توان‌ها عددی ثابت شوند اما در صورت کسر $x = (1 + 2x) - (x + 1)$ ثابت نیست.

$$\text{صورت}:\ 3^{x+1} + 2^{2x+1} = 3^{x+1} + 2 \times 4^x \sim 2 \times 4^x$$

$$\text{مخرج}:\ 3^{x+2} + 4^{x-1} \sim 4^{x-1} \Longrightarrow \text{حد} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2 \times 4^x}{4^{x-1}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2 \times 4^x}{\frac{1}{4} \times 4^x} = 8$$

مثال ۱۲. رشد توابع $y_3 = 4^x$ و $y_2 = (\ln x)^x$ و $y_1 = x^{\ln x}$ را در $+\infty$ با هم مقایسه کنید.

برای مقایسه رشد این توابع بهتر است رشد لگاریتم آنها را با هم مقایسه کنیم.

$$\ln y_1 = (\ln x)^2 \quad \text{و} \quad \ln y_2 = x \ln(\ln x) \quad \text{و} \quad \ln y_3 = x \ln 4$$

$\ln y_1$ از نوع لگاریتمی و دو عبارت دیگر شامل چندجمله‌ای x هستند پس رشد بیشتری دارند و چون $\ln(\ln x) \to +\infty$ پس از $\ln 4$ بزرگتر است و لذا $\ln y_2 \gg \ln y_3 \gg \ln y_1$ و بنابراین $y_2 \gg y_3 \gg y_1$.

تست ۱۹ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xe^{\frac{x}{2}}}{x+e^x}$ برابر است با: (عمران ۷۴، معدن ۸۰)

۱) ۱ ۲) ∞ ۳) ۲ ۴) ۰

حل: گزینه ۴ درست است. با توجه به قوانین رشد: $\text{کسر}\sim\dfrac{xe^{\frac{x}{2}}}{e^x}=\dfrac{x}{e^{\frac{x}{2}}}\to 0$

تست ۲۰ مقدار حد $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+e^x)}{x}$ کدام است؟ (مکانیک ۷۹)

۱) e ۲) ۰ ۳) -1 ۴) ۱

حل: گزینه ۴ درست است. چون $1+e^x\sim e^x$

$$\frac{\ln(1+e^x)}{x}\sim\frac{\ln(e^x)}{x}=\frac{x\ln e}{x}=\frac{x}{x}\to 1$$

تست ۲۱ اگر $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\log(2+x)-x^{2n}\sin x}{1+x^{2n}}$، $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$ کدام است؟ (آمار ۷۹)

۱) $+\infty$ ۲) $\log 3$ ۳) $-\sin 1$ ۴) $-\infty$

حل: گزینه ۳ درست است. چون حد $f(x)$ در 1^+ خواسته شده است، پس فرض می‌کنیم $x>1$ عددی ثابت است و نسبت به n حد می‌گیریم تا ضابطه f بدست آید. چون $x^{2n}\to+\infty$ صورت کسر هم‌ارز $-x^{2n}\sin x$ و مخرج هم ارز x^{2n} است و لذا $f(x)=-\sin x$ پس $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=-\sin 1$.

تست ۲۲ حاصل $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$ کدام است؟ (ژئوفیزیک ۷۸)

۱) -1 ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) ∞

حل: گزینه ۲ درست است. حد به صورت $\frac{0}{0}$ است با تغییر متغیر $t=\dfrac{1}{x}$ داریم $t\to+\infty$

$\text{حد}=\lim\limits_{t\to+\infty}te^{-t}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{t}{e^t}=0$ (زیرا رشد صورت از مخرج کمتر است.)

تست ۲۳ مقدار $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cosh x}{e^x-e^{\frac{x}{2}}}$ برابر است با:

۱) $\dfrac{1}{2}$ ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) وجود ندارد

حل: گزینه ۱ درست است. تعریف $\cosh x$ را می‌نویسیم.

$$\text{کسر}=\frac{e^x+e^{-x}}{2(e^x-e^{\frac{x}{2}})}\sim\frac{e^x}{2e^x}\to\frac{1}{2}$$

نکته ۱۸. با در نظر گرفتن تعریف $\cosh x$ و $\sinh x$ هم‌ارزی‌های زیر به‌دست می‌آید.

۱) $\cosh x\sim\dfrac{e^x}{2}$ و $\sinh x$ در $+\infty$

۲) $\cosh x\sim\dfrac{e^{-x}}{2}$ و $\sinh x\sim-\dfrac{e^{-x}}{2}$ در $-\infty$.

تست ۲۴ a چقدر باشد تا $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a^x+3^{x+1}}{2^{2x-1}+3^{x+2}}$ عددی غیر صفر باشد؟ (MBA−۸۱)

۱) $a>4$ ۲) $a=3$ ۳) $a=4$ ۴) $3<a<4$

حل: گزینه ۳ درست است. کسر به صورت $\frac{a^x + 3^{x+1}}{\frac{1}{2} \times 4^x} \sim \frac{a^x + 3^{x+1}}{\frac{1}{2} \times 4^x + 3^{x+2}}$ نوشته می‌شود. اگر رشد صورت بیشتر از مخرج باشد، حد برابر بینهایت و اگر رشد مخرج بیشتر باشد، حد صفر می‌شود ولذا باید صورت و مخرج رشد برابر داشته باشند پس $a = 4$.

تست ۲۵ حاصل $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\tan 2x)}{\ln(\tan 3x)}$ کدام است؟ (ژئوفیزیک ۷۷)

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) 1 ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) 0

حل: گزینه ۲ درست است. حالت $\frac{\infty}{\infty}$ است.

$$\text{کسر} \sim \frac{\ln(2x)}{\ln(3x)} = \frac{\ln 2 + \ln x}{\ln 3 + \ln x} \sim \frac{\ln x}{\ln x} \to 1$$

توجه کنید که $\ln 0^+ = -\infty$ پس در صورت و مخرج کسر از $\ln 2$ و $\ln 3$ در برابر بینهایت صرفنظر می‌کنیم.

تست ۲۶ $\lim_{n\to +\infty} \frac{[x] + \cdots + [nx]}{n^2}$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) 0 ۳) $\frac{x}{2}$ ۴) x

حل: گزینه ۳ درست است.

روش اول. مقادیر خاص به جای x را بررسی می‌کنیم. اگر $x = 0$ حاصل حد برابر صفر و گزینه (۱) نادرست است و اگر $x = 1$ حاصل حد برابر $\frac{1}{2}$ ولذا گزینه (۳) درست است.

روش دوم. با توجه به خواص جزء صحیح:

$$x - 1 < [x] \le x \;,\; 2x - 1 < [2x] \le 2x \;,\; \cdots \;,\; nx - 1 < [nx] \le nx$$

نابرابری‌های بالا را با هم جمع می‌کنیم.

$$(x + \cdots + nx) - n < [x] + \cdots + [nx] \le x + \cdots + nx$$

با توجه به $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ و تقسیم دو طرف رابطه بالا به n^2 داریم:

$$\frac{n(n+1)}{2n^2}x - \frac{1}{n} < \frac{[x] + \cdots + [nx]}{n^2} \le \frac{n(n+1)}{2n^2}x$$

وقتی $n \to +\infty$ هر دو عبارت در نامساوی به $\frac{x}{2}$ میل می‌کنند و از قضیه فشردگی حد برابر $\frac{x}{2}$ است.

۲-۳-۳ حالت مبهم $\infty \times 0$ و $\infty - \infty$

این دو حالت مبهم با استفاده از عملیات جبری (مخرج مشترک گرفتن، ضرب در مزدوج و ...) به $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ قابل تبدیل هستند. در رفع ابهام $\infty - \infty$ استفاده از همارزی رادیکال‌ها هم می‌تواند مفید باشد.

مثال ۱۳. حاصل حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \tan x \tan 2x$ ب) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{2}{x^2} - \frac{1}{\cosh x - 1}\right)$

الف) حالت $\infty \times 0$ است. آن را به $\frac{0}{0}$ تبدیل می‌کنیم.

$$\text{حد} = \lim_{x\to\frac{\pi}{۲}} \frac{\tan ۲x}{\cot x} \xlongequal{x=t+\frac{\pi}{۲}} \lim_{t\to ۰} \frac{\tan(۲t+\pi)}{\cot(t+\frac{\pi}{۲})} = \lim_{t\to ۰}\frac{\tan ۲t}{-\tan t} = \lim_{t\to ۰}\frac{۲t}{-t} = -۲$$

ب) حالت $\frac{۱}{۰} - \frac{۱}{۰} = \infty - \infty$ است. با مخرج مشترک گرفتن آن را به $\frac{۰}{۰}$ تبدیل می‌کنیم.

$$\text{کسر} = \frac{۲(\cosh x - ۱) - x^۲}{x^۲(\cosh x - ۱)} \sim \frac{۲(\frac{x^۲}{۲}+\frac{x^۴}{۲۴}) - x^۲}{x^۲ \cdot \frac{x^۲}{۲}} = \frac{\frac{x^۴}{۱۲}}{\frac{x^۴}{۲}} \to \frac{۱}{۶}$$

تست ۲۷ کدام گزینه در مورد $\lim\limits_{x\to ۰} x[\frac{۱}{x}]$ صحیح است؟ (ریاضی، آمار، معماری کشتی ۷۸)

۱) وجود ندارد. ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) ∞

حل: گزینه ۳ درست است. حالت $\infty \times ۰$ است. چون $\frac{۱}{x} \to \pm\infty$ می‌توان از قاعده ۳ در صفحه ۷۳، جزء صحیح را حذف کرد و لذا $x[\frac{۱}{x}] \sim x.\frac{۱}{x} \to ۱$

تست ۲۸ مقدار $\lim\limits_{x\to+\infty} x[\frac{۲}{x}]$ عبارتست از:

۱) ۲ ۲) ۰ ۳) ∞ ۴) وجود ندارد.

حل: گزینه ۲ درست است.

روش اول. با توجه به این که $\frac{۲}{x} \to ۰^+$ پس $[\frac{۲}{x}] = ۰$ یعنی $[\frac{۲}{x}]$ صفر مطلق است، بنابراین این حد حالت مبهم نبوده و برابر صفر است.

روش دوم. اگر $f(x) = x[\frac{۲}{x}]$ آنگاه برای $x > ۲$ داریم $\frac{۲}{x} < ۱$ و لذا $f(x) = ۰$ پس $f(x)$ برای $x > ۲$ برابر تابع ثابت صفر و لذا حد برابر صفر است.

تست ۲۹ کدامیک از موارد زیر درست است؟ (مکانیک و مهندسی پزشکی ۷۶)

۱) $\lim\limits_{x\to ۰}(\sin x)e^{\frac{۱}{x}} = ۰$ ۲) $\lim\limits_{x\to ۰}(\sin x)e^{\frac{۱}{x}} = ۱$

۳) $\lim\limits_{x\to ۰}(\sin x)e^{\frac{۱}{x}} = \infty$ ۴) $\lim\limits_{x\to ۰}(\sin x)e^{\frac{۱}{x}}$ وجود ندارد.

حل: گزینه ۴ درست است. چون $\frac{۱}{x} \to \pm\infty$ باید حد چپ و راست را جداگانه محاسبه کنیم.

$$\begin{cases} x\to ۰^+ : (\sin x)e^{\frac{۱}{x}} \sim xe^{\frac{۱}{x}} \xlongequal{t=\frac{۱}{x}} \dfrac{e^t}{t} \to +\infty \\ x \to ۰^- : (\sin x)e^{\frac{۱}{x}} \sim xe^{\frac{۱}{x}} \to ۰ \times e^{-\infty} = ۰ \end{cases} \Longrightarrow \text{حد وجود ندارد.}$$

تست ۳۰ حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^۲+۴x} - x)$ کدام است؟ (ژئوفیزیک ۷۸)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

حل: گزینه ۳ درست است. حالت $\infty - \infty$ است. با استفاده از هم‌ارزی رادیکال‌هادر صفحه ۷۲:

$$\sqrt{x^۲+۴x} \sim |x + \frac{۴}{۲}| = x + ۲ \Longrightarrow \text{حد} = \lim_{x\to+\infty}(x+۲-x) = ۲$$

تست ۳۱ $\lim\limits_{x\to ۰}(\frac{۱}{\sin^۲ x} - \frac{۱}{x^۲})$ برابر است با: (عمران ۷۸)

۱) ۰ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

حل: گزینه ۲ درست است. باید مخرج مشترک بگیریم.

$$\frac{۱}{\sin^۲ x}-\frac{۱}{x^۲}=\frac{x^۲-\sin^۲ x}{x^۲\sin^۲ x}=\frac{(x+\sin x)(x-\sin x)}{x^۲\sin^۲ x}\sim\frac{۲x\cdot\frac{x^۳}{۶}}{x^۴}\to\frac{۱}{۳}$$

تست ۳۲ $\lim\limits_{x\to ۰}\left(\frac{x}{x-\sin x}-\frac{۶}{x^۲}\right)$ برابر است با: (عمران ۷۶)

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۳ ۳) ۰/۵ ۴) ۰/۶

حل: گزینه ۲ درست است. مخرج مشترک می‌گیریم.

$$\frac{x}{x-\sin x}-\frac{۶}{x^۲}=\frac{x^۳-۶(x-\sin x)}{x^۲(x-\sin x)}\sim\frac{x^۳-۶(\frac{x^۳}{۶}-\frac{x^۵}{۱۲۰})}{x^۲.\frac{x^۳}{۶}}=\frac{\frac{x^۵}{۲۰}}{\frac{x^۵}{۶}}\to\frac{۶}{۲۰}=\frac{۳}{۱۰}$$

تست ۳۳ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^۲}{۲x+۵}-\frac{x^۳}{۴x^۲+۱}\right)$ برابر است با:

۱) $-\frac{۱}{۴}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $+\infty$ ۴) $-\infty$

حل: گزینه ۳ درست است.

$$\frac{x^۲}{۲x+۵}\sim\frac{x^۲}{۲x}=\frac{x}{۲} \quad و \quad \frac{x^۳}{۴x^۲+۱}\sim\frac{x^۳}{۴x^۲}=\frac{x}{۴}\Longrightarrow \text{عبارت}\sim\frac{x}{۲}-\frac{x}{۴}=\frac{x}{۴}\to+\infty$$

تست ۳۴ حاصل حد $x\left(\sqrt{\frac{x+۴}{x-۱}}-۱\right)$ وقتی $x\to+\infty$ کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۲}$ ۲) $-\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $-\frac{۵}{۲}$

حل: گزینه ۱ درست است. باتوجه به هم‌ارزی برنولی وقتی $x\to ۰$ داریم $\sqrt{۱+x}-۱\sim\frac{x}{۲}$ و با تغییر متغیر $y=x+۱$ برای $y\to ۱$ داریم $\sqrt{y}-۱\sim\frac{y-۱}{۲}$. چون $\frac{x+۴}{x-۱}\to ۱$ می‌توان نوشت:

$$\sqrt{\frac{x+۴}{x-۱}}-۱\sim\frac{۱}{۲}\left(\frac{x+۴}{x-۱}-۱\right)=\frac{۵}{۲(x-۱)}\Longrightarrow \text{عبارت}\sim\frac{۵x}{۲(x-۱)}\sim\frac{۵x}{۲x}\to\frac{۵}{۲}$$

نکته ۱۹. با محاسبه‌ای مشابه آن چه در تست بالا انجام شد، هم‌ارزی زیر برای $x\to+\infty$ به‌دست می‌آید.

$$x\sqrt[n]{\frac{x-\alpha}{x-\beta}}\sim x+\frac{\beta-\alpha}{n}\quad,\quad n\in\mathbb{N}$$

تست ۳۵ α چقدر باشد تا $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\alpha}\left(\sqrt{x^۲+x+۳}-\sqrt{x^۲+x}\right)$ عددی غیر صفر باشد؟

۱) $\alpha=۰$ ۲) $\alpha=۱$ ۳) $\alpha\geq ۱$ ۴) $\alpha>۱$

حل: گزینه ۲ درست است. چون دو عبارت رادیکالی هم‌ارز $x+\frac{۱}{۲}$ هستند، استفاده از هم‌ارزی مجاز نمی‌باشد. از ضرب در مزدوج استفاده می‌کنیم.

$$\text{عبارت}=x^{\alpha}\frac{(x^۲+x+۳)-(x^۲+x)}{\sqrt{x^۲+x+۳}+\sqrt{x^۲+x}}\sim\frac{۳x^{\alpha}}{۲x}$$

حد اخیر برای $\alpha>۱$ برابر بینهایت و برای $\alpha<۱$ صفر می‌شود ولی برای $\alpha=۱$ حد $\frac{۳}{۲}$ است.

تست ۳۶ اگر $\lim\limits_{x\to ۰}\left(\frac{\sin ۳x}{x^۳}+\frac{a}{x^۲}+b\right)=۰$ آن‌گاه مقدار $a+b$ کدام است؟ (ریاضی ۸۰)

۱) $-\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $-\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

حل: گزینه ۴ درست است. ابتدا مخرج مشترک گرفته و بسط صورت را تا توان ۳ می‌نویسیم.

$$\text{عبارت} = \frac{\sin 3x + ax + bx^3}{x^3} \sim \frac{3x - \frac{1}{6}(3x)^3 + ax + bx^3}{x^3} = \frac{(a+3)x + (b - \frac{9}{2})x^3}{x^3}$$

حال برای این که حد بالا صفر شود باید صورت کسر برابر صفر باشد ولذا $a + 3 = 0$ و $b - \frac{9}{2} = 0$ پس $b = \frac{9}{2}$ و $a = -3$ و لذا $a + b = \frac{3}{2}$.

۲-۳-۴ حالت‌های مبهم نمایی

برای رفع ابهام حالت‌های مبهم نمایی $1^\infty, \infty^0, 0^0$ کافی است از عبارت مبهم $u(x)^{v(x)}$ لگاریتم بگیریم. در این حالت از رابطه $u(x)^{v(x)} = e^{v(x)\ln u(x)}$ استفاده می‌کنیم و بنابراین باید $\lim_{x \to x_0} v(x) \ln u(x)$ (که به صورت $\infty \times 0$ است) را محاسبه کنیم. به عبارتی ابتدا از حالت مبهم لگاریتم می‌گیریم و حاصل $A = \lim_{x \to x_0} v(x) \ln u(x)$ را به دست می‌آوریم. پاسخ سؤال برابر e^A است.

نکته ۲۰. وقتی $u(x) \to 1$ و $v(x) \to \infty$، معمولاً استفاده از هم‌ارزی $u(x)^{v(x)} \sim e^{v(x)(u(x)-1)}$ محاسبه را ساده‌تر می‌کند.

مثال ۱۴. حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \to 0^+} (\sin x)^{x^2}$ ب) $\lim_{x \to +\infty} (x+1)^{\sin \frac{1}{x}}$

ج) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 + x + 4}{x^2 + x - 5}\right)^{x^2}$ د) $\lim_{x \to 0} \left(1 + \ln(1 + 2x^2) - 2x \sinh x\right)^{\cot^4 x}$

الف) حالت مبهم 0^0 است پس از عبارت تحت حد، ln می‌گیریم.

$$\ln(\sin x)^{x^2} = x^2 \ln \sin x \sim x^2 \ln x \longrightarrow 0 \quad (\text{نتیجه ۸ در صفحه ۷۳}) \implies \text{حد} = e^0 = 1$$

ب) حالت مبهم ∞^0 پس از عبارت تحت حد، ln می‌گیریم.

$$(\sin \frac{1}{x}) \ln(x+1) \sim \frac{\ln(x+1)}{x} \sim \frac{\ln x}{x} \xrightarrow{\text{قوانین رشد}} 0 \implies \text{حد} = e^0 = 1$$

ج) حالت مبهم 1^∞ است پس از نکته ۲۰ داریم :

$$\text{عبارت} \sim e^{x^2\left(\frac{x^2+x+4}{x^2+x-5} - 1\right)} = e^{x^2 \frac{9}{x^2+x-5}} \longrightarrow e^9$$

د) حد به صورت 1^∞ است. از نکته ۲۰ استفاده می‌کنیم.

$$\text{عبارت} \sim e^{\cot^4 x \left(1 + \ln(1+2x^2) - 2x \sinh x - 1\right)} = e^{f(x)}$$

$$\implies f(x) = \cot^4 x \left(1 + \ln(1 + 2x^2) - 2x \sinh x - 1\right) = \frac{\ln(1 + 2x^2) - 2x \sinh x}{\tan^4 x}$$

$$\sim \frac{2x^2 - \frac{1}{2}(2x^2)^2 - 2x(x + \frac{1}{6}x^3)}{x^4} = -\frac{7}{3} \implies \text{حد} = e^{-\frac{7}{3}}$$

$\boxed{\text{تست ۳۷}}$ مقدار $\lim_{x \to 0^+} (\tan x)^{\tan 2x}$ کدام است؟ (تأسیسات آبیاری ـ آزاد ۸۲)

۱) e ۲) $\frac{1}{e}$ ۳) $2e$ ۴) ۱

حل: گزینه ۴ درست است. حد به صورت 0^0 است.

$\ln(\text{عبارت}) = \tan ۲x \ln(\tan x) \sim ۲x\ln x \to ۰ \implies \text{حد} = e^{۰} = ۱$

تست ۳۸ اگر $v = ۱ + \ln x$ حاصل $\lim_{x\to ۰^+} (x)^{\frac{۲}{v}}$ کدام است؟ (مکانیک ۸۱)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) $e^{۲}$ ۴) ۲

حل: گزینه ۳ درست است. چون $\lim_{x\to ۰^+} v = -\infty$ پس حد به صورت $۰^{۰}$ است.

$$\frac{۲}{v}\ln x = \frac{۲\ln x}{۱+\ln x} \sim \frac{۲\ln x}{\ln x} \to ۲ \implies \text{حد} = e^{۲}$$

تست ۳۹ حاصل $\lim_{x\to+\infty}(\cosh x)^{\frac{۱}{x}}$ کدام است؟ (مکانیک ۷۸)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{e}{۲}$ ۴) e

حل: گزینه ۴ درست است. حد به صورت $\infty^{۰}$ و روش کلی اعمال ln است اما استفاده از هم‌ارزی $\cosh x \sim \frac{e^x}{۲}$ ساده‌تر است.

$$(\cosh x)^{\frac{۱}{x}} \sim \left(\frac{e^x}{۲}\right)^{\frac{۱}{x}} = \frac{e}{۲^{\frac{۱}{x}}} \to \frac{e}{۱} = e$$

تست ۴۰ حاصل $\lim_{x\to ۰}(۱-\sin x)^{\cot x}$ کدام است؟ (صنایع غذایی ۷۷)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) e ۴) $e^{-۱}$

حل: گزینه ۴ درست است. حد به صورت ۱^{∞} است. از نکته ۲۰ در صفحه قبل:

$$\text{عبارت} \sim e^{\cot x(۱-\sin x-۱)} = e^{\frac{\cos x}{\sin x}(-\sin x)} \sim e^{-\cos x} \to e^{-۱}$$

تست ۴۱ $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{۳x+۱}{۳x-۱}\right)^{x}$ برابر است با: (علوم کامپیوتر ۸۱)

۱) $e^{۲}$ ۲) $e^{\frac{۳}{۲}}$ ۳) $e^{\frac{۲}{۳}}$ ۴) $e^{۳}$

حل: گزینه ۳ درست است. حالت مبهم ۱^{∞} است.

$$\text{عبارت} \sim e^{x\left(\frac{۳x+۱}{۳x-۱}-۱\right)} = e^{\frac{۲x}{۳x-۱}} \to e^{\frac{۲}{۳}}$$

تست ۴۲ حاصل $\lim_{x\to ۰}(x+۱-\tan x)^{\frac{۳}{۲x^{۳}}}$ را بیابید. (عمران — آزاد ۸۰)

۱) $e^{-\frac{۱}{۴}}$ ۲) $e^{\frac{۳}{۲}}$ ۳) $e^{\frac{۲}{۳}}$ ۴) $e^{-\frac{۱}{۲}}$

حل: گزینه ۴ درست است. حد به صورت ۱^{∞} است.

$$\text{عبارت} \sim e^{\frac{۳}{۲x^{۳}}(x-\tan x)} \sim e^{\frac{۳(-\frac{x^{۳}}{۳})}{۲x^{۳}}} = e^{-\frac{۱}{۲}}$$

تست ۴۳ $\lim_{x\to+\infty}\left(\cosh\frac{۱}{x}\right)^{x^{۲}}$ کدام است؟ (علوم کامپیوتر ۸۲)

۱) $\frac{۱}{\sqrt{e}}$ ۲) $\sqrt{e}$ ۳) $۲e$ ۴) $e^{۲}$

حل: گزینه ۲ درست است. حد به صورت ۱^{∞} است.

$$\text{عبارت} \sim e^{x^{۲}(\cosh\frac{۱}{x}-۱)} \sim e^{x^{۲}\left(\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{x})^{۲}\right)} \to e^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{e}$$

تست ۴۴ $\lim\limits_{x\to ۰}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{۱}{x^{۲}}}$ کدام است؟ **(آمار ۷۷)**

۱) $e^{-\frac{۱}{۶}}$ ۲) $e^{-۶}$ ۳) $e^{\frac{۱}{۶}}$ ۴) $e^{۶}$

حل: گزینه ۱ درست است. حد به صورت ۱^{∞} است.

$$\text{عبارت} \sim e^{\frac{۱}{x^{۲}}\left(\frac{\sin x}{x}-۱\right)} = e^{\frac{\sin x - x}{x^{۳}}} \sim e^{\frac{-\frac{۱}{۶}x^{۳}}{x^{۳}}} \to e^{-\frac{۱}{۶}}$$

تست ۴۵ $:\lim\limits_{x\to ۰}\left(\frac{(۱+x)^{\frac{۱}{x}}}{e}\right)^{\frac{۱}{x}}$ **(تکنولوژی نساجی ۸۲)**

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) e ۴) $e^{-\frac{۱}{۲}}$

حل: گزینه ۴ درست است. چون $(۱+x)^{\frac{۱}{x}} \sim e^{\frac{۱}{x}(۱+x-۱)} \to e$ پس حد به صورت ۱^{∞} است.

روش اول. با توجه به نکته ۲۰ در صفحه ۷۸ داریم:

$$\text{عبارت} \sim e^{\frac{۱}{x}\left(\frac{(۱+x)^{\frac{۱}{x}}}{e}-۱\right)} = e^{f(x)}$$

$$\Longrightarrow f(x) = \frac{(۱+x)^{\frac{۱}{x}}-e}{xe} = \frac{e^{\frac{۱}{x}\ln(۱+x)}-e}{xe} \sim \frac{e^{\frac{۱}{x}(x-\frac{x^{۲}}{۲})}-e}{xe} = \frac{e(e^{-\frac{x}{۲}}-۱)}{xe} \sim \frac{-\frac{۱}{۲}x}{x} = -\frac{۱}{۲}$$

پس حد برابر $e^{-\frac{۱}{۲}}$ است.

روش دوم. اگر از این عبارت لگاریتم بگیریم.

$$\frac{۱}{x}\ln\left(\frac{(۱+x)^{\frac{۱}{x}}}{e}\right) = \frac{۱}{x}\left(\ln(۱+x)^{\frac{۱}{x}}-\ln e\right) = \frac{۱}{x}\left(\frac{۱}{x}\ln(۱+x)-۱\right) = \frac{\ln(۱+x)-x}{x^{۲}}$$

$$\sim \frac{(x-\frac{۱}{۲}x^{۲})-x}{x^{۲}} = -\frac{۱}{۲} \Longrightarrow \text{حد} = e^{-\frac{۱}{۲}}$$

تذکر۱۷. برای محاسبه حد تابع f از قاعده هوپیتال (تست ۵ در صفحه ۲۱۸) نیز می‌توان استفاده کرد.

تست ۴۶ مقدار $\lim\limits_{x\to ۱}(۲-x)^{\tan\frac{\pi x}{۲}}$ برابر است با: **(معدن ۷۳، تأسیسات آبیاری ـ آزاد ۷۹)**

۱) $\frac{۱}{\pi}$ ۲) ۱ ۳) موجود نیست ۴) $e^{\frac{۲}{\pi}}$

حل: گزینه ۴ درست است. حد به صورت ۱^{∞} است.

$$\text{عبارت} \sim e^{\tan\frac{\pi x}{۲}(۱-x)} = e^{f(x)}$$

برای محاسبه $A = \lim\limits_{x\to ۱}(۱-x)\tan\frac{\pi x}{۲}$ از تغییر متغیر $x = t+۱$ و $t \to ۰$ استفاده می‌کنیم.

$$f(x) = f(t+۱) = -t\tan(\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi t}{۲}) = t\cot\frac{\pi t}{۲} = \frac{t}{\tan\frac{\pi t}{۲}} \sim \frac{t}{\frac{\pi}{۲}t} = \frac{۲}{\pi}$$

پس حد مورد نظر $e^{\frac{۲}{\pi}}$ است.

تذکر۱۸. برای حل این سؤال با استفاده از قاعده هوپیتال به تست ۱۱۱ در صفحه ۲۰۹ مراجعه کنید.

تست ۴۷ حاصل $\lim\limits_{x\to 0^+}[\tan x]^{\tan 2x}$ برابر است با:

۱) صفر ۲) ۱ ۳) e ۴) وجود ندارد

حل: گزینه ۱ درست است. حد به صورت 0^0 است. این تست را با تست ۳۷ در صفحه ۷۹ مقایسه کنید. تفاوت عمده در این سؤال به این صورت است که چون $x \to 0^+$ پس x در ربع اول بوده و لذا $[\tan x] \to [0^+] = 0$ یعنی $[\tan x]$ صفر مطلق است. بنابراین این تست، حالت مبهم نیست. چون در همسایگی محذوف سمت راست عدد صفر مقدار تابع عدد ثابت صفر است، پس حد برابر صفر خواهد بود.

تست ۴۸ مقدار $\lim\limits_{x\to 0^+}(\tan x)^{[\tan 2x]}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) e ۳) ۱ ۴) وجود ندارد

حل: گزینه ۳ درست است. حد به صورت 0^0 است. این تست را با تست ۳۷ در صفحه ۷۹ مقایسه کنید. تفاوت عمده در این سؤال به این صورت است که چون $x \to 0^+$ پس x در ربع اول بوده و لذا $[\tan 2x] \to [0^+] = 0$ یعنی $[\tan 2x]$ صفر مطلق است. بنابراین این تست، حالت مبهم نیست و چون در همسایگی محذوف سمت راست عدد صفر مقدار $[\tan 2x]$ عدد ثابت صفر است، پس تابعی که حد آن محاسبه شده است یعنی $(\tan x)^{[\tan 2x]}$ برابر عدد ثابت یک است.(هر عدد غیر صفر به توان صفر برابر یک است.) و لذا مقدار حد برابر یک می‌باشد.

تست ۴۹ حاصل $\lim\limits_{x\to +\infty}(\cosh x)^{[\frac{1}{x}]}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{e}{2}$ ۴) e

حل: گزینه ۲ درست است. حد به صورت ∞^0 است. توجه کنید که $[\frac{1}{x}] \to [0^+] = 0$ یعنی $[\frac{1}{x}]$ صفر مطلق است و لذا برای x های بزرگ، تابع $(\cosh x)^{[\frac{1}{x}]}$ برابر $(\cosh x)^0 = 1$ بوده و لذا حد آن نیز برابر یک می‌باشد.(این سؤال را با تست ۳۹ در صفحه ۷۹ مقایسه کنید.)

تست ۵۰ $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[\frac{3x+1}{3x-1}\right]^x$ برابر است با:

۱) ۱ ۲) $e^{\frac{3}{2}}$ ۳) $e^{\frac{2}{3}}$ ۴) e^3

حل: گزینه ۱ درست است. حد به صورت 1^∞ است ولی حالت مبهم نمی باشد. با توجه به اینکه برای x های مثبت، صورت کسر از مخرج آن بزرگتر است داریم $\left[\frac{3x+1}{3x-1}\right] \to [1^+] = 1$ یعنی جزء صحیح برابر یک مطلق است و لذا برای x های بزرگ $\left[\frac{3x+1}{3x-1}\right]^x$ تابع ثابت یک و لذا حد آن برابر یک خواهد بود.(این سؤال را با تست ۴۱ در صفحه ۷۹ مقایسه کنید.)

۲–۴ مجانب

به طور کلی مجانب یک منحنی، خط (یا منحنی) است که در بی‌نهایت، تابع به آن نزدیک شود. معمولاً منظور از مجانب خط مجانب است که با توجه به وضعیت خط، سه حالت مختلف دارد.

۱) مجانب قائم

خط $x = x_\circ$ را مجانب قائم تابع f می‌نامند هرگاه $\lim\limits_{x \to x_\circ^+} f(x) = \pm\infty$ یا $\lim\limits_{x \to x_\circ^-} f(x) = \pm\infty$.

۲) مجانب افقی

خط $y = b$ را مجانب افقی تابع می‌نامند هر گاه $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ یا $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$.

۳) مجانب مایل

خط $y = ax + b$، $a \neq \circ$ را مجانب مایل f می‌نامند هرگاه:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \big(f(x) - (ax + b)\big) = \circ$$

برای محاسبه a, b می‌توان از روابط زیر استفاده کرد.

$$a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{و} \quad b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - ax)$$

نکات زیر در مورد محاسبه مجانبها می‌تواند مفید باشد.

نکته ۲۱. در توابع کسری، مجانب قائم معمولاً در ریشه مخرج رخ می‌دهد. در این حالت اگر $x_\circ$ ریشه مشترک صورت و مخرج باشد هرگاه مرتبه $x_\circ$ در مخرج از صورت بیشتر باشد، $x = x_\circ$ مجانب قائم خواهد بود.

نکته ۲۲. در توابع لگاریتمی ریشه عبارتی که از آن لگاریتم گرفته شده است، کاندیدای مجانب قائم است.

نکته ۲۳. اگر تابع $f(x)$ برای $a \neq \circ$ به صورت $f(x) = ax + b + g(x)$ نوشته شود و $\lim\limits_{x \to \pm\infty} g(x) = \circ$ آنگاه $y = ax + b$ معادله مجانب مایل برای f خواهد بود.

تذکر ۱۹. اگر $f(x)$ در بینهایت هم‌ارز با عبارت درجه اول $ax + b$ باشد، همین خط معادله مجانب غیر عمودی آن خواهد بود. به‌عنوان مثال هم‌ارزی ذکر شده برای رادیکال‌ها در بی‌نهایت معادله مجانب مایل آنها است.

نکته ۲۴. در توابع گویا یعنی $\frac{p(x)}{q(x)}$ که p و q دو چندجمله‌ای هستند، اگر درجه صورت کمتر یا مساوی درجه مخرج باشد، تابع مجانب افقی دارد و اگر درجه صورت یک واحد از درجه مخرج بیشتر باشد، تابع مجانب مایل دارد و خارج قسمت تقسیم $p(x)$ بر $q(x)$ معادله مجانب مایل را مشخص می‌کند.

نکته ۲۵. توابع مثلثاتی (و به طور کلی متناوب) فاقد مجانب افقی و مایل هستند و توابع کراندار فاقد مجانب قائم هستند.

مثال ۱۵. معادله مجانب‌های توابع زیر را مشخص کنید.

الف) $f(x) = \dfrac{x^۳ - ۱}{x^۲ - ۱}$ ب) $f(x) = x \cos \dfrac{۱}{\sqrt{x}}$

الف) ریشه‌های مخرج ± ۱ هستند و چون -۱ ریشه صورت نیست پس $x = -۱$ مجانب قائم است. اما $x = ۱$ ریشه مشترک صورت و مخرج بوده و باید بررسی شود.

$$\lim_{x\to ۱} \frac{x^۳ - ۱}{x^۲ - ۱} = \lim_{x\to ۱} \frac{(x-۱)(x^۲+x+۱)}{(x-۱)(x+۱)} = \frac{۳}{۲} \neq \infty$$

پس $x = -۱$ تنها مجانب قائم است.

$$\begin{array}{r|l} x^۳ - ۱ & x^۲ - ۱ \\ \cline{2-2} \ominus x^۳ - x & x \\ \hline x - ۱ & \end{array}$$

چون درجه صورت یک واحد از درجه مخرج بیشتر است پس تابع دارای مجانب مایل است که از تقسیم صورت بر مخرج معادله آن $y = x$ خواهد بود.

ب) چون f فاقد ریشه مخرج است مجانب قائم ندارد.(با وجود این که $x = ۰$ ریشه مخرج در cos است اما کسینوس تابعی کراندار است و لذا $\lim\limits_{x\to ۰} f(x) = ۰$.) چون $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \infty$ پس مجانب افقی وجود ندارد اما f می‌تواند دارای مجانب مایل باشد. برای محاسبه این مجانب:

روش اول.

$$a = \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \cos \frac{۱}{\sqrt{x}} = ۱$$

$$b = \lim_{x\to +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to +\infty} x(\cos \frac{۱}{\sqrt{x}} - ۱) = \lim_{x\to +\infty} x(-\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{\sqrt{x}})^۲) = -\frac{۱}{۲}$$

پس $y = x - \frac{۱}{۲}$ معادله مجانب مایل است.

روش دوم. از تذکر ۱۹ در صفحه قبل استفاده کرده و هم ارزی درجه اول f را می‌نویسیم.

$$f(x) \sim x\left(۱ - \frac{۱}{۲}(\frac{۱}{\sqrt{x}})^۲ + \cdots\right) = x - \frac{۱}{۲} \implies y = x - \frac{۱}{۲} \qquad \text{معادله مجانب مایل}$$

$\boxed{\text{تست ۵۱}}$ معادله مجانب‌های $y = x + ۲\operatorname{Arctan} x$ عبارتند از: (ریاضی ۷۷)

۱) $y = \pi$ راست، $y = \pi$ چپ
۲) $y = x$ راست، $y = x$ چپ
۳) $y = x + \pi$ راست، $y = x - \pi$ چپ
۴) ندارد.

حل: گزینه ۳ درست است. وقتی $x \to +\infty$ داریم $y \sim x + ۲\left(\frac{\pi}{۲}\right) = x + \pi$ پس $y = x + \pi$ مجانب از سمت راست است و وقتی $x \to -\infty$ داریم $y \sim x + ۲\left(-\frac{\pi}{۲}\right) = x - \pi$ و لذا $y = x - \pi$ مجانب از سمت چپ است.

$\boxed{\text{تست ۵۲}}$ تعداد کل مجانبهای تابع $f(x) = \dfrac{xe^{-x} + ۴x - ۱}{۴\cosh x - e^{-x} - ۳}$ برابر است با:

۱) ۴
۲) ۳
۳) ۲
۴) ۱

حل: گزینه ۱ درست است. برای یافتن مجانبهای قائم، ریشه‌های مخرج را به‌دست می‌آوریم. مخرج به صورت $۴\cosh x - e^{-x} - ۳ = ۲(e^x + e^{-x}) - e^{-x} - ۳ = ۲e^x + e^{-x} - ۳$ است.

$$۲e^x + e^{-x} - ۳ = ۰ \overset{\times e^x}{\Longrightarrow} ۲e^{۲x} + ۱ - ۳e^x = ۰ \implies (۲e^x - ۱)(e^x - ۱) = ۰$$

$$\implies e^x = \frac{۱}{۲}\,,\ ۱ \implies x = \ln\frac{۱}{۲}\,,\ ۰$$

و چون این دو عدد ریشه صورت نیستند پس حد y در این نقاط برابر بینهایت و لذا $x = \ln\frac{۱}{۲}$ و $x = ۰$ مجانب قائم هستند. وقتی $x \to +\infty$ داریم $\lim\limits_{x\to +\infty} xe^{-x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x}{e^x} = ۰$ و لذا صورت هم ارز $۴x$ و مخرج هم ارز $۲e^x$

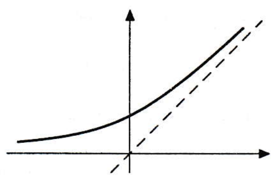
است و لذا $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \circ$ پس $y = \circ$ مجانب افقی است. در $-\infty$ چون $xe^{-x} \to \infty$ و از مرتبه نمایی است صورت هم ارز xe^{-x} و مخرج هم ارز e^{-x} بوده و لذا حد برابر $-\infty$ است پس ممکن است f دارای مجانب مایل به معادله $y = ax + b$ باشد.

$$a = \lim_{x\to-\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{xe^{-x} + \text{۴}x - \text{۱}}{xe^{-x} + \text{۲}xe^{x} - \text{۳}x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{xe^{-x}}{xe^{-x}} = \text{۱}$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} (y - ax) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{xe^{-x} + \text{۴}x - \text{۱}}{\text{۲}e^{x} + e^{-x} - \text{۳}} - x\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\text{۲}xe^{x} + \text{۷}x - \text{۱}}{\text{۲}e^{x} + e^{-x} - \text{۳}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\text{۷}x}{e^{-x}} = \circ$$

پس $y = x$ مجانب مایل f است و لذا f دارای ۴ مجانب است.

تست ۵۳ شکل زیر نمودار تابع $f(x) = ax + \sqrt{x^{\text{۲}} + \text{۴}}$ است.



a کدام است؟ (صنایع غذایی ۸۰)

۱) $-\text{۲}$ ۲) $-\text{۱}$

۳) $\circ$ ۴) ۱

حل: گزینه ۴ درست است. با توجه به شکل $y = \circ$ معادله مجانب افقی در $-\infty$ است پس $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \circ$ و اما در $-\infty$ داریم:

$$f(x) \sim ax + |x| = (a - \text{۱})x \Longrightarrow a - \text{۱} = \circ \Longrightarrow a = \text{۱}$$

تست ۵۴ معادله مجانب منحنی پارامتری $x = \dfrac{a}{\tan\theta}$ و $y = \dfrac{b}{\sin\theta}$ کدام است؟ (مکانیک ۷۵)

۱) $y = \circ$ ۲) $y = \dfrac{b}{a}x$ ۳) $y = \dfrac{b}{a}x - a$ ۴) $y = \dfrac{a}{b}x$

حل: گزینه ۲ درست است.

روش اول. برای یافتن مجانب باید شرایطی را در نظر گرفت که y یا x به بینهایت میل کنند. واضح است که x فقط وقتی بی‌نهایت می‌شود که $\theta \to k\pi$ و در این صورت y نیز به بی‌نهایت میل می‌کند یعنی این منحنی فقط می‌تواند دارای مجانب مایل باشد. اگر $y = mx + h$ معادله مجانب باشد:

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{\theta\to k\pi} \frac{\frac{b}{\sin\theta}}{\frac{a}{\tan\theta}} = \lim_{\theta\to k\pi} \frac{b}{a}\sec\theta = \pm\frac{b}{a}$$

برای k زوج شیب $\dfrac{b}{a}$ و برای k فرد $-\dfrac{b}{a}$ است. با توجه به گزینه‌ها $m = \dfrac{b}{a}$ را در نظر گرفته و در اینحالت $\theta \to \text{۲}k\pi$ و چون دوره تناوب $\sin\theta$ و $\tan\theta$ برابر $\text{۲}\pi$ است پس کافی است حالت $\theta \to \circ$ را در نظر بگیریم.

$$h = \lim_{x\to\pm\infty} (y - mx) = \lim_{\theta\to\circ} \left(\frac{b}{\sin\theta} - \frac{b}{a}\frac{a}{\tan\theta}\right) = \lim_{\theta\to\circ} \left(\frac{b}{\sin\theta} - \frac{b\cos\theta}{\sin\theta}\right) = \lim_{\theta\to\circ} \frac{b(\text{۱} - \cos\theta)}{\sin\theta}$$

$$= \lim_{\theta\to\circ} \frac{\frac{b}{\text{۲}}\theta^{\text{۲}}}{\theta} = \circ$$

پس معادله مجانب مایل $y = \dfrac{b}{a}x$ است. با محاسبه مشابه در حالت $m = -\dfrac{b}{a}$ و با در نظر گرفتن $\theta \to \pi$ مجانب دیگر $y = -\dfrac{b}{a}x$ خواهد بود.

روش دوم. θ را بین معادلات داده شده حذف می‌کنیم.

$$\frac{x^{2}}{a^{2}} = \cot^{2}\theta \ , \ \frac{y^{2}}{b^{2}} = \frac{1}{\sin^{2}\theta} = \csc^{2}\theta \implies \frac{y^{2}}{b^{2}} = 1 + \frac{x^{2}}{a^{2}} \implies \frac{y^{2}}{b^{2}} - \frac{x^{2}}{a^{2}} = 1$$

این معادله مربوط به یک هذلولی است. با توجه به نکته ۱۵ در صفحه ۴۱ با مساوی صفر قرار دادن طرف دوم، معادله مجانبهای مایل به دست می‌آید.

$$\frac{y^{2}}{b^{2}} - \frac{x^{2}}{a^{2}} = 0 \implies \frac{y^{2}}{b^{2}} = \frac{x^{2}}{a^{2}} \implies \frac{y}{b} = \pm\frac{x}{a} \implies y = \pm\frac{b}{a}x$$

۲−۵ پیوستگی

تعریف. تابع f را در $x = x_0$ پیوسته می‌نامیم هرگاه $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ و در غیر این صورت آن را **ناپیوسته** یا **گسسته** می‌نامیم.

اگر در تعریف بالا $x \to x_0^+$ یا $x \to x_0^-$ به ترتیب تعریف پیوستگی از راست و چپ به‌دست می‌آید.

تذکر ۲۰. تابع f در x_0 پیوسته است اگر و تنها اگر در این نقطه از راست و چپ پیوسته باشد.

تعریف. اگر تابع f در x_0 ناپیوسته ولی دارای حد باشد، می‌توان مقدار تابع را در این نقطه برابر حد تعریف کرد و لذا تابع f در x_0 پیوسته می‌شود، در این حالت می‌گوییم f در x_0 **ناپیوستگی رفع شدنی** دارد. اگر در نقطه x_0 حد چپ و راست موجود و نابرابر باشند، ناپیوستگی را **جهشی** می‌نامیم.

مثال ۱۶. اگر n عددی صحیح باشد، $\lim_{x\to n^+}[x] = n$ و $\lim_{x\to n^-}[x] = n-1$ پس $[x]$ در نقاط صحیح ناپیوستگی جهشی دارد اما از راست پیوسته است.

تعریف. تابع f را در بازه باز (a,b) پیوسته می‌نامیم هرگاه در تمام نقاط این بازه پیوسته باشد. f را بر بازه $[a,b)$ پیوسته می‌نامیم هرگاه بر (a,b) پیوسته و در $x = a$ از راست پیوسته باشد. پیوستگی f بر $(a,b]$ و $[a,b]$ به طور مشابه تعریف می‌شود.

مثال ۱۷. تابع $f(x) = \sqrt{x}$ در بازه $[0,+\infty)$ پیوسته است زیرا در هر نقطه x_0 که $x_0 > 0$ داریم $\lim_{x\to x_0}\sqrt{x} = \sqrt{x_0}$ و $\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x} = 0 = f(0)$.

قضیه ۹. اگر توابع f و g در نقطه x_0 پیوسته باشند توابع $f \pm g$ و $f \cdot g$ نیز در x_0 پیوسته‌اند. همچنین اگر $g(x_0) \neq 0$ تابع $\frac{f}{g}$ نیز در x_0 پیوسته است.

نکته ۲۶. جمع و تفریق یک تابع پیوسته با یک تابع ناپیوسته، تابعی ناپیوسته است.

نکته ۲۷. اگر $f(x)$ در x_0 پیوسته و $f(x_0) \neq 0$ و $g(x)$ در x_0 ناپیوسته باشد fg در x_0 ناپیوسته است.

قضیه ۱۰. اگر $\lim_{x\to x_0} g(x) = b$ و تابع f در نقطه b پیوسته باشد آنگاه $\lim_{x\to x_0}(f\circ g)(x) = f(\lim_{x\to x_0} g(x)) = f(b)$ یعنی حد از توابع پیوسته عبور می‌کند.

نتیجه ۱۱. اگر g در x_0 و f در $g(x_0)$ پیوسته باشد، $f\circ g$ نیز در x_0 پیوسته خواهد بود. به عبارتی ترکیب توابع پیوسته، تابعی پیوسته است.

قضیه ۱۲. اگر f بر بازه (a,b) پیوسته و معکوس پذیر باشد، معکوس آن نیز بر دامنه تعریف خود پیوسته است.

نکته ۲۸. چون توابع چندجمله‌ای، گویا، مثلثاتی، نمایی، لگاریتمی و هیپربولیک در دامنهٔ تعریف خود پیوسته‌اند با توجه به قضیه بالا توابع معکوس آنها نیز بر دامنهٔ خود پیوسته خواهند بود.

نکته ۲۹. $\sqrt[n]{x}$ برای n فرد در هر نقطه و برای n زوج در نقاطی که $x > ۰$، پیوسته است.

نکته ۳۰. فرض کنید $g(x)$ در $x_۰$ پیوسته باشد و $f(x) = [g(x)]$ در اینصورت :

الف) اگر $g(x_۰) \notin \mathbb{Z}$ آنگاه $f(x)$ در $x_۰$ پیوسته است.

ب) اگر $g(x_۰) \in \mathbb{Z}$ آنگاه f فقط وقتی که $x_۰$ نقطه می‌نیمم نسبی g باشد، در این نقطه پیوسته است.

ج) اگر $g(x_۰) \in \mathbb{Z}$ و g در $x_۰$ ماکزیمم نسبی باشد، f در این نقطه ناپیوستگی رفع شدنی دارد.

مثال ۱۸. اگر $f(x) = \text{sgn}(x)$ و $g(x) = \text{Arcsin}x^۲$ حد تابع $f \circ g$ را در $x = ۰$ بیابید.

$\lim\limits_{x \to ۰} g(x) = ۰$ ولی چون $\text{sgn}(x) = \begin{cases} ۱ & x > ۰ \\ ۰ & x = ۰ \\ -۱ & x < ۰ \end{cases}$ در $x = ۰$ ناپیوسته است پس از قضیه حد ترکیب توابع نمی‌توان استفاده کرد یعنی ممکن است حد $f \circ g$ با مقدار $f(۰)$ برابر نباشد. با توجه به تغییر ضابطهٔ f در $x = ۰$ باید نوع حد تابع $g(x)$ در $x = ۰$ را تعیین کنیم. وقتی $x \to ۰$ آنگاه $x^۲ > ۰$ و بنابراین $g(x) > ۰$ پس:

$g(x) \to ۰^+ \Longrightarrow f \circ g \to f(۰^+) = ۱$

تعریف. می‌گوییم تابع f بر بازه I در **خاصیت مقدار میانی** صدق می‌کند، هر گاه به ازای هر $x_۱, x_۲ \in I$ عدد $x_۰$ بین $x_۱$ و $x_۲$ موجود باشد که $f(x_۰)$ بین $f(x_۱)$ و $f(x_۲)$ قرار بگیرد.

با توجه به قضیه زیر هر تابع پیوسته در خاصیت مقدار میانی صدق می‌کند.

قضیه ۱۳. (**قضیه مقدار میانی**) اگر f بر بازه $[a, b]$ پیوسته و λ عددی بین $f(a)$ و $f(b)$ باشد. عدد $x_۰ \in (a, b)$ موجود است که $f(x_۰) = \lambda$. یعنی خط افقی $y = \lambda$ نمودار f را حداقل در یک نقطه چون $x_۰$ قطع می‌کند.

نتیجه ۱۴. اگر $f(a)f(b) < ۰$ و f بر بازه $[a, b]$ پیوسته باشد، آن‌گاه f حداقل یک ریشه در بازه (a, b) دارد.

نتیجه ۱۵. اگر $f(a)f(b) \leq ۰$ و f بر بازه $[a, b]$ پیوسته باشد، آن‌گاه f حداقل یک ریشه در بازه $[a, b]$ دارد.

توجه کنید که اگر $f(a)f(b) > ۰$ در حالت کلی در مورد وجود یا عدم وجود ریشه نمی‌توان اظهار نظر کرد اما در مورد توابع پیوسته و یکنوای اکید می‌توان عدم وجود ریشه را نتیجه گرفت:

نکته ۳۱. اگر f بر بازه $[a, b]$ صعودی یا نزولی اکید بوده و بر این بازه پیوسته باشد و $f(a)f(b) > ۰$ آنگاه f در این بازه فاقد ریشه است.

تذکر ۲۱. قضیه مقدار میانی وجود حداقل یک نقطه در بازه (a, b) را تحت شرط پیوستگی تضمین می‌کند و آن نقطه را به‌طور دقیق محاسبه نمی‌کند به عبارتی این قضیه «وجودی» است.

تذکر ۲۲. کاربرد مهم این قضیه یافتن بازه‌ای است که تابع f در آن دارای ریشه باشد.

تذکر۲۳. شرط پیوستگی در این قضیه، شرط کافی است. مثلاً $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ در بازه $[-1, 1]$ ناپیوسته است اما در خاصیت مقدار میانی صدق می‌کند.

تذکر۲۴. اگر تابعی یکنوای اکید بوده و در خاصیت مقدار میانی صدق کند آنگاه پیوسته است.

توجه کنید که یک‌به‌یک بودن یک تابع، یکنوایی آن را نتیجه نمی‌دهد (توضیحات و نمودار مربوط به تست ۳۸ در صفحه ۱۵۰ را ملاحظه کنید.) اما:

نکته ۳۲. اگر تابعی در خاصیت مقدار میانی (و به طور خاص پیوستگی) صدق کند و علاوه بر آن یک‌به‌یک نیز باشد، صعودی اکید یا نزولی‌اکید است.

نکته ۳۳. اگر تابع f بربازه I پیوسته و فاقد ریشه باشد، بر این بازه علامت ثابت دارد.

مثال ۱۹. ثابت کنید چندجمله‌ای درجه فرد $p(x) = a_{2n+1}x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + \ldots + a_1x + a_0$ حداقل یک ریشه دارد.

در حالتی که $a_{2n+1} > 0$ داریم $\lim\limits_{x\to+\infty} p(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} p(x) = -\infty$ پس نقاطی چون x_1 و x_2 موجودند که $p(x_2) < 0$ و $p(x_1) > 0$ و چون $p(x)$ پیوسته است، $p(x) = 0$ حداقل یک جواب دارد. استدلال در حالت $a_{2n+1} < 0$ به طور مشابه انجام می‌شود.

مثال ۲۰ اگر $f : [a, b] \to [a, b]$ تابعی پیوسته باشد، ثابت کنید نقطه‌ای مانند $x_0 \in [a, b]$ موجود است که $f(x_0) = x_0$. (چنین نقطه‌ای، **نقطه ثابت f** نامیده می‌شود.)

برای حل این نوع مسائل باید از نتیجه خاصیت مقدار میانی استفاده کنیم، به این ترتیب که مسأله را به یافتن ریشه برای یک تابع مناسب تبدیل می‌کنیم. پس تابع تفاضل یعنی $g(x) = f(x) - x$ را تشکیل می‌دهیم و با توجه به برد f برای هر $a \leq x \leq b$ داریم $a \leq f(x) \leq b$ و لذا $g(a) = f(a) - a \geq 0$ و $g(b) = f(b) - b \leq 0$. بنابراین $g(a)g(b) \leq 0$ و لذا بنا به نتیجه ۱۵، $x_0 \in [a, b]$ موجود است که $g(x_0) = 0$ یعنی $f(x_0) = x_0$.

تست ۵۵ اگر تابع $f(x) = \dfrac{\ln(2 + \sin x - e^x)}{1 - \cos x}$ در $x = 0$ پیوسته باشد، $f(0)$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) 0 ۳) 1 ۴) -1

حل: گزینه ۴ درست است. باید $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$. با توجه به نکته ۱۳ درصفحه ۶۸:

$$f(x) \sim \frac{1 + \sin x - e^x}{1 - \cos x} \sim \frac{1 + (x + 0x^2) - (1 + x + \frac{x^2}{2})}{\frac{1}{2}x^2} \to -1$$

تست ۵۶ تابع $f(x) = x(-1)^{[\frac{1}{x}]}$ برای $x \neq 0$ و $f(0) = 0$ روی $\mathbb{R}$ تعریف شده است. کدام گزینه درست است؟ (آمار ۸۲)

۱) f در صفر فقط پیوسته راست است.
۲) f در صفر فقط پیوسته چپ است.
۳) f در صفر پیوسته است.
۴) f در هیچ نقطه‌ای پیوسته نیست.

حل: گزینه ۳ درست است. $[\frac{1}{x}]$ عددی صحیح است و لذا با توجه به زوج یا فرد بودن آن $(-1)^{[\frac{1}{x}]} = \pm 1$ پس

این عبارت کراندار و $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ پس f در صفر پیوسته است.

تست ۵۷ اگر تابع
$$f(x) = \begin{cases} -2\sin x & -\pi \le x \le -\frac{\pi}{2} \\ a\sin x + b & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \cos x & \frac{\pi}{2} \le x \le \pi \end{cases}$$
پیوسته باشد، مقدار a کدام است؟ (ژئوفیزیک ۷۹)

۱) ۱ ۲) ۱− ۳) ۲ ۴) ۲−

حل: گزینه ۲ درست است. با توجه به این که در هر ضابطه، توابع پیوسته هستند باید f در $\pm\frac{\pi}{2}$ پیوسته شود.

$$\begin{cases} f(-\frac{\pi}{2}) = \lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^-} (-2\sin x) = 2 \\ \lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} (a\sin x + b) = -a + b \end{cases} \xrightarrow{\text{پیوستگی}} b - a = 2$$

$$\Longrightarrow b = 1 \ \text{و}\ a = -1$$

$$\begin{cases} f(\frac{\pi}{2}) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} (\cos x) = 0 \\ \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} (a\sin x + b) = a + b \end{cases} \xrightarrow{\text{پیوستگی}} b + a = 0$$

تست ۵۸ تابع $f(x)$ در نقطه $x = 0$ پیوسته است و داریم $\forall a, b \in \mathbb{R} : f(a+b) = f(a)f(b)$. کدام گزینه برای این تابع صحیح است؟ (ریاضی ۷۸)

۱) f در $\mathbb{R}$ پیوسته است.

۲) f فقط در $\mathbb{Z}$ پیوسته است.

۳) f فقط در N پیوسته است.

۴) راجع به ناحیه پیوستگی f نمی‌توان اظهار نظر قطعی کرد.

حل: گزینه ۱ درست است. در نقطه دلخواه x_0 وضعیت پیوستگی f را بررسی می‌کنیم. باید $\lim_{x\to x_0} f(x)$ را محاسبه کنیم. قرار می‌دهیم $t = x - x_0$ در این صورت وقتی $x \to x_0$ داریم $t \to 0$.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{t\to 0} f(x_0 + t) = \lim_{t\to 0} f(x_0)f(t) = f(x_0)\lim_{t\to 0} f(t) = f(x_0)f(0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$$

بنابراین $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ ولذا تابع f در همه نقاط پیوسته است.

تست ۵۹ تعداد نقاط گسستگی تابع با ضابطه
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1 - e^{\tan x}} & x \ne 0 \\ -1 & x = 0 \end{cases}$$
در فاصله $[-2\pi, 2\pi]$ کدام است؟ (ژئوفیزیک ۷۷)

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۸ ۴) ۹

حل: گزینه ۳ درست است. تابع $\tan x$ در نقاط $\pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{\pi}{2}$ تعریف نمی‌شوند پس در این نقاط f نیز تعریف نمی‌شوند و لذا ناپیوسته است. تابع f در ریشه‌های مخرج نیز می‌تواند ناپیوسته باشد.

$$1 - e^{\tan x} = 0 \Longrightarrow \tan x = 0 \Longrightarrow x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi$$

در نقاط $\pm\pi, \pm 2\pi$ تابع f تعریف نمی‌شود و ناپیوسته است اما در $x = 0$ حالت $\frac{0}{0}$ رخ می‌دهد.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{1 - e^{\tan x}} \xlongequal{\text{هم‌ارزی}} \lim_{x\to 0} \frac{x}{-\tan x} = -1 = f(0)$$

پس f در $x = ۰$ پیوسته است. بنابراین f در ۸ نقطه ناپیوسته است.

تست ۶۰ چه تعداد از نقاط ناپیوستگی $s(x) = [\sin^{۲} x]$ در بازه $(-۲, ۲)$ قرار دارد؟ (شیمی نساجی ۷۹)

۱) دو ۲) صفر ۳) یک ۴) سه

حل: گزینه ۱ درست است. تابع $s(x)$ در نقاطی که $\sin^{۲} x$ عددی صحیح شود ممکن است ناپیوسته باشد.

$$\sin^{۲} x \in \mathbb{Z} \Longrightarrow \sin^{۲} x = ۰, ۱ \Longrightarrow x = ۰, \pm\frac{\pi}{۲}$$

اما $\sin^{۲} x \geq ۰$ ولذا این تابع در $x = ۰$ می‌نیمم می‌شود. با توجه به نکته (۳۰ ـ ب) در صفحه ۸۶، $s(x)$ در $x = ۰$ پیوسته است. ولی در $\pm\frac{\pi}{۲}$ تابع $\sin^{۲} x$ می‌نیمم نیست و لذا $s(x)$ ناپیوسته خواهد بود.

تست ۶۱ مجموعه نقاط پیوستگی تابع f با ضابطهٔ $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x^{۲n} - ۱}{x^{۲n} + ۱}$ کدام است؟ (آمار ۸۰)

۱) $\mathbb{R} - \{\pm ۱\}$ ۲) $\mathbb{R} - \{۱\}$ ۳) $\{\pm ۱\}$ ۴) $\mathbb{R}$

حل: گزینه ۱ درست است. ضابطه f را به‌دست می‌آوریم. با توجه به اینکه $a^{+\infty}$ برای $a > ۱$ و $a < ۱$ و $a = ۱$ حالتهای متفاوتی دارد پس سه حالت برای x در نظر می‌گیریم. اگر $|x| > ۱$ آن‌گاه $x^{۲n} \to +\infty$ پس:

$$\frac{x^{۲n} - ۱}{x^{۲n} + ۱} \sim \frac{x^{۲n}}{x^{۲n}} \to ۱ = f(x)$$

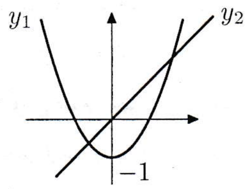
اگر $|x| < ۱$ آن‌گاه $x^{۲n} \to ۰$ پس $f(x) = -۱$ و اگر $|x| = ۱$ آن‌گاه $x^{۲n} = ۱$ پس $f(x) = ۰$ بنابراین

$$f(x) = \begin{cases} ۱ & |x| > ۱ \\ ۰ & |x| = ۱ \\ -۱ & |x| < ۱ \end{cases}$$

و لذا f در ± ۱ ناپیوسته و در مجموعه $\mathbb{R} - \{\pm ۱\}$ پیوسته است.

تست ۶۲ معادله $x^{۴} - ۴x - ۱ = ۰$ چند ریشه حقیقی دارد؟ (علوم کامپیوتر ۸۱)

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۰ ۴) ۲



حل: گزینه ۴ درست است.

روش اول. یک راه حل مناسب، رسم نمودار دو تابع $y_۱ = x^{۴} - ۱$ و $y_۲ = ۴x$ است. محل برخورد این دو نمودار، ریشه‌های معادله هستند و بنابراین این معادله دارای دو ریشه (یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی) است.

روش دوم. با توجه به اینکه با یک چندجمله‌ای مواجه هستیم از **قاعده تعیین علامت دکارت** استفاده می‌کنیم. به این ترتیب که $f(x) = x^{۴} - ۴x - ۱$ چندجمله‌ای است و ضرایب آن یک بار تغییر علامت می‌دهند(ضریب $x^{۴}$ مثبت و ضریب x منفی است.) پس معادله یک ریشه مثبت دارد و چون در $f(-x) = x^{۴} + ۴x - ۱$ نیز ضرایب یک بار تغییر علامت می‌دهند پس یک ریشه منفی دارد و لذا f دارای ۲ ریشه است.

روش سوم. با استفاده از بحث مشتق.(مثال ۲۶ در صفحه ۱۶۶ را ملاحظه کنید.)

نکته ۳۴. قاعده تعیین علامت دکارت <u>فقط برای تعیین تعداد ریشه‌های چندجمله‌ای‌ها</u> یعنی تابع $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_۱ x + a_۰$ قابل استفاده است. بر طبق این قاعده اگر تعداد تغییر علامتهای چندجمله‌ای $f(x)$ برابر m باشد، آنگاه تعداد ریشه‌های مثبت $f(x)$ برابر m یا $m - ۲$ یا $m - ۴$ یا $\cdots$ است. همین ارتباط برای

تعداد ریشه‌های منفی f و تعداد تغییر علامتهای $f(-x)$ برقرار است.

تذکر۲۵. توجه کنید که قاعده دکارت، معمولاً نمی‌تواند تعداد دقیق ریشه‌ها را مشخص نماید.

تست ۶۳ معادله $6x^4 - 7x + 1 = 0$ دارای چند ریشه حقیقی است؟ (معدن ۷۳)

۱) چهار ریشه حقیقی ۲) دو ریشه حقیقی

۳) بیش از دو ریشه حقیقی ۴) بیش از دو ریشه حقیقی ندارد.

حل: گزینه ۲ درست است. اگر $f(x) = 6x^4 - 7x + 1$ چون ضرایب دو بار(یکبار از ۶ به ۷− و بار دیگر از ۷− به ۱) تغییر علامت می‌دهند، f دارای ۲ یا ۰ ریشه مثبت است. ولی $x = 1$ یکی از ریشه‌ها است پس بحث صفر ریشه منتفی ولذا f دارای دو ریشه مثبت است. چون ضرایب $f(-x) = 6x^4 + 7x + 1$ تغییر علامت نمی‌دهند، f فاقد ریشه منفی است پس f دقیقاً دو ریشه دارد. (توجه کنید که با رسم نموار توابع $g(x) = 7x$ و $h(x) = 6x^4 + 1$ نیز مانند تست قبل می‌توانیم به همین نتیجه برسیم.)

تست ۶۴

اگر تابع $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ پیوسته و یک‌به‌یک باشد و $f(0) < f(1)$ آن‌گاه به ازای هر $x \in (0, 1]$:

(ریاضی ۷۴)

۱) $f(x) > f(1)$ ۲) $f(x) < f(1)$ ۳) $f(x) < f(0)$ ۴) $f(x) > f(0)$

حل: گزینه ۴ درست است.

روش اول. گزینه‌های (۱) و (۲) و (۳) برای $x = 1$ نادرست هستند و چون حکم در مورد $0 < x \leq 1$ خواسته شده است، لذا گزینه (۴) درست است.

روش دوم. $g(x) = f(x) - f(0)$ را تشکیل می‌دهیم. چون f یک‌به‌یک و پیوسته است، g نیز همین خواص را دارد. $g(0) = 0$ و g یک‌به‌یک است پس در هیچ نقطه‌ای از $(0, 1]$ صفر نمی‌شود و از نکته ۳۳ در صفحه ۸۷ علامت ثابتی دارد و چون $g(1) > 0$ پس علامت آن بر بازه $(0, 1]$ مثبت است و بنابراین $g(x) = f(x) - f(0) > 0$ و لذا $f(x) > f(0)$.

روش سوم. چون f پیوسته و یک‌به‌یک است، از نکته ۳۲ در صفحه ۸۷ یکنوای اکید است و چون $f(0) < f(1)$، تابع f صعودی اکید است و لذا برای $x > 0$ داریم $f(x) > f(0)$.

استفاده از نکته زیر که دلیل آن را در قضیه ۶ در صفحه ۴۹۲ خواهیم دید، در حل برخی تست‌ها مفید است.

نکته ۳۵. تابع دو ضابطه‌ای $f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x \in \mathbb{Q} \\ f_2(x) & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ در نقطه x_0 دارای حد است اگر و تنها اگر $\lim_{x \to x_0} f_1(x) = \lim_{x \to x_0} f_2(x)$ و اگر f_1 و f_2 در x_0 پیوسته باشند، f در x_0 پیوسته است اگر و تنها اگر $f_1(x_0) = f_2(x_0)$.

تست ۶۵ تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 2x & x \in \mathbb{Q} \\ x - 2 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ مفروض است. این تابع در ..... (ریاضی، آمار ۷۸)

۱) ۲− پیوسته است. ۲) ۲ پیوسته است.

۳) $-\frac{1}{2}$ پیوسته است. ۴) همه نقاط ناپیوسته است.

حل: گزینه ۱ درست است. چون $2x = x - 2$ نتیجه می‌دهد، $x = -2$ پس f فقط در $x = -2$ پیوسته است.

خلاصه نکات مهم

۱) عبارت $\lim\limits_{x \to x_\circ} f(x) = L$ به این مفهوم است که با نزدیک کردن مقادیر متغیر x به $x_\circ$، مقادیر تابع $f(x)$ به عدد L نزدیک می‌شود.

۲) اگر تابعی در همسایگی محذوف نقطه‌ای تعریف نشده باشد، در آن نقطه حد ندارد.

۳) شرط لازم و کافی برای وجود حد تابع در یک نقطه، تساوی حد چپ و راست در آن نقطه است.

۴) در موارد زیر برای محاسبه حد توجه به حد چپ و راست مفید است.

الف) در توابع جز صحیح وقتی داخل براکت به عددی صحیح میل می‌کند.

ب) در توابع قدرمطلقی وقتی داخل قدرمطلق به صفر میل می‌کند.

ج) در توابع رادیکالی وقتی فرجه زوج است و عبارت زیر رادیکال به صفر میل می‌کند.

د) در توابع کسری وقتی مخرج به صفر میل می‌کند ولی صورت مخالف صفر است.

هـ) در توابع چند ضابطه‌ای وقتی حد در نقطه‌ای که ضابطه در آن تغییر می‌کند، مطرح شود.

۵) حد یک تابع و خود تابع در همسایگی $x_\circ$ هم علامت هستند.

۶) اگر $\lim\limits_{x \to x_\circ} f(x) = L$ و تابع f در همسایگی $x_\circ$ صعودی اکید باشد $f(x_\circ^+) = L^+$ و $f(x_\circ^-) = L^-$ ولی اگر تابع f در همسایگی $x_\circ$ نزولی اکید باشد $f(x_\circ^+) = L^-$ و $f(x_\circ^-) = L^+$.

۷) قواعد زیر در محاسبه حد می‌تواند مفید باشد.

۱) $\circ < a < ۱ \implies \log_a(\circ^+) = +\infty$ و $a > ۱ \implies \log_a(\circ^+) = -\infty$

۲) $a > ۱ \implies a^{+\infty} = +\infty$ و $a^{-\infty} = \circ$

۳) $\circ < a < ۱ \implies a^{+\infty} = \circ$ و $a^{-\infty} = +\infty$

۴) $\sqrt[۲n]{\text{هر عبارت منفی از جمله صفر منفی}} = $ وجود ندارد

۵) $\dfrac{\text{هر عبارت دلخواه از جمله صفر حدی و صفر مطلق}}{\text{صفر مطلق}} = $ وجود ندارد

۶) $\dfrac{\text{صفر مطلق}}{\text{هر عبارت (تعریف شده) به جز صفر مطلق}} = \circ$

۷) (صفر حدی(یا مطلق)) × (عبارت کراندار) = ∘

۸) (صفر مطلق) × (بینهایت) = ∘

۹) $(\text{یک مطلق})^{\infty} = ۱$

۱۰) $(\text{بینهایت})^{\text{صفر مطلق}} = 1$

۱۱) $(\text{صفر حدی})^{\text{صفر مطلق}} = 1$

۱۲) $(\text{صفر مطلق})^{\text{صفر حدی مثبت}} = 0$

۱۳) $(\text{صفر مطلق})^{\text{صفر حدی منفی}} =$ وجود ندارد

۱۴) $(\text{صفر حدی مثبت})^{+\infty} = 0$

۱۵) $(\text{صفر حدی منفی})^{+\infty} =$ وجود ندارد

۸) هفت حالت $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \times \infty, \infty - \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$ حالات مبهم هستند.

۹) برای رفع ابهام می‌توان به جای یک عبارت، هم ارز آنرا قرار داد و حد را محاسبه نمود.

۱۰) قواعد هم ارزی در حالتی که $x \to 0$ عبارتند از:

الف) هر چندجمله‌ای با جمله‌ای از خود که دارای کمترین توان است هم‌ارز می‌باشد.

ب) توابع زیر و معکوس آنها با x هم‌ارز هستند.

$\ln(x+1)$ و $e^x - 1$ و $\tanh x$ و $\sinh x$ و $\tan x$ و $\sin x$

ج) برای $\alpha \neq 0$ داریم $\cosh^\alpha x - 1 \sim \frac{\alpha}{2}x^2$ و $1 - \cos^\alpha x \sim \frac{\alpha}{2}x^2$

د) **(هم ارزی برنولی)** برای هر $\alpha \neq 0$ داریم $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$.

۱۱) قواعد هم ارزی وقتی $x \to \pm\infty$

۱) هر چندجمله‌ای با جمله‌ای از خود که دارای بیشترین توان باشد، هم‌ارز است.

۲) **هم‌ارزی رادیکال‌ها:**

$$n \in \mathbb{N} : \quad \sqrt[n]{x^n + bx^{n-1} + \dots} \sim \begin{cases} x + \dfrac{b}{n} & n \text{ فرد} \\ |x + \dfrac{b}{n}| & n \text{ زوج} \end{cases}$$

۳) $[x] \sim x$

۴) قوانین رشد وقتی $x \to +\infty$ قوانین رشد به صورت زیر است.

$$a^x \gg b^x \gg x^\alpha \gg x^\beta \gg \log_c x \qquad a > b > 1,\ c > 0,\ c \neq 1,\ \alpha > \beta > 0$$

۱۲) برای هر $\alpha > 0$ داریم $\lim\limits_{x \to 0^+} x^\alpha \ln x = 0$.

۱۳) در رفع ابهام $\frac{0}{0}$ چنانچه از بسط مک‌لورن استفاده کنید، این بسط را باید برای همه توابعی که در جمع و تفریق دخالت دارند تا توان یکسان بنویسید. خصوصاً اگر مخرج هم‌ارز x^n باشد بسط مک لورن صورت را فقط تا x^n بنویسید.

۱۴) در رفع ابهام حالات نمایی از رابطه $a^b = e^{b\ln a}$ استفاده می‌کنیم. یعنی از عبارت لگاریتم گرفته و آنرا رفع ابهام نموده و حاصل را A می‌نامیم در این صورت e^A پاسخ سؤال است.

۱۵) در حالت 1^∞ استفاده از هم‌ارزی $f(x)^{g(x)} \sim e^{g(x)(f(x)-1)}$ محاسبه را ساده‌تر می‌کند.

۱۶) برای تعیین مجانب قائم به ریشه‌های مخرج (در توابع کسری) و ریشه عبارتی که از آن لگاریتم گرفته می‌شود، توجه نمایید.

۱۷) اگر تابع $f(x)$ برای $a \neq 0$ به صورت $f(x) = ax + b + g(x)$ نوشته شود و $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$ آنگاه $y = ax + b$ معادله مجانب مایل برای f خواهد بود.

۱۸) اگر عبارتی در بینهایت هم ارز $ax + b$ باشد، خط $y = ax + b$ مجانب آن تابع خواهد بود.

۱۹) در توابع کسری وقتی درجه صورت، یک واحد از مخرج بیشتر است خارج قسمت تقسیم صورت بر مخرج معادله مجانب مایل خواهد بود.

۲۰) توابع چندجمله‌ای، نمایی، لگاریتمی، مثلثاتی، هیپربولیک و معکوس آنها در دامنه خود پیوسته‌اند.

۲۱) در توابع به شکل $f(x) = [g(x)]$ که $g(x)$ در x_0 پیوسته باشد، فقط در دو حالت زیر تابع f در x_0 پیوسته خواهد بود و در سایر حالات f ناپیوسته است.

الف) $g(x_0)$ عدد صحیح نباشد.

ب) $g(x_0)$ عدد صحیح بوده و $g(x)$ در نقطه x_0 می‌نیمم نسبی باشد.

۲۲) اگر f بر بازه‌ای پیوسته بوده و تغییر علامت دهد، بر آن بازه دارای ریشه خواهد بود.

۲۳) اگر f بر بازه $[a,b]$ صعودی یا نزولی اکید بوده و بر این بازه پیوسته باشد و $f(a)f(b) < 0$ آنگاه f در این بازه دارای دقیقاً یک ریشه است.

۲۴) اگر f بر بازه $[a,b]$ صعودی یا نزولی اکید بوده و بر این بازه پیوسته باشد و $f(a)f(b) > 0$ آنگاه f در این بازه فاقد ریشه است.

۲۵) هر تابع پیوسته بر بازه‌ای که بر آن فاقد ریشه باشد، دارای علامت ثابت است.

۲۶) هر چند جمله‌ای از درجه فرد دارای حداقل یک ریشه است.

۲۷) هر تابع پیوسته و یک به یک، صعودی اکید یا نزولی اکید است.

۲۸) در توابعی که دو ضابطه متفاوت در اعداد گویا و گنگ دارند، شرط پیوستگی در یک نقطه تساوی دو ضابطه در آن نقطه است.