بسمه تعالی

ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت (۲)

مدرس: دکتر مهدی نعمتی

mnemati.blog.ir

اهداف درس

توانايي حل مسئله

تقويت تفكر رياضي

آشنايي با بردارها

ماتريس و دترمينان

دستگاه معادلات خطي و توابع خطي

توابع چند متغيره و معادلات ديفرانسيل

انتگرال

فهرست مطالب

- فصل اول: بردارها
- فصل دوم:ماتريس و دترمينان
- فصل سوم: دستگاه معادلات خطي و توابع خطي
- فصل چهارم: توابع چند متغيره
- فصل پنجم:معادلات ديفرانسيل
- فصل ششم: انتگرال

فصل اول: بردارها

- بردارها در صفحه
- ضرب عددي دو بردار
- بردارها در فضاي سه بعدي
- ضرب برداري بردارها
- بردارها در فضايn بعد

فصل دوم:ماتریس و دترمینان

- ماتریس
- دترمینان
- وارون ماتریس

فصل سوم: دستگاه معادلات خطي و توابع خطي

- دستگاه معادلات
- استقلال و وابستگي خطي
- رتبه ي يك ماتريس
- توابع خطي

فصل چهارم: توابع چند متغيره

- توابع چند متغيره
- حد و پيوستگي توابع چند متغيره
- مشتق هاي جزيي
- ديفرانسيل كل و مشتقگيري ضمني
- ماكسيمم و مينيمم توابع دو متغيره
- ماكسيمم و مينيمم توابع نسبت به شرايط داده شده

فصل پنجم:معادلات ديفرانسيل

- آشنايي معادلات ديفرانسيل
- معادلات ديفرانسيل جدايي پذير

فصل ششم: انتگرال

- انتگرال

فصل اول: بردارها

کميتهايي مانند سرعت يا شتاب يك متحرك و نيروي وارد بر يك جسم هنگامي مشخص مي شوند كه علاوه بر اندازه سو و جهتشان نيز معين باشد.اين نوع كميت ها را برداري مي ناميم.

برخي از كميت ها هنگامي كه اندازه ي آنها بر حسب واحد مشخصي داده شود كاملا معين مي شوند.

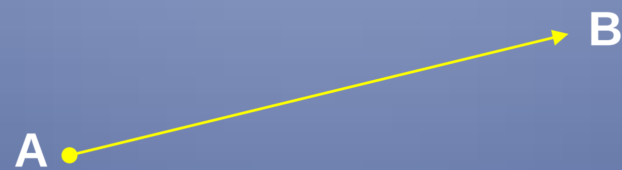
مانند درجه ي حرارت، جرم، طول و حجم ، هزينه و درآمد.

اين گونه كميت ها را عددي يا اسكالر مي ناميم.

۱.۱ بردارها در صفحه

١.١.١تعريف

پاره خط AB كه ابتداي آن A و انتهاي آن B است، يك پاره خط **جهت دار** ناميده مي شود. به شكل زير توجه كنيد:

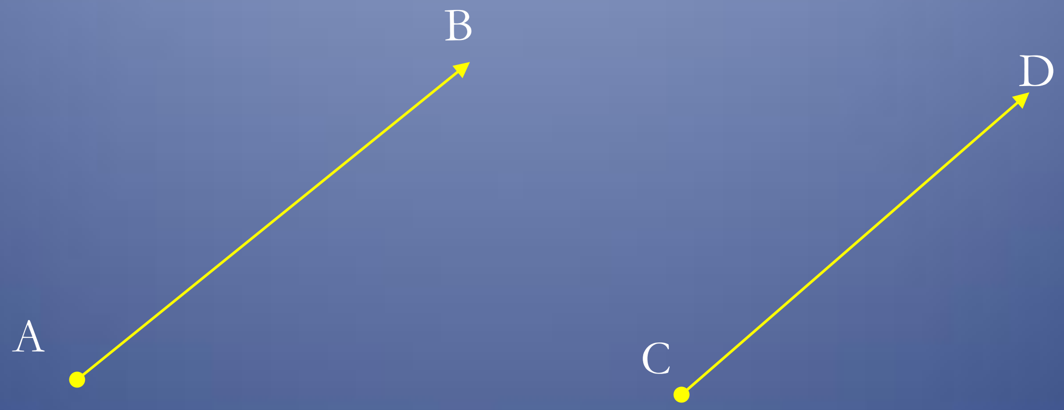


پاره خط جهت دار AB رايك **بردار** مي ناميم و با $\overrightarrow{AB}$ نمايش ميدهيم

نقطه ي A را مبدا و نقطه ي B را انتهاي بردارَمي ناميم.

۲.۱.۱ تساوي دو بردار

دو بردار $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ را برابر يا همسنگ مي ناميم و مينويسيم $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ ، اگر اندازه و جهت آنها يكي باشد.



۳.۱.۱ جمع بردارها

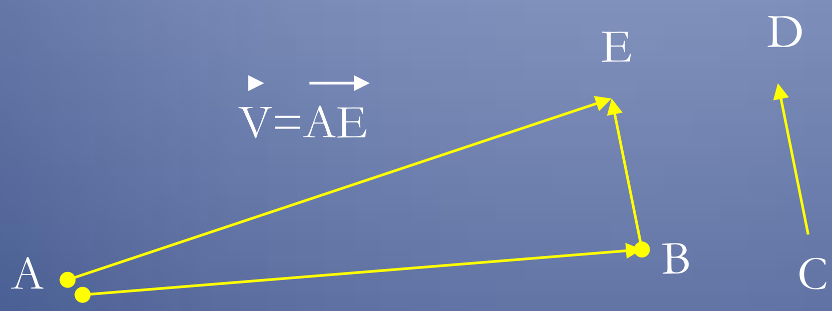
دو بردار AB و CD را در نظر مي گيريم.مجموع AB+CD برداري است مانند V كه به يكي از دو روش زير به دست مي آيد.

با توجه به تعريف تساوي دو بردار، مي توان دو برداررا كه داراي يك مبدا نباشند نيز با يكديگر جمع كرد.

روش اول

از نقطه ي B بردار $\overrightarrow{BE}$ را برابر با بردار $\overrightarrow{CD}$ رسم مي كنيم.

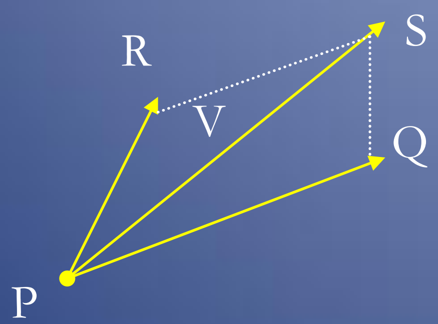
بردار $\vec{V}=\overrightarrow{AE}$ مجموع دو برذار $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ است.

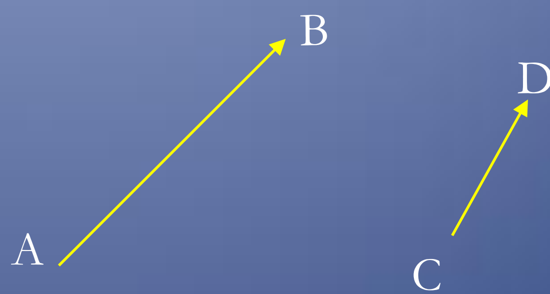


$$\vec{V}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$$

روش دوم

از نقطه ي دلخواه P، دو برابرPQ وPR را که به ترتیب برابر با بردارهايAB وCD هستند ، رسم مي کنیم. بردارPS قطرمتوازي الاضلاع حاصل از این دو بردار برابر با Vمجموع دو بردارAB وCD است.





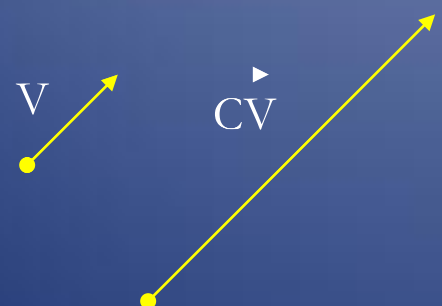
$$\vec{P}=\vec{V}=\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$$

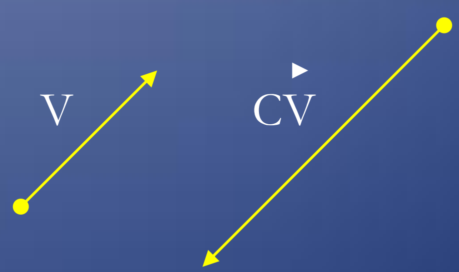
۱.۱.۴ بردار صفر

اگر اندازه ي بردار $\vec{V}$ برابر صفر باشد يعني $|\vec{V}|=0$ ، بردار $\vec{V}$ را **بردار صفر** مي ناميم و 0 با نشان مي دهيم. بنا بر اين اندازه ي 0 برابر صفر است ، ولي جهت آن مشخص نيست.

۱.۱.۵ ضرب عدد در بردا ر(ضرب اسکالر)

فرض مي كنيم $\vec{V}$ برداري دلخواه و C عددي حقيقي باشد.منظور از حاصلضرب عدد C در بردار $\vec{V}$ برداري است با اندازه ي $C\,|\vec{V}|$ و همجهت با $\vec{V}$ اگر $C>0$ و در خلاف جهت $\vec{V}$ اگر $C<0$.
حاصلضرب عدد C در بردار $\vec{V}$ را با $C\vec{V}$ نشان مي دهيم.در شكل :اگر $C=0$ آنگاه $C\vec{V}$ برابر است با بردار صفر.

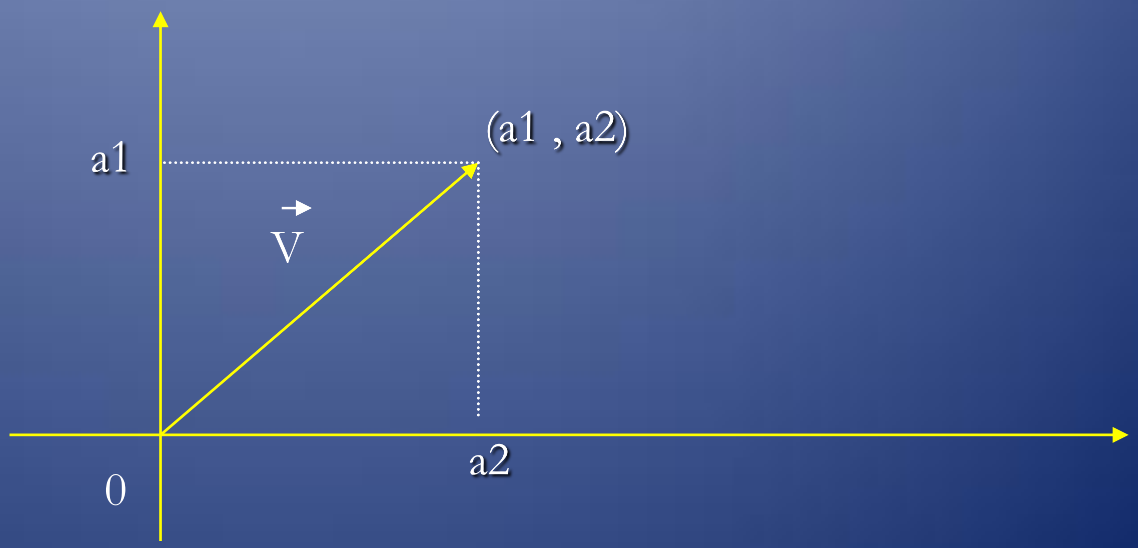




۷.۱.۱ تعريف

بردار $\vec{V}$ را كه ابتداي آن مبدا مختصات و انتهاي آن نقطه ي $(a1 , a2)$است در صفحه ي مختصات xoy است ، بردار نظير زوج مرتب $(a1 , a2)$ مي ناميم. اعداد a1 و a2 را مؤلفه هاي بردار $\vec{V}$ مينامیم و مي نويسيم:

$$\vec{V} = (a1 , a2)$$



قضیه ۱.۱۱

اگر $\vec{V1}=(a1,a2)$ و $\vec{V2}=(b1,b2)$ دو بردار باشند ، آنگاه مجموع $\vec{V1}+\vec{V2}$ برابر است با:

$$\vec{V1}+\vec{V2}= (a1+b1 , a2+b2)$$

۱۳ .۱ .۱ تعريف قرينه ي يك بردار

اگر $\vec{V}=(a1,a2)$، آنگاه بردار (-a1,-a2) را قرينه ي بردار $\vec{V}$ مي ناميم و با $-\vec{V}$ نشان مي دهيم. پس:

$$-V=(-a1, -a2)$$

۱.۱.۱۴ تعريف تفاضل دو بردار

بردار $\vec{V}+(-\vec{U})$ را كه مساوي با جمع $\vec{V}$ با قرينه ي $\vec{U}$ است تفاضل $\vec{U}$ از $\vec{V}$ مي ناميم و با $\vec{V}-\vec{U}$ نشان مي دهيم. يعني:

$$\vec{V}-\vec{U}=\vec{V}+(-\vec{U})$$

۱.۱۵ تعبير هندسي تفاضل دو بردار

نمايش هاي دو بردار $\vec{V}$ و $\vec{U}$ را از يك نقطه رسم مي كنيم. در اين صورت، پاره خط جهت داري كه مبدا آن نقطه ي انتهايي نمايش $\vec{U}$ و انتهاي آن، نقطه ي انتهايي نمايش $\vec{V}$ باشد ، يك نمايش بردار $\vec{V}-\vec{U}$ است. زيرا بنا بر تعريف جمع بردارها داريم:

$$\vec{U}+(\vec{V}-\vec{U})=\vec{V}$$

۱۶.۱.۱ اندازه ي يك بردار

اندازه ي بردار $\vec{V}=(a1,a2)$ برابر است با:

$$V = \sqrt{a1^2 + a2^2}$$

قضيه ۱.۱.۱۸

اگر $\vec{V}$ و $\vec{U}$ و $\vec{W}$ بردارهايي در V_x بوده و c و d اعدادي حقيقي باشند، آنگاه جمع برداري و ضرب اسکالر داراي خواص زيرند:

- $\vec{U}+\vec{V}=\vec{V}+\vec{U}$ (قانون جا به جايي جمع)
- $\vec{U}+(\vec{V}+\vec{W})=(\vec{U}+\vec{V})+\vec{W}$ (قانون شرکت پذيري جمع)
- برداري مانند $\vec{0}$ در $\vec{V}$ وجود دارد به طوري که $\vec{V}+\vec{0}=\vec{V}$ (وجود هماني نسبت به عمل جمع)
- برداري مانند $-\vec{V}$ و $\vec{V}$ در هست به طوري که $\vec{V}+(-\vec{V})=0$ (وجود قرينه ي هندسي نسبت به عمل جمع)

ادامه

- $(cd)\vec{V}=c(d\vec{V})$ (قانون شركت پذيري)
- $c(\vec{U}+\vec{V})=c\vec{U}+c\vec{V}$ (قانون بخشپذيري)
- $(c+d)\vec{U}=c\vec{U}+d\vec{U}$ (قانون بخشپذيري)
- $1\vec{U}=\vec{U}$ (وجود هماني نسبت به ضرب اسكالر)

۱.۱.۲۰ تعريف فضاي برداري حقيقي

فضاي برداري حقيقي V مجموعه اي است از بردارها، همراه با مجموعه اعداد حقيقي (اسكالرها) ، با دو عمل جمع برداري و ضرب اسكالر، به طوري كه هر جفت بردار $\vec{U}$ و $\vec{V}$ در V و هر اسكالر c ، بردارهاي $\vec{U}+\vec{V}$ و $c\vec{U}$ طوري تعريف شده باشند كه در خواص قضيه ي قبل صدق كنند.

بردارهاي يكه

اندازه ي هر دو بردار (۰و۱) و(۱و۰) ، برابر با ۱ است، آنها را بردارهاي يكه مي ناميم و با نمادهاي زير نشان ميدهيم.

$\vec{i} = (1,0)$ $\vec{j} = (0,1)$

با توجه به نماد گذاري گذشته براي هر بردار $\vec{V}=(a1,a2)$ به دست مي آوريم:

$$\mathbf{(a1,a2)=a1\ (1,0)+a2\ (0,1)=a1\ \vec{i}+\ a2\ \vec{j}}$$

بنابر اين هر بردار $V2$ در را مي توان به صورت يك تركيب خطي از دو بردار i و j (عبارتي به صورت $a1\ i + a2\ j$) را يك تركيب خطي از i و j مي نامند.) نوشت. از اين رو بردارهاي i و j يك پايه براي فضاي برداري $V2$ تشكيل مي دهند . تعداد عناصر يك پايه يك فضاي برداري ، بعد فضاي برداري نام دارد.

بنابر اين $V2$ يك فضاي برداري دو بعدي است.

۱.۱.۲۵ تعريف توازي بردارها

دو بردار نا صفر $\vec{U}$ و $\vec{V}$ را موازي مي ناميم ، در صورتي كه اسكالر (عدد حقيقي) c وجود داشته باشد، به طوري كه $\vec{V}=c\vec{U}$.

۲۵.۱.۱ قضیه

اگر $\vec{V}$ بردار نا صفري باشد ، آنگاه

$$\vec{U} = \frac{1}{|\vec{V}|}\vec{V}$$

بردار یکه (واحد) هم جهت با $\vec{V}$ است.

۲.۱ ضرب عددي دو بردار

۱.۲.۱ تعريف ضرب عددي دو بردار

اگر $\vec{U}=(a1,a2)$ و $\vec{V}=(b1,b2)$ دو بردار در $V2$ باشند ، آنگاه حاصلضرب عددي دو بردار $\vec{U}$ و $\vec{V}$ را با $\vec{U}.\vec{V}$ نشان مي دهيم و به صورت زير تعريف مي كنيم:

$$\vec{U}.\vec{V}=(a1,a2).(b1,b2)=a1\ b1+a2\ b2$$

توجه مي كنيم كه حاصلضرب عددي دو بردار ، عددي حقيقي است و بردار نيست. اين حاصلضرب داخلي يا حاصلضرب نقطه اي دو بردار نيز ناميده مي شود.

قضیه ۱.۲.۴

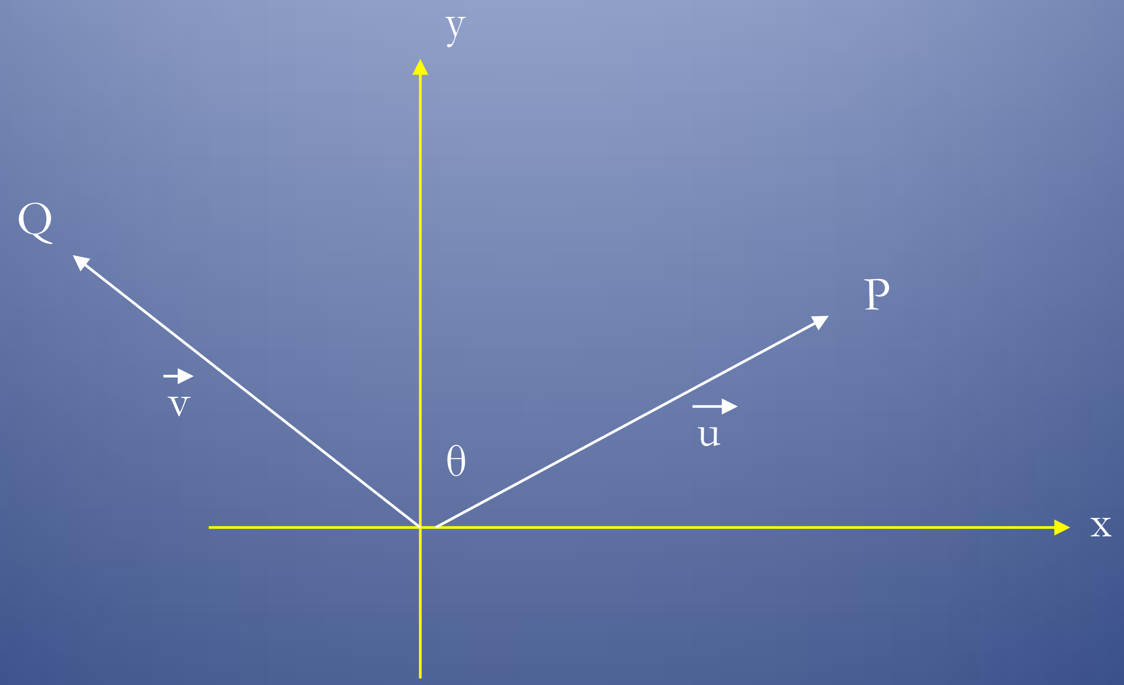
اگر $\vec{U}$ و $\vec{V}$ و $\vec{W}$ بردارهايي در V2 بوده و c يك اسكالر باشد. آنگاه:

1. $\vec{U}.\vec{V}=\vec{V}.\vec{U}$
2. $\vec{U}.(\vec{V}+\vec{W})=\vec{U}.\vec{V}+\vec{U}.\vec{W}$
3. $(\vec{U}+\vec{V}).\vec{W}=\vec{U}.\vec{W}+\vec{V}.\vec{W}$
4. $c(\vec{U}.\vec{V})=(c\vec{U}).\vec{V}=\vec{U}.(c\vec{V})$
5. $0.\vec{U}=\vec{0}$
6. $\vec{V}.\vec{V}=|\vec{V}$

۱.۲.۵ تعريف زاويه ي بين دو بردار

فرض مي كنيم $\vec{U}$ و $\vec{V}$ دو بردار نا صفر باشند به طوري $\vec{U}$ كه مضرب اسكالري از $\vec{V}$ نباشد.اگر $\overrightarrow{OP}$ و $\overrightarrow{OQ}$ به ترتيب بردارهاي نمايشگر $\vec{U}$ و $\vec{V}$ باشند.آنگاه زاويه ي بين $\vec{U}$ و $\vec{V}$ را كوچكترين زاويه ي بين دو پاره خط OP و OQ تعريف مي كنيم.

شكل زيرزاويه ي بين دو بردار را ذر حالتي كه مضرب اسكالري از نباشد، نشان مي دهد:



قضیه ۱.۲.۶

اگر θ زاویه ي بين دو بردار $\vec{U}$ و $\vec{V}$ باشد،آنگاه:

$$\vec{U}.\vec{V}=|\vec{U}||\vec{V}|\cos\theta$$

۱.۲.۸ نتیجه

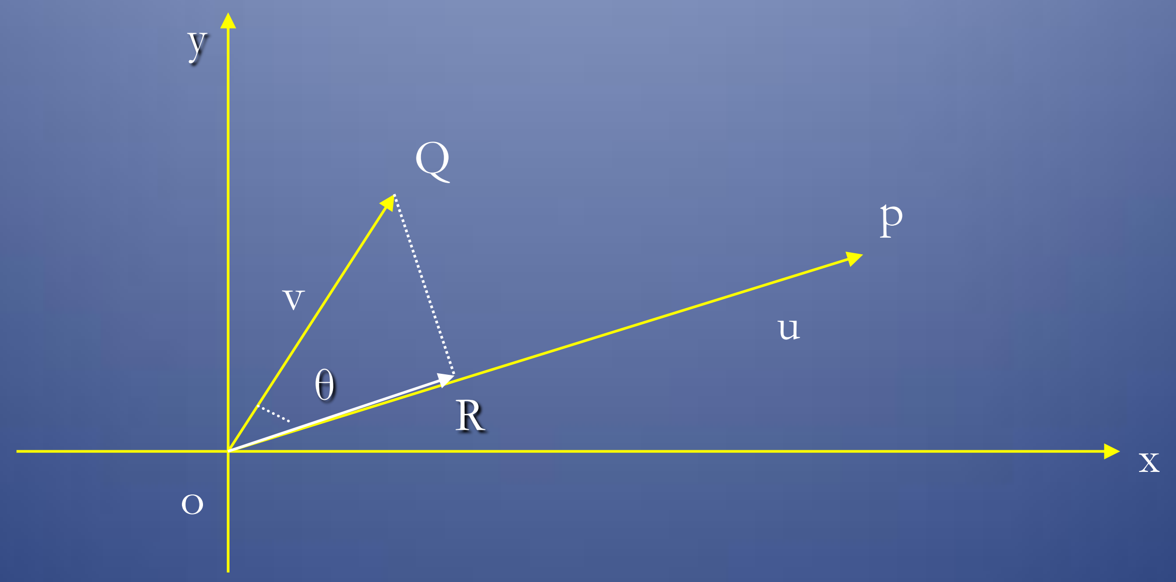
از قضیه ي قبل نتیجه مي شود که دو بردار $\vec{U}$ و $\vec{V}$ بر هم عمودند (متعامدند) اگر و تنها اگر:

$$\vec{U}.\vec{V}=0$$

١.٢.١٠ تصوير يك بردار بر روي بردار ديگر

فرض مي كنيم $\overrightarrow{OP}$ و$\overrightarrow{OQ}$ به ترتيب نمايشگرهاي بردارهاي $\overrightarrow{U}$و$\overrightarrow{V}$ باشند.تصوير$\overrightarrow{OQ}$ در جهت $\overrightarrow{OP}$،بردار$\overrightarrow{OR}$ است،كه در آن R پاي عمود از نقطه Q ي بر خطي است كه از دو نقطه ي كه از دو نقطه D وP مي گذرد.

شكل: تصوير بردار $\vec{V}$ بر روي بردار $\vec{P}$



۱.۲.۱۱ تعريف

اگر $\vec{U}$ بردار ناصفري باشد، تصوير برداري $\vec{V}$ روي بردار $\vec{U}$ به صورت زير تعريف مي كنيم:

$$\mathrm{Proj}_{\vec{u}}^{\vec{v}} = \frac{\vec{U}.\vec{V}}{|\vec{U}|^{2}}\,\vec{u}$$

تصوير اسکالر $\vec{V}$ روي $\vec{U}$ برابر با $\vec{V}|\ \cos\theta$ است . با توجه به قضيه داريم:

$$\vec{V}\ \cos\theta = \frac{\vec{V}.\vec{U}}{|\ \vec{U}\ |} = \vec{V}.\left(\frac{\vec{U}}{|\ \vec{U}\ |}\right)$$

۳.۱ بردارها در فضاي سه بعدي

۱.۳.۱ تعریف

مجمو عه ي تمام سه تايي هاي مرتب از اعداد حقيقي را فضاي عددي سه بعدي مي ناميم و با R نشان مي دهيم. هر سه تايي مرتب (z وy وx) را يك نقطه در فضاي عددي سه بعدي مي ناميم.

قضيه ۱.۳.۲

فاصله ي بين دو نقطه $p_1(x_1 و y_1 و z_1)$ و $p_2(x_2 و y_2 و z_2)$ برابر است با:

$$|\overline{p_1p_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) + (z_2 - z_1)}$$

۱.۳.۴ تعريف

يك بردار در فضاي سه بعدي، يك سه تايي مرتب از اعداد حقيقي به صورت (a_1, a_2, a_3) است. اعداد a_1 ، a_2 و a_3 را مولفه هاي بردار (a_1, a_2, a_3) مي ناميم. مجموعه تمام بردارهايي به صورت (a_1, a_2, a_3) را با V3 نشان مي دهيم.

اگر بردارهاي يكه $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و k عبارت باشند از:

$i=(1,0,0) \qquad j=(0,1,0) \qquad k=(0,0,1)$

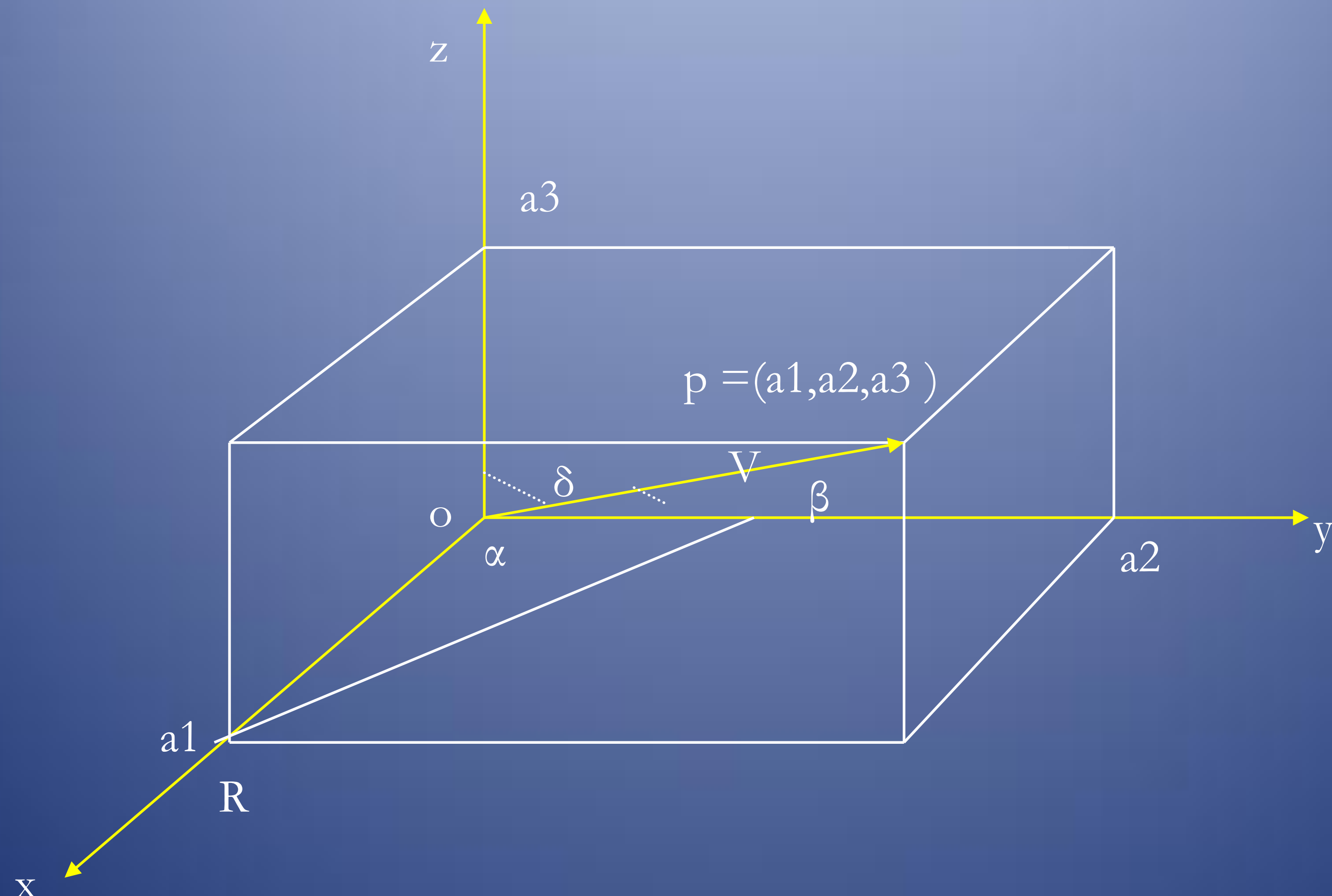
آنگاه هر بردار $\vec{V}=(a1,a2,a3)$ در V3 را مي توان به صورت زير نوشت:

$$\vec{V}=(a1,a2,a3)=a1\,\vec{i}+a2\,\vec{j}+a3\,\vec{k}$$

۱.۳.۵ تعریف

سه زاويه ي α وβ وδ زواياياي كه بردار$\vec{V}$ نا صفر به ترتيب با جهت مثبت محورهاي x وy وz مي سازد را زواياي هادي $\vec{V}$ مي ناميم.توجه كنيد كه هر زاويه ي هادي بزرگتر يا مساوي 0 و كوچكتر يا مساوي π است.

زواياي هادي بردار $\vec{V}=(a1,a2,a3)$ در شكل نشان داده شده است.



در شكل مؤلفه هاي V اعدادي مثبت و زواياي هادي آن مثبت و كوچكتر π/۲ از هستند.به طوري كه در شكل ديده مي شود، مثلث قايم الزاويهOPR است و داريم :

$$COS\alpha = \frac{|\overrightarrow{OR}|}{|\overrightarrow{OP}|} = \frac{a1}{|\overrightarrow{V}|}$$

مي توان نشاشن داد كه دستور اخير به ازاي $\pi/2 \le \alpha \le \pi$ نيز
بر قرار است.دستور هاي مشابهي براي $\cos\beta$ و α
$\cos$ به دست مي آيند.

$$\cos\beta = \frac{a2}{|\vec{V}|} \qquad \cos\alpha = \frac{a3}{|\vec{V}|}$$

اعداد $\cos\alpha$ و $\cos\beta$ و $\cos\delta$ راکسینوسهاي هادي بردار $\vec{v}$ مي نامند.

توجه کنيد که بردار صفر ، زواياي هادي و در نتيجه کسينوس هاي هادي ندارد.

۱.۳.۷ نكته

اگر اندازه ي يك بردار و كسينوسهاي هادي آن معلوم باشند،آنگاه بردار به طور منحصر به فردي معي است، زيرا:

$$a1= \cos\alpha\,|\vec{V}|$$

$$a2= \cos\beta\,|\vec{V}|$$

$$a3= \cos\delta\,|\vec{V}|$$

۱.۳.۸ قضيه

اگر $\cos\alpha$ و $\cos\beta$ و $\cos\delta$ کسینوسهاي هادي بردار $\vec{V}$ باشند،آنگاه:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\delta = 1$$

۱.۳.۱۵ نتيجه

از قضيه و تعريف كسينوسهاي هادي نتيجه مي شمد كه مؤلفه هاي يك بردار يكه كسينوسهاي هادي آن هستند.

به عبارت دیگر اگر $V=(a_1,a_2,a_3)$ بردار یکه هم جهت با V باشد آنگاه:

$$\vec{u}=\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}=\frac{a_1}{|\vec{v}|}\vec{i}+\frac{a_2}{|\vec{v}|}\vec{j}+\frac{a_3}{|\vec{v}|}\vec{k}$$

یا

$$\vec{u}=\cos\alpha\,\vec{i}+\cos\beta\,\vec{j}+\cos\gamma\,\vec{k}$$

در مورد بردارهاي فضايي اعمال جمع ، تفريق،ضرب اسكالر
و ضرب عددي دو بردار در V3 ،مشابه آنچه V2 در
تعريف مي شوند.
فرض مي كنيم $\vec{U}=(a1,a2,a3)$ و $\vec{V}=(b1,b2,b3)$ يك
اسكالر باشد.داريم:

الف

$$\vec{u}+\vec{v}=(a_1,a_2,a_3)+(b_1+b_2+b_3)$$
$$=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$$

ب

$$\vec{u}.\vec{v}=(a_1,a_2,a_3)-(b_1+b_2+b_3)$$
$$=(x_1-b_1,x_2-b_2,a_3-b_3)$$

پ

$$c\vec{u} = c(a_{۱}, a_{۲}, a_{۳}) = (ca_{۱} + ca_{۲} + ca_{۳})$$

ت

$$\vec{u}.\vec{v} = (a_{۱}, a_{۲}, a_{۳}) + (b_{۱} + b_{۲} + b_{۳})$$
$$= a_{۱}b_{۱} + a_{۲}b_{۲} + a_{۳}b_{۳}$$

۱.۳.۱۴ نكته

به آساني مي توان نشان داد كه:

$$\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1$$

$$\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{j}\cdot\vec{k}=0$$

۱.۳.۱۵ قضيه

اگر θ زاويه ي بين دو بردار نا صفر $\vec{U}$ و $\vec{V}$ در $V3$ باشد آنگاه:

$$\vec{u}\,.\,\vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\cos\theta$$

۱۶.۳.۱تعريف

دو بردار درV3 را موازي مي ناميم اگر و تنها اگر يكي از بردارها مضرب اسكالري از ديگري باشد.

۱۷.۳.۱قضیه

دو بردار نا صفر در V3 موازي اند اگر و تنـها اگر زاويه ي بين آنـها 0 يا π باشد.

قضیه ۱.۳.۱۸

دو بردار نا صفر $\vec{U}$ و $\vec{V}$ در V3 متعامدند اگر و تنها اگر

$$\vec{U}.\vec{V}=0$$

۴.۱ ضرب برداري بردارها

۱.۴.۱تعريف

اگر $\vec{U}=(a1,a2,a3)$ و $\vec{V}=(b1,b2,b3)$ آنگاه حاصل ضرب برداري U در V با نشان $\vec{U}*\vec{V}$ مي دهيم.برداري است كه به صورت زير تعريف مي شود:

$$\vec{U}*\vec{V}=(a2b3-a3b2,a3b1-a1b3,a1b2-a2b1)$$

براي سهولت در يادگيري و به ذهن سپردن دستور $\vec{U}*\vec{V}$ ، از نماددترمينين استفاده مي كنيم.يك دترمينان مرتبه ي دوم را به صورت زير تعريف مي كنيم:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

با استفاده از نماد دترمینان دستور محاسبه‌ي $\vec{U}*\vec{V}$ به صورت زير در مي آيد:

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\vec{k}$$

سمت راست عبارت اخير را مي توان با نماد زير نشان داد:

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$

۳.۴.۱قضیه

اگر $\vec{U}$ و $\vec{V}$ بردارهايي در V3 باشند، آنگاه:

$$\vec{U}*\vec{V} = -(\vec{V}*\vec{U})$$

۱.۴.۴ قضیه

اگر $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ بردارهاي يكه ي V3 باشند، آنگاه:

الف) $\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times k=0$

ب) $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$, $\vec{j}\times k=\vec{i}$, $\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$

پ) $\vec{j}\times\vec{i}=-k$, $\vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}$, $\vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}$

۵.۴.۱قضیه

اگر $\vec{U}$ و $\vec{V}$ و $\vec{W}$ بردارهايي در V3 و c يك اسكالر باشد آنگاه:

الف) $\vec{u}\times\vec{u}=\vec{0}$

ب) $\vec{u}\times\vec{0}=\vec{0}\times\vec{u}=\vec{0}$

پ) $(c\vec{u})\times\vec{v}=c(\vec{u}+\vec{v})=\vec{u}\times(c\vec{v})$

ت) $\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}\times\vec{v})+(\vec{u}\times\vec{v})+(\vec{u}\times\vec{w})$

ث) $(\vec{u}+\vec{v})\times\vec{w}=(\vec{u}\times\vec{w})+(\vec{v}\times\vec{w})$

۷.۴.۱قضیه

اگر $\vec{U}$ و $\vec{V}$ دو بردار V3 و θ زاويه ي بين $\vec{U}$ و $\vec{V}$ باشد،آنگاه:

$$|\vec{U} * \vec{V}| = |\vec{U}|\ |\vec{V}|\ \sin\theta$$

۹.۴.۱ نتيجه

اگر $\vec{U}$ و $\vec{V}$ دو بردار نا صفر در V3 باشند آنگاه و موازي اند
اگر و تنها اگر $\vec{U}*\vec{V}=0$

۱.۴.۱۱ قضیه

اگر $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ سه بردار در V3 باشند، آنگاه:

الف) $\vec{u}.(\vec{v}\times\vec{w})=(\vec{u}\times\vec{v}).\vec{w}$

ب) $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})=(\vec{u}.\vec{w})\vec{v}-(\vec{u}.\vec{v})\vec{w}$

۱۲.۴.۱تعریف

فرض مي کنيم $\vec{U}=(a1,a2,a3)$ و $\vec{V}=(b1,b2,b3)$و $\vec{W}=(c1,c2,c3)$. حاصلضرب $\vec{U}.(\vec{V}*\vec{W})$ را حاصلضرب عددي سه گانه بردارهاي $\vec{U}$و $\vec{V}$ و $\vec{W}$ مي ناميم.

حاصلضرب عددي سه گانه برابر است با:

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

حاصلضرب عددي سه گانه يك اسكالر است.

قضیه ۱.۴.۱۳

اگر $\vec{U}$ و $\vec{V}$ دو بردار نا صفر در باشند آنگاه:

الف) $\vec{u}.(\vec{u}\times\vec{v})=0$

ب) $\vec{v}.(\vec{u}\times\vec{v})=0$

۵.۱ بردارهاي فضاي n بعدي

۱.۵.۱تعریف

فرض كنيد n عدد صحيح مثبتي باشد، n تايي مرتب (x1,x2...,xn)مجموعه اي ازn عدد است كه به ترتيب معيني نوشته شده اند.

اعداد حقيقي $x_1,x_2,\ldots\ldots,x_n$ را به ترتيب مؤلفه هاي اول تا nام اينn تايي مرتب مي خوانيم.مجموغه ي تمام nتايي هاي مرتب را باR^n نشان مي دهيم.

دو تايي مرتب$Y=(y_1,y_2,\ldots y_n)$ و $X=(x_1,x_2,\ldots x_n)$ را برابر مب ناميم اگر و تنها اگر براي هر$i=1,2,\ldots n$ داشته باشيم:

$$x_i=y_i$$

۳.۵.۱تعریف

فرض مي كنيم$\vec{U}=(a1,a2,...an)$ و$\vec{V}=(b1,b2,...bn)$ دو بردار درVn و c عدد حقيقي (اسكالر) باشد.

مجموع دو بردار و ضرب اسکالر عدد در بردار به صورت زير تعزيف مي شود:

$$\vec{U}+\vec{V}=(a1+b1,a2+b2,\ldots,an+bn)$$

$$c\vec{U}=(ca1,ca2,\ldots,can)$$

۴.۵.۱قضيه

فرض مي كنيم $\vec{U}$ و $\vec{V}$ و $\vec{W}$ سه بردار در Vn و c و k دو اسكالر (عدد حقيقي) باشند. در اين صورت

الف)جمع بردارها جا به جايي پذير است، يعني

$$\vec{U}+\vec{V}=\vec{V}+\vec{U}$$

ب) جمع بردارها شركت پذير است، يعني

$$(\vec{U}+\vec{V})+\vec{W}=\vec{U}+(\vec{V}+\vec{W})$$

پ)عمل جمع داراي عضو خنثي است يعني

بردار$(0,0,...,0)=\vec{0}$ بردار صفرn مؤلفه اي وجود دارد به طوري كه

$$\vec{U}+\vec{0}=\vec{U}$$

ت) براي هر $\vec{U}$ بردار قرينه $-\vec{U}$ وجود دارا به طوري كه

$$\vec{U}+(-\vec{U})=\vec{0}$$

ث) $c\,(\vec{U}+\vec{V})=c\,\vec{U}+c\,\vec{V}$

ج) $(c\,k)\,\vec{U}=c\,(k\,\vec{U})$

ح) $(c+k)\,\vec{U}=c\,\vec{U}+k\,\vec{U}$

خ)وجود هماني نسبت به ضرب اسكالر،يعني

$$1\vec{U}=\vec{U}$$

۵.۵.۱تعریف

طول بردار U=(a1,a2,...an) برابر است با

$$|u| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$$

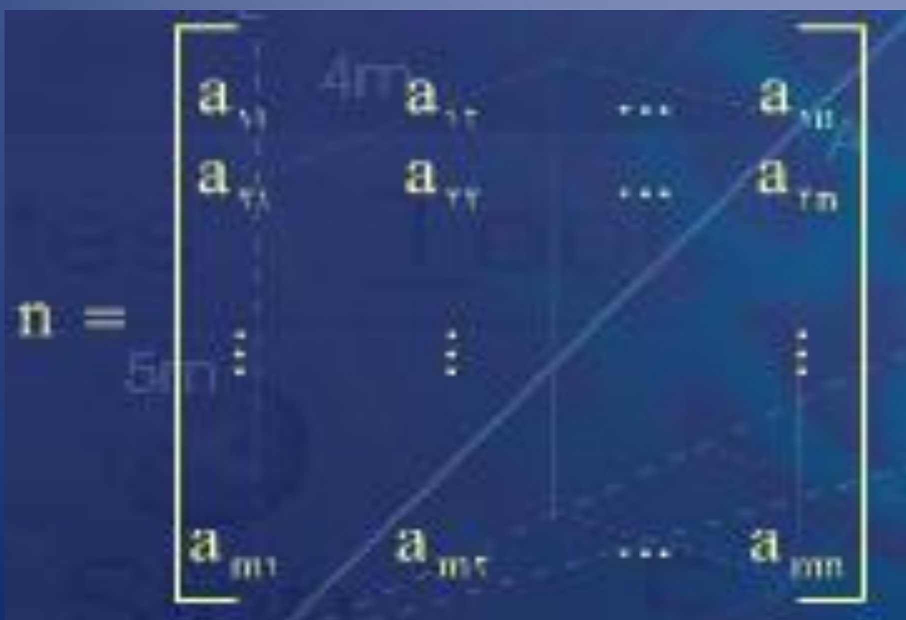
فصل دوم:ماتریس و دترمینان

در اين فصل با معرفي ماتريس مفهوم بردار را تعميم مي دهيم.همچنين انواع ماتريس،ماتريسهاي خاص و اعمال جبري روي ماتريس ها ،دترمينين و وارون ماتريس را مورد مطالعه قرار مي دهيم.

۱.۲ ماتریس

۲.۱.۱تعريف

هر جدولي از اعداد را كه شامل m سطر و n ستون باشد،يك ماتريس mدرn مي ناميم و به شكل زير نشان مي دهيم.



يا

هر يك از اعداد aij را يك عنصر يا درايه ماتريس مي ناميم.در اينجا i انديس سطر و j انديس ستون است،به بيان ديگر ،عنصرaij در محل تلاقي سطرi ام و ستون j ام ماتريس قرار دارد.

۲.۱.۲تعریف

الف)هر گاه ماتريس A=(aij)mn تنها داراي يك سطر باشد،يعني m=1 ،اين ماتريس را يك ماتريس سطري (بردار سطري)مي ناميم.

ماتزيس [۱و۴و۳-] يك ماتريس سطري است.

اگر ماتريس A=(aij)mn تنها داراي يك ستون باشد.يعني n=1،اين ماتريس را يك ماتريس ستوني (بردار ستوني)مي ناميم.

ماتريس $\begin{bmatrix} ۰ \\ -۱ \\ ۴ \end{bmatrix}$ يك ماتريس ستوني است.

پ) اگر تمام عناصر ماتريس A=(aij)mn صفر باشند آن را ماتريس صفر مي ناميم و به صورت A=0mn يا A=0نشان مي دهيم.مانند:

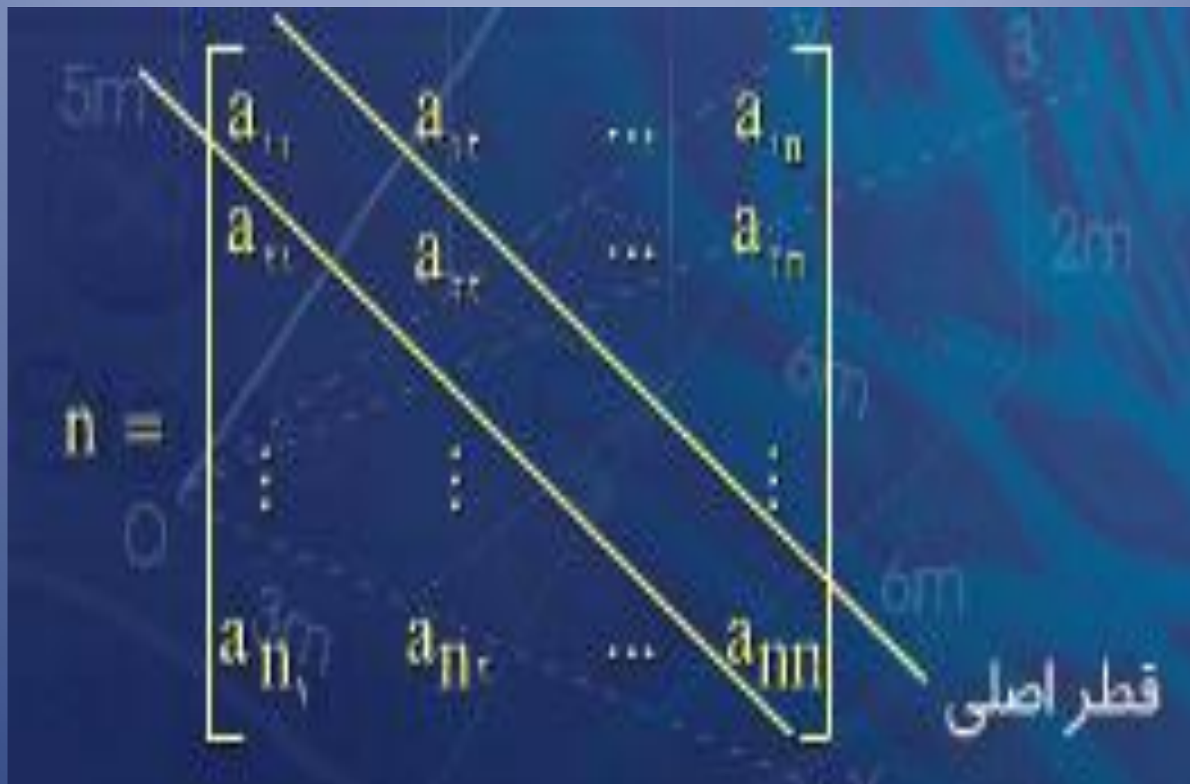
$$F = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

Fيك ماتريس صفر ۲*۳ است.

۲.۱.۳تعریف

ماتريسي را كه تعداد سطرها و تعداد ستونهايش برابر باشد، يك ماتريس مربع مي ناميم.به بيان ديگر $A=(aij)mn$ يك ماتريس مربع است اگر و تنها اگر$m=n$

در ماتريس مربع $A=(a_{ij})_{mn}$، قطري را كه شامل عناصر $a_{11},a_{22},\ldots,a_{nn}$ قطر اصلي و اين عناصر را عناصر قطر اصلي مي ناميم.


قطر اصلی

۲.۱.۴تعريف

ماتريس مربع A=(aij)mn را يك ماتريس هماني يا واحدn*n مي ناميم اگر هر يك از عناصر قطر اصلي برابر ۱ و همه ي عناصر ديگر آن صفر باشند.

ماتريس واحد n*n را با I نشان مي دهيم .مانند:

$$I_{۲} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \qquad I_{۳} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

۲.۱.۵ تعريف تساوي دو ماتريس

دو ماتريس $A=(a_{ij})_{mn}$ و $B=(b_{ij})_{pq}$ را برابر مي گوييم اگر $m=p$ و $n=q$ و براي هر i و j كه $i=1,2,\ldots m$ و $j=1,2,\ldots n$ داشته باشيم $a_{ij}=b_{ij}$

براي مثال:

$$\begin{bmatrix} ١ & ٣ & ٠ \\ ٢ & ١ & ٥ \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} -١ & ٣ & ٥ \\ ٠ & -١ & ٢ \end{bmatrix}$$

۲.۱.۷تعریف

فرض مي كنيم A=(aij)mn و B=(bij)mn دو ماتريس m*nوk عددي حقيقي باشد.

الف) حاصل جمع این دو ماتریس را با A+B نشان داده و به صورت زیر تعریف مي کنيم:

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$$

ب)حاصل ضرب عدد حقيقي k درA ماتريس را با kA نشان داده و به صورت زير تعريف مي كنيم:

$$kA = (ka_{ij})_{m\times n}$$

توجه کنید که A+B و kA ماتریسهاي m*n هستند.توجه داشته باشید که جمع دو ماتریس که داراي تعداد سطرهاي متفاوت یا تعداد ستونهاي متفاوت باشند تعریف نشده است.

۹.۱.۲تعریف

اگر $A=(a_{ij})_{m0}$ ماتریس A (۱-) را قرینه ي ماتریس A مي نامیم و با $-A=(-a_{ij})_{m0}$ نشان مي دهیم.

اگر $A=(a_{ij})_{mn}$ و $B=(b_{ij})_{mn}$ بنابر تعریف داریم:

$$A-B=A+(-B)$$

۱۱.۱.۲قضیه

اگرA وB وC سه ماتریس m*n وk وh دو عدد حقیقي باشند آنگاه:

الف) $A + B = B + A$

ب) $A + (B + C) = (A + B) + C$

پ) $k(A + B) = kA + kB$

ت) $(k + h)A = kA + hA$

تعريف ۲.۱.۱۳

ماتريسهاي $A=(aij)mp$ و $B=(bij)pn$ را در نظر مي كيريم.منظور از حاصل ضرب A در B ماتريس m*n اي چون c به طوري كه

$$C=(c_{ij})_{n}$$

$$c_{ij} = x_{1j} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{ip} b_{pj}$$

$$= \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

حاصل ضرب A در B يعنيc را با AB نشان مي دهيم.

۲.۱.۱۵قضيه

اگر A=(aij)mn يك ماتريس مربعي n*n باشد آنگاه:

$$AI_n = A = I_nA$$

۲.۱.۱۶قضیه

اگر A=(aij)mp وB=(bij)pq و C=(cij)qn آنگاه

A(BC)=(AB)C

۲.۱.۱۹ قضیه

اگر $A=(a_{ij})_{pn}$ و $B=(b_{ij})_{pn}$ و $C=(c_{ij})_{mp}$

$$C(A+B)=CA+CB$$

۲.۱.۲۰ تعریف

اگر در ماتریس $A=(a_{ij})_{mn}$ جاي سطرها و ستونها را با یکدیگر عوض کنیم، ماتریس حاصل را ترانهاده(Transpose) ماتریس A^T مي ناميم و آن را با A نشان مي دهيم. به بيان ديگر $A^T=(b_{ij})_{nm}$ كه در آن براي i و j داريم:

$$b_{ij}=a_{ji}$$

قضيه ۲.۱.۲۱

اگر A و B دو ماتريس m*n و k عددي حقيقي باشد آنكاه:

الف) $(A^T)^T=A$ يعني ترانهاده ، ترانهاده ماتريس با ماتريس برابر است.

ب) $(kA)^T=k(A)^T$ يعني ترانهاده مضربي از يك ماتريس با همان مضرب ترانهاده ماتريس بربار است.

پ) $(A+B)^T = A^T + B^T$ ،يعني ترانهاده مجموع دوماتريس با مجموع ترانهاده هاي دو ماتريس برابر است.

ت) اگر A و B دو ماتريس مربع باشند،آنگاه $(AB)^T = B^T A^T$ ،يعني ترانهاده ي حاصلضرب دو ماتريس با حاصلضرب ترانهاده ماتريس دومي در ترانهاده ماتريس اولي برابر است.

۲.۱.۲۳تعریف

الف) ماتریس مربع A را متقارن مي ناميم اگر $A^T = A$.

براي مثال ماتريس زير متقارن است .توجه كنيد كه در ماتزيس متقارن عناصر ماتريس نسبت به قطر اصلي متقارن هستند.

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۳ \\ ۲ & ۰ & ۱ \\ -۳ & ۱ & ۵ \end{bmatrix}$$

ب) ماتريس A مربع را شبه متقارن مي ناميم اگر $A=A^T$. اگر يك ماتريس شبه متقارن باشد بايد براي هر i و j داشته باشيم $a_{ij}=-a_{ij}$ اما از $a_{ii}=-a_{ii}$ نتيجه مي شود $a_{ii}=0$. پس عناصر قطر اصلي در ماتريس شبه متقارن همگي برابر صفرند.

پ) ماتريس A مربع را قطري مي ناميم اگر همه ي عناصر غير واقع بر قطر اصلي آن صفر باشند.مانند:

$$B=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

ت) ماتريس قطري S را يك ماتريس اسكالر مي ناميم، اگر عناصر قطر اصلي آن برابر عدد ثابت K باشد، يعني

$$S=\begin{bmatrix} k & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & k & \cdots & \cdot \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdots & k \end{bmatrix}$$

ث) ماتريس n*n و c را متعامد مي گوييم اگر :

$$CC^T = C^TC = I_n$$

براي مثال:

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} , \quad C^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

آنگاه

$$CC^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = C^T C = I_2$$

پس c ماتريسي متعامد است.

ج)ماتريس مربعU را ماتريس مثلثي بالا مي ناميم، اگر تمام عناصر زير قطر اصلي آن صفر باشد.مانند:

$$U=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & -۱ \\ ۰ & -۱ & ۲ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۱ & -۵ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

چ)ماتريس مربع L را ماتريس مثلثي پايين مي ناميم، اگر تمام عناصر بالاي قطر اصلي آن صفر باشد.مانند:

$$L = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۴ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۲ & -۳ & ۰ \\ ۲ & -۱ & ۴ & ۶ \end{bmatrix}$$

۲.۱.۲۵تعریف

در ماتریس مربع A=(aij)nn مجموع تمام قطر اصلي را اثر A مي ناميم و با tr(A) نشان مي دهيم.پس:

$$t_r(A)=a_{11}+a_{22}+\dots+a_{nn}$$
$$=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

۲,۲ دترمینان

دترمينان ماتريس A را با det A يا $|A|$ نشان مي دهيم.

۱.۲.۲تعریف

۱) ماتریس ۱*۱ تنها داراي يك عنصر a11 است، دترمينان اين ماتريس را برابر با عدد a11 تعريف مي كنيم.

۲) دترمینان ماتریس ۲*۲

$$A = \begin{bmatrix} a_{\text{۱۱}} & a_{\text{۱۱}} \\ a_{\text{۲۱}} & a_{\text{۲۲}} \end{bmatrix}$$

به صورت زير تعريف مي شود

$$\text{Det } A = A = \begin{vmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{vmatrix} = a11a22 - a12a21$$

۲.۲.۲تعريف

ماتريس $A=(a_{ij})_{nn}$ را در نظر مي گيريم. فرض كنيد M_{ij} ماتريسي $(n-1)*(n-1)$ باشد كه از حذف سطر i ام و ستون j ام ماتريس A به دست آمده است. دترمينان ماتريس M_{ij}،يعني $|M_{ij}|$را مينور عنصر در ماتريس مي ناميم.

۲.۲.۳تعريف

همسازه عنصر aij در ماتريس A=(aij)nn را با Aij نشان مي دهيم وبرابر با عدد زير است:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \left|M_{ij}\right|$$

۲.۲.۴تعریف

دترمینان ماتریس A=(aij)nn را به صورت

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$

تعریف مي كنيم.مي گوييم دترمينيان A بر حسب سطر i ام بسط داده شده است.

بنابر اين تعريف براي محاسبه ي دترمينان يك ماتريس، يك سطر يا يك ستون را انتخاب مي كنيم . اين سطر يا ستون را در همسازه اش ضرب ، سپس مقادير حاصل را با هم جمع مي كنيم.

اگر دترمينان را بر حسب سطر يا ستوني که بيشترين تعداد صفر را دارد محاسبه مي کنيم، محاسبات کوتاهتر مي شود، زيرا نيازي به محاسبه ي همسازه هاي صفر نيست.چون حاصلضرب صفر در هر همسازه اي صفر است.

۲.۲.۷ قضیه(خواص دترمینان)

۱) دترمینان ماتریس مربع A و ترانهاده A برابر است .یعني:

$$|A^T| = |A|$$

۲) اگر تمام عناصر يك سطر يا يك ستون ماتريس A صفر باشند، آنگاه

$$|A| = 0$$

۳) اگر تمام عناصر يك سطر يا يك ستون ماتريس A در عدد r ضرب مي كنيم آنگاه دترمينان ماتريس حاصل برابر با r |A| است.

۴) دترمينان ماتريس حاصل از تعويض دو سطر يا دو ستون ماتريس A مساوي است با منهاي دترمينان A.

۵) اگر دو سطر يا دو ستون ماتريسي برابر باشند، آنگاه مقدار دترمينان آن برابر با صفر است.

۶)دترمينان حاصل از جمع مضرب اسكالري از يك سطر (يا ستون) با سطري (يا ستوني) ديگر از ماتريس A مساوي است با دترمينان A.

۷) دترمینان حاصلضرب دو ماتریس برابر با حاصلضرب دترمینانهاي آنها است یعني

$$|AB| = |A||B|$$

۸) دترمینان یك ماتریس قطري برابر است با حاصلضرب عناصر روي قطر اصلي آن.

۹) دترمینان ماتریس واحد برابر یك است، یعني

$$|I_n| = 1$$

۲.۲.۱۵تعریف

اگر دترمینان ماتریس A=(aij)nn برابر صفر باشد ، ماتریس A را منفرد مي ناميم. در غير اين صورت ماتريس را غير منفرد مي ناميم.

ماتريس زير منفرد است.

$$A = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۰ \\ ۴ & ۲ & -۳ \\ ۷ & ۴ & -۶ \end{bmatrix}$$

۲.۳ وارون ماتریس

۲.۳.۱تعريف

ماتريس $A=(a_{ij})_{nn}$ را وارون پذير مي ناميم ، اگر ماتريسي مانند $B=(b_{ij})_{nn}$ وجود داشته باشد به طوري كه

$$AB=BA=I_n$$

اگر A ماتريسي وارون پذير باشد، آنگاه وارون آن منحصر به فرد است و آن را با A^{-1} نشان مي دهيم.

۲.۳.۵اعمال سطري مقدماتــي

ماتريس A=(aij)nn را در نظر مي كيريم. هر يك از اعمال زير را كه بر روي سطر هاي ماتريس A انجام مي پذيرد، يك عمل سطري مقدماتي مي ناميم.

۱) تعويض دو سطر ماتريس A.

۲) ضرب يك سطر ماتريس A در يك عدد نا صفر.

۳) افزودن مضربي از يك سطر ماتريس A به سطري ديگر.

براي اختصار در نوشتن اعمال سطري مقدماتي ، از حرفR ، اول كلمه ي Row به معناي سطر به صورت زير استفاده مي كنيم.

الف) $R_j \leftrightarrow R_i$ به معناي تعويض سطرi ام و سطرj ام

ب) kR_1 به معناي ضرب سطرi ام ماتريس در عدد ناصفرk

پ) R_j+kR_i به معناي افزودن برابر سطر ام به سطر ام

۲.۳.۸قضیه

اگر ماتريس وارون پذير A به وسيله ي يك سلسله اعمال مقدماتي تبديل به ماتريس واحد شود، آنگاه با انجام همين سلسله اعمال سطري مقدماتي بر روي ماتريس واحد ، وارون ماتريس A به دست مي آيد.

براي به دست آوردن وارون ماتريس A معمولا اعمال سطري مقدماتي را به طور هم زمان بر روي ماتريس A و ماتريس واحد انجام مي دهند.لذا ماتريس مركب[A I] را در نظر گرفته و با انجام يك سلسله اعمال مقدماتي سطري آن را تبديل به [I B] ميكنيم.بنا بر قضيه ي بالا، برابر وارون ماتريس است.

۲.۳.۱۱تعریف

ترانهاده ماتریس همسازه هاي ماتریس مربع A را ماتریس الحاقي A مي ناميم و با نشان مي دهيم ، پس:

$$adjA=(A_{ij})^T$$

۲.۳.۱۳قضیه

اگر A یك ماتریس n*n باشد آنگاه :

$$A(\mathrm{adj}\ A) = (\mathrm{adj}\ A) = (\mathrm{adj}\ A)In$$

قضیه ۲.۳.۱۳

اگر detA≠0 ،آنگاه وارون وجود دارد و برابر است با

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\operatorname{adj} A$$

عکس این نتیجه نیز درست است.یعني اگر A وارون پذیر باشد ، آنگاه

$$\det A \neq 0$$

قضیه ۲.۳.۱۷

اگر A و B دو ماتریس مربع n*n و وارون پذیر باشند آنگاه

الف) ماتریس حاصلضرب وارون پذیر است و

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

ب) ماتریس ترانهاده A وارون پذیر است و

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

پ) وارون ماتريس وارون A برابرA است ، يعني

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

ت) دترمينان وارون ماتريس A برابر با معکوس دترمينان A است يعني

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$$

فصل سوم: دستگاه معادلات خطي و توابع خطي

در اين فصل با استفاده از مفهوم ماتريس و دترمينان روشي براي حل و بحث در وجود جوابهاي دستگاه معادلات خطي ارائه دهيم. سپس استقلال و وابستگي خطي يك مجموعه از بردارها را مورد بررسي قرار دهيم. در خاتمه ي فصل با توابع خطي آشنا مي شويم.

۱.۳دستگاه معادلات خطي

معادله اي به صورت $a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_nx_n=0$ با مجهول $x_n,\dots,x_2,x_1$را يك معادله ي n مجهولي خطي مي ناميم.
nتايي $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ از اعداد حقيقي را كه در اين معادله صدق كنند يك جواب آن مي ناميم.

١. ١.٣تعريف

مجموعه اي از معادلات خطي

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + x_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

را يك دستگاه m معادله ي خطي n مجهولي مي ناميم.

تايي از اعداد حقيقي را در تمام معادله هاي دستگاه صدق كند يك جواب اين دستگاه مي ناميم.

این دستگاه را میتوان به صورت معادله ي ماتريسي زير نوشت:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

با فرض

$$B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} , \quad X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad A=(aij)_{m\times n}$$

معادله ي ماتريسي اخير به صورت خلاصه ي زير در مي آيد.

$$AX=B$$

Aرا ماتريس ضرايب X را ماتريس مجهولها وB را ماتريس طرف دوم دستگاه معادلات خطي مي ناميم.

توجه كنيد يك دستگاه معادلات خطي ممكن است داراي يك جواب منحصر به فرد يا بينهايت جواب باشد ويا اصلا جوابي نداشته باشد.

اينك به معرفي روشهايي براي حل يك دستگاه معادلات خطي مي پردازيم.

۱- روش حذف گوسي

۲- دستور كرامر

۲.۱.۳روش حذف گوسي

ميتوان نشان داد دو دستگاه معادلات خطي که يکي از آنها به وسيله ي انجام اعمال زير روي معادلات دستگاه ديگري به دست آمده باشد داراي جواب يا جوابهاي يکسان هستند:

۱) ضرب يك معادله ي دستگاه در عددي غير صفر.
۲) تعويض محل دو معادله ي دستگاه و
۳) افزودن مضربي از يك معادله به معادله ي ديكر دستگاه.

پس براي حل دستگاه AX=B بايد تا جايي که ممکن است به وسيله ي اعمال سطري مقدماتي ماتريس [A B] را به ماتريس ساده تري تبديل کنيم تا جوابها به آساني به دست آيند.

۳.۱.۶قضیه

اگر تعداد مجهولها با تعداد معادله ها ي يك دستگاه معادلات خطي برابر باشد (دستگاه n معادلات n مجهولي) و ماتريس ضرايب دستگاه وارون پذير باشد آنگاه دستگاه همواره داراي يك جواب منحصر به فرد است.

۳.۱.۸دستور کرامر

اگر ضرايب يك دستگاه n معادلات n مجهولي وارون پذير باشد آنگاه جواب دستگاه برابر است با

$$x_i = \frac{\det Ai}{\det A} \qquad i = 1, 2, \ldots, n \quad (*)$$

كه دران Ai ماتريس حاصل از جايگزين كردن

ماتريس ستوني $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ در ستون iام ماتريس A است.

فرمول * را دستور كرامر مي ناميم.

۳.۱.۱۰تعریف

اکر در دستگاه m معادله ي n خطي مجهولي طرف دوم تمام معادلات صفر باشند دستگاه را همگن مي ناميم. در غير اين صورت دستگاه را غير همگن مي ناميم.

روشن است كه در دستگاه همگن همواره $x1=x2=...=xn=0$ يك جواب دستگاه هست. اين جواب به جواب بديهي دستگاه موسوم است.

قضيه ۳.۱.۱۱

دستكاه n معادله ي خطي n مجهولي همگن داراي يك جواب غير بديهي (غير صفر) است. اگر و تنها اگر دترمينان ضرايب دستگاه صفر باشد.

۳.۱.۱۳نتیجه

يك دستگاه m معادله ي n خطي مجهولي همگن همواره داراي يك جواب غير بديهي (غير صفر) است اگر

$m<n$

۳.۱.۱۵ قضیه

اگر X_1 و X_2 دو جواب دستگاه غیر همگن $AX=B$ باشند آنگاه X_2-X_1 جوابي براي دستگاه همگن $AX=0$ است.

۳.۱.۱۳نتیجه

دستگاه غیر همگن AX=B داراي يك جواب منحصر به فرد است اگر و تنها اگر جواب AX=0 منحصر به فرد باشد.

۲.۳ استقلال و وابستگي خطي

۱. ۲. ۳تعريف

مجموعه ي m بردار $\{\vec{V}1,\vec{V}2,...,\vec{V}n\}$ از عناصر فضاي برداري R را مستقل خطي مي ناميم اگر هيچ مجمو عه اي از اعداد حقيقي $c1,c2,...,cn$ به جز $c1=c2=...=cm=0$ وجود نداشته باشد به طوري كه

$$C_{1}V_{1}+C_{2}V_{2}+....+CV_{m}=0$$

به بیان دیگر مجموعه ي m بردار$\{\vec{V1},\vec{V2},\ldots,\vec{Vn}\}$ مستقل
خطي است تنها جواب معادله ي

$$C_{۱}V_{۱}+C_{۲}V_{۲}+\ldots+CV_{m}=۰$$

برابر با $c1=c2=\ldots=cm=0$ باشد. در غير اين صورت اين
مجموعه را وابسته ي خطي مي ناميم.

۳.۳ رتبه ی یک ماتریس

در این بخش به هر ماتریس عدد صحیح و مثبتي به نام رتبه ي ماتریس را نسبت مي دهیم. با استفاده از این عدد در مورد جوابهاي دستگاههاي معادلات خطي را بررسي مس کنیم.

۱.۳.۳تعريف

فرض كنيم A ماتريسي m*n باشد. حداكثر تعداد سطرهاي مستقل خطي ماتريس A را رتبه ي ماتريس A مي ناميم و با نشان r(A) مي دهيم.

به عبارت ديگر اگر R1,R2,…,Rm سطرهاي ماتريس A باشند رتبه ي a برابر با حداکثر تعداد بردارهاي مستقل خطي در مجموعه ي {R1,R2,…,Rm} است.

يك روش تعيين رتبه ي ماتريس A اين است كه بزرگترين زير ماتريس مربع A را كه دترمينانش مخالف صفر باشد به دست آوريم ، تعداد سطرهاي اين ماتريس برابر رتبه ي ماتريس A است.

۳.۳.۶ خواص رتبه ي ماتريس

الف) رتبه ي ماتريس واحد In برابر با n است، يعني:

$$r(I_n) = n$$

ب) رتبه ي ماتريس A با رتبه ي ترانهاده ي A برابر است ، يعني:

$$r(A) = r(A^T)$$

پ) اگر A ماتریس $n*n$ باشد آنگاه $r(A)=n$ اگر و تنها اگر$\det/A=0$ به بیان دیگر$r(A)<n$ اگر و تنها اگر

$\det A=0$.

ت) رتبه ي حاصلضرب دو ماتريس همواره نابيشتر از کوچکترين رتبه دو ماتريس است ، يعني:

$$r(AB)\leq \min\{r(A),r(B)\}$$

۳.۳.۷نتیجه

اينك با استفاده از مفهوم رتبه ي ماتريس به طور خلاصه به بررسي جوابهاي دستگاه معادلات خطي AX=B در حالتهاي مختلف مي پردازيم.

فرض مي كنيم ماتريس ضرايب A ، باشد.m برابر با تعداد معادلات و n مساوي با تعداد مجهولهاي دستگاه است. رتبه ي ماتريس مركب $[A|B]$ را با $r(A|B)$ نشان مي دهيم.

الف) اگر $r(A\ B)=r(A)$ آنگاه دستگاه داراي حداقل يك جواب است.

ب) اگر $r(A\ B)=r(A)=n$ آنگاه دستگاه داراي يك جواب منحصر به فرد است.

پ) اگر $r(A\ B)=r(A) <n$ آنگاه دستگاه داراي بي نهايت جواب و مجمو عه سطر هاي ماتريس A وابسته ي خطي است.

ت) اگر $r(A\ B)=r(A)$ آنگاه دستگاه جواب ندارد.

۴.۳ توابع خطي

در اين بخش به مطالعه ي توابع خطي كه توابعي از يك فضاي برداري به فضاي برداري ديگري هستند مي پردازيم.

۳.۴.۱ تعريف

تابع n متغيره ي f از فضاي برداري R^n به فضاي برداري R^m
را كه به ازاي هر عدد حقيقي r و هر دو n تايي

$$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} , \quad Y=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

از R^n در دو شرط زير صدق مي كند، يك تابع خطي مي ناميم.

۱) $f(X+Y)=f(x)+f(Y)$

۲) $f(rx)=rf(x)$

۳.۴.۳قضيه

تابع $f: R^n \to R^n$ خطي است.اگر و تنها اگر هر مؤلفه مقدا رتابع

f در $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ به صورت يك تركيب خطي از اعداد

$x1,x2,...,xn$ باشد.

از اين قضيه نتيجه مي شود كه اگر $f : R^n \to R^m$ تابع خطي با شد
آنگاه اعداد حقيقي

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}$$

وجود دارند به طوري كه

$$f(x)=\begin{bmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+x_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+x_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

بنا بر اين $A=(aij)m*n$ قرار دادن مقدار تابع خطي f
را ميتوان به ازاي هر $x \longrightarrow R^n$ به صورت ماتريسي

$$F(x)=Ax$$

نوشت.ماتريس A را يك ماتريس نمايشگر تابع خطي F مينامیم.

۳.۴.۶ تعريف

تابع $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ را كه براي هر به صورت زير تعريف مي شود، تابع صفر مي ناميم.

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

تعريف ميشود .تابع هماني مي ناميم.

۳.۴.۷ تعریف

تابع $I: R^n \to R^n$ را که براي هر $X \in R^n$ به صورت

$$I\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

۳.۴.۸تعريف

توابع خطي $f: R^n \to R^m$ و $g: R^n \to R^m$ را در نظر مي گيريم:

۱) مجموع f و g را با f+g نشان ميدهيم و به صورت زير تعريف مي كنيم:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$

۲) فرض ميكنيم k عددي حقيقي باشد.حاصلضرب عدد حقيقي k درf را با نشان kfميدهيم و به صورت زير مي نويسيم.

$$(kf)(x)=k\,f(x)$$

فصل چهارم:توابع چند متغیره

در فصل هاي قبل با توابعي سر و كار داشتيم كه تنها وابستهبه يك متغير بودند. اين نوع توابع را يك متغيره مي ناميم. ولي اكثر توابع در اقتصاد و مديريت به بيش از يك متغير وابسته اند.

فرض كنيد هزينه ي ماهانه ي خانواده اي بستگي به مقدار مصرف آنها از مواد غذايي،پوشاك،خدمات مسكوني و خدمات بهداشتي و درماني دارد.پس مس توان گفت تابع هزينه ي اين خانواده يك تابع ۴ متغيره است.

۱. ۴ توابع چند متغیره

تابع f كه قلمرو آن زير مجموعه اي از R^n و برد آن زير مجموعه اي از اعداد حقيقي باشد.يك تابع n متغيره مي ناميم.

اگر f يك تابع n متغيره باشد هر عنصر قلمرو آن ، n تايي $(x1.x2,...,xn)$ است ، مقدار تابع به ازاي اين عنصر قلمرو را با $f(x1.x2,...,xn)$ نشان مي دهيم.

۳.۱.۴ تعريف

اگر f,g دو تابع n متغيره باشند آنگاه براي هر x از R^n و هر عدد حقيقي k، اعمال جبري زير تعريف مي شود.

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$
$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$$
$$(kf)(x)=kf(x)$$
$$(fg)(x)=f(x)g(x)$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$

۲.۴ حد و پیوستگي توابع چند متغيره

۱.۲.۴تعریف

فرض مي كنيم f يك تابع دو متغيره باشد مي گوييم حد تابع f در نقطه ي (a,b) برابر با Lاست . هنگامي كه نقطه (x,y) به نقطه ي (a,b) نزديك و نزديكتر مي شود مقدارf(x,y) به عدد حقيقي L نزديك و نزديكتر شود .

مي توان نشان داد كه عدد حقيقي L در صورت وجود منحصر به فرد است و لذا L را با نماد زير نشان مي دهيم.

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$

حد توابع سه متغيره و به طور كلي n متغيره نيز به همين صورت تعريف مي شود.تمام مطالبي كه در اين بخش براي توابع دو متغيره عنوان مي شود براي توابع n متغيره نيز درست است.

۲. ۲. ۴قضیه

اگر $g(x,y)=y$, $f(x,y)=x$ آنگاه

الف)

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=a$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)=b$$

ب)اگر $k(x,y)=k$ تابعي ثابت باشد آنگاه

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} k(x,y)=k$$

كه در آن k عددي ثابت است.

۳.۲.۴قضيه

اگر حد تابع دو متغيره ي f در نقطه ي(a,b) برابرL باشد آنگاه

$$\lim_{(a,y)\to(a,b)} f(a,y) = L$$

$$\lim_{(x,b)\to(a,b)} f(x,b) = L$$

این قضیه بیان مي کند که اگر $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x.y)=L$ آنگاه حد تابع f وقتي که نقطه ي (x,y) در مسیرهاي y=b یا x=a به تقطه ي میل کند برابر با L است.

قضيه۴.۲.۵

اگر حد تابع f هنگامي (x,y) که بر روي دو منحني متمايز به نقطه ي(a,b) نزديك مي شود متفاوت باشد آنگاه حد تابع f در اين نقطه وجود ندارد.

۴.۲.۶نتیجه

اگر

$$\lim_{x\to a}[\lim_{y\to b} f(x,y)] \neq \lim_{y\to b}[\lim_{x\to a} f(x,y)]$$

آنگاه تابع f در نقطه ي (a,b) حد ندارد.

توجه كنيد در $\lim_{x \to a}[\lim_{y \to b} f(x,y)]$ ا x را ثابت

فرض كرده $\lim_{y \to b} f(x,y)$ را در صورت وجود

محاسبه مي كنيم.سپس حد عبارت به دست آمده را كه تابعي

ازx است وقتي كه $x \to a$ پيدا مي كنيم.

قضيه ۴.۲.۸

اگر حد توابع دو متغيره ي f و g در نقطه ي (a,b) اگر حد توابع دو متغيره ي f و g در نقطه ي (a,b) وجود داشته باشد آنگاه

۱) حد مجموع دو تابع برابر با مجموع حدهاي آنها است، يعني:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} (f+g)(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) + \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)$$

۲)براي هر عدد ثابت k

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} (kf)(x,y) = k \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$$

۳)حد تفاضل دو تابع برابر با حدهاي آنهاست يعني:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} (f-g)(x,y) \quad \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) - \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$$

۴)حد حاصلضرب دو تنبع برابر با حاصلضرب حدهاي آنهاست.يعني:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} (fg)(x,y)[\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)] \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)$$

۵) حد خارج قسمت دو تابع برابر با خارج قسمت حدهاي آنهاست مشروط بر اینکه حد تابع مخرج مخالف صفر باشد، يعني:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \left(\frac{f}{g}\right)(x,y) = \frac{\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)}{\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)} \quad , \lim g(x,y) \neq 0$$

۴.۲.۱۰ قضیه

اگر $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ و تابع یك متغیره g درL پیوسته

باشد آنـگاه:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} gof(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(f(x,y)) = g(L)$$

۱۲.۲.۴تعريف

تابع دو متغيره ي fرا در نقطه ي (a,b) پيوسته مي ناميم اگر شرايط زير بر قرار باشد.

۱)تابع f در نقطه ي (a,b) تعريف شده باشد يعني (a,b)
fمعين باشد.

۲) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)}(x,y)$ وجود داشته باشد.

٣) $$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

در صورتي كه يكي از اين شرايط بر قرار نباشد تابع f را
در نقطه ي (a,b) نا پيوسته مي ناميم.

۱۴. ۲. ۴قضيه

اگر توابع دو متغيره ي f و g در نقطه ي (a,b) پيوسته باشند آنگاه توابع $f+g$، $f-g$، kf (kعددي حقيقي) fg و $\frac{f}{g}$ (با شرايط $g(a,b)\neq 0$) نيز در نقطه ي (a,b) پيوسته اند.

قضيه۴.۲.۱۶

اگر تابع دو متغيره ي f در نقطه ي (a,b) و تابع يك متغيره ي g در f (a,b) پيوسته باشند آنگاه تابع مركب gof در نقطه ي (a,b) پيوسته است.

۴.۳ مشتقهاي جزئي

در اين بخش مفهومي نزديك به مفهوم مشتق توابع يك متغيره را در مورد توابع چند متغيره ارائه مي دهيم. از اين مفهوم براي شناخت بهتر توابع چند متغيره استفاده مي كنيم.

۱.۳.۴تعریف

فرض مي كنيم f تابعي از دو متغيرx وy باشد. اگر

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$

وجود داشته باشد مقدار اين حد را مشتق جزيي f نسبت به متغيرx در نقطه ي (x,y) ميناميم.و آن را با نمادهاي $f_x(x,y)$ يا $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ (بخوانيد روند f (x,y) به روندx نشان مي دهيم.)

به همين ترتيب مشتق جزيي تابع f نسبت به متغير y در نقطه ي(x,y) به صورت

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = fy(x,y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$$

تعريف مي شود.مشروط بر اينكه اين حد وجود داشته باشد.

اگر $f_x(x,y)$ وجود داشته باشد f_x تابعي از دو متغير x و y است

اين تابع را به صورت خلاصه $\frac{\partial f}{\partial x}$ نشان ميدهيم.

تابع $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$ نيز به همين ترتيب تعريف مي شود.

توابع f_x و f_y را مشتقهاي جزيي مرتبه ي اول f مي ناميم.

در اينجا نماد ∂ را به جاي d برتي تمايز مشتقهاي جزيي از مشتق معمولي به كار مي بريم.

براي محاسبه ي $f_x(x,y)$ در تابع $f(x,y)$ متغير y را ثابت تلقي مي كنيم. و از f نسبت به متغير x مانند يك تابع يك متغيره مشتق مي گيريم.

به همين ترتيب در محاسبه ي $f\ (x,y)$ x متغير را در تابع $f(x,y)$ ثابت در نظر گرفته و از f نسبت به متغير y مانند يك تابع يك متغيره مشتق مي گيريم.

۴.۳.۴ مشتقهاي جزيي مرتبه هاي بالاتر

نظير مفهوم مشتقهاي مرتبه هاي بالاتر براي توابع يك متغيره مي توان مشتقهاي جزيي مرتبه هاي بالاتررا براي توابع nمتغيره تعريف كرد. اگرf تابعي از دو متغيرx وy باشد آنگاهf_x و f_y نيز توابعي از متغيرهاي x وy هستند.پس مي توان مشتقهاي جزيي توابع f_x وf_y را تعريف كرد.

اين مشتقها را مشتقهاي جزيي مرتبه دوم تابع f مي ناميم.

مشتقهاي جزيي مرتبه دوم تابع f عبارتند از:

$$F_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$F_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$F_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$F_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

لازم به تذکر است که ترتیب نوشتن متغیرهاي x و y در f_{xy} بر

خلاف ترتیب آنها در نماد $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ است.

قضيه ۶.۳.۴

فرض مي كنيم f تابعي با متغير هاي x و y باشد. اگر توابع f_{xy} و f_{yx} در نقطه ي (a,b) پيوسته باشد آنـگاه:

$$F_{xy}(a,b) = F_{yx}(a,b)$$

۴.۴ ديفرانسل كل و مشتقگيري ضمني

۱.۴.۴تعریف

فرض مي کنيم f تابعي با متغير هاي x و y باشد. اگر مشتقهاي جزيي مرتبه اول f وجود داشته باشد دیفرانسیل کل تابع f را با نشان df میدهیم و به صورت زیر تعریف مي کنيم که در آن dx و dy به ترتیب دیفرانسیل متغیر هاي x و y است.

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

دیفرانسیل کل تابع بیش از دو متغیره نیز به همین ترتیب
تعریف مي شود، اگر u تابعي از چهار متغیر x، y ، z، و t
باشد آنگاه دیفرانسیل کل تابع برابر است با:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz + \frac{\partial u}{\partial t}dt$$

۳.۴.۴نکته

فرض مي كنيم f تابعي با متغير هاي x و y باشد. اگر متغير هاي x و y نيز توابع يك متغيره ي مشتقپذيري از متغير ديگري مانند t باشند آنگاه داريم:

$$dx = \frac{dx}{dt}dt \qquad dy = \frac{dy}{dt}dt$$

۶.۴.۴تعریف

فرض مي كنيم f تابعي با متغير هاي x و y باشد. اگر مشتقهاي جزيي مرتبه ي اول f بر روي ناحيه اي پيوسته باشد و متغير هاي x و y توابعي ازمتغير ديگري مانند t باشند آنگاه مشتق تابع f نسبت به t را با df/dt نشان مي دهيم و بنابراين تعريف برابر است با

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

توجه كنيد كه در واقع fتنها تابعي از متغير t است.

۴.۴.۸ قاعده زنجيري براي توابع چند متغيره

فرض مي كنيم f تابعي با متغير هاي x و y باشد. اگر متغير هاي x و y توابعي از دو متغير u و v باشند آنگاه مشتقهاي جزيي مرتبه ي اول f نسبت به متغير هاي u و v برابرند با:

$$\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}$$

قاعده زنجيري براي توابع بيش از دو متغير كاملا مشابه است.

۴.۴.۱۰ مشتقگيري ضمني

به كمك مفهوم مشتقهاي جزيي مي توان دستور ساده اي براي مشتقگيري از توابع ضمني (غير صريح) دو متغيره به دست آورد.

فرض مي كنيم معادله ي $f(x,y)=0$ ،متغير y را به صورت

تابعي از x به طور ضمني تعريف كند، $\partial f/ \partial x$, $\partial f/ \partial y$

وجود داشته باشند و| $\partial f/ \partial y =0$ آنگاه به دست مي آوريم:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{f}{x}}{\frac{f}{y}} = -\frac{Fx(x,y)}{Fy(x,y)}$$

۴.۴.۱۲ مشتقهاي جزيي توابع ضمني

فرض مي كنيم تابع دو متغيره ي $z=f(x,y)$ در معادله ي $F(x,y,z)$ صدق كند.پس اگر $\partial F/\partial x\neq 0$ آنگاه:

$$\partial z/\partial x = -\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial z} = -\frac{Fx(x,y,z)}{Fz(x,y,z)}$$

به همين ترتيب به دست مي آوريم

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{Fy(x,y,z)}{Fx(x,y,z)}$$

مشروط بر اينكه $\partial F/\partial x=0$

۴.۵ ماکسیمم و مینیمم توابع دو متغیره

همانطور كه از مشتقهاي اول و دوم يك تابع يك متغيره براي تعيين ماكسيمم و مينيمم آن استفاده مي كرديم از مشتقهاي جزيي مرتبه ي اول و دوم مي توان براي يافتن ماكسيمم و مينيمم توابع چند متغيره استفاده كنيم.

۱.۵.۴تعريف

فرض مي كنيم f تابعي با متغير هاي x وy باشد. در اين صورت:

الف) f(a,b) مقدار ماكسيمم (مطلق) fمي ناميم. اگر براي هر(x,y) از قلمروf داشته باشيم:

$$F(x,y)<=f(a,b)$$

ب) $f(a,b)$ مقدارمينيمم (مطلق) fمي ناميم. اگر براي هر(x,y) از قلمروf داشته باشيم:

$$F(x,y)>=f(a,b)$$

۴.۵.۲تعريف

فرض مي كنيم f تابعي با متغير هاي x وy باشد. در اين صورت:

الف) مي گوييم f تابع در(a,b) داراي يك ماكسيمم نسبي است. اگر دايره به مركز (a,b) در قلمروf وجود داشته باشد به طوري كه به ازاي هر(x,y) در درون اين دايره داشته باشيم:

$$f(x,y)<=f(a,b)$$

ب) مي گوييم f تابع در(a,b) داراي يك مينيمم نسبي است.
اگر دايره به مركز (a,b) در قلمرو f وجود داشته باشد به طوري كه به ازاي هر(x,y) در درون اين دايره داشته باشيم:

$$f(x,y)>=f(a,b)$$

قضيه ۴.۵.۴

فرض مي كنيم تابع دو متغيره f در(a,b) يك ماكسيمم يا مينيمم نسبي دارد.اگر مشتقهاي جزيي مرتبه ي اول f در (a,b) موجود باشند آنگاه:

$$F_x(a,b)=0$$

$$F_y(a,b)=0$$

از اين قضيه نتيجه مي شود كه اگر تابع fدر(a,b) يك ماكسيمم يا مينيمم نسبي داشته باشد آنگاه (a,b) يك جواب دستگاه دو مجهولي زير است:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 0$$

هر جواب این دستگاه را (نظیر توابع یك متغیره) یك نقطه ي بحراني تابع f میناميم.توجه كنيد كه نقطه ي (c,d) ممكن است یك نقطه ي بحراني f باشد ولي تابع f در این نقطه ماكسيمم و مینیمم نسبي داشته باشد.

اگر $Fx(a,b)= Fy(a,b)$ ولي تابع F در(a,b) ماكسيمم يا مينيمم نسبي نداشته باشد مي گوييم تابع F در (a,b) داراي يك نقطه ي زين اسبي است.

معمولا با استفاده از تعريف تشخيص اينكه يك نقطه ي بحراني تابع دو دو متغيره ي F ماكسيمم است يا مينيمم مشكل است .اما به كمك مشتقهاي جزيي مرتبه ي دوم توابع يك يك متغيره قادر به اين امر هستيم.

۴.۵.۸آزمون مشتق دوم

فرض مي كنيم f تابعي با متغير هاي x و y باشد.و
همچنين فرض مي كنيم مشتقهاي Fx(a,b)= Fy(a,b)=0
جزيي F درون دايره اي به مركز(a,b) پيوسته باشند و

$$\Delta(x,y)=F_{xx}(x,y)F_{yy}(x,y)-[F_{xy}(x,y)]^2$$

در این صورت

الف) اگر $\Delta(a,b)>0$ و $F_{xx}(a,b)<0$ آنگاه F در (a,b) ماکسیمم نسبي دارد.

ب) اگر $\Delta(a,b)>0$ و $F_{xx}(a,b)>0$ آنگاه F در (a,b) مینیمم نسبي دارد.

پ) اگر $\Delta(a,b)>0$ آنگاه F در (a,b) يك نقطه ي زين اسبي دارد . به عبارت ديگر ماكسيمم و مينيمم ندارد.

ت) اگر $\Delta(a,b)=0$ از اين آزمون نتيجه اي به دست نمي آيد.

دقت کنید که اگر$\Delta (a,b)>0$ آنگاه حاصلضرب
$fxx(a,b)fyy(a,b)$ مثبت است.پس $fxx(a,b)$ و$fyy(a,b)$
هم علامت مي باشند .در نتيجه در بندهاي الف و ب آ
زمون مشتق دوم ميتوان $fyy(a,b)$ را جايگزين $fxx(a,b)$
نمود.

۴.۶ ماکسیمم و مینیمم توابع نسبت به شرایط داده شده

در اكثر مسايل مديريت و اقتصاد تعيين ماكسيمم و مينيمم يك تابع چند متغيره با توجه به يك يا چند شرط صورت مي گيرد.

براي مثال فرض كنيد هدف يك مصرف كننده به حداكثر رسانيدن مطلوب در مصرف دو كالاي ۱و۲ است. فرض كنيد قيمت اين دو كالا به ترتيب برابر با p_1 و p_2 ميزان مصرف او از اين دو كالا به ترتيب برابر با x_1وx_2 باشد.اما اين مصرف كننده محدوديتهايي نيز دارد.

يكي از محدوديتها ميزان درآمد او است. پس مطلوب است اين مصرف كننده تابعي از ميزان استفاده او از اين دو كالا بوده و ميزان مخارج مصرفي او از اين دو كالا بايد با ميزان درآمد او نيز برابر باشد.به بيان ديگر ميتوان گفت كه اين مصرف كننده ميخواهد مطلوبيت خود را با ت.جه به محدوديت درآمد به حد اكثر برساند.

پس باید ماکسیمم تابع

$$U=f(x1,x2)$$

را نسبت به شرط (محدودیت)

$$P1x1+p2x2=y$$

پیدا کنیم که در آن $U=f(x1,x2)$ تابع مطلوب است.

به دو روش مي توان اين كار را انجام داد. يكي به روش جايگزيني و ديگري به روش لاگرانژ .اين دو روش را در زير معرفي مي كنيم.

۴.۶.۱روش جايگزيني

يكي از روشهاي به دست آوردت ماكسيمم و مينيمم توابع نسبت به شرايط داده شده از طريق جايگزين كردن تلبع محدوديت (شرايط داده شده) در تابع هدف است. بدين ترتيب مسئله تبديل به مسئله ي ماكسيمم يا مينيمم كردن يك تابع بدون محدوديت ميشود.

۴.۶.۳ روش لاگرانژ

میخواهیم ماکسیمم یا مینیمم تابع دو متغیره ي $f(x,y)$ را با محدودیت $g(x,y)=0$ بیابیم.متغیر جدیدλ موسوم به ضریب لاگرانژ را در نظر مي گیریم با استفاده از متغیر λ تابع جدیدي به نام تابع لاگرانژ را به صورت زیر تعریف میکنیم.

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x,y)$$

پس اگرf در(a,b) ماکسیمم یا مینیمم داشته باشیم آنگاه λ =λ۰
وجود دارد به طوري كه (a,b, λ) يك جواب دستگاه سه
معادله سه مجهولي زير است.

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{\partial F}{\partial x} - \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x} = 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{\partial F}{\partial y} - \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y} = 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial F}{\partial y} = g(x, y) = 0
\end{cases}
$$

۴.۶.۵ شرط كافي براي وجود ماكسيمم و مينيمم توابع نسبت به شرايط داده شده

فرض مي كنيم تابع دو متغيره ي $f(x,y)$ تحت محدوديت $g(x,y)=0$ داده شده باشد و $F(x,y,\lambda)$ تابع لاگرانژ متناظر باشد . ثابت ميشود كه شرط كافي براي وجود

الف) ماکسیمم این است که

$$\begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & F_{xx} & F_{xy} \\ g_y & F_{yx} & F_{yy} \end{vmatrix} > 0$$

ب) مینیمم این است که

$$\begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & F_{xx} & F_{xy} \\ g_y & F_{yx} & F_{yy} \end{vmatrix} < 0$$

نکته۴.۶.۶

روش لاگرانژ را میتوان براي تابع n متغيره f(x1,x2,...,xn) با تابع محدوديت gi(x1,x2,...,xn) i=1,2,...,n كه در آن تعميم داد.

در این صورت تابع لاگرانژ عبارتند از

$$F(x_1,\dots,x_n,\lambda_1,\dots,\lambda_k)=F(x_1,\dots,x_n)-\sum_{i=1}^{k}\lambda_i g_i(x_1,\dots,x_n)$$

از مساوي صفر قرار دادن مشتقهاي جزيي تابع لاگرانژ دستگاهي شامل n+k معادله ي n+k مجهولي به دست مي آيد.

فصل پنجم:معادلات دیفرانسیل

حل برخي از مسايل در مديريت ئ اقتصاد منجر به بررسي معادله اي بين يك تابع مجهول و مشتقهاي آن مي شود.چنين معادله اي را يك معادله ي ديفرانسيل مي ناميم.در اين فصل با معرفي چند نوع معادله ي ديفرانسيل ساده روش حل آنها را مطالعه مي كنيم.

۱.۵آشنايي با معادلات ديفرانسيل

تعريف۵.۱.۱

فرض کنيد y تابعي ازx باشد هر معادله اي به صورت $F(x,y,y',\ldots,y^{(n)})$ را که F در آن تابعي ازn+2 متغيرx ، y و n مشتق اول y نسبت بهx باشد يك معادله ي ديفرانسيل معمولي مرتبه ي n ام مي ناميم.

توجه كنيد منظور $y^{(n)}$ از مشتق n ام y نسبت به x است و مرتبه ي يك معادله ي ديفرانسيل برابر با مرتبه ي بالاترين مشتق موجود در معادله است.

۲.۱.۵تعریف

تابع $y=f(x)$ را يك جواب معادله ي ديفرانسيل

$$F(x,y,y',\ldots,y^{(n)})=0$$

در فاصله يI مي ناميم.در صورتي كه به ازاي هرx متعلق بهI تابع $y=f(x)$ و مشتق هاي آن در معادله صدق كنند.

مجموعه ي تمام جوابهاي معادله را جواب عمومي معادله مي ناميم.

منظور از حل يك معادله ي ديفرانسيل به دست آوردن جواب عمومي آن است.

تعریف ۴.۱.۵

معادله ي ديفرانسيل مرتبه ي ام

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

با شرايط اوليه

$$\begin{aligned} y(x_0) &= k_0 \\ y'(x_0) &= k_1 \\ y''(x_0) &= k_2 \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) &= k_{n-1} \end{aligned}$$

را كه در آن ها اعداد معيني هستند يك مسئله با مقادير اوليه مي ناميم.

توجه كنيد كه براي معادله ي ديفرانسيل مرتبه ي n ام n شرط اوليه وجود دارد .اين شرايط مقادير تابع مجهول و (n-1) مشتق اول آن را در نقطه ي x0 معين مي كنند.مي توان نشان داد كه با وضع محدوديتهايي برF يك مسئله با مقادير اوليه داراي يك مجواب منحصر به فرد است. اين جواب را جواب خصوصي مسئاله مي ناميم.

۷.۱.۵تعريف

يك معادله ي ديفرانسيل با مشتقات جزيي معادله ايست كه شانل يك تابع مجهول چند متغيره (بيش از يك متغير) همرام با مشتقات جزيي آن باشد.

۲.۵معادلات دیفرانسیل جدایي پذیر

در این بخش روش حل معادلات دیفرانسیلي را بررسي مي کنیم که مي توان متغیرهاي آنها را از یکدیگر جدا کرد.

۱.۲.۵تعریف

معادله ي ديفرانسيل مرتبه ي اول $p(x)dx+q(y)dy=0$ را كه در آن p و q دو تابع حقيقي به ترتيب در فاصله هاي I1 وI2 پيوسته اند يك معادله ي ديفرانسيل جدايي پذير مي ناميم.

با انتگرالگيري مستقيم از اين معادله جواب عمومي آن به صورت زير به دست مي آيد.

$$\int p(x)dx+ \int q(y)dy=c$$