P: A 89

④ $ty'' - 4ty' - 4y = 0; \quad y(0)=0, \quad y'(0)=1$

حل :

$\mathcal{L}\{ty''\} - 4\mathcal{L}\{ty'\} - 4\mathcal{L}\{y\} = 0 \xrightarrow[\text{مشتق لاپلاس}]{\mathcal{L}\{tf(t)\} = -F'(s)}$

$-\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{y''\} + 4\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{y'\} - 4Y(s) = 0 \longrightarrow$

$-\frac{d}{ds}\left(s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) + 4\frac{d}{ds}\left(sY(s) - y(0)\right) - 4Y(s) = 0 \rightarrow$

$-(2sY(s) + s^2 Y'(s)) + 4(Y(s) + sY'(s)) - 4Y(s) = 0 \rightarrow$

$-2sY(s) - s^2 Y'(s) + \cancel{4Y(s)} + 4sY'(s) - \cancel{4Y(s)} = 0 \longrightarrow$

$(-s^2 + 4s)Y'(s) - 2sY(s) = 0 \Rightarrow -\cancel{s}(s-4)Y'(s) - 2\cancel{s}Y(s) = 0$

$(s-4)Y'(s) + 2Y(s) = 0 \longrightarrow Y'(s) + \underbrace{\frac{2}{s-4}}_{p(s)} Y(s) = \underbrace{0}_{q(s)}$

طبق رابطه برحسب Y, s

$$Y(s) = \frac{\int \mu(s) q(s) + C}{\mu(s)} = \frac{C}{\mu(s)}$$

$$\mu(s) = e^{\int p(s)\,ds} = e^{\int \frac{2}{s-4} ds} = e^{2\ln(s-4)} = (s-4)^2$$

$\xrightarrow{\text{مغیر}}$

p: A90

$$y(s)=\frac{c}{(s-4)^2} \Rightarrow y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{c}{(s-4)^2}\right\}=cte^{4t}$$

برای بدست آوردن c از شرط اولیه $y'(0)=1$ استفاده می‌کنیم و داریم

$$y'=c(e^{4t}+4te^{4t}) \xrightarrow{y'(0)=1} 1=c(1+0) \Rightarrow c=1$$

$$\Rightarrow y(t)=te^{4t}$$

5) $$y''+2y'+2y=\begin{cases} e^{-t} & 0\le t<1 \\ 0 & t\ge 1 \end{cases} \quad ; \; y(0)=y'(0)=0$$

$$(s^2+2s+2)Y(s)=\mathcal{L}\{e^{-t}(1-H(t-1))\} \rightarrow$$

$$(s^2+2s+2)Y(s)=\mathcal{L}\{e^{-t}\}-\mathcal{L}\{e^{-t+1-1}H(t-1)\}$$

$$=\frac{1}{s+1}-e^{-1}\mathcal{L}\{e^{-(t-1)}H(t-1)\}$$

$$=\frac{1}{s+1}-e^{-1}e^{-s}\frac{1}{s+1}$$

$$\Rightarrow Y(s)=\frac{1}{(s+1)(\underbrace{s^2+2s+2}_{\Delta<0})}-e^{-s-1}\frac{1}{(s+1)(s^2+2s+2)}$$

F(s)

$$\frac{1}{(s+1)(s^2+2s+2)}=\frac{A}{s+1}+\frac{Bs+C}{s^2+2s+2} \xrightarrow{\text{صفحه بعد}}$$

P: A91

$1 = A(S^2+2S+2) + (BS+C)(S+1) \longrightarrow$

$1 = AS^2 + 2AS + 2A + BS^2 + BS + CS + C \longrightarrow$

$1 = (A+B)S^2 + (2A+B+C)S + 2A + C \longrightarrow$

$$\left\{\begin{array}{l} 0 = A+B \\ 0 = 2A+B+C \\ 1 = 2A+C \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{-1 = B} \rightarrow \boxed{A=1} \rightarrow \boxed{C=-1}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(S)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{S+1} - \frac{S+1}{(S+1)^2+1}\right\} = e^{-t} - e^{-t}\cos t = f(t),$$

$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(S)\} - e^{-1}\mathcal{L}^{-1}\{e^{-S}F(S)\} \rightarrow$

$y(t) = f(t) - e^{-1}H(t-1)f(t-1)$

$y(t) = e^{-t} - e^{-t}\cos t - e^{-1}H(t-1)(e^{-t-1} - e^{-t-1}\cos(t-1))$

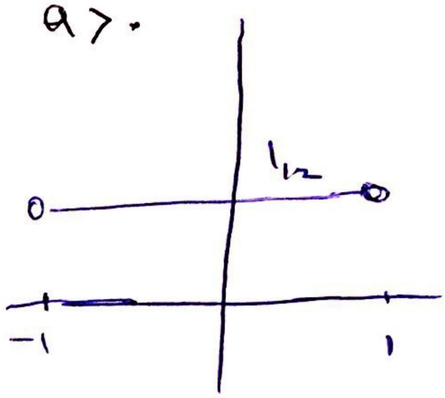
$y(t) = e^{t}(1-\cos t) - e^{-t-2}H(t-1)(1-\cos(t-1))$

Scanned with CamScanner

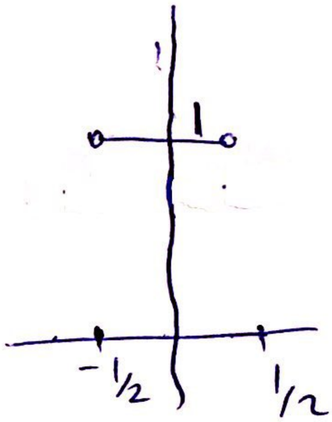
P: A92

تابع ضربه‌ای واحد.

$$\delta_a(t)=\begin{cases}\frac{1}{2a} & -a<t<a\\ 0 & o.w\end{cases}\qquad a>0$$

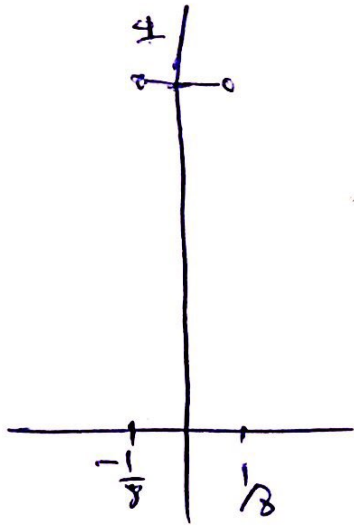


$$a=1 \rightarrow \delta_1(t)=\begin{cases}\frac{1}{2} & -1<t<1\\ 0 & o.w\end{cases}$$



$$a=1/2 \rightarrow \delta_{\frac{1}{2}}(t)=\begin{cases}1 & -\frac{1}{2}<t<1/2\\ 0 & o.w\end{cases}$$

$$a=1/4 \rightarrow \delta_{1/4}(t)=\begin{cases}2 & -\frac{1}{4}<t<1/4\\ 0 & o.w\end{cases}$$



$$a=\frac{1}{8} \rightarrow \delta_{1/8}(t)=\begin{cases}4 & -1/8<t<1/8\\ 0 & o.w\end{cases}$$

$\vdots$

تابع ضربه‌ای واحد را $\lim_{a\to 0}\delta_a(t)$ تعریف می‌کنیم، و آن را با $\delta(t)$ نشان می‌دهیم.

$$\delta(t)=\begin{cases}0 & t\neq 0\\ \infty & t=0\end{cases}$$

Scanned with CamScanner

P: A93

دقت کنید که تابع ضربه واحد یک تابع معمولی نیست، بلکه یک تابع تعمیم یافته است. بطوری که در نقطه $t=0$ برابر ∞ و در بقیه نقاط صفر است

این تابع دارای دو خاصیت زیر است:

1) $\delta(t) = 0 \quad ; t \neq 0$

2) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1$

زیرا

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{a\to 0} \delta_a(t)\, dt = \lim_{a\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_a(t)\, dt$$

$$= \lim_{a\to 0} \int_{-a}^{a} \frac{1}{2a}\, dt = \lim_{a\to 0} \frac{1}{2a}(a+a) = 1$$

$\delta(t)$ متناظر با ضربه واحد در $t=0$ و $\delta(t-t_0)$ ضربه واحد در $t=t_0$ است،

1) $\delta(t-t_0) = 0 \quad ; \text{if } t \neq t_0$

2) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\, dt = 1$

$$\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \delta(t-t_0)\, dt = \lim_{a\to 0} \int_0^{\infty} e^{-st} \delta_a(t-t_0)\, dt$$

$$= \lim_{a\to 0} \int_{t_0-a}^{t_0+a} e^{-st} \frac{1}{2a}\, dt = \lim_{a\to 0} \frac{-1}{2sa} e^{-st} \Big|_{t_0-a}^{t_0+a}$$

صفحه بعد →

P: A94

$$= \lim_{a\to 0} \frac{-1}{2sa}\left(e^{-s(t_0+a)} - e^{-s(t_0-a)}\right)$$

$$= \lim_{a\to 0} \frac{-1}{2as}\left(e^{-st_0}\left(e^{-sa} - e^{sa}\right)\right)$$

$$= \frac{e^{-st_0}}{2s} \lim_{a\to 0}\left(\frac{e^{sa} - e^{-sa}}{a}\right) \overset{\text{hop}\ \frac{0}{0}}{=} \frac{e^{-st_0}}{2s} \lim_{a\to 0}\left(\frac{se^{sa} + se^{-sa}}{1}\right)$$

$$= \frac{e^{-st_0}}{2s}(2s) = e^{-st_0}$$

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t-t_0)$	e^{-st_0}
$\delta(t)$	1

6A) جواب معادله دیفرانسیل $y''+y = H(t-\frac{\pi}{2}) + 3\delta(t-\frac{3\pi}{2})$; کدام است؟

$y(0) = y'(0) = 0$

1- $\left(H(t-\frac{\pi}{2}) - H(t-\pi)\right)\cos t$

2- $H(t-\pi/2) - H(t-\frac{\pi}{2})\sin t + 3H(t-\frac{3\pi}{2})$

3- $H(t-\pi/2) - H(t-\frac{\pi}{2})\sin t + 3H(t-\frac{3\pi}{2})\cos t$

4- $H(t-\pi/2)\sin t + 3H(t-\frac{3\pi}{2})\sin t$

P: A95

حل:

$$(s^2+1)Y(s) = \frac{e^{-\frac{\pi s}{2}}}{s} + 3e^{-\frac{3\pi s}{2}} \longrightarrow Y(s) = \frac{e^{-\frac{\pi s}{2}}}{s(s^2+1)} + 3\frac{e^{-\frac{3\pi s}{2}}}{s^2+1}$$

می دانیم

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = \sin t,$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1/s^2+1}{s}\right\} = \int_0^t \sin x\, dx = -\cos x\Big|_0^t = -\cos t + \cos 0$$
$$= 1-\cos t.$$

$$\longrightarrow y(t) = H(t-\tfrac{\pi}{2})\big(1-\overbrace{\cos(t-\tfrac{\pi}{2})}^{\sin t}\big) + 3H(t-\tfrac{3\pi}{2})\overbrace{\sin(t-\tfrac{3\pi}{2})}^{\cos t}$$

$$= H(t-\tfrac{\pi}{2}) - H(t-\tfrac{\pi}{2})\sin t + 3H(t-\tfrac{3\pi}{2})\cos t.$$

گزینه ۳

از خواص تابع ضربه، آن است.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\delta(t-t_0)\,dt = f(t_0).$$

(۵۸) جواب مسئله مقدار اولیه $y''+y' = \delta(t-2\pi)\cos t;\ y(0)=0,\ y'(0)=1$ عبارت است از

1- $1+H(t-2\pi) - e^{2\pi}H(t-2\pi)e^{-t} - e^{-t}$

2- $(1-H(t-2\pi))e^{t-2\pi}$

3- $(H(t-\pi)-H(t-2\pi))e^{t}$

4- $H(t-2\pi)e^{2\pi}e^{-t}$

Scanned with CamScanner

P:۸۹۶ حل:

$$\mathcal{L}\{y''\} + \mathcal{L}\{y'\} = \mathcal{L}\{\delta(t-2\pi)\cos t\}$$

$$s^2Y(s) - \cancel{sy(0)} - \underset{1}{y'(0)} + sY(s) - \cancel{y(0)} = \mathcal{L}\{\delta(t-2\pi)\cos t\}$$

$$(s^2+s)Y(s) - 1 = \int_0^{\infty} e^{-st}\,\delta(t-2\pi)\cos t\,dt \rightarrow$$

$$(\text{if } t \neq 2\pi \rightarrow \delta(t-2\pi) = 0)$$

$$(s^2+s)Y(s) - 1 = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{-st}\cos t}_{\text{پیوسته}}\,\delta(t-2\pi)\,dt \rightarrow$$

$$(s^2+s)Y(s) - 1 = e^{-2\pi s}\cos 2\pi \longrightarrow$$

$$(s^2+s)Y(s) = e^{-2\pi s} + 1 \longrightarrow$$

$$Y(s) = \frac{e^{-2\pi s}}{s^2+s} + \frac{1}{s^2+s} \longrightarrow$$

$$y(t) = H(t-2\pi)\,f(t-2\pi) + f(t)$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+s}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{s+1}}{s}\right\} = \int_0^t e^{-x}\,dx$$

$$= -e^{-x}\Big|_0^t = -e^{-t} + 1 = 1 - e^{-t} \longrightarrow$$

$$y(t) = H(t-2\pi)\left(1 - e^{-(t-2\pi)}\right) + 1 - e^{-t}$$

اِنتگرال تلفیقی «Convolution Integral»

فرض کنید f و g دو تابع قطعه‌ای پیوسته برای $t\geq 0$ باشند، در این صورت تلفیق f و g را با $f*g$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(f*g)(t)=\int_0^t f(z)\,g(t-z)\,dz$$

$$=\int_0^t f(t-z)\,g(z)\,dz$$

$$=(g*f)(t)$$

---

* فرض کنید $F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$, $G(s)=\mathcal{L}\{g(t)\}$ در این صورت

$$\mathcal{L}\{(f*g)(t)\}=F(s)\,G(s)$$

یا

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\,G(s)\}=(f*g)(t).$$

یادآوری

1. $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right)$
2. $\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)$
3. $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right)$

P: A98

Ex) اگر $\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)$, $\mathcal{L}\{g(t)\}=G(s)$ آنگاه $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\}$ کدامیک از عبارات زیر می‌باشد؟

1- $f(t)\,g(t)$ 2- $\int_0^t f(t)\,g(z)\,dz$

3) $\int_0^t f(t-z)\,g(z)\,dz$ ✓ 4) $\int_0^t f(z)\,g(t)\,dz$

Ex) جواب $f_0(t)=\underbrace{1*1*\dots*1}_{n \text{ مرتبه}}$ برابر با:

1- $\frac{t^n}{n+1}$ 2- $\frac{t^n}{n!}$ 3- $\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}$ 4- $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$

حل:

$\xrightarrow{k=2}$ $(1*1)=\int_0^t 1\times 1\,dz=t$

$\xrightarrow{k=3}$ $t*1=\int_0^t z\times 1\,dz=\frac{t^2}{2}$.

$\xrightarrow{k=4}$ $\frac{t^2}{2}*1=\int_0^t \frac{z^2}{2}\times 1\,dz=\frac{t^3}{3!}$

$\xrightarrow{k=5}$ $\frac{t^3}{3!}*1=\int_0^t \frac{z^3}{3!}\times 1\,dz=\frac{t^4}{4!}$

$\vdots$

$\xrightarrow{k=n}$ $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ گزینه ۴ ✓

P: 899

۱۶۸) تبدیل لاپلاس معکوس $F(s)=\dfrac{s}{(s^2+1)^2}$ کدام است؟

1- $t\sin t$ 2- $\frac{t}{2}\sin t$ 3- $\frac{t}{2}\cos t$ 4- $t\cos t$

راه اول

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\,\frac{s}{s^2+1}\right\}$$

$$=(\sin t)*(\cos t)=\int_0^t \sin z\cos(t-z)\,dz$$

$$=\int_0^t \frac{1}{2}\left(\sin(z+t-z)+\sin(z-t+z)\right)dz$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^t\left(\sin t+\sin(2z-t)\right)dz$$

$$=\frac{1}{2}(z\sin t)\Big|_0^t+\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}\cos(2z-t)\right)\Big|_0^t$$

گزینه $\checkmark 2$

$$=\frac{1}{2}t\sin t-\frac{1}{4}\Big(\underbrace{\cos t-\overset{\cos t}{\cos(-t)}}_{0}\Big)=\frac{1}{2}t\sin t$$

راه دوم: می دانیم

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}=\int_s^\infty F(v)\,dv\rightarrow$$

$$\frac{f(t)}{t}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\int_s^\infty F(v)\,dv\right\}\Rightarrow f(t)=t\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\int_s^\infty F(v)\,dv\right\}$$

$$\Rightarrow f(t)=\frac{t}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\int_s^\infty\frac{2v}{(v^2+1)^2}\,dv\right\}=\frac{t}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{v^2+1}\Big|_s^\infty\right\}$$

صفحه بعد

P: A100

$$= \frac{t}{2} \mathcal{L}^{-1}\left\{ 0 + \frac{1}{s^2+1} \right\} = \frac{t}{2}\sin t$$ گزینه ۲ $\checkmark$

معادلات انتگرالی و معادلات دیفرانسیل انتگرالی

تعریف: معادلات انتگرال، معادلاتی هستند که تابع مجهول زیر علامت انتگرال باشد و معادلات دیفرانسیل انتگرالی، معادلاتی هستند که شامل مشتقات تابع مجهول نیز باشند

- برای حل این نوع معادلات: از تبدیل لاپلاس کانولوشن دو تابع استفاده می‌کنیم. به این معنی که

$$\mathcal{L}\left\{ \int_0^t f(z)\, g(t-z)\, dz \right\} = F(s)\, G(s).$$

E8) جواب معادله انتگرالی $y = t^2 + \int_0^t \sin(t-z)\, y(z)\, dz$ کدام است؟

- 1- $y = t^2 + \frac{t^4}{6}$ 2- $y = t^2 + \frac{t^4}{12}$ 3- $y = t^2 - \frac{t^4}{6}$

4) $y = t^2 - \frac{t^4}{12}$.

حل: از طرفین تبدیل لاپلاس می‌گیریم و

$$Y(s) = \frac{2}{s^3} + \mathcal{L}\{\sin t * y\} \longrightarrow$$

$$Y(s) = \frac{2}{s^3} + \frac{1}{s^2+1} Y(s) \longrightarrow \left(1 - \frac{1}{s^2+1}\right) Y(s) = \frac{2}{s^3}$$

صفحه بعد

P:A101

$$\left(\frac{s^2+\cancel{x}-\cancel{x}}{s^2+1}\right)Y(s)=\frac{2}{s^3}\Longrightarrow Y(s)=\frac{2(s^2+1)}{s^5}$$

$$\Longrightarrow Y(s)=\frac{2}{s^3}+\frac{2}{s^5}\rightarrow y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^3}\right\}+\frac{2}{4!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4!}{s^5}\right\}$$

$$\rightarrow y(t)=t^2+\frac{1}{12}t^4$$

✓ گزینه ۲

Ex جواب معادله انتگرالی $y=1-2\int_0^t (t-z)\,y(z)\,dz$ کدام است؟

۱- $\cos\sqrt{2}t$ ۲- $\sin\sqrt{2}t$ ۳- $t\cos 2t$ ۴- $t\sin 2t$

حل:

$$Y(s)=\frac{1}{s}-2\mathcal{L}\{t*y\}\rightarrow Y(s)=\frac{1}{s}-2\frac{1}{s^2}Y(s)$$

$$\rightarrow\left(1+\frac{2}{s^2}\right)Y(s)=\frac{1}{s}\Longrightarrow\left(\frac{s^2+2}{s^2}\right)Y(s)=\frac{1}{s}$$

$$\Longrightarrow Y(s)=\frac{s^2}{\cancel{s}(s^2+2)}\rightarrow Y(s)=\frac{s}{s^2+2}\rightarrow y=\cos\sqrt{2}t$$

✓ گزینه ۱

Ex جواب معادله دیفرانسیل انتگرالی $y=2+\int_0^t e^{t-z}\,y'(z)\,dz$ کدام است؟

۱- 2 ۲- $2t$ ۳- t^2 ۴- $\frac{t^2}{3}$

P: A102

حل:

$$Y(s) = \frac{2}{s} + \mathcal{L}\{e^{t} * y'\} \to Y(s) = \frac{2}{s} + \mathcal{L}\{e^{t}\}\,\mathcal{L}\{y'\}$$

$$\to Y(s) = \frac{2}{s} + \frac{1}{s-1}\left(sY(s) - y(0)\right)$$

$$\to \left(1 - \frac{s}{s-1}\right)Y(s) = \frac{2}{s} - \frac{y(0)}{s-1}$$

اما می دانیم

$$y(0) = 2 + \int_0^0 e^{0-z}\, y'(z)\, dz = 2 \quad \Longrightarrow$$

$$\left(\frac{\cancel{s}-1-\cancel{s}}{s-1}\right)Y(s) = \frac{2}{s} - \frac{2}{s-1} \Longrightarrow Y(s) = -\frac{2(s-1)}{s} + 2$$

$$\to Y(s) = \frac{-2s+2+2s}{s} \Longrightarrow Y(s) = \frac{2}{s}$$

$$\Longrightarrow y(t) = 2.$$ ✓ ۱ نمره

P.A 103

«حل دستگاه معادلات دیفرانسیل همراه با شرایط مرزی با تبدیل لاپلاس»

یادآوری: حل دستگاه $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ به روش کرامر عبارت است از:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} \quad ; \quad y=\frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}$$

- در حل یک دستگاه به روش تبدیل لاپلاس به جای $\mathcal{L}\{x(t)\}$، $X(s)$ و به جای $\mathcal{L}\{y(t)\}=Y(s)$ قرار دهیم، درک بیشتری از حل در هنگام کار بدست می‌آید.

Ex) جواب‌های دستگاه معادلات زیر کدام است؟

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=x+y \\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=x-y \end{cases} , \quad x(0)=2,\ y(0)=0.$$

- حل: از طرفین معادلات تبدیل لاپلاس می‌گیریم، داریم

$$\begin{cases} \mathcal{L}\{x'\}=X(S)+Y(S) \\ \mathcal{L}\{y'\}=X(S)-Y(S) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} SX(S)-\overset{2}{x(0)}=X(S)+Y(S) \\ SY(S)-\underset{0}{y(0)}=X(S)-Y(S) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (S-1)X(S)-Y(S)=2 \\ X(S)-(S+1)Y(S)=0 \end{cases} \longrightarrow X(S)=\frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -(S+1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S-1 & -1 \\ 1 & -(S+1) \end{vmatrix}}$$

$$X(S)=-2(S+1)\big/-(S^2-1)+1=\frac{2(S+1)}{S^2-2}$$

P: A 104

$$X(S) = \frac{2(S+1)}{S^2-2},$$

$$y(S) = \frac{\begin{vmatrix} S-1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S-1 & -1 \\ 1 & -(S+1) \end{vmatrix}} = \frac{-2}{-(S^2-1)+1} = \frac{2}{S^2-2}$$

$$X(S) = \frac{2(S+1)}{S^2-2} = \frac{A}{S-\sqrt{2}} + \frac{B}{S+\sqrt{2}} \longrightarrow$$

$$2(S+1) = A(S+\sqrt{2}) + B(S-\sqrt{2}) \longrightarrow$$

$$2S+2 = (A+B)S + \sqrt{2}A - \sqrt{2}B \longrightarrow$$

$$\sqrt{2}\begin{cases} 2 = A+B \\ 2 = \sqrt{2}A - \sqrt{2}B \end{cases} \rightarrow (2\sqrt{2}+2) = 2\sqrt{2}A \rightarrow$$

$$2(1+\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}A \rightarrow$$

$$A = \frac{\cancel{2}(1+\sqrt{2})}{\cancel{2}\sqrt{2}}$$

$$\boxed{A = \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1}$$

$$\sqrt{2}B = 1+\sqrt{2} - 2 \Longrightarrow \boxed{B = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$x(t) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)e^{+\sqrt{2}t} + \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)e^{-\sqrt{2}t}$$

$$y(S) = \frac{2}{S^2-2} = \frac{A}{S-\sqrt{2}} + \frac{B}{S+\sqrt{2}} \longrightarrow 2 = A(S+\sqrt{2}) + B(S-\sqrt{2})$$

P: A105

$$2 = (A+B)S + \sqrt{2}A - \sqrt{2}B \longrightarrow$$

$$\begin{cases} 0 = A + B \\ 2 = \sqrt{2}A - \sqrt{2}B \end{cases} \qquad \cancel{2}\sqrt{2}A = \cancel{2} \Longrightarrow A = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \longrightarrow B = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

$$\Longrightarrow Y(S) = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{S-\sqrt{2}} - \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{S+\sqrt{2}} \Longrightarrow y(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{+\sqrt{2}t} - \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\sqrt{2}t}$$

- ۶۸) حل دستگاه زیر کدام است

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x - 6y + 1 \\ \frac{dy}{dt} = 6x - 7y + 1 \end{cases} \qquad x(0) = y(0) = 0$$

۱) $\begin{cases} x(t) = 1 - e^{t} \\ y(t) = 1 - e^{t} \end{cases}$

۲) $\begin{cases} x(t) = 1 + e^{-t} \\ y(t) = 1 + e^{-t} \end{cases}$

۳) $\begin{cases} x(t) = 1 - e^{2t} \\ y(t) = 1 - e^{-2t} \end{cases}$

۴) $\begin{cases} x(t) = 1 - e^{-t} \\ y(t) = 1 - e^{-t} \end{cases}$

- از طرفین تبدیل لاپلاس می‌گیریم داریم

$$\begin{cases} SX(S) - \cancel{x(0)} = 5X(S) - 6Y(S) + \frac{1}{S} \\ SY(S) - \cancel{y(0)} = 6X(S) - 7Y(S) + \frac{1}{S} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} (S-5)X(S) + 6Y(S) = \frac{1}{S} \\ -6X(S) + (S+7)Y(S) = \frac{1}{S} \end{cases}$$

Pi A106

$$X(S) = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{s} & 6 \\ \frac{1}{s} & s+7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-5 & 6 \\ -6 & s+7 \end{vmatrix}} = \frac{\frac{s+7}{s} - \frac{6}{s}}{s^2+2s-35+36}$$

$$\longrightarrow X(S) = \frac{s+1}{s(s+1)^2} = \frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$$

$$Y(S) = \frac{\begin{vmatrix} s-5 & \frac{1}{s} \\ -6 & \frac{1}{s} \end{vmatrix}}{s^2+2s+1} = \frac{\frac{s-5+6}{s}}{(s+1)^2} = \frac{\cancel{s+1}}{s(\cancel{s+1})^2}$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$$

$$\begin{cases} x(t) = 1 - e^{-t} \\ y(t) = 1 - e^{-t} \end{cases}$$

$\underline{9}$ تمرین