

فصل یازدهم

۱۱-۱ آزمون فرض

در فصل قبل با روشهای برآورد پارامترهای مجهول جامعه آشنا شدید، به عبارتی نشان دادیم که چگونه می‌توان با استفاده از نتایج حاصل از نمونه‌گیری پارامترهای مجهول یک جامعه آماری با توزیع معلوم را بدست آورد. حال در این فصل نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان در مورد صحت یک فرضیه بر اساس یک جامعه آماری قضاوت نمود. به عنوان مثال فرض می‌کنیم که یک داروی بخصوص بر روی یک بیماری اثر مثبتی دارد به این ترتیب می‌بایستی برای اثبات این فرضیه، عده‌ای از بیماران را انتخاب کرده و دارو را روی آنها آزمایش می‌کنیم و با توجه به نتایج بدست آمده در مورد صحت یا عدم صحت فرضیه مورد نظر تصمیم می‌گیریم. روشی که در آن فرض مربوطه را پذیرفته یا رد می‌کنیم به آزمون فرض معروف می‌باشد، در این فصل نحوه آزمون فرضهای مختلف را معرفی می‌کنیم.

۱۱-۲

۱.۱ فرضها و آزمونها

تعریف دقیق فرض و آزمون فرض عبارتند از:

فرض: یک فرض عبارتست از گزاره‌ای درباره قانون احتمال یک متغیر تصادفی (که قابل نمونه‌گیری باشد)
 آزمون فرض: نمونه‌گیری از متغیر تصادفی مربوطه و تصمیم‌گیری در مورد پذیرفتن یا رد فرض مورد نظر بر اساس نمونه بدست آمده.
 بطور کلی نتیجه یک آزمون فرض یکی از چهار مورد زیر می‌باشد:

- ۱- فرض را رد می‌کنیم هنگامی که واقعاً صحیح باشد.
 - ۲- فرض را رد می‌کنیم هنگامی که واقعاً صحیح نباشد.
 - ۳- فرض را رد می‌پذیریم هنگامی که واقعاً صحیح باشد.
 - ۴- فرض را رد می‌پذیریم هنگامی که واقعاً صحیح نباشد.
- برای وشن شدن مطلب به مثال زیر توجه کنید:

۱۱-۳ مثال ۱: گروهی از پزشکان معتقدند یک دارو نیروزا می‌باشد. برای تصمیم‌گیری در این مورد آنرا روی ۲۰ نفر از ورزشکاران آزمایش می‌کنند. در صورتی که دارو در بیشتر از ۷۰ درصد مواقع مثبتی بر عملکرد عادی ورزشکاران داشته باشد، پزشکان آنرا جزء داروهای نیروزا طبقه بندی می‌کنند. متغیر تصادفی X را برابر تعداد ورزشکارانی در بین ۲۰ نفر در نظر می‌گیریم که دارو تاثیر مثبتی بر عملکرد آنها داشته است. در این صورت X یک متغیر تصادفی دو جمله‌ای با پارامترهای $B(p, 20)$ می‌باشد. که در آن p درصد موثر بودن دارو می‌باشد و مقداری نامعلوم می‌باشد. نیروزا بودن دارو به این معنی است که $p > 0.70$ به عبارتی اگر از روی نمونه‌ها به این نتیجه برسیم که $p > 0.70$ می‌باشد در این صورت می‌توان گفت که دارو نیروزا بوده است. نتایج حاصل از نمونه‌ها یکی از دو حالت (فرض) زیر را نتیجه می‌دهد:

- ۱- داروی مورد نظر نیروزا می‌باشد: $p > 0.70$
- ۲- داروی مورد نظر نیروزا نمی‌باشد: $p > 0.70$

۱۱-۴ در روش آزمون یکی از فرضها را فرض خنثی یا فرض صفر در نظر می‌گیریم و آنرا با H_0 نمایش می‌دهیم به عبارتی H_0 در این مثال همان فرض است که مورد ادعای پزشکان می‌باشد یعنی فرض داروی مورد نظر نیروزا می‌باشد ($p > 0.70$) فرض H_0 خواهد بود. در مقابل هر فرضی که فرض H_0 را رد کند فرض مخالف یا مکمل نامیده می‌شود و با H_1 نمایش داده می‌شود. که در این مثال فرض داروی مورد نظر نیروزا نمی‌باشد ($p \leq 0.70$) فرض H_1 می‌باشد. بنابراین:

$$H_0 = p > 0.70 \text{ دارو نیروزاست}$$

دارو نیروزا نیست $H_1 = p \leq 0.70$

توجه کنید که فرض مخالف صورتهای متفاوتی می‌تواند داشته باشد مثلاً اگر فرض H_0 برابر $p = 0.7$ می‌بود در این صورت فرض H_1 هر یک از حالات زیر می‌توانست باشد:

$$H_1 : p > 0.7$$

$$H_1 : p \neq 0.7$$

$$H_1 : p = 0.5$$

تصمیم‌گیری در مورد اینکه کدام فرض را فرض مخالف در نظر بگیریم اهمیت زیادی دارد و معمولاً به صورت مساله بستگی دارد. در ایم مثال پزشکان برای اثبات ادعای خود ۲۰ ورزشکار را انتخاب نموده و با توجه به متغیر تصادفی X این احتمال وجود دارد که نتایج طوری بدست آیند که پزشکان دارو را نیروزا معرفی کنند در حالی که واقعاً دارو نیروزا بوده است.

۱۱-۵ به عنوان مثالی دیگر فرض کنید یک سکه را ۲۰ مرتبه پرتاب کنیم و ۱۶ شیر مشاهده کنیم بوضوح مشاهده ۱۶ شیر تنها با ۲۰ مرتبه پرتاب سکه دلیلی بر ناسالم بودن سکه نمی‌باشد در مثال داروی نیروزا هم این مطلب صدق می‌کند. بنابراین در حالت کلی چهار حالت زیر بدست می‌آید:

۱- H_0 را می‌پذیریم هنگامی که واقعاً صحیح باشد.

۲- H_0 را رد می‌کنیم هنگامی که واقعاً صحیح باشد.

۳- H_0 را می‌پذیریم هنگامی که واقعاً صحیح نباشد.

۴- H_0 را رد می‌کنیم هنگامی که واقعاً صحیح نباشد.

مشاهده می‌کنید که حالت دوم و سوم نشان دهنده خطا در تصمیم‌گیری می‌باشند حالت دوم را خطای نوع اول (ریسک فروشنده می‌نامیم و حالت سوم را خطای نوع دوم (ریسک مشتری) می‌نامیم. خطای نوع اول را با α نمایش می‌دهند و آنرا سطح معنی‌دار یا سطح تشخیص آزمون می‌نامند و خطای نوع دوم را با B نمایش می‌دهند.

۱۱-۱۱. ۲ ناحیه بحرانی و آماره آزمون

برای بیان ناحیه بحرانی و آماره آزمون مجدداً به مثال ۱ توجه کنید. در مثال ۱ نشان دادیم که:

$$H_0 : p > 0.70$$

$$H_1 : p \leq 0.70$$

چگونگی انجام آزمون به این ترتیب است که متغیر تصادفی X را برابر تعداد ورزشکاران که دارو بروی عملکرد آنها تاثیر مثبتی داشته در نظر می‌گیریم

در این صورت اگر مقدار مشاهده شده X مثلاً برابر ۱۵ باشد در نتیجه $p = \frac{15}{20} = \frac{3}{4} = 0.75$ و فرض H_0 را قبول می‌کنیم زیرا $p > 0.70$ اما

اگر مقدار مشاهده شده X مثلاً برابر ۵ باشد بوضوح فرض H_0 را رد می‌کنیم و فرض H_1 را می‌پذیریم زیرا $p = \frac{5}{20} = 0.25$ و $p \leq 0.70$.

در حالت کلی زمانی فرض H_0 را می‌پذیریم که مقدار مشاهده شده X از عدد ۱۴ بیشتر باشد زیرا:

$$p = \frac{14}{20} = 0.70$$

و اگر مقدار مشاهده شده X کوچکتر یا مساوی ۱۴ باشد فرض H_0 را رد می‌کنیم یعنی اگر مقادیر مشاهده شده X متعلق به مجموعه

$$C = \{x \mid x \leq 14\}$$

H_0 را رد می‌کنیم یا می‌پذیریم آماره آزمون گویند و به ناحیه C که به ازای مقادیر آن H_0 رد می‌شود ناحیه بحرانی می‌گوییم. به تعریف زیر توجه

کنید:

۷-۱۱ تعریف: به آماره $T = T(X_1, X_2, \dots, X_n)$ که بر اساس مقادیر مشاهده شده آن یک فرض را می‌پذیریم یا رد می‌کنیم، آماره آزمون گویند. و به ازای مجموعه مقادیری از این آماره که بر اساس آنها فرض H_0 رد می‌شود ناحیه بحرانی آزمون می‌گوییم و با نماد C نمایش می‌دهیم و به متمم ناحیه بحرانی که با C' نمایش می‌دهیم ناحیه پذیرش آزمون می‌گوییم.

با توجه به تعریف در آزمون یک فرض به این صورت عمل می‌کنیم که ابتدا مقادیر نمونه‌های X_1, X_2, \dots, X_n را جمع آوری می‌کنیم و بر اساس آنها آماره آزمون را که بشکل $t = T(x_1, x_2, \dots, x_n)$ می‌باشد تشکیل می‌دهیم حال اگر $t \in C$ باشد فرض H_0 را رد می‌کنیم و در غیر این صورت آن را می‌پذیریم.

۸.۱۱.۳ خطای آزمون

اشاره کردیم که رد تصمیم‌گیری ممکن است دو نوع خطای نوع اول (α) و نوع دوم (β) رخ دهد، که در هر دو حالت نتیجه مطلوب نمی‌باشد و در عمل می‌خواهیم تا جای ممکن مقدار خطای α و β را کاهش دهیم. با استفاده از احتمالات شرطی خطای نوع اول و دوم بصورت زیر بدست می‌آیند:

$$\alpha = p(H_0 \text{ درست باشد} \mid T(X_1, \dots, X_n) \in C) = p(T(X_1, \dots, X_n) \in C \mid H_0 \text{ درست باشد})$$

$$\beta = p(H_1 \text{ درست باشد} \mid T(X_1, \dots, X_n) \notin C) = p(T(X_1, \dots, X_n) \notin C \mid H_1 \text{ درست باشد})$$

اگر در آزمون فرض به این نتیجه برسیم که H_0 باید رد شود و در حالی که H_1 واقعاً درست باشد یعنی مقدار احتمال زیر را داشته باشیم:

$$p(H_1 \text{ درست باشد} \mid H_0 \text{ رد شود})$$

$$= p(H_0 \text{ واقعاً نادرست باشد} \mid H_0 \text{ رد شود})$$

آشکار است که هر چه مقدار این احتمال بیشتر باشد آزمون نتیجه دقیق‌تری بدست داده است به همین دلیل به این احتمال توان آزمون گفته می‌شود.

و با علامت β^* نمایش داده می‌شود.

توجه کنید که مقدار β^* برابر با $1 - \beta$ می‌باشد:

$$\beta^* = p(H_1 \text{ درست باشد} \mid H_0 \text{ پذیرفته شود}) = 1 - p(H_1 \text{ درست باشد} \mid H_0 \text{ رد شود})$$

$$= 1 - \beta$$

۹ مثال ۲: شخصی ادعا می‌کند که سکه استفاده شده برای تعیین زمین بازی در یک مسابقه فوتبال یکنواخت نبوده و با احتمال $0/6$ شیر می‌آمده

است. برای تحقیق صحت ادعای وی سکه را ۲۰ مرتبه پرتاب می‌کنیم مطلوبست:

الف) تعیین ناحیه بحرانی آزمون و فرضهای آزمون.

ب) محاسبه مقدار احتمال خطای نوع اول و خطای نوع دوم.

ج) محاسبه توان آزمون.

حل: الف) X را تعداد شیرهای بدست آمده در ۲۰ مرتبه پرتاب سکه در نظر می‌گیریم در این صورت X یک متغیر تصادفی دو جمله‌ای با پارامتر p و

$$X \sim \beta(20, p)$$

طبق تعریف فرض صفر خلاف ادعای مطرح شده می‌باشد بنابراین:

$$\begin{cases} H_0 : p = \frac{1}{2} \\ H_1 : p = \frac{6}{10} \end{cases}$$

با توجه به اینکه در متغیر تصادفی برنولی $\mu = np$ می‌باشد بنابراین اگر در ۲۰ مرتبه پرتاب سکه حداقل تعداد $20 \times \frac{6}{10} = 12$ شیر مشاهده کنیم

می‌بایستی فرض H_0 را رد کنیم به این ترتیب ناحیه بحرانی عبارتست از:

$$C = \{x \mid x \geq 12\}$$

ب) محاسبه خطای نوع اول:

$$\alpha = p(X \in C \mid \text{درست باشد}) = p(X \geq 12 \mid p = \frac{1}{4})$$

$$1 - p(X \leq 11 \mid p = \frac{1}{4}) = 1 - 0.7483 = 0.2517$$

محاسبه خطای نوع دوم:

$$\beta = p(X \notin C \mid \text{درست } H_1) = p(X < 12 \mid p = 0.6)$$

$$= p(X \leq 11 \mid p = 0.6) = 0.4044$$

ج) محاسبه توان آزمون:

$$\beta^* = 1 - \beta = 0.5956$$

ملاحظه می‌کنید که احتمال خطای نوع اول کم و احتمال خطای نوع دوم زیاد می‌باشد.

۱۱-۱۰ مثال ۳: در مثال قبل اگر ناحیه بحرانی بصورت $C = \{x \mid x \geq 13\}$ باشد احتمال خطای نوع اول و دوم و توان آزمون را محاسبه کنید؟
حل:

$$\alpha = p(X \geq 13 \mid p = \frac{1}{4}) = 1 - p(X \leq 12 \mid p = \frac{1}{4}) = 1 - 0.8684 = 0.1316$$

$$\beta = p(X < 13 \mid p = 0.6) = p(X \leq 12 \mid p = 0.6) = 0.5841$$

$$\beta^* = 1 - \beta = 0.4159$$

ملاحظه می‌کنید که در حالت دوم با متغیر ناحیه بحرانی مقدار احتمال نوع اول کاهش یافت اما این مساله موجب افزایش احتمال خطای نوع دوم شده است.

بنابراین می‌بایستی ناحیه بحرانی طوری انتخاب شود که همزمان با در نظر گرفتن یک مقدار حداکثر برای خطای نوع اول باعث حداقل نمودن نوع دوم شود. به این ترتیب توان آزمون نیز حداکثر می‌شود.

در مثال بعد با قرار دادن یک مقدار معین برای احتمال خطای نوع اول (α) تلاش می‌نیم احتمال خطای نوع دوم را تا جای ممکن کاهش دهیم و در نتیجه توان آزمون را افزایش دهیم.

۱۱-۱۱-۱ مثال ۴: X یک متغیر تصادفی نرمال با میانگین مجهول μ و واریانس ۹ می‌باشد. آزمون فرض زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 0 \\ H_1 : \mu = 1 \end{cases}$$

اگر از X یک نمونه ۲۵ تایی بگیریم و ناحیه بحرانی بصورت $C = \{(X_1, \dots, X_{25}) \mid \bar{X} \geq C\}$ باشد مقدار C را طوری بدست بیاورید که $\alpha = 0.1$ باشد و سپس احتمال خطای نوع دوم و توان آزمون را محاسبه کنید؟

حل: ابتدا توجه کنید که \bar{X} دارای میانگین μ و واریانس $\frac{\sigma^2}{n}$ می‌باشد. یعنی $(\mu, \frac{9}{25})$ به این ترتیب:

$$\alpha = 0.1 = p(\bar{X} > C \mid \mu = 0) = p\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > \frac{C - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \mid \mu = 0\right)$$

$$= p\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > \frac{C - 0}{\frac{3}{5}}\right) = p(Z > 1/66 C) = 0.1$$

$$\Rightarrow 1 - p(Z \leq 1/66 C) = 0.1 \Rightarrow p(Z \leq 1/66 C) = 0.9$$

رابطه اخیر معادل است با اینکه $C = 1/66 Z_{.9}$ از جدول مقدار $Z_{.9}$ برابر است با $1/28$ بنابراین:

$$Z_{./9} = 1/28 = 1/66 C \Rightarrow C = 0/77$$

به این ترتیب ناحیه بحرانی بصورت زیر بدست می‌آید:

$$C = \{ (X_1, \dots, X_{25}) \mid \bar{X} > 0/77 \}$$

ملاحظه می‌کنید که در این مثال برای اینکه بتوانیم مقدار خطای نوع اول را به دلخواه کاهش دهیم به ناچار می‌بایستی بازه ناحیه بحرانی را متغیر فرض می‌کردیم، حال مقدار خطای نوع دوم را بدست می‌آوریم:

$$\beta = p(\bar{X} \leq C \mid \mu = 1) = p\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq \frac{0/77 - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \mid \mu = 1\right)$$

$$= p\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq \frac{0/77 - 1}{\frac{3}{5}}\right) = p(Z \leq -0/38) = N_Z(-0/38) = 0/3520$$

$$\beta^* = 1 - \beta = 1 - 0/3520 = 0/648$$

توان آزمون:

۱۲-۱۱ ۴. انواع فرضیه

فرض $H_0: \mu = 2$ را در نظر بگیرید، این فرض با بیان اینکه میانگین جامعه برابر ۲ می‌باشد توزیع جامعه را معلوم می‌کند و نشان می‌دهد که پارامتر مجهول جامعه میانگین برابر عدد ۲ می‌باشد، به این نوع فرضیه که توزیع جامعه را کلاً مشخص می‌سازند فرضیه ساده می‌گوییم. حال فرض $H_1: \mu \geq 2$ را در نظر بگیرید، واضح است که اگر این فرض درست باشد با بیان یک بازه برای پارامتر مجهول جامعه، توزیع را بصورت دقیق مشخص نمی‌کند به این فرضیه که با درست بودنشان پارامتر مجهول جامعه و در نتیجه توزیع جامعه بصورت دقیق مشخص نمی‌شود فرضیه مرکب می‌گوییم.

به عنوان مثال در مثال ۴ فرضیه $H_0: \mu = 0$ و $H_1: \mu = 1$ فرضیه ساده می‌باشند اما در مثال ۱ فرضیه $H_0: p \geq 0/6$ و $H_1: p < 0/6$ فرضیه مرکب می‌باشند.

۱۳-۱۱ ۵. انواع آزمونها

اگر θ یک پارامتر نامعلوم جامعه باشد و بخواهیم آزمونهایی در مورد این پارامتر انجام دهیم، آزمون هر فرض آماری که در آن فرضیه مقابل (H_1) یک طرفه باشد آزمون یک طرفه نامیده می‌شود. به عنوان مثال برای مقدار ثابت θ_0 از θ آزمونهای زیر همگی یک طرفه می‌باشند:

$$\begin{cases} H_0: \theta = \theta_0 \\ H_1: \theta \geq \theta_0 \end{cases} \quad \begin{cases} H_0: \theta \geq \theta_0 \\ H_1: \theta < \theta_0 \end{cases}$$

اگر در یک آزمون فرضیه مقابل (H_1) دو طرفه باشد آن آزمون را آزمون دو طرفه می‌نامیم. مانند آزمون زیر:

$$\begin{cases} H_0: \theta = \theta_0 \\ H_1: \theta \neq \theta_0 \end{cases}$$

۱۴-۱۱ ۶. مراحل انجام یک آزمون فرض

برای انجام یک آزمون فرض می‌بایستی مراحل زیر را بصورت گام به گام طی نمود:

- ۱- تعیین فرضیه صفر H_0 و فرض مقابل H_1 .
- ۲- تعیین یک سطح معنی‌دار α که معمولاً یکی از اعداد $0/05$ ، $0/01$ یا $0/1$ در نظر گرفته می‌شود.
- ۳- تعیین آماره آزمون $T = T(X_1, \dots, X_n)$ که عموماً بر اساس برآوردگر نقطه‌ای پارامتر مجهول θ بدست می‌آید.
- ۴- تعیین ناحیه بحرانی آزمون که از روی آماره آزمون، فرض مقابل آزمون و سطح معنی‌دار α بدست می‌آید.
- ۵- محاسبه مقدار آماره آزمون که از روی نمونه‌های تصادفی X_1, X_2, \dots, X_n بدست می‌آید.

۶- نتیجه‌گیری - اگر مقدار محاسبه شده آماره آزمون درون ناحیه بحرانی باشد فرض H_0 را رد و در غیر این صورت فرض H_0 را می‌پذیریم. توجه کنید که عموماً در حل مسایل آزمون فرض، با در نظر گرفتن انواع آزمون فرضها و تعیین آماره آزمون و ناحیه بحرانی برای هر یک از آزمون فرضها محاسبه مراحل ۳ و ۴ بسیار ساده‌تر می‌شود.

۱۵-۱۱.۷ آزمون فرضهای آماری برای پارامترهای جامعه

برای سادگی انجام آزمونهای فرض بهترین راه محاسبه آماره آزمون و ناحیه بحرانی برای فرضهای متفاوت می‌باشد. بنابراین در این بخش ابتدا آزمون فرض را روی میانگین یک جمعیت را زمانی که واریانس معلوم می‌باشد انجام می‌دهیم:

فرض می‌کنیم X یک متغیر تصادفی با میانگین مجهول μ و واریانس معلوم σ^2 باشد. نمونه‌های تصادفی X_1, X_2, \dots, X_n را انتخاب می‌کنیم، می‌خواهیم آزمونهایی را روی میانگین μ انجام دهیم. در این صورت سه حالت کلی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} 1- \text{آزمون فرض} & \begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases} \text{ که در آن } H_0 \text{ رد می‌شود اگر } \bar{X} > C \\ 2- \text{آزمون فرض} & \begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{cases} \text{ که در آن } H_0 \text{ رد می‌شود اگر } \bar{X} > C \\ 3- \text{آزمون فرض} & \begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases} \text{ که در آن } H_0 \text{ رد می‌شود اگر } \bar{X} < C_1 \text{ یا } \bar{X} > C_2 \end{aligned}$$

توجه کنید که در هر حالت مقدار C که بیانگر ناحیه بحرانی می‌باشد با توجه به سطح معنی‌دار α بدست می‌آید. حال برای هر حالت آماره آزمون و مقدار C را محاسبه می‌کنیم:

۱۶-۱۱ حالت اول: H_0 رد می‌شود اگر $\bar{X} > C$ بنابراین خطای نوع اول عبارتست از:

اگر X یک متغیر تصادفی نرمال باشد یا $n \geq 30$ باشد قبلاً نشان دادیم که $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ یک متغیر تصادفی نرمال استاندارد می‌باشد بنابراین:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$$

$$\alpha = p(\bar{X} > C | \mu = \mu_0) = p\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > \frac{C - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = p\left(Z > \frac{C - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$$

$$\Rightarrow 1 - p\left(Z > \frac{C - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = \alpha \Rightarrow p\left(Z > \frac{C - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = 1 - \alpha$$

$$\Rightarrow \frac{C - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = Z_{1-\alpha} \Rightarrow C = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} (Z_{1-\alpha}) + \mu_0$$

حال با توجه به مقدار C ناحیه بحرانی آزمون بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\bar{X} > C \rightarrow \bar{X} > \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{1-\alpha} \quad \text{یا} \quad \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > Z_{1-\alpha}$$

نتیجه می‌گیریم که:

در آزمون فرض $H_0: \mu = \mu_0$ رد می‌شود اگر و فقط اگر:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > Z_{1-\alpha}$$

توجه کنید که اگر فرض $H_0: \mu \leq \mu_0$ بصورت $H_0: \mu = \mu_0$ باشد می‌توان نشان داد که ناحیه بحرانی باز هم به صورت رابطه بالا می‌باشد.

۱۷-۱۱ حالت دوم: آزمون فرض $H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$ را رد می‌کنیم اگر $\bar{X} < C$ مشابه حالت قبل اگر C را محاسبه کنیم مقدار ناحیه بحرانی

بصورت زیر بدست می‌آید:

$$C = \mu_0 - Z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \bar{X} < C \rightarrow \bar{X} < \mu_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{1-\alpha}$$

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < -Z_{1-\alpha}$$

بنابراین در حالت کلی در آزمون فرض $H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$ رد می‌شود اگر و فقط اگر $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < -Z_{1-\alpha}$ در این حالت هم اگر فرض

$H_0: \mu \geq \mu_0$ بصورت $H_0: \mu = \mu_0$ می‌بود باز هم ناحیه بحرانی بصورت رابطه فوق بدست می‌آمد.

۱۸-۱۱ حالت سوم: آزمون فرض $H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$ که در آن H_0 رد می‌شود اگر $\bar{X} > C_1$ یا $\bar{X} < C_2$ باشد بنابراین خطای نوع اول عبارتست

از:

$$\alpha = p(\bar{X} < C_1 \text{ یا } \bar{X} > C_2 \mid \mu = \mu_0) \rightarrow 1 - \alpha = p(C_1 < \bar{x} < C_2 \mid \mu = \mu_0)$$

$$p = \left(\frac{C_1 - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{C_2 - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right)$$

$$= p \left(\frac{C_1 - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < Z < \frac{C_2 - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right) = 1 - \alpha$$

$$\frac{C_2 - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = - \frac{C_1 - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < Z_{1-\alpha}$$

که در آن:

و در نتیجه بدست می‌آوریم:

$$C_1 = \mu_0 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$C_2 = \mu_0 + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

و ناحیه بحرانی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\bar{X} > \mu_0 + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{یا} \quad \bar{X} < \mu_0 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

که معادل است با:

$$\left| \frac{X' - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right| > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

بنابراین در حالت کلی در آزمون فرض $\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases}$ فرض H_0 رد می‌شود اگر فقط اگر:

$$|Z| = \left| \frac{X' - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right| > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

در مثالهای بعدی هر حالت را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۱۹-۱۱ مثال ۵: توان شکنندگی (مقدار نیروی لازم برای شکستن) کابلهایی که توسط یک شرکت تولید می‌شوند دارای میانگین ۱۸۰۰ پوند و

انحراف معیار ۱۰۰ می‌باشند. محققان شرکت با اعمال تکنیک جدیدی که در مراحل ساخت اعمال کرده‌اند ادعا کرده‌اند که توان شکنندگی افزایش یافته است. برای آزمودن این ادعا یک نمونه ۵۰ تایی از کابلها تحت آزمون قرار می‌گیرند و میانگین توان شکنندگی ۱۸۵۰ پوند بدست می‌آید. آیا در سطح معنی‌دار ۰/۰۱ این ادعا پذیرفته است؟

حل: ابتدا هر یک از فرضهای صفر و مقابل را تعریف می‌کنیم:

$H_0 : \mu = 1800$ هیچ تغییری در توان شکنندگی رخ نداده است.

$H_1 : \mu > 1800$ توان شکنندگی افزایش یافته است.

ملاحظه می‌کنید که حالت اول رخ داده است و با توجه به مطالب ارایه شده آماره آزمون و ناحیه بحرانی بصورت زیر خواهند بود:

$$Z = \frac{X' - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

که در آن:

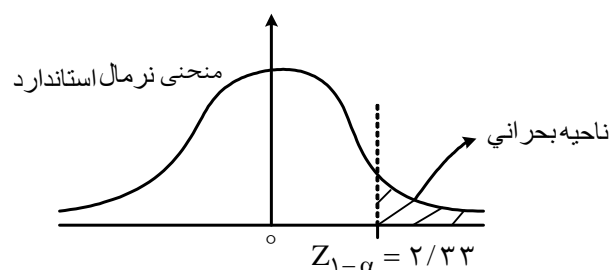
$$\alpha = 0/01$$

$$\Rightarrow 1 - \alpha = 1 - 0/01 = 0/99 \quad \Rightarrow \quad Z_{1-\alpha} = Z_{0/99} = 2/33$$

یعنی ناحیه بحرانی بصورت $Z > 2/33$ می‌باشد و اگر مقدار آماره Z بزرگتر از ۲/۳۳ باشد فرض H_0 را رد می‌کنیم و به عبارتی ادعای محققان را می‌پذیریم. مقدار آماره Z برابر است با:

$$Z = \frac{X' - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > = \frac{1850 - 1800}{\frac{100}{\sqrt{50}}} = 3/55$$

بنابراین در سطح معنی‌دار $\alpha = 0/01$ نتایج نشان می‌دهند که $Z > 2/33$ می‌باشد و در نتیجه ادعای محققان را در مورد افزایش توان شکنندگی کابلها می‌پذیریم. در نمودار زیر ناحیه رد فرض H_0 را ملاحظه می‌کنید:



۲۰-۱۱ مثال ۶: عمر متوسط ۱۰۰ عدد از لامپهای مهتابی تولید شده توسط یک کارخانه برابر ۱۵۷۰ ساعت با انحراف معیار ۱۲۰ ساعت بدست آمده است. کارخانه تولید کننده ادعا می کند که عمر متوسط لامپها برابر ۱۶۰۰ ساعت می باشد در حالی که مصرف کنندگان این ادعا را قبول ندارند. صحت ادعای کارخانه سازنده را در سطح $\alpha = 0/05$ و $\alpha = 0/01$ بررسی کنید؟

حل: در این حالت دو فرض زیر را پیش رد داریم:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 1600 \\ H_1 : \mu \neq 1600 \end{cases}$$

ملاحظه می کنید که در این حالت یک آزمون دو طرفه انجام می گیرد که در آن آماره آزمون و ناحیه بحرانی بصورت زیر می باشد:

$$|Z| = \left| \frac{X' - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right| > Z_{1 - \frac{\alpha}{2}}$$

الف) ابتدا آزمون فرض را در سطح معنی دار $\alpha = 0/05$ انجام می دهیم:

$$\alpha = 0/05 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0/975$$

$$\rightarrow Z_{1 - \frac{\alpha}{2}} = Z_{0/975} = 1/96$$

بنابراین فرض H_0 را رد می کنیم اگر $|Z| > 1/96$ باشد یا به عبارتی:

$$|Z| > 1/96 \text{ یا } Z < -1/96$$

۲۱-۱۱ حال مقدار آماره آزمون را بدست می آوریم:

ابتدا توجه کنید که مقدار واقعی انحراف معیار طول عمر لامپها را نداریم بنابراین از واریانس یا انحراف معیار \bar{X} برای تخمین واریانس واقعی طول عمر لامپها استفاده می کنیم:

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{120}{\sqrt{100}} = 12$$

به این ترتیب آماره آزمون بصورت زیر بدست می آید:

$$Z = \frac{X' - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > \frac{1570 - 1600}{12} = -2/5$$

ملاحظه می کنید که $-2/5$ خارج از بازه $(-1/96, 1/96)$ قرار دارد بنابراین H_0 را در سطح معنی دار $0/05$ رد می کنیم یعنی ادعای مصرف کنندگان در مورد عدم صحت میانگین طول عمر مطرح شده توسط کارخانه سازنده، صحیح می باشد.

ب) حال آزمون فرض را در سطح معنی دار $0/01$ انجام می دهیم:

$$\alpha = 0/01 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0/995$$

$$\rightarrow Z_{1 - \frac{\alpha}{2}} = Z_{0/995} = 2/58$$

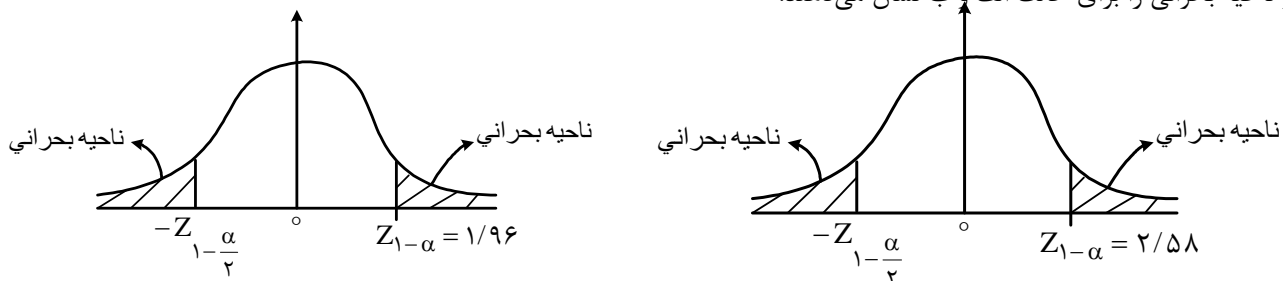
در این حالت اگر آماره آزمون در خارج از بازه $(-2/58, 2/58)$ قرار داشته باشد H_0 را رد می کنیم. مقدار آماره آزمون در این حالت برابر همان مقدار بدست آمده در بند الف مثال می باشد:

$$Z = -2/5 \Rightarrow |Z| > 2/58$$

۲۲-۱۱ از آنجا که مقدار Z برابر $2/5$ می باشد و در بازه $(-2/58, 2/58)$ قرار دارد بنابراین در سطح معنی دار $\alpha = 0/01$ فرض H_0 را می پذیریم.

ملاحظه می‌کنید که با تغییر سطح معنی‌داری و به دنبال آن تغییر ناحیه بحرانی، این احتمال وجود دارد که تصمیم‌گیری در مورد رد یا پذیرش فرض H_0 کاملاً عوض شود. توجه کنید که در حالت دوم ($\alpha = 0/01$) فرض H_0 را می‌پذیریم اما این به معنی رد فرض H_1 نمی‌باشد بلکه در این حالت می‌گوییم نمی‌توان در مورد رد فرض H_1 نظری داد یا به عبارت دیگر هیچ تصمیمی نمی‌گیریم.

دو نمودار زیر ناحیه بحرانی را برای حالت الف و ب نشان می‌دهند:



۱۱-۲۳ آزمون فرض برای میانگین نرمال با واریانس نامعلوم

در صورتی که واریانس جامعه نامعلوم باشد نشان دادیم که آماره $T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$ دارای توزیع t با $n-1$ درجه آزادی است، بنابراین در این حالت و با

توجه به روشهای ارایه شده برای بدست آوردن ناحیه بحرانی در بخش قبل، می‌توان نشان داد که آماره آزمون و ناحیه بحرانی برای هر حالت بصورت زیر بدست می‌آیند:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} > t_{1-\alpha}(n-1) \quad \begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \text{ یا } \mu \leq \mu_0 \\ H_1: \mu > \mu_0 \end{cases} \quad \text{۱- در آزمون فرض } H_0 \text{ رد می‌شود اگر و فقط اگر:}$$

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} < -t_{1-\alpha}(n-1) \quad \begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \text{ یا } \mu \geq \mu_0 \\ H_1: \mu < \mu_0 \end{cases} \quad \text{۲- در آزمون فرض } H_0 \text{ رد می‌شود اگر و فقط اگر:}$$

$$|T| = \left| \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \right| > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \quad \begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu \neq \mu_0 \end{cases} \quad \text{۳- در آزمون فرض } H_0 \text{ رد می‌شود اگر و فقط اگر:}$$

۱۱-۲۴ مثال ۷: تعداد نامه‌های رسیده به یک شرکت در طول ۱۰ روز عبارتست از:

۱, ۳, ۲, ۵, ۶, ۴, ۵, ۸, ۹, ۱

اگر توزیع تعداد نامه‌های رسیده از متغیر تصادفی نرمال پیروی کند، آیا در سطح معنی‌دار $\alpha = 0/01$ می‌توان ادعا نمود که بطور متوسط روزانه حداقل ۴ نامه به شرکت پست ارسال می‌شود؟

$$\begin{cases} H_0: \mu = 4 \\ H_1: \mu > 4 \end{cases}$$

حل: فرضهای زیر را در نظر می‌گیریم:

واریانس جامعه نامعلوم است بنابراین برای محاسبه از آماره $T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$ استفاده می‌کنیم که در آن \bar{X} و S برابر هستند با:

$$\bar{X} = \frac{1}{10} (1+3+2+5+6+4+5+8+9+1) = 4/4$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac{\bar{X}^2}{n} \right) = \frac{1}{9} \left\{ (1+9+4+25+36+16+25+64+81+1) - \frac{(4/4)^2}{10} \right\}$$

$$= \frac{1}{9} \left(262 - \frac{(4/4)^2}{10} \right) = 28/8 \Rightarrow S = \sqrt{29} = 5/36$$

فرض H_0 در صورتی رد می‌شود که:

$$T > t_{1-\alpha} (n-1)$$

$$\alpha = 0/01 \rightarrow 1-\alpha = 0/99$$

$$t_{1-\alpha} = t_{0/99} (n-1) = t_{0/99} (9) = 2/82$$

مقدار آماره آزمون عبارتست از:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{4/4 - 4}{\frac{5/36}{\sqrt{10}}} = 0/23$$

از آنجا که مقدار آماره آزمون کمتر از $2/82$ می‌باشد بنابراین فرض H_0 را می‌پذیریم.

۲۵-۱۱۱۱ . ۹ آزمون فرض برای واریانس یک جامعه نرمال

در صورتی که بخواهیم ادعایی را در مورد واریانس یک جامعه نرمال بررسی کنیم می‌دانیم که آماره $\chi^2 = \frac{(n-1) S^2}{\sigma_0^2}$ دارای توزیع خی دو با $n-1$ درجه آزادی است بنابراین می‌توان حالت‌های زیر را برای هر حالت بدست آورد:

$$\chi^2 = \frac{(n-1) S^2}{\sigma_0^2} > \chi_{1-\alpha}^2 (n-1) \quad \text{در آزمون} \quad \begin{cases} H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \text{ یا } \sigma^2 \leq \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2 \end{cases} \quad \text{رد می‌شود اگر و فقط اگر:}$$

$$\chi^2 = \frac{(n-1) S^2}{\sigma_0^2} < \chi_{\alpha}^2 (n-1) \quad \text{در آزمون فرض} \quad \begin{cases} H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \text{ یا } \sigma^2 \geq \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2 \end{cases} \quad \text{رد می‌شود اگر و فقط اگر:}$$

$$\text{در آزمون فرض} \quad \begin{cases} H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \end{cases} \quad \text{رد می‌شود اگر و فقط اگر}$$

$$\chi^2 = \frac{(n-1) S^2}{\sigma_0^2} > \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2 (n-1) \quad \text{یا} \quad \chi^2 = \frac{(n-1) S^2}{\sigma_0^2} < \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2 (n-1) :$$

۲۶-۱۱ مثال ۹: یک کارخانه تولید نوشابه ماشین آلات جدیدی برای پرمودن شیشه‌ها خریداری نموده است که ادعا شده است این ماشین‌ها با انحراف معیار ۱۰ میلی لیتر شیشه‌ها را پر می‌کنند. برای بررسی صحت ادعا یک نمونه تصادفی ۱۰ تایی از شیشه‌های پر شده را انتخاب می‌کنیم و نتایج $\bar{X} = 255$ و $S^2 = 180$ بدست آمده است. در سطح معنی‌دار $\alpha = 0/05$ آیا ادعای مطرح شده صحیح است؟
حل: فرضها عبارتند از:

$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = 100 \\ H_1 : \sigma^2 \neq 100 \end{cases}$$

با توجه به آزمونها آماره آزمون و ناحیه بحرانی بصورت زیر خواهند بود:

$$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) < \chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \quad \text{یا} \quad \chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$$

در سطح معنی‌دار ۰/۰۵ داریم:

$$\alpha = 0/05 \quad \rightarrow \quad 1 - \frac{\alpha}{2} = 0/975 \quad \frac{\alpha}{2} = 0/025$$

پس:

$$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) = \chi^2_{0/975}(9) = 19$$

$$\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) = \chi^2_{0/025}(9) = 2/7$$

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{9(180)}{100} = 16/2$$

از آنجا که آماره $\chi^2 = 16/2$ درون بازه $(2/7, 19)$ قرار دارد بنابراین ادعای H_0 رد نمی‌شود و در نتیجه ادعا مطرح شده در سطح معنی‌دار ۰/۰۵ قابل قبول است.

۱۱-۲۷. ۱۱.۱۱ آزمون فرض برای تفاضل میانگین‌ها

یک نمونه تصادفی n_1 تایی از جامعه نرمال با میانگین μ_1 و واریانس σ_1^2 انتخاب می‌کنیم، همچنین یک نمونه n_2 تایی از جامعه نرمال دیگری با میانگین μ_2 و واریانس σ_2^2 انتخاب می‌کنیم بطوریکه دو نمونه از یکدیگر مستقل باشند در این حالت برای آزمون تفاضل میانگین‌های دو جامعه از آزمون‌های زیر می‌توانیم استفاده کنیم که در سه حالت اول واریانس دو جامعه معلوم و در سه حالت بعدی واریانس مجهول فرض شده است:

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - d_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} > Z_{1-\alpha} \quad \text{فرض } H_0 \text{ رد می‌شود اگر و فقط اگر:} \quad \begin{cases} H_0 : \mu_1 - \mu_2 = d_0 \text{ یا } \mu_1 - \mu_2 \leq d_0 \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 > d_0 \end{cases} \quad \text{۱- در آزمون فرض}$$

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - d_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} < Z_{1-\alpha} \quad \text{فرض } H_0 \text{ رد می‌شود اگر و فقط اگر:} \quad \begin{cases} H_0 : \mu_1 - \mu_2 = d_0 \text{ یا } \mu_1 - \mu_2 \geq d_0 \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 < d_0 \end{cases} \quad \text{۲- در آزمون فرض}$$

$$|Z| = \left| \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - d_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \right| > Z_{1-\alpha} \quad \text{فرض } H_0 \text{ رد می‌شود اگر و فقط اگر:} \quad \begin{cases} H_0 : \mu_1 - \mu_2 = d_0 \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq d_0 \end{cases} \quad \text{۳- در آزمون فرض}$$

۱۱-۲۸ در حالتی که واریانسهای دو جامعه نامعلوم اما برابر باشند ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$) روابط آزمونهای فرض بصورت زیر خواهند بود:

۱- در آزمون فرض $\begin{cases} H_0 : \mu_1 - \mu_2 = d_0 \text{ یا } \mu_1 - \mu_2 \leq d_0 \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 > d_0 \end{cases}$ فرض H_0 رد می‌شود اگر و فقط اگر:

$$T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - d_0}{S_P \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} > t_{1-\alpha} (n_1 + n_2 - 2)$$

که در آن $S_P^2 = \frac{(n_1 - 1) S_1^2 + (n_2 - 1) S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$ می‌باشد.

۲- در آزمون فرض $\begin{cases} H_0 : \mu_1 - \mu_2 = d_0 \text{ یا } \mu_1 - \mu_2 \geq d_0 \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 < d_0 \end{cases}$ فرض H_0 رد می‌شود اگر و فقط اگر:

$$T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - d_0}{S_P \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} < t_{1-\alpha} (n_1 + n_2 - 2)$$

۳- در آزمون فرض $\begin{cases} H_0 : \mu_1 - \mu_2 = d_0 \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq d_0 \end{cases}$ فرض H_0 رد می‌شود اگر و فقط اگر:

$$|T| = \left| \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - d_0}{S_P \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \right| > t_{1-\frac{\alpha}{2}} (n_1 + n_2 - 2)$$

۲۹-۱۱ مثال ۱۰: یک امتحان از دو کلاس A و B گرفته شده است. کلاس A شامل ۴۰ دانشجو و کلاس B شامل ۵۰ دانشجو می‌باشد. میانگین

نمرات در کلاس A ۷۴ با انحراف معیار ۸ و در کلاس B ۷۸ با انحراف معیار ۷ می‌باشد آیا نمرات دانشجویان این دو کلاس متفاوت معنی‌داری در سطوح ۰/۰۵ و ۰/۰۱ با هم دارند؟

حل: هر یک از دو کلاس را دو جامعه با میانگین‌های μ_1 و μ_2 در نظر می‌گیریم داریم:

$$\begin{aligned} \bar{X}_1 &= 74 & \sigma_1 &= 8 \\ \bar{X}_2 &= 78 & \sigma_2 &= 7 \\ n_1 &= 40 \\ n_2 &= 50 \end{aligned}$$

فرض‌های آزمون عبارتند از:

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ اختلاف تنها ناشی از شانس است.

$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ بین دو کلاس اختلاف معنی‌داری وجود دارد.

در این حالت آماره آزمون و ناحیه بحرانی عبارتند از:

$$|Z| = \left| \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - d_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \right| > Z_{1-\alpha}$$

که در این مثال مقدار $d_0 = 0$ می‌باشد.

۱۱-۳۰ الف) در سطح معنی‌دار ۰/۰۵ داریم:

$$\alpha = 0.05 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975$$

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{0.975} = 1.96$$

در این حالت فرض H_0 رد می‌شود اگر $|Z| > 1.96$ حال داریم:

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - d_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{74 - 78}{\sqrt{\frac{82}{40} + \frac{72}{50}}} = \frac{-4}{1.606} = -2.49$$

از آنجا که $Z = -2.49$ در بازه $(-1.96, 1.96)$ قرار ندارد بنابراین در سطح معنی‌دار ۰/۰۵ اختلاف معنی‌داری بین دو کلاس A و B وجود دارد و فرض H_0 رد می‌شود. به این ترتیب به احتمال بیشتر کلاس دوم دارای نتایج بهتری می‌باشد.
ب) برای سطح معنی‌دار ۰/۰۱ داریم:

$$\alpha = 0.01 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.995$$

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{0.995} = 2.58$$

در این حالت مقدار آماره آزمون برابر با مقدار بدست آمده از بند الف می‌باشد که برابر -2.49 می‌باشد. و از آنجا که -2.49 در بازه $(-2.58, 2.58)$ قرار دارد بنابراین در سطح معنی‌دار ۰/۰۱ اختلاف معنی‌داری بین دو کلاس وجود ندارد. توجه کنید که در حالت کلی نتایج حاصل از سطح معنی‌دار ۰/۰۵ را ملاک تصمیم‌گیری قرار می‌دهند. زیرا آماردانان نشان داده‌اند که تقریباً بهترین سطح برای ملاک بودن در تصمیم‌گیری‌ها، سطح معنی‌دار ۰/۰۵ می‌باشد.

۱۱-۳۱ مثال ۱۱: در کشاورز A و B در مزرعه‌های خود گندم می‌کارند، کشاورز A از نوعی ضد آفت جدید استفاده می‌کند. میانگین برداشت

محصول در هر کیلومتر مربع از ۱۲ کیلومتر مربع از زمین کشاورز A برابر ۱۳۹ کیلو با انحراف معیار ۱۰ کیلو می‌باشد و در زمین کشاورز B برابر ۱۳۱ کیلو با انحراف معیار ۱۱ کیلو می‌باشد. آیا می‌توان ادعا کرد که در سطح معنی‌دار ۰/۰۵ و ۰/۰۱.

حل: فرض آزمون عبارتند از:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 \quad \text{اختلاف در تولید تنها ناشی از شانس است.}$$

$$H_1: \mu_1 > \mu_2 \quad \text{ضد آفت در افزایش تولید موثر بوده است.}$$

μ_1 میانگین تولید محصول کشاورز A و μ_2 میانگین تولید محصول کشاورز B می‌باشد.
آماره آزمون و ناحیه بحرانی در این حالت عبارتند از:

$$T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - d_0}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} > t_{1-\alpha} (n_1 + n_2 - 2)$$

الف) در سطح معنی‌دار ۰/۰۵ داریم:

$$\alpha = 0.05$$

$$1 - \alpha = 0.95 \quad t_{1-\alpha} (n_1 + n_2 - 2) = t_{0.95} (12 + 12 - 2)$$

$$= t_{0.95} (22) = 1.72$$

$$\bar{X}_1 = 139 \quad S_1 = 10 \quad n_1 = 12$$

$$\bar{X}_2 = 131 \quad S_2 = 11 \quad n_2 = 12$$

مقدار S_p برابر است با:

$$S_p = \sqrt{\frac{(n_1 - 1) S_1^2 + (n_2 - 1) S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} = \sqrt{\frac{11(10)^2 + 11(11)^2}{12 + 12 - 2}} = 10/51$$

۳۲-۱۱ حال مقدار آماره آزمون برابر می‌شود با:

$$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{139 - 131}{10/51 \sqrt{\frac{1}{12} + \frac{1}{12}}} = 1/85$$

با توجه به مقدار آماره آزمون $T = 1/85$ که از $t_{0/95}(22) = 1/72$ بیشتر است می‌توان نتیجه گرفت که فرض H_0 در سطح معنی‌دار $0/05$ رد می‌شود و به این ترتیب ضدآفت در تولید محصول بیشتر موثر بوده است.

ب) در سطح معنی‌دار $0/01$ داریم:

$$\alpha = 0/01 \rightarrow 1 - \alpha = 0/99$$

$$t_{1-\alpha}(n_1 + n_2 - 2) = t_{0/99}(22) = 2/51$$

از آنجا که $T = 1/85 \not\geq 2/51$ بنابراین فرض H_0 رد نمی‌شود و تفاوت معنی‌داری در سطح $0/01$ در تولید محصول وجود ندارد. اما از آنجا که $0/05$ را ملاک تصمیم‌گیری می‌گیریم بنابراین در حالت کلی ضد آفت در تولید محصول بیشتر موثر بوده است.

۳۳-۱۱ ۱۰. آزمون فرض برای واریانسهای دو جامعه

اگر دو جامعه نرمال داشته باشیم و n_1 نمونه از جامعه اول با انحراف معیار S_1 و n_2 نمونه با انحراف معیار S_2 از جامعه دوم انتخاب کنیم در این صورت برای انجام آزمونهایی در مورد واریانسهای دو جامعه می‌توانیم از آماره و ناحیه بحرانی زیر استفاده کنیم:

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} > F_{1-\alpha}(n_1 - 1, n_2 - 1) \quad \text{فرض } H_0 \text{ رد می‌شود اگر و فقط اگر: } \begin{cases} H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \text{ یا } \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2 \\ H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2 \end{cases} \quad \text{۱- در آزمون فرض}$$

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} < F_{\alpha}(n_1 - 1, n_2 - 1) \quad \text{فرض } H_0 \text{ رد می‌شود اگر و فقط اگر: } \begin{cases} H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \text{ یا } \sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 \\ H_1: \sigma_1^2 < \sigma_2^2 \end{cases} \quad \text{۲- در آزمون فرض}$$

$$\text{۳- در آزمون فرض } \begin{cases} H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \end{cases} \quad \text{فرض } H_0 \text{ رد می‌شود اگر و فقط اگر:}$$

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} < \frac{F_{\alpha}(n_1 - 1, n_2 - 1)}{F_{1-\alpha}(n_1 - 1, n_2 - 1)} \quad \text{یا} \quad F = \frac{S_1^2}{S_2^2} > F_{1-\alpha}(n_1 - 1, n_2 - 1)$$

۳۴-۱۱ مثال ۱۲: استادی یک درس را در دو کلاس A و B تدریس می‌کند. کلاس A تعداد ۱۶ دانشجو و کلاس B تعداد ۲۵ دانشجو دارد. استاد

از هر دو کلاس یک امتحان را می‌گیرد. میانگین نمرات دانشجویان در هر کلاس تقریباً برابر است اما واریانس کلاس A برابر $86/4$ و واریانس کلاس B برابر 150 می‌باشد. (نمرات از 100 واحد می‌باشند) آیا در دو سطح معنی‌دار $0/05$ و $0/01$ می‌توان نتیجه گرفت که واریانس کلاس B از واریانس کلاس A بیشتر می‌باشد؟

حل: فرضهای آزمون عبارتند از:

$$H_0: \sigma_1 = \sigma_2 \quad \text{اختلاف واریانس‌ها ناشی از شانس می‌باشد.}$$

$H_1: \sigma_1 > \sigma_2$ واریانس کلاس B از واریانس کلاس A بیشتر است.

$$\begin{aligned} n_1 &= 16 & S_1^2 &= 86/4 \\ n_2 &= 25 & S_2^2 &= 150 \end{aligned}$$

داریم:

آماره آزمون و ناحیه بحرانی عبارتند از:

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} < F_{\alpha}(n_1-1, n_2-1)$$

الف) در سطح معنی‌دار ۰/۰۵ داریم:

$$\alpha = 0.05$$

$$\begin{aligned} F_{\alpha}(n_1-1, n_2-1) &= \frac{1}{F_{1-\alpha}(n_2-1, n_1-1)} \\ \Rightarrow F_{0.05}(15, 24) &= \frac{1}{F_{0.95}(24, 15)} = \frac{1}{2/11} = 0.473 \end{aligned}$$

۱۱-۳۵ حال آماره آزمون را بدست می‌آوریم:

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{86/4}{150} = 0.576$$

از آنجا که $f = 0.576 \not< 0.473$ بنابراین نمی‌توانیم فرض H_0 را رد کنیم و در نتیجه می‌توان گفت که واریانس دو کلاس در سطح معنی‌دار ۰/۰۵ تفاوت معنی‌داری با یکدیگر ندارند.

ب) در سطح معنی‌دار ۰/۰۱ داریم:

$$\alpha = 0.01$$

$$\begin{aligned} F_{\alpha}(n_1-1, n_2-1) &= \frac{1}{F_{1-\alpha}(n_2-1, n_1-1)} \\ \Rightarrow F_{0.01}(15, 24) &= \frac{1}{F_{0.99}(24, 15)} = \frac{1}{2/89} = 0.346 \end{aligned}$$

باز هم $f = 0.576 \not< 0.346$ بنابراین در سطح معنی‌دار ۰/۰۱ هم می‌توانیم H_0 را رد کنیم یعنی در این حالت هم تفاوت معنی‌داری میان واریانسهای دو کلاس وجود ندارد.