

دامنه و برد

دامنه و برد تابع مثلثاتی رادیکالی

دکتر یوسف کوه‌مسکن

ریاضی ۱۱م



AvaEducation16.blog.ir



AvaEducation16@gmail.com



@AvaEducation16



@AvaEducation16

توضیحات

- این فایل علاوه بر سایت AvaEducation16.blog.ir در کانال تلگرامی [@AvaEducation16](https://t.me/AvaEducation16) نیز موجود و قابل دانلود می‌باشد.
- این فایل جهت گسترش آموزش رایگان ارائه شده است، اما به جهت رعایت حقوق معنوی درخواست می‌شود نام منبع ذکر گردد.
- در این دسته از فایل‌ها که با روجلدی صورتی [] آغاز می‌شوند، مطالب مربوط به دوره **متوسطه** و در آن دسته که با روجلدی آبی [] آغاز می‌شوند، مطالب مربوط به دوره **دانشگاه** ارائه خواهد شد.
- نکات موجود در متن با علامت 💡 نمایش داده شده‌اند.
- در بخش پاسخنامه سوالات از علائم زیر استفاده شده است:
 - بسیار ساده جهت آشنایی با نمونه‌های اولیه سوالات 🤔
 - ساده جهت تثبیت مطالب 😊
 - متوسط جهت تمرین بیشتر مطالب 😏
 - سخت جهت کسب مهارت کافی و آشنایی با روش‌های حل مسائل خاص 😤

۱ مسئله

دامنه و برد تابع f را تعیین کنید.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \sin x} \sqrt{1 + \cos x}}$$

۲ روش حل مسئله



پاسخ: خواسته‌های مسئله در دو بخش ارائه می‌شوند.

۱.۲ دامنه تابع

برای تعیین دامنه باید عبارت زیر رادیکال زوج، همواره نامنفی باشد. در ضمن عبارت‌های رادیکالی در مخرج کسر هستند و نباید صفر شوند. با توجه به آنکه سینوس و کسینوس همواره در بازه $[-1, 1]$ هستند، هر دو عبارت زیر رادیکال همواره نامنفی هستند. فقط صفر شدن آن باید بررسی گردد.

$$1 + \sin x = 0, \quad \Rightarrow \quad x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$$

$$1 + \cos x = 0, \quad \Rightarrow \quad x = (2k + 1)\pi$$

در نتیجه دامنه تابع به صورت زیر است:

$$D_f = \mathbb{R} - \left\{ 2k\pi - \frac{\pi}{2}, (2k + 1)\pi \right\} \quad k \in \mathbb{Z}$$

۲.۲ برد تابع

تابع داده شده یک تابع متناوب با دوره تناوب $T = 2\pi$ است. کافیت برای یک دوره تناوب مقدار برد بدست آید. برای تعیین برد به این نکته توجه شود که چون امکان به وجود آمدن صفر حدی در مخرج وجود دارد، بیشینه مقدار تابع به بی‌نهایت میل می‌کند. اما بازه پایین برد یا به عبارتی کمینه مقدار تابع محدود است و باید تعیین شود. جهت این منظور نقطه‌ای که مشتق تابع در آن صفر است باید مشخص شود.

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{\frac{\cos x \sqrt{1 + \cos x}}{2\sqrt{1 + \sin x}} - \frac{\sin x \sqrt{1 + \sin x}}{2\sqrt{1 + \cos x}}}{(1 + \sin x)(1 + \cos x)} = 0 \\ \Rightarrow \quad \frac{\cos x \sqrt{1 + \cos x}}{2\sqrt{1 + \sin x}} - \frac{\sin x \sqrt{1 + \sin x}}{2\sqrt{1 + \cos x}} &= 0 \end{aligned}$$

با مخرج مشترک گرفتن:

$$\Rightarrow \frac{\cos x(1 + \cos x) - \sin x(1 + \sin x)}{2\sqrt{1 + \sin x}\sqrt{1 + \cos x}} = 0$$

ساده کردن صورت

$$\Rightarrow \frac{\cos x(1 + \cos x) - \sin x(1 + \sin x)}{2\sqrt{1 + \sin x}\sqrt{1 + \cos x}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\cos x - \sin x + \cos^2 x - \sin^2 x}{2\sqrt{1 + \sin x}\sqrt{1 + \cos x}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{(\cos x - \sin x)(1 + \cos x + \sin x)}{2\sqrt{1 + \sin x}\sqrt{1 + \cos x}} = 0$$

معادله فوق به ازای دو رابطه زیر برابر با صفر خواهد شد. در رابطه اول $\cos x - \sin x = 0$ و در رابطه دوم

$1 + \cos x + \sin x = 0$ خواهد بود که به ترتیب حل می‌شوند.

$$\cos x - \sin x = 0, \quad \Rightarrow \quad \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

جوابهای معادله در یک دوره تناوب به صورت زیر است:

$$\Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$$

معادله دوم به صورت زیر حل می‌شود:

$$\cos x + \sin x = -1, \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \begin{cases} \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) \\ \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad x = \pi, \frac{3\pi}{2}$$

هر دو جواب فوق در دامنه وجود ندارد. برای دو نقطه $x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ مقدار تابع بررسی می‌شود.

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}} = 2 - \sqrt{2}$$

$$f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{1}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = 2 + \sqrt{2}$$

پس برد تابع به صورت زیر است:

$$R_f = [2 - \sqrt{2}, +\infty)$$

ممکن است با چاقو آید اما بندی که بر
دست است را باز می‌کند، ممکن است
با گل آید اما خارش زخمیات می‌کند،
مواظب آدهای اطرافمان باشیم.



 AvaEducation16.blog.ir

 [@AvaEducation16](https://www.instagram.com/AvaEducation16)

   [@AvaEducation16](https://www.youtube.com/AvaEducation16)

 AvaEducation16@gmail.com