

مبانی منطق و نظریه‌ی مجموعه‌ها

استاد: دکتر مرتضی منیری

۱۸ تیر ۱۴۰۰

فهرست مطالب

۵	۱ منطق گزاره‌ای
۵	۱.۱ نحو منطق گزاره‌ای
۵	۱.۱.۱ الفبای منطق گزاره‌ای
۵	۲.۱.۱ زبان منطق گزاره‌ای
۷	۲.۱ معنانشناسی منطق گزاره‌ای
۷	۱.۲.۱ ارزش‌گذاری‌ها
۱۱	۲.۲.۱ استنتاج معنایی
۱۲	۳.۱ یک دستگاه اصول موضوعی برای منطق گزاره‌ای
۱۵	۴.۱ قضیه درستی و تمامیت منطق گزاره‌ای
۱۹	۲ منطق محمول‌های مرتبه اول
۱۹	۱.۲ نحو منطق محمول‌های مرتبه اول
۱۹	۱.۱.۲ الفبا
۲۰	۲.۱.۲ ترم‌ها
۲۰	۳.۱.۲ فرمول‌های اتمی
۲۲	۲.۲ معنانشناسی منطق محمول‌های مرتبه اول
۲۲	۳.۲ درستی در یک تعبیر
۲۳	۱.۳.۲ تعریف بازگشتی درستی
۲۵	۲.۳.۲ فرمول‌های منطقاً معتبر
۲۷	۴.۲ دستگاه اثباتی محمولی

فهرست مطالب

۴

۲۹

۳ نظریه‌ی اصل موضوعی مجموعه

۳۴ ۱۰۳ ساختمان اعداد

فصل ۱

منطق گزاره‌ای

در این فصل، دستگاہی ریاضی‌وار برای منطق گزاره‌ای معرفی می‌کنیم.

۱.۱ نحو منطق گزاره‌ای

۱.۱.۱ الفبای منطق گزاره‌ای

الفبای منطق گزاره‌ای (Σ_p) شامل موارد زیر است:

(۱) اتم‌ها: $p_1, p_2, p_3, \dots$

(۲) رابط‌ها: $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$

(۳) پرانتزها: $(,)$

۲.۱.۱ زبان منطق گزاره‌ای

تعریف ۰.۱. تعریف از پایین (L_{p_1})

(الف) $p_i \in L_{p_1}$ ، به ازای هر i .

(ب) اگر $\alpha, \beta \in L_{p_1}$ ، آنگاه $(\neg\alpha) \in L_{p_1}$ ، $(\alpha \circ \beta) \in L_{p_1}$ ، $\circ \in \{\rightarrow, \wedge, \vee, \leftrightarrow\}$.

(ج) اعضای L_{p_1} دقیقاً اعضای از مجموعه‌ی همه‌ی دنباله‌های متناهی از اعضای Σ_p (Σ^*) هستند که با کاربرد متناهی بار (الف) و (ب) به دست می‌آیند.

تذکر ۲. به ازای هر $\alpha \in L_{p_1}$ ، دنباله‌ای از اعضای L_{p_1} وجود دارد که به α ختم می‌شود:

$$\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n = \alpha.$$

دنباله‌ی ساختمانی α که اعضای آن یا اتم هستند یا به کمک قبلی‌ها ساخته شده‌اند.

تعریف ۳. تعریف از بالا (L_{p_2})

L_{p_2} کوچک‌ترین مجموعه‌ای چون $U \subseteq \Sigma^*$ است به طوری که U دو خاصیت زیر را دارد:

(I) $p_i \in U$ ، به ازای هر i .

(II) اگر $\alpha, \beta \in U$ ، آنگاه $(\neg\alpha) \in U$ ، $(\alpha \circ \beta) \in L_{p_1}$ ، $\circ \in \{\rightarrow, \wedge, \vee, \leftrightarrow\}$.

تذکر ۴. از آنجایی که اشتراک همه‌ی U ها با دو خاصیت (I) و (II)، خود این دو خاصیت را دارد، پس می‌توان نتیجه گرفت که L_{p_2} اشتراک همه چنین U هایی است.

حکم ۵. $L_{p_1} = L_{p_2}$.

اثبات. فرض کنید $\alpha \in L_{p_1}$ و $\alpha_1, \dots, \alpha_n = \alpha$ یک دنباله‌ی ساختمانی α باشد. با استقرای ریاضی روی i ، داریم $\alpha_i \in L_{p_2}$. پس $\alpha_n \in L_{p_2}$. بنابراین $L_{p_1} \subseteq L_{p_2}$. برای آنکه نشان دهیم $L_{p_2} \subseteq L_{p_1}$ ، کافی است نشان دهیم که L_{p_1} دو خاصیت (I) و (II) را دارد، که واضح است. $\square$

تعریف ۶. $L_p = L_{p_1} (= L_{p_2})$.

حکم ۷. (اصل استقرای ساختاری) فرض کنید Q خاصیتی مربوط به فرمول‌های گزاره‌ای باشد که دو شرط زیر را دارد:

(الف) هر اتم خاصیت Q را دارد.

(ب) اگر α و β خاصیت Q را دارند، آنگاه $(\neg\alpha)$ و $(\alpha \circ \beta)$ نیز خاصیت Q را دارند.

در این صورت همه اعضای L_p خاصیت Q دارند.

اثبات. بنابر $L_p = L_{p_7}$ ، کافی است توجه کنیم مجموعه‌ی فرمول‌های گزاره‌ای که خاصیت Q را دارند شامل اتم‌هاست و تحت $\neg$ و $\circ$ بسته است. $\square$

حکم ۸. (اصل بازگشت ساختاری) فرض کنید f تابعی باشد که بخواهیم روی L_p تعریف کنیم، دو شرط زیر تضمین کننده وجود و منحصر به فردی تابع f است:

(الف) مقدار f روی تمام اتم‌ها داده شده است.

(ب) مقدار f روی $f(\neg\alpha)$ بر حسب $f(\alpha)$ و مقدار $f(\alpha \circ \beta)$ بر حسب $f(\alpha)$ و $f(\beta)$ کاملاً مشخص شده است.

اثبات. F را مجموعه همه فرمول‌های گزاره‌ای که f روی آن‌ها کاملاً تعریف شده و معین است در نظر بگیرید. F دو شرط I و II را دارد پس $F = L_P$. (برای بحث مفصل‌تر کتاب اندرتون بخش‌های ۳۰۱ و ۴۰۱ را ببینید). $\square$

تعریف ۹. اعضای L_p را فرمول‌های گزاره‌ای (فرمول، گزاره) می‌نامیم.

۲۰۱ معنانشناسی منطق گزاره‌ای

۱۰۲۰۱ ارزش‌گذاری‌ها

تعریف ۱۰. منظور از یک ارزش‌گذاری، تابعی چون $v : L_p \rightarrow \{0, 1\}$ است که در شرایط زیر صدق می‌کند.

$$v(\neg\alpha) = 1 - v(\alpha) \quad (۱)$$

$$v(\alpha \wedge \beta) = \min\{v(\alpha), v(\beta)\} \quad (۲)$$

$$v(\alpha \vee \beta) = \max\{v(\alpha), v(\beta)\} \quad (۳)$$

$$v(\alpha \rightarrow \beta) = \max\{1 - v(\alpha), v(\beta)\} \quad (۴)$$

$$v(\alpha \leftrightarrow \beta) = \min\{v(\alpha \rightarrow \beta), v(\beta \rightarrow \alpha)\} \quad (۵)$$

مثال ۱۱. فرض کنید برای i زوج، $v(p_i) = ۱$ و برای i فرد، $v(p_i) = ۰$. در این صورت:

$$v(p_۳ \rightarrow \neg p_۲) = \max\{۱ - v(p_۳), ۱ - v(p_۲)\} = \max\{۰, ۱\} = ۱.$$

تذکر ۱۲. اگر $v_۱$ و $v_۲$ دو ارزش‌گذاری باشند که روی همه‌ی اتم‌ها برابرند، آنگاه روی همه‌ی فرمول‌های گزاره‌ای برابرند. به عبارت دیگر، هر ارزش‌گذاری با دانستن مقادیرش روی همه‌ی اتم‌ها کاملاً مشخص می‌شود.

تعریف ۱۳. فرمول‌گذاری α را

$$(۱) \text{ راستگو نامیم هرگاه به ازای هر ارزش‌گذاری روی } v, v(\alpha) = ۱$$

$$(۲) \text{ تناقض (دروغگو) نامیم هرگاه به ازای هر ارزش‌گذاری } v, v(\alpha) = ۰$$

$$(۳) \text{ برآوردنی (ارضا شدنی = ارضا پذیر) نامیم هرگاه ارزش‌گذاری } v \text{ موجود باشد، که } v(\alpha) = ۱.$$

مثال ۱۴.

$$(۱) (p_۱ \wedge p_۲) \rightarrow (p_۲ \wedge p_۱) \text{ و } (\neg p_۱) \vee p_۱ \text{ راستگو هستند.}$$

$$(۲) p_۱ \leftrightarrow (\neg p_۱) \text{ و } p_۱ \wedge (\neg p_۱) \text{ تناقض هستند.}$$

$$(۳) p_۱ \rightarrow p_۲ \text{ برآوردنی است.}$$

تعریف ۱۵. فرض کنید α و β دو فرمول گزاره‌ای باشند. گوئیم α و β هم‌ارز منطقی‌اند و می‌نویسیم $\alpha \equiv \beta$ هرگاه به ازای هر ارزش‌گذاری v ، $v(\alpha) = v(\beta)$.

مثال ۱۶.

$$p_۱ \wedge p_۲ \equiv p_۲ \wedge p_۱, \quad p_۱ \rightarrow p_۲ \equiv (\neg p_۱) \vee p_۲$$

تذکر ۱۷. رابطه‌ی $\equiv$ خواص انعکاسی، تقارنی و تعدی را دارد.

تعریف ۱۸. فرض کنید α یک فرمول گزاره‌ای شامل یک اتم p باشد، α را به صورت $\alpha(p)$ نمایش می‌دهیم. فرض کنید β یک فرمول گزاره‌ای دلخواه باشد. منظور از $\alpha(\beta)$ فرمول گزاره‌ای است که از جانشینی β به جای p در α بدست می‌آید.

حکم ۱۹. فرض کنید p و α و $\alpha(\beta_1)$ و $\alpha(\beta_2)$ مانند فوق باشند. فرض کنید v یک ارزش‌گذاری باشد به طوری که $v(\beta_1) = v(\beta_2)$. در این صورت $v(\alpha(\beta_1)) = v(\alpha(\beta_2))$.

اثبات. با استقرای ساختاری روی α ,

$$(۱) \quad \alpha \text{ یک اتم. در این صورت } \alpha = p \text{ و } \alpha(\beta_1) = \beta_1 \text{ و } \alpha(\beta_2) = \beta_2$$

$$(۲) \quad \alpha = \neg \beta$$

$$(۳) \quad \alpha = \gamma \circ \delta \text{ در این صورت}$$

$$\begin{cases} \alpha(\beta_1) = (\gamma \circ \delta)(\beta_1) = \gamma(\beta_1) \circ \delta(\beta_1) \\ \alpha(\beta_2) = (\gamma \circ \delta)(\beta_2) = \gamma(\beta_2) \circ \delta(\beta_2) \end{cases}$$

پس با فرض

$$\begin{cases} v(\gamma(\beta_1)) = v(\gamma(\beta_2)) \\ v(\delta(\beta_1)) = v(\delta(\beta_2)) \end{cases}$$

$$\text{داریم } v(\alpha(\beta_1)) = v(\alpha(\beta_2))$$

□

نتیجه ۲۰. اگر $\beta_1 \equiv \beta_2$ آنگاه $\alpha(\beta_1) \equiv \alpha(\beta_2)$.

تمرین ۲۱. فرض کنید $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ فرمول گزاره‌ای باشند. به ازای هر فرمول گزاره‌ای φ که اتم‌های آن $q_1, \dots, q_n$ هستند، فرض کنید φ^* فرمول گزاره‌ای باشد که از جایگزینی هم زمان q_i ها با α_i ها حاصل می‌شود، $1 \leq i \leq n$.

(۱) فرض کنید v یک ارزش‌گذاری باشد، ارزش‌گذاری u را به گونه‌ای تعریف کنید که

$$u(q_i) = v(\alpha_i) \text{ و ثابت کنید } u(\varphi) = v(\varphi^*)$$

(۲) ثابت کنید اگر φ یک راستگو باشد، آنگاه φ^* نیز یک راستگو است.

حل.

(۱) با استقرای ساختاری روی φ .

φ اتم. در این حالت φ یک اتم مانند q است و φ^* همان α است.

$\varphi = \neg\psi$. در این حالت داریم $\varphi^* = \neg\psi^*$ پس با فرض $u(\psi) = v(\psi^*)$ داریم $u(\varphi) = v(\varphi^*)$

$\varphi = \psi_1 \circ \psi_2$. تمرین

(۲) اگر φ^* راستگو نباشد، آن گاه ارزش‌گذاری v وجود دارد که $v(\varphi^*) = 0$. ارزش‌گذاری u را به

گونه‌ای تعریف کنید که $u(q_i) = v(\alpha_i)$ ، بنابر قسمت (۱) خواهیم داشت

$u(\varphi) = v(\varphi^*) = 0$ ، تناقض با فرض راستگو بودن φ .

تمرین ۲۲. فرض کنید w و u دو ارزش‌گذاری باشند به طوری که روی اتم‌های به کار رفته در فرمول

گزاره‌ای φ با هم برابرند، ثابت کنید $w(\varphi) = v(\varphi)$.

مثال ۲۳. به ازای فرمول‌های گزاره‌ای α ، β و γ داریم

$$\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$$

حل. کافی است نشان دهیم $[(\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)] \leftrightarrow [\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)]$ راستگو است.

برای این کافی است توجه کنیم $[(p_1 \wedge p_2) \vee (p_1 \wedge p_3)] \leftrightarrow [p_1 \wedge (p_2 \vee p_3)]$ راست گواست

و از تمرین فوق استفاده می‌کنیم.

۲۰۲.۱ استنتاج معنایی

تعریف ۲۴.

(الف) منظور از یک نظریه‌ی گزاره‌ای مجموعه‌ای چون Σ از فرمول‌های گزاره‌ای است.

(ب) منظور از یک مدل Σ ، ارزش‌گذاری چون v است که به همه اعضای Σ ارزش ۱ دهد ($v \models \Sigma$).

(پ) فرمول گزاره‌ای α یک نتیجه معنایی Σ است ($\Sigma \models \alpha$) هرگاه به ازای هر مدل Σ چون v ، داشته باشیم $v(\alpha) = 1$.

مثال ۲۵.

$$\{p_2, p_1 \rightarrow p_2\} \not\models p_1 \quad \{p_1, p_1 \rightarrow p_2\} \models p_2$$

حکم ۲۶.

(الف) فرض کنید $\Sigma = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$. $\Sigma \models \alpha$ اگر و تنها اگر $(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n) \rightarrow \alpha$ راستگو باشد.

(ب) فرض کنید $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2$ و $\Sigma_1 \models \alpha$. در این صورت، $\Sigma_2 \models \alpha$.

(پ) $\Sigma \cup \{\alpha\} \models \beta$ اگر و تنها اگر $\Sigma \models \alpha \rightarrow \beta$.

تمرین ۲۷.

$$(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3) \rightarrow \alpha \equiv \alpha_1 \rightarrow (\alpha_2 \rightarrow (\alpha_3 \rightarrow \alpha))$$

تعریف ۲۸.

(۱) Σ را ارضا شدنی گوئیم هرگاه مدل داشته باشد.

(۲) Σ را به طور متناهی ارضا شدنی می‌گوئیم هرگاه هر زیرمجموعه متناهی آن مدل داشته باشد.

اثبات حکم اساسی زیر را بعداً خواهیم دید.

حکم ۲۹. (قضیه فشردگی برای منطق گزاره‌ای) فرض کنید Σ یک مجموعه از فرمول‌های گزاره‌ای باشد. Σ ارضا شدنی است اگر و تنها اگر Σ به طور متناهی ارضا شدنی باشد.

تمرین ۳۰. فرض کنید Σ_1 و Σ_2 دو مجموعه ارضا شدنی از فرمول‌های گزاره‌ای باشند به طوری که $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ ارضا ناشدنی است. ثابت کنید فرمول گزاره‌ای چون α وجود دارد به طوری که

$$\Sigma_1 \models \alpha \quad \Sigma_2 \models \neg \alpha$$

حل. بنابر قضیه فشردگی، زیرمجموعه متناهی و ارضا ناشدنی چون $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ از $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ وجود دارد. توجه کنید که همه α_i ها نمی‌توانند در یکی از Σ_1 یا Σ_2 باشند. فرض کنید $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ همه آن‌هایی باشند که در Σ_1 هستند. قرار دهید $\alpha = \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_m$. به وضوح $\Sigma_1 \models \alpha$. نشان می‌دهیم که $\Sigma_2 \models \neg \alpha$. برای این منظور فرض کنید که $v \models \Sigma_2$. پس $v(\alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n) = 1$. پس با توجه به ارضا ناشدنی بودن $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m, \dots, \alpha_n\}$ ، $1 \leq i \leq m$ وجود دارد که $v(\alpha_i) = 0$. پس $v(\neg \alpha) = 1$.

۳.۱ یک دستگاه اصول موضوعی برای منطق گزاره‌ای

اصول: به ازای هر فرمول گزاره‌ای α و β ، موارد زیر اصلند.

$$\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha) \quad (۱)$$

$$(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)) \quad (۲)$$

$$(\neg \beta \rightarrow \neg \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \quad (۳)$$

قاعده‌ی استنتاجی MP :

از فرمول‌های گزاره‌ای α و $\alpha \rightarrow \beta$ ، فرمول گزاره‌ای β نتیجه می‌شود.

$$\frac{\alpha \quad \alpha \rightarrow \beta}{\beta}$$

تذکر ۳۱. در H ، رابط‌های اصلی $\neg$ و $\rightarrow$ در نظر می‌گیریم و همه را بر حسب آن‌ها تعریف می‌کنیم.

استنتاج در H : گوئیم فرمول گزاره‌ای α یک نتیجه اثباتی مجموعه Σ است هرگاه دنباله‌ای چون $\alpha_1, \dots, \alpha_n = \alpha$ موجود باشد که اعضای آن حداقل یکی از شرایط زیر را دارند:

(الف) $\alpha_i \in \Sigma$

(ب) α_i یک اصل.

(ث) α_i از دو عضو قبلی دنباله و به کمک MP بدست آمده است.

در این صورت گوئیم دنباله فوق یک دنباله‌ی استنتاجی α از Σ است و می‌نویسیم $\Sigma \vdash \alpha$.

مثال ۳۲.

$$\{\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma), (\alpha \rightarrow \beta)\} \vdash \alpha \rightarrow \gamma$$

حل.

- | | | |
|----|--|-----------------|
| ۱) | $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$ | فرض |
| ۲) | $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$ | اصل |
| ۳) | $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$ | از ۱ و ۲ و MP |
| ۴) | $\alpha \rightarrow \beta$ | فرض |
| ۵) | $\alpha \rightarrow \gamma$ | از ۳ و ۴ و MP |

تعریف ۳۳. (قضیه) اگر $\emptyset \vdash \alpha$ گوئیم α یک قضیه است و می‌نویسیم $\vdash \alpha$.
در این حالت دنباله استنتاجی مرتبط را یک برهان α می‌نامیم.

مثال ۳۴. (الف) $\{\beta, \neg\alpha \rightarrow \neg\beta\} \vdash \alpha$

(ب) $\vdash \alpha \rightarrow \alpha$

حکم ۳۵. (قضیه استنتاج) اگر $\Sigma, \alpha \vdash \beta$ آنگاه $\Sigma \vdash \alpha \rightarrow \beta$.

اثبات. فرض کنید $\alpha_1, \dots, \alpha_n = \beta$ یک دنباله استنتاجی β از $\Sigma \cup \{\alpha\}$ باشد. با استقرای قوی ریاضی روی i نشان می‌دهیم که $\Sigma \vdash \alpha \rightarrow \alpha_i$ به ازای $1 \leq i \leq n$.

مرحله پایه: $i = 1$. α_1 می‌بایست یک اصل یا عضوی از Σ یا خود α باشد.
 اگر α_1 یک اصل یا عضوی از Σ باشد داریم: $(\alpha \rightarrow \alpha_1) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha_1)$ و $\Sigma \vdash \alpha_1$ پس بنابر MP ،
 $\Sigma \vdash \alpha \rightarrow \alpha_1$.
 اگر $\alpha_1 = \alpha$ ، آنگاه از مثال قبل داریم $\Sigma \vdash \alpha \rightarrow \alpha_1$.

مرحله استقرا: $i + 1$. در این حالت نیز α_{i+1} می‌تواند یک اصل یا عضوی از Σ باشد، که مانند قبل بررسی می‌شود. حال فرض کنید α_{i+1} از $\alpha_j \rightarrow \alpha_{i+1}$ و $\alpha_k = \alpha_j \rightarrow \alpha_{i+1}$ بدست آمده باشد داریم

$$\Sigma \vdash (\alpha \rightarrow (\alpha_j \rightarrow \alpha_{i+1})) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \alpha_j) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha_{i+1}))$$

داریم $\Sigma \vdash \alpha \rightarrow \alpha_j$ و $\Sigma \vdash \alpha \rightarrow (\alpha_j \rightarrow \alpha_{i+1})$ پس بنابر MP ، $\Sigma \vdash \alpha \rightarrow \alpha_{i+1}$ □

تذکر ۳۶. عکس قضیه استنتاج نیز برقرار است و به سادگی اثبات می‌شود.

مثال ۳۷. ثابت کنید

$$\vdash (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$$

حل. بنابر قضیه استنتاج تنها کافی است نشان دهیم که $\{\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma), \beta, \alpha\} \vdash \gamma$ ولی این واضح است.

مثال ۳۸. (قاعده تراگذاری) فرض کنید $\Sigma \vdash \alpha \rightarrow \beta$ و $\Sigma \vdash \beta \rightarrow \gamma$ در این صورت $\Sigma \vdash \alpha \rightarrow \gamma$

مثال ۳۹. قضیه ۱۱.۴.۲ جزوه.

تذکر ۴۰. در H ، خلاصه نویسی‌های زیر را داریم:

$$\alpha \wedge \beta = \neg(\alpha \rightarrow \beta)$$

$$\alpha \vee \beta = (\neg\alpha) \rightarrow \beta$$

$$\alpha \leftrightarrow \beta = \neg((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \neg(\beta \rightarrow \alpha))$$

مثال ۴۱.

$$\vdash \alpha \rightarrow (\alpha \vee \beta)$$

حل. باید نشان دهیم که $\vdash \alpha \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \beta)$

$$(۱) \quad \neg\alpha \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \quad \text{اصل}$$

$$(۲) \quad (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \quad \text{اصل}$$

$$(۳) \quad \neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \quad \text{از ۱ و ۲ و قاعده تراگذاری}$$

۴۰۱. قضیه درستی و تمامیت منطق گزاره‌ای

در این بخش به اثبات قضیه‌های درستی (صحت) تمامیت برای منطق گزاره‌ای می‌پردازیم.

حکم ۴۲. (قضیه درستی (قوی)) اگر $\Sigma \vdash \alpha$ آنگاه $\Sigma \models \alpha$

اثبات. فرض کنید $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n = \alpha$ یک استنتاج برای α از Σ باشد. با استقرای قوی ریاضی روی i ثابت می‌کنیم که $\Sigma \models \alpha_i$ به ازای هر i .

مرحله پایه‌ای ($i = 1$): α_1 یک اصل یا عضوی از Σ است، پس به وضوح $\Sigma \models \alpha_1$.

مرحله استقرا: فرض کنید $\Sigma \vdash \alpha_{i+1}$. α_{i+1} باز هم می‌تواند یک اصل یا عضوی از Σ باشد که در این صورت به وضوح $\Sigma \models \alpha_{i+1}$. در غیر این صورت، α_{i+1} از دو عضو قبلی چون α_j و $\alpha_k = \alpha_j \rightarrow \alpha_{i+1}$ بدست آمده است. بنابه فرض استقرا، $\Sigma \models \alpha_j$ و $\Sigma \models \alpha_j \rightarrow \alpha_{i+1}$. پس $\Sigma \models \alpha_{i+1}$. $\square$

برای اثبات قضیه تمامیت (قوی) که عکس قضیه درستی (قوی) است، نیاز به مقدماتی است که در ادامه به آن‌ها می‌پردازیم.

تعریف ۴۳. (سازگاری) یک مجموعه Σ از فرمول‌های گزاره‌ای را سازگار گوئیم هرگاه به ازای هر فرمول گزاره‌ای α ، $\Sigma \not\vdash \alpha$ یا $\Sigma \not\vdash \neg\alpha$.

مثال ۴۴. $\{p_1\}$ سازگار است.

حل. فرض کنید $p_1 \vdash \alpha$ و $p_1 \vdash \neg\alpha$. بنابر قضیه درستی، $p_1 \rightarrow \alpha$ و $p_1 \rightarrow \neg\alpha$ هر دو می‌بایست راستگو باشند که ناممکن است.

لم ۴۵. اگر Σ ناسازگار باشد، آنگاه $\Sigma \vdash \alpha$ به ازای هر فرمول گزاره‌ای α .

اثبات. بنابه فرض، فرمول گزاره‌ای چون β وجود دارد به طوری که $\Sigma \vdash \beta$ و $\Sigma \vdash \neg\beta$ فرض کنید α یک فرمول گزاره‌ای دلخواه باشد. قبلاً دیدیم که $\neg\beta \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$ یک قضیه است، پس $\Sigma \vdash \neg\beta \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$. حال با دوبار به کار بردن MP، خواهیم داشت $\Sigma \vdash \alpha$. $\square$

لم ۴۶. اگر Σ سازگار باشد و $\Sigma \not\vdash \alpha$ ، آنگاه $\Sigma \cup \{\neg\alpha\}$ سازگار است.

اثبات. اگر $\Sigma \cup \{\neg\alpha\}$ ناسازگار باشد، بنابر لم قبل داریم، $\Sigma \cup \{\neg\alpha\} \vdash \alpha$ پس بنابر قضیه استنتاج، $\Sigma \vdash \neg\alpha \rightarrow \alpha$. اما فرمول گزاره‌ای $(\neg\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$ قضیه است، پس $\Sigma \vdash \alpha$ ، تناقض. $\square$

تعریف ۴۷. یک مجموعه Σ از فرمول‌های گزاره‌ای را تمام می‌گوییم هرگاه به ازای هر فرمول گزاره‌ای α ، $\Sigma \vdash \alpha$ یا $\Sigma \vdash \neg\alpha$.

تذکر ۴۸. هر مجموعه ناسازگار، تمام است.

لم ۴۹. اگر $\Sigma \vdash \alpha$ ، آنگاه یک زیرمجموعه‌ی متناهی $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ موجود است به طوری که $\Sigma_0 \vdash \alpha$.

لم ۵۰. اگر Σ مجموعه‌ای سازگار از فرمول‌های گزاره‌ای باشد، مجموعه‌ی سازگار و تمام Σ^* از فرمول‌های گزاره‌ای وجود دارد به طوری که $\Sigma \subseteq \Sigma^*$.

اثبات. فرض کنید $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ دنباله‌ای از فرمول‌های گزاره‌ای باشد. دنباله‌ی زیر از توسیع‌های سیگما را می‌سازیم:

$$\Sigma = \Sigma_0 \subseteq \Sigma_1 \subseteq \Sigma_2 \subseteq \dots$$

$$\Sigma_{i+1} = \begin{cases} \Sigma_i & \text{اگر } \Sigma_i \vdash \alpha_{i+1} \\ \Sigma_i \cup \{\neg\alpha_{i+1}\} & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

موارد زیر به راحتی اثبات می‌شوند:

(۱) هر Σ_i سازگار است.

(۲) $\Sigma^* = \bigcup \Sigma_i$ سازگار است.

(۳) Σ^* تمام است.

Σ^* همان توسیع سازگار و تمام Σ است. $\square$

لم ۵۱. اگر Σ مجموعه‌ای سازگار از فرمول‌های گزاره‌ای باشد، آنگاه Σ ارضا شدنی است.

اثبات. فرض کنید Σ^* توسیعی سازگار و تمامی از Σ باشد (بنابر لم ۵۰). تابع v ، تعریف شده روی مجموعه‌ی همه‌ی فرمول‌های گزاره‌ای را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$v(\alpha) = \begin{cases} ۱ & \Sigma^* \vdash \alpha \\ ۰ & \Sigma^* \vdash \neg \alpha \end{cases}$$

ثابت می‌کنیم که v یک ارزش‌گذاری است.

در مورد $\neg$:

$$v(\alpha) = ۱ \Leftrightarrow \Sigma^* \vdash \alpha \Leftrightarrow \Sigma^* \vdash \neg(\neg \alpha) \Leftrightarrow v(\alpha) = ۰$$

در مورد $\rightarrow$:

باید ثابت کنیم:

$$v(\alpha \rightarrow \beta) = ۰ \Leftrightarrow \max\{v(\neg \alpha), v(\beta)\} = ۰$$

یعنی باید ثابت کنیم:

$$\Sigma^* \vdash \neg(\alpha \rightarrow \beta) \Leftrightarrow \Sigma^* \vdash \alpha \text{ و } \Sigma^* \vdash \neg \beta$$

$\Rightarrow$: فرض کنید (فرض خلف) $\Sigma^* \vdash \beta$ یا $\Sigma^* \vdash \neg \alpha$. می‌دانیم که $\neg \alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$ و $\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$ قضیه هستند. پس در هر حالت باید داشته باشیم $\Sigma^* \vdash (\alpha \rightarrow \beta)$ ، تناقض.

$\Leftarrow$: فرض کنید (فرض خلف) که $\Sigma^* \vdash \alpha \rightarrow \beta$. اگر $\Sigma^* \vdash \alpha$ ، آنگاه $\Sigma^* \vdash \beta$ ، تناقض. $\square$

حکم ۵۲. (تمامیت قوی) اگر $\Sigma \models \alpha$ آنگاه $\Sigma \vdash \alpha$.

اثبات. فرض کنید $\Sigma \models \alpha$ ، فرض کنید (فرض خلف) $\Sigma \vdash \alpha$ ، در این صورت $\Sigma \cup \{\neg \alpha\}$ سازگار است (بنابر لم ۴۶) و بنابراین ارضا شدنی است (لم ۵۱). پس $\Sigma \not\models \alpha$ ، تناقض. $\square$

نتیجه ۵۳. (قضیه فشردگی) اگر Σ مجموعه‌ای به طور متناهی ارضا شدنی از فرمول‌های گزاره‌ای باشد آنگاه Σ ارضا شدنی است.

اثبات. اگر Σ ارضا ناشدنی باشد، آنگاه Σ ناسازگار است (لم ۵۱). پس فرمول گزاره‌ای چون α وجود دارد که $\Sigma \vdash \alpha$ و $\Sigma \vdash \neg \alpha$. ولی در این دو اثبات تنها از بخش متناهی از Σ به عنوان فرضیات استفاده شده است، آن را Σ_0 بنامیم. پس $\Sigma_0 \vdash \alpha$ و $\Sigma_0 \vdash \neg \alpha$ پس بنابر قضیه تمامیت Σ_0 ارضا نشدنی است. این با به طور متناهی ارضا شدنی بودن Σ متناقض است. $\square$

فصل ۲

منطق محمول‌های مرتبه اول

۱.۲ نحو منطق محمول‌های مرتبه اول

۱.۱.۲ الفبا

الفبای هر زبان مرتبه اول L لزوماً شامل موارد زیر است: همه‌ی نمادهای منطق گزاره‌ای به جز اتم‌ها، به علاوه‌ی نمادهای $\forall$ و $\exists$ (سورعمومی و وجودی) و $x_1, x_2, x_3, \dots$ (متغیرها). همچنان L می‌تواند شامل موارد زیر باشد:

(الف) یک مجموعه‌ی حداکثر شمارا از نمادهایی چون P (نمادهای محمولی).
به هر نماد محمولی یک عدد n نسبت می‌دهیم، اگر به P ، n نسبت داده شده باشد، گوئیم P یک نماد محمولی n -موضعی است.

(ب) یک مجموعه حداکثر شمارا از نمادهایی چون f (نمادهای تابعی).
به هر نماد تابعی یک عدد n نسبت می‌دهیم، اگر به f ، n نسبت داده شده باشد، گوئیم f یک نماد تابعی n -موضعی است.

(ج) یک مجموعه حداکثر شمارا از نمادهایی چون c (نماد ثابت).
تذکر ۵۴. (الف) از اینجا به بعد یک زبان مرتبه اول دلخواه L را فیکس می‌کنیم.

(ب) شکل‌های مناسب اصل‌های استقرای ساختاری و تعریف‌های بازگشتی در مورد زبان‌های مرتبه اول هم برقرارند. از آن‌ها بدون ذکرشان هم استفاده خواهیم کرد.

۲.۱.۲ ترم‌ها

(الف) متغیرها و نمادهای ثابت ترم هستند.

(ب) اگر $t_1, t_2, \dots, t_n$ ترم باشند و f یک نماد تابعی n -موضعی باشد، آنگاه $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$ یک ترم است.

۳.۱.۲ فرمول‌های اتمی

اگر $t_1, t_2, \dots, t_n$ ترم باشند و P یک نماد محمولی n -موضعی باشد، آنگاه $P(t_1, \dots, t_n)$ یک فرمول اتمی است.

تعریف ۵۵. فرمول‌ها (تعریف بازگشتی)

(الف) فرمول‌های اتمی، فرمول هستند.

(ب) اگر φ و ψ فرمول باشند، این‌ها هم فرمول هستند:

$$(\varphi \leftrightarrow \psi), (\varphi \rightarrow \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \wedge \psi), (\neg \varphi), ((\forall x_i)\varphi), ((\exists x_i)\varphi)$$

مثال ۵۶. فرض کنید $L = \{c_1, c_2, f, g, P\}$ یک زبان مرتبه اول باشد، جایی که c_1 و c_2 نماد ثابت،

f و g به ترتیب نمادهای تابعی ۱ و ۲-موضعی و P یک نماد محمولی ۲-موضعی است.

(الف) چند L -ترم:

$$c_1, c_2, x_{10}, x_{100}, f(x_{100}), g(c_1, x_{10}), g(f(x_{100}), x_{10})$$

(ب) چند L -فرمول اتمی :

$$P(c_1, x_{10}), P(f(x_{100}), g(c_1, x_{10}))$$

(ج) چند L -فرمول :

$$((\forall x_{10})P(c, x_{10})), \forall x_{100} \exists x_{10} P(f(x_{100}), g(c_1, x_{10}))$$

توجه کنید که برخی از پراترها را حذف کرده‌ایم.

تعریف ۵۷. (دامنه عمل سور) در فرمول‌های $((\forall x_i)\varphi)$ و $((\exists x_i)\varphi)$ ، دامنه عمل سورهای $\forall x_i$ و $\exists x_i$ است.

تعریف ۵۸. (رخداد آزاد یک متغیر) یک رخداد x_i از یک متغیر در یک فرمول φ را آزاد گوئیم هرگاه در دامنه عمل سورهای $\forall x_i$ یا $\exists x_i$ واقع نشده باشد، در غیر این صورت آن را محدود می‌نامیم. (خود x_i در کنار سور $\forall$ و $\exists$ در نظر نمی‌گیریم)

تعریف ۵۹. (متغیر آزاد) گوئیم x_i در فرمول φ آزاد است هرگاه x_i در φ حداقل یک رخداد آزاد داشته باشد. در این صورت معمولاً به جای φ می‌نویسیم $\varphi(x_i)$.

مثال ۶۰.

$$\varphi(x_2) : \forall x_1 (P(x_1, x_2) \rightarrow \exists x_3 P(x_1, f(x_3)))$$

نمادگذاری:

(الف) مجموعه‌ی متغیرهای آزاد یک فرمول φ را با $FV(\varphi)$ نشان می‌دهیم.

(ب) اگر t متغیر حاوی متغیرهای $y_1, \dots, y_n$ باشد، معمولاً می‌نویسیم $t = t(y_1, \dots, y_n)$

تعریف ۶۱. (جایگزینی) جایگزینی ترم $t(y_1, \dots, y_n)$ به جای x_i در فرمول $\varphi(x_i)$ آزاد است هرگاه x_i در دامنه عمل هیچ سورا از نوع $\forall y_j$ یا $\exists y_j$ در φ ، رخداد آزاد نداشته باشد.

مثال ۶۲. در مثال قبل، جایگزینی ترم x_1 به جای x_2 در φ آزاد نیست ولی جایگزینی ترم $f(x_3)$ به جای x_2 در φ آزاد است.

چه جایگزینی ترم t به جای x_i در فرمول $\varphi(x_i)$ آزاد باشد و چه نباشد، می‌توانیم فرمول $\varphi(t)$ را بسازیم، جایی که $\varphi(t)$ از t با تعویض همه موارد آزاد x_i با t بدست می‌آید. این کار را برای چند متغیر به طور همزمان هم می‌توان انجام داد.

مثال ۶۳. اگر $\varphi(x_1, x_2) = \forall x_3 P(x_1, x_2, f(x_3))$ و $t_1 = f(x_2)$ و $t_2 = x_1$ آنگاه $\varphi(t_1, t_2) = \forall x_3 P(f(x_2), x_1, f(x_3))$

۲.۲ معاشناسی منطق محمول‌های مرتبه اول

تعریف ۶۴. فرض کنید L یک زبان مرتبه اول باشد. منظور از یک L -ساختار (L -تعبیر) M یک مجموعه ناتهی $D(M)$ (دامنه M) همراه با موارد زیر است:

(الف) به ازای هر نماد ثابت c از L ، یک عضو مشخص $c^M \in D(M)$.

(ب) به ازای هر تابع n -موضعی f از L ، یک تابع $f^M : D(M)^n \rightarrow D(M)$.

(ج) به ازای هر نماد محمولی n -موضعی P از L ، یک رابطه $P^M \subseteq D(M)^n$.

در تعریف فوق c^M را تعبیر c در M ، f^M را تعبیر f در M و P^M را تعبیر P در M می‌نامیم.

تذکر ۶۵. معمولاً یک ساختار و دامنه آن را با یک نماد نشان خواهیم داد.

مثال ۶۶. (زبان و تعبیر حسابی) زبان $L_a = \{c, d, f, g, P, Q\}$ جایی که c و d نمادهای ثابت، f و g توابع ۲-موضعی و P و Q نماد محمولی دو موضعی هستند را زبان حسابی می‌نامیم. L_a -ساختار

$$N = (\mathbb{N}, \circ, \cdot, +, \times, <, =)$$

را ساختار حسابی می‌نامیم. در این ساختار دامنه همان مجموعه اعداد طبیعی، تعبیر c و d به ترتیب $\circ$ و $\cdot$ ، تعبیر f و g به ترتیب تابع جمع و ضرب، تعبیر P و Q به ترتیب رابطه کوچکتری و تساوی است. این تعبیر استاندارد زبان L_a است، ولی تعبیرهای کاملاً متفاوت دیگری نیز برای این زبان وجود دارد، مثلاً:

$$(\mathbb{R}, \cdot, \frac{1}{|x|+1}, \frac{1}{2}x, >, =)$$

گاهی مواقع نمادهای زبان L_a را به همان تعبیرهای استانداردش نشان می‌دهیم:

$$L_a = (\circ, \cdot, +, \times, <, =)$$

۳.۲ درستی در یک تعبیر

فرض کنید L -یک زبان مرتبه اول باشد، درستی یک L فرمول $\varphi(\vec{y})$ ، جاییکه $\vec{y} = y_1, \dots, y_n$ دنباله متغیرهای آزاد φ است، در مرحله اول به تعبیر نمادهای زبان به کار رفته در φ و در مرحله بعد به اعضای

از دامنه تعبیر که به $\vec{y}$ نسبت می‌دهیم، بستگی دارد.

در ادامه مفهوم درستی در یک تعبیر را به نحوی طبیعی تعریف می‌کنیم. این تعریف که در عین سادگی، بسیار راه گشا است موسوم به تعریف درستی تارسکی است، به افتخار تارسکی ریاضی‌دان مشهور که آن را پیشنهاد داده است.

۱.۳.۲ تعریف بازگشتی درستی

فرض کنید $\varphi(y_1, \dots, y_n)$ یک L -فرمول و M یک L -تعبیر و $a_1, \dots, a_n \in D(M)$ باشند. مفهوم « $\vec{a}$ فرمول φ را در M ارضا می‌کند» یا به طور نمادی $M \models \varphi[\vec{a}]$ ، به روش زیر تعریف می‌شود:

۱ اگر $\varphi = P(t_1, \dots, t_m)$ اتمی باشد: داریم $M \models \varphi[\vec{a}]$ دقیقاً هرگاه

$$(t_1^M(\vec{a}), \dots, t_m^M(\vec{a})) \in P^M.$$

در اینجا $t_i^M[\vec{a}]$ تعبیر ترم t_i در M است در حالی که متغیرهای موجود در آن به ترتیب با اعضای دنباله $\vec{a}$ جایگزین شده‌اند.

۲ اگر $\varphi = \neg\psi$ باشد: $M \models (\neg\psi)[\vec{a}]$ دقیقاً هرگاه $M \not\models \psi[\vec{a}]$.

۳ اگر $\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2$ باشد: $M \models (\psi_1 \wedge \psi_2)[\vec{a}]$ دقیقاً هرگاه $M \models \psi_1[\vec{a}]$ و $M \models \psi_2[\vec{a}]$.

۴ اگر $\varphi = \psi_1 \vee \psi_2$ باشد: $M \models (\psi_1 \vee \psi_2)[\vec{a}]$ دقیقاً هرگاه $M \models \psi_1[\vec{a}]$ یا $M \models \psi_2[\vec{a}]$.

۵ اگر $\varphi = \psi_1 \rightarrow \psi_2$ باشد: $M \models (\psi_1 \rightarrow \psi_2)[\vec{a}]$ دقیقاً هرگاه اگر $M \models \psi_1[\vec{a}]$ آنگاه $M \models \psi_2[\vec{a}]$.

۶ اگر $\varphi = \exists x\psi$ باشد: $M \models (\exists x\psi)[\vec{a}]$ دقیقاً هرگاه $b \in M$ موجود باشد که $M \models \psi[b, \vec{a}]$.

۷ اگر $\varphi = \forall x\psi$ باشد: $M \models (\forall x\psi)[\vec{a}]$ دقیقاً هرگاه به ازای هر $b \in M$ ، $M \models \psi[b, \vec{a}]$.

مثال ۶۷. زبان حسابی $L_a = \{c, d, f, g, P, Q\}$ و تعبیر حسابی $N = (\mathbb{N}, \circ, \cdot, +, \times, <, =)$ را در نظر بگیرید.

۱ اگر $t = f(g(x_1, d), c)$ باشد، $t^N[5] = +(5 \times 1, \circ) = 5$ ، ضمناً اگر $s = g(x_1, x_2)$ داریم، $s^N[5, 6] = 5 \times 6 = 30$.

۲ اگر $\varphi(x_1, x_2) = P(x_1, g(x_1, x_2))$ آنگاه

$$N \not\models \varphi(x_1, x_2)[4, 1]$$

و

$$N \models \varphi(x_1, x_2)[2, 3].$$

۳ فرض کنید $\varphi(x_1, x_2) = P(x_1, x_2) \rightarrow P(x_2, x_1)$ در این صورت به ازای هر m و n اگر

$$N \models \varphi(x_1, x_2)[m, n] \text{ آنگاه } m < n \text{ و اگر } n < m \text{ آنگاه } N \not\models \varphi(x_1, x_2)[m, n]$$

۴ اگر $\varphi(x_1) = \exists x_2 P(x_2, x_1)$ آنگاه $N \models \varphi[1]$ و $N \not\models \varphi[0]$.

۵ اگر $\varphi(x_2) = \forall x_1 P(x_1, x_2)$ آنگاه $N \not\models \varphi[n]$ به ازای هر $n \in \mathbb{N}$.

تذکر ۶۸. حالتی که فرمول φ فاقد متغیر آزاد باشد را می‌توان حالت خاصی از تعریف ۱ دانست. در این حالت یا φ در M درست است و می‌نویسیم $M \models \varphi$ و می‌گوییم مدلی از φ است، یا φ در M غلط است و می‌نویسیم $M \not\models \varphi$ یا به طور معادل $M \models \neg \varphi$.

مثال ۶۹. $N \models \forall x_1 \exists x_2 P(x_1, x_2)$ و $N \not\models \exists x_2 \forall x_1 P(x_1, x_2)$

تعریف ۷۰. منظور از یک L -راستگو، فرمولی مرتبه اول است که از جانشینی یکنواخت L -فرمول‌ها به جای اتم‌های گزاره‌ای یک راستگوی گزاره‌ای به دست می‌آید.

مثال ۷۱. $P(x_1, x_2) \vee \neg P(x_1, x_2)$ یک L_a -راستگو است. همچنین

$$P(x_1, x_2) \rightarrow (\forall x Q(x_1, x_2) \rightarrow P(x_1, x_2))$$

یک L_a -راستگو است.

تمرین ۷۲. به ازای هر L -راستگو $\varphi(\vec{x})$ و هر $\vec{a} \in M$ ، $M \models \varphi[\vec{a}]$

تعریف ۷۳. هر فرمول فاقد متغیر آزاد را جمله می‌نامیم.

تذکر ۷۴. فرض کنید δ_1 و δ_2 دو جمله باشند.

الف $M \models \neg \delta_1$ اگر و تنها اگر $M \not\models \delta_1$.

ب اگر $M \models \delta_1$ و $M \models \delta_1 \rightarrow \delta_2$ آنگاه $M \models \delta_2$.

پ $M \models \delta_1 \wedge \delta_2$ اگر و تنها اگر $M \models \delta_1$ و $M \models \delta_2$.

ت $M \models \delta_1 \vee \delta_2$ اگر و تنها اگر $M \models \delta_1$ یا $M \models \delta_2$.

تعریف ۷۵. اگر $\varphi(y_1, \dots, y_n)$ یک فرمول باشد، منظور از $M \models \varphi$ همان $M \models \forall y_1 \dots \forall y_n \varphi$ است.

تمرین ۷۶. آیا تذکر قبل در مورد فرمول‌های دلخواه نیز برقرار است؟

۲.۳.۲ فرمول‌های منطقاً معتبر

در این بخش، فرمول‌های مرتبه‌ی اول منطقاً معتبر را تعریف می‌کنیم. این فرمول‌ها را می‌توان نظایر فرمول‌های گزاره‌ای راستگو در منطق گزاره‌ای دانست.

تعریف ۷۷. یک L -فرمول را منطقاً معتبر می‌گوییم هرگاه به ازای هر L -ساختار M ، $M \models \varphi$.

تذکر ۷۸. هر راستگوی مرتبه اول، منطقاً معتبر است.

مثال ۷۹. فرمول $\exists x_2 \forall x_1 \varphi(x_1, x_2) \rightarrow \forall x_1 \exists x_2 \varphi(x_1, x_2)$ منطقاً معتبر است.

حل. برای راحتی فرض می‌کنیم φ به جز x_1 و x_2 متغیر آزاد دیگری ندارد.

فرض کنید $M \models \exists x_2 \forall x_1 \varphi(x_1, x_2)$ باشد و $M \models \exists x_2 \forall x_1 \varphi(x_1, x_2)$ پس

$b_0 \in M$ موجود است که $M \models \forall x_1 \varphi(x_1, x_2)[b_0]$. در این صورت به ازای هر a داریم $M \models \varphi(x_1, x_2)[a, b_0]$.

حال نشان می‌دهیم که $M \models \forall x_1 \exists x_2 \varphi(x_1, x_2)$ برای این منظور فرض کنید $d \in M$ دلخواه باشد،

باید ثابت کنیم $M \models \exists x_2 \varphi(x_1, x_2)[d]$ برای این منظور توجه کنید که $M \models \varphi(x_1, x_2)[d, b_0]$.

مثال ۸۰. مثال ۳.۲.۱۷ کتاب

الف $(\forall x \varphi \vee \forall y \psi) \rightarrow \forall x (\varphi \vee \psi)$ منطقاً معتبر است.

ب عکس فرمول فوق منطقاً معتبر نیست.

حل. برای راحتی می‌توان فرض کرد φ و ψ متغیر آزادی به جز x ندارند.

الف فرض کنید $M \models \forall x\varphi \vee \forall x\psi$. پس $M \models \forall x\psi$ یا $M \models \forall x\varphi$ بدون از دست دادن کلیت، فرض می‌کنیم $M \models \forall x\varphi$. پس به ازای هر $a \in M$ ، $M \models \varphi[a]$. پس به ازای هر $a \in M$ ، $M \models (\varphi \vee \psi)[a]$ پس $M \models \forall x(\varphi \vee \psi)$

ب فرض کنید $\varphi = P(x)$ و $\psi = Q(x)$ نمادهای محمولی باشند. فرض کنید $M = \{1, 2\}$ و $P^M = \{1\}$ و $Q^M = \{2\}$ داریم $M \models \forall x(\varphi \vee \psi)$ و $M \not\models \forall x\varphi$ و $M \not\models \forall x\psi$.

تمرین ۸۱. ثابت کنید فرمول‌های زیر منطقاً معتبر هستند.

$$1 \quad \forall x\forall y\varphi \leftrightarrow \forall y\forall x\varphi$$

$$2 \quad \exists x\exists y\varphi \leftrightarrow \exists y\exists x\varphi$$

$$3 \quad \forall x(\theta \wedge \psi) \leftrightarrow ((\forall x\theta) \wedge (\forall x\psi))$$

$$4 \quad \exists x(\theta \vee \psi) \leftrightarrow ((\exists x\theta) \vee (\exists x\psi))$$

$$5 \quad (\neg\forall x\varphi) \leftrightarrow (\exists x\neg\varphi)$$

$$6 \quad (\neg\exists x\varphi) \leftrightarrow (\forall x\neg\varphi)$$

$$7 \quad \text{اگر } x \notin FV(\varphi) \text{ آنگاه } \varphi \leftrightarrow (\forall x\varphi)$$

$$8 \quad \text{اگر } x \notin FV(\varphi) \text{ آنگاه } \varphi \leftrightarrow (\exists x\varphi)$$

$$9 \quad \text{اگر } x \notin FV(\varphi) \text{ آنگاه } \varphi \leftrightarrow (\varphi \vee (\forall x\psi))$$

$$10 \quad \text{اگر } x \notin FV(\varphi) \text{ آنگاه } \varphi \leftrightarrow (\varphi \wedge (\exists x\psi))$$

$$11 \quad \text{اگر } x \notin FV(\varphi) \text{ آنگاه } (\varphi \rightarrow (\forall x\psi)) \leftrightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$$

$$12 \quad \text{اگر } x \notin FV(\varphi) \text{ آنگاه } (\varphi \rightarrow (\exists x\psi)) \leftrightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$$

$$13 \quad \text{اگر } x \notin FV(\psi) \text{ آنگاه } (\exists x\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$$

$$14 \quad \text{اگر } x \notin FV(\psi) \text{ آنگاه } (\forall x\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$$

تمرین ۸۲. آیا فرمول زیر منطقاً معتبر است؟ چرا؟

$$\forall x(\varphi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow (\forall x\varphi \leftrightarrow \forall x\psi)$$

تمرین ۸۳. نشان دهید فرمول‌های زیر منطقاً معتبر هستند، جایی که $\varphi(x)$ و $\varphi(y)$ به ترتیب جانشینی x و y به جای z در فرمول $\varphi(z)$ بدست می‌آیند و $x, y \notin FV(\varphi)$.

$$\forall x\varphi(x) \leftrightarrow \forall y\varphi(y)$$

$$\exists x\varphi(x) \leftrightarrow \exists y\varphi(y)$$

تعریف ۸۴. یک فرمول φ مرتبه اول را پیشوندی می‌گوییم هرگاه به فرم $Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_nx_n\psi$ باشد جایی که $Q_i \in \{\forall, \exists\}$ و ψ فرمولی بدون سور است.

تعریف ۸۵. دو L -فرمول φ و ψ را هم ارز منطقی می‌گوییم هرگاه $\varphi \leftrightarrow \psi$ منطقاً معتبر باشد.

تمرین ۸۶. فرمول مرتبه اول پیشوندی ψ را بیابید که فرمول مرتبه اول زیر هم ارز منطقی آن باشد.

$$\forall x(P(x, y) \rightarrow \exists yQ(x, y)) \rightarrow \exists zQ(x, z)$$

تمرین ۸۷. ثابت کنید هر فرمول مرتبه اول یک هم ارز پیشوندی دارد.

۴.۲ دستگاه اثباتی محمولی

با توسیع دستگاه اثباتی منطق گزاره‌ای، با اصول و قواعدی مناسب، می‌توان یک دستگاه اثباتی درست و تمامی برای منطق محمول‌های مرتبه اول ساخت. شکل‌های مناسبی از قضیه‌های استنتاج و فشردگی برای این دستگاه نیز برقرار خواهند بود. همچنین، می‌توان اصول مناسبی برای تساوی به دستگاه فوق اضافه کرد و دستگاهی اثباتی برای منطق محمول‌های مرتبه اول دارای تساوی به دست آورد که همه‌ی خواص خوب یادشده را دارا است. برای مطالعه‌ی بیشتر در مورد موارد یاد شده می‌توانید کتاب‌های همیلتن یا اندرتون را ببینید.

فصل ۳

نظریه‌ی اصل موضوعی مجموعه

اصول نظریه‌ی مجموعه را می‌توان در یک زبان مرتبه‌ی اول که بجز تساوی فقط شامل یک نماد محمولی ۲-موضعی $\in$ است، بیان کرد. در ادامه به معرفی این اصول می‌پردازیم.

(۱) اصل موضوع گسترش.

دو مجموعه مساوی هستند اگر و تنها اگر اعضای یکسانی داشته باشند:

$$\forall x \forall y (x = y \leftrightarrow \forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y))$$

منظور از گسترش یک مجموعه یا یک مفهوم، اعضای آن مجموعه یا حوزه‌ی مصادیق آن مفهوم (یعنی اشیائی که آن مفهوم در مورد آن‌ها صدق می‌کند) است. در مقابل، معنا یا مقصود یک مفهوم، هر خاصیت یا کیفیت مرتبط با آن است. برای مثال، گسترش مفهوم اسب، همه‌ی نمونه‌های واقعی آن و معنای این مفهوم همه‌ی خواصی است که معمولاً برای آن در نظر گرفته می‌شود.

اصل موضوع گسترش را می‌توان بیان این موضوع دانست که در ریاضیات، ما تنها به گسترش مفهوم مجموعه علاقمندیم.

(۲) اصل موضوع مجموعه‌ی تهی.

مجموعه‌ای وجود دارد که هیچ عضوی ندارد:

$$\exists x \forall y \quad y \notin x$$

اصول موضوع نظریه‌ی مجموعه به منظور پرهیز از پارادوکس‌هایی که کار کردن با مفهوم طبیعی و غیردقیق مجموعه می‌تواند به وجود آورد، وضع شده‌اند. برای این منظور، این اصول به گونه‌ای طراحی شده‌اند که به ساختن همه‌ی مجموعه‌های مشروع منجر شوند. مجموعه‌ی تهی، $\{\}$ ، نقطه شروع این ساختمان است. در واقع این مهمترین توجیه ارائه شده برای اصل مذکور است.

(۳) اصل موضوع زوج‌سازی.

به ازای هر دو مجموعه، مجموعه‌ای وجود دارد که دقیقاً شامل آن دو مجموعه است:

$$\forall x \forall y \exists z \left(\forall w (w \in z \leftrightarrow (w = x \vee w = y)) \right)$$

(۴) اصل موضوع اجتماع.

به ازای هر مجموعه، مجموعه‌ای وجود دارد که اعضای آن دقیقاً اعضای اعضای آن مجموعه هستند:

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow \exists w (w \in x \wedge z \in w))$$

توجه کنید که به کمک اصل زوج‌سازی و اصل اجتماع، وجود اجتماع معمولی دو مجموعه به سادگی قابل اثبات است.

به ازای هر مجموعه‌ی x ، $x \cup x$ (اجتماع اعضای x)، مجموعه‌ای است که اصل اجتماع وجود آن را تضمین می‌کند. از زمان ظهور پارادوکس‌های نظریه‌ی مجموعه‌ها، مشخص شده بود که این پارادوکس‌ها مربوط به مجموعه‌های نامتناهی بسیار بزرگ‌اند، مانند مجموعه‌ی همه‌ی مجموعه‌ها. اما در روند ساخت مجموعه‌ها، اگر با مجموعه‌های نه بسیار بزرگ و مشروع مواجه‌ایم، می‌توانیم فرض کنیم که اجتماع اعضای آن‌ها نیز نه چندان بزرگ است و بنابراین وجود دارد.

(۵) اصل موضوع جداسازی (یا زیرمجموعه‌ها).

به ازای هر خاصیت و هر مجموعه داده شده، مجموعه‌ای وجود دارد که دقیقاً متشکل از عضوهایی از آن مجموعه است که خاصیت داده شده را دارند.

توجه کنید که اصل جداسازی در واقع، شمایی از یک اصل است. به ازای هر خاصیت $\varphi(x)$ ، این اصل به شکل زیر بیان می‌شود:

$$\forall y \exists x \forall z (z \in x \leftrightarrow (z \in y \wedge \varphi(z)))$$

اصل جداسازی، شکل محدود شده‌ای از اصل فراگیری بدون شرط است که بر مبنای آن به ازای هر خاصیتی (از مجموعه‌ها قابل بیان در زبان مرتبه‌ی اول مجموعه‌ها)، مجموعه‌ی چیزهایی که آن خاصیت را دارند، وجود دارد. اصل فراگیری بدون شرط، با در نظر گرفتن محمول $x \notin x$ ، به ناسازگاری منجر می‌شود. در مقابل، اصل جداسازی، دقیقاً عناصری از یک مجموعه از قبل مفروض را که خاصیت مورد نظر را دارند، اصطلاحاً جدا می‌کند.

لزوم بیان اصول نظریه‌ی مجموعه‌ها در زبانی مرتبه‌ی اول، با توجه به نیاز موجود در این اصل، آشکار شد.

۶) اصل موضوع نامتناهی.

مجموعه‌ای نامتناهی وجود دارد.

اصل نامتناهی بیان این مطلب است که اشیاء نامتناهی به شکل بالفعل و کامل و نه تنها بالقوه، در ریاضیات قابل بررسی و مطالعه‌اند. این ایده‌ی اصلی نظریه‌ی مجموعه‌های کانتوری است. البته خود کانتور احتمالاً توجیه‌هایی مذهبی نیز برای این اصل داشته است.

اصل نامتناهی به شکل زیر در زبان مرتبه‌ی اول قابل بیان است. به ازای هر مجموعه‌ی y ، تالی y به شکل $y^+ = y \cup \{y\}$ تعریف می‌شود. وجود y^+ به سادگی از اصول زوج‌سازی و اجتماع قابل اثبات است. حال اصل نامتناهی به شکل زیر قابل بیان است:

$$\exists x (\emptyset \in x \wedge \forall y (y \in x \rightarrow y^+ \in x))$$

۷) اصل موضوع مجموعه‌ی توانی.

به ازای هر مجموعه‌ی داده شده، مجموعه‌ای وجود دارد که اعضای آن دقیقاً زیر مجموعه‌های آن مجموعه‌ی هستند:

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow \forall w (w \in z \rightarrow w \in x))$$

به ازای هر مجموعه‌ی A ، اصل فوق وجود مجموعه‌ی توانی A ، $\mathcal{P}(A)$ ، متشکل از همه‌ی زیرمجموعه‌های A را تضمین می‌کند. همانطور که قبلاً گفته شد خود کانتور ثابت کرده بود که $\mathcal{P}(A)$ همواره کاردینال بزرگتری از A دارد. در واقع هیچ کدام از اصول قبل، وجود مجموعه‌ای با کاردینال بزرگتر از کاردینال مجموعه‌ی اعداد طبیعی را تضمین نمی‌کنند. بنابراین، این اصل توجیه عمل‌گرایانه‌ی خوبی دارد.

(۸) اصل موضوع انتخاب.

به ازای هر مجموعه‌ی ناتهی از مجموعه‌های ناتهی، مجموعه‌ای وجود دارد که دقیقاً شامل یک عضو از هر یک از این مجموعه‌ها است.

اصل انتخاب یکی از بحث برانگیزترین اصول نظریه‌ی مجموعه بوده است. تسرملو در دفاع از این اصل، بر بکار بردن بسیار آن در شاخه‌های مختلف ریاضی حتی بدون اشاره صریح به آن، تأکید کرده است. یکی از نتایج مشهور این اصل، قضیه‌ی خوش ترتیبی کانتور است که بیان می‌کند اعضای هر مجموعه را می‌توان به نحوی مرتب کرد که خواص ترتیب اعداد طبیعی را داشته باشد. نتیجه‌ی دیگر، مقایسه‌پذیری هر دو کاردینال است، به ازای هر دو کاردینال متمایز α و β ، $\alpha < \beta$ یا $\beta < \alpha$.

دو اصلی که بعدها به اصول موضوعه‌ی استاندارد نظریه‌ی مجموعه افزوده شدند عبارتند از اصل‌های جایگزینی و بنیاد (یا با نام دیگر، اصل نظم). در حوالی سال ۱۹۲۲ میلادی، اسکولم و فرانکل متوجه شدند که اصول تسرملو که تا آن زمان برای نظریه‌ی مجموعه ارائه شده بودند، توانایی اثبات وجود مجموعه‌هایی چون

$$\{w, \mathcal{P}(w), \mathcal{P}(\mathcal{P}(w)), \dots\}$$

را ندارند. برای حل این مسئله، اسکولم پیشنهاد اضافه شدن یک اصل موضوع جدید، اصل جایگزینی، به اصول موضوع موجود مجموعه‌ها را مطرح کرد.

(۹) اصل موضوع جایگزینی.

به ازای هر فرمول $\phi(x, y)$ و مجموعه‌ی A ، هرگاه به ازای $a \in A$ ، $\phi(a, b)$ و $\phi(a, b')$ نتیجه

دهند $b = b'$ ، چنین b هایی تشکیل یک مجموعه می‌دهند:

$$\forall x \forall y \forall z \left((\phi(x, y) \wedge \phi(x, z)) \rightarrow y = z \right) \rightarrow \\ \forall A \exists z \forall w \left(w \in z \leftrightarrow \exists s (s \in A \wedge \phi(s, w)) \right)$$

به عنوان نتیجه‌ای از این اصل، مجموعه w و تابعی که $\circ$ را به w ، $\mathbf{1}$ را به $\mathcal{P}(w)$ ، $\mathbf{2}$ را به $\mathcal{P}(\mathcal{P}(w))$ و ... می‌برد، را در نظر بگیرید. آنگاه وجود مجموعه‌ی مورد اشاره در فوق اثبات می‌شود.

۱۰ اصل موضوع بنیاد.

هر مجموعه‌ی ناتهی عضوی دارد که اشتراکش با آن عضو تهی است:

$$\forall x \left(x \neq \emptyset \rightarrow \exists y (y \in x \wedge y \cap x = \emptyset) \right)$$

به عبارت دیگر، هر x ناتهی، عضوی $\in$ -کمینه دارد.

این اصل سبب می‌شود که وجود مجموعه‌هایی که عضو خود باشند، منتفی شود. برای دیدن این موضوع توجه کنید که اگر $x \in x$ آنگاه $x \cap x = \{x\} \neq \emptyset$ که با اصل بنیاد در خصوص مجموعه‌ی $\{x\}$ ناسازگار است. به شکل مشابه می‌توان دید که این اصل وجود زنجیری نامتناهی چون

$$x_\circ \ni x_1 \ni x_2 \ni \dots$$

در حوزه‌ی مجموعه‌ها را منتفی می‌کند.

اصل بنیاد، اولین بار در ۱۹۲۵ توسط فن نویمان به طور صریح به عنوان اصلی از دستگاه اصل موضوعی مجموعه‌ها مطرح شد. هدف فن نویمان آن بود که جهان مجموعه‌ها حتی المقدور به طور یکتا مشخص شود. این اصل سبب می‌گردد که هر مجموعه عضوی از سلسله مراتب V_α ها گردد، یعنی مجموعه‌هایی که از تهی و به کمک عملگرهای مجموعه‌ساز از قبیل توان و اجتماع ساخته می‌شوند.

به طور کلی، هر چند که صحت این اصل مورد بحث است اما به سبب آن که جلوی رخ دادن پدیده‌ای نامناسب در مجموعه‌ها را می‌گیرد، به عنوان اصلی از اصول مجموعه‌ها پذیرفته شده است.

۱۰.۳ ساختمان اعداد

در این بخش به اختصار به ساختن اعداد به کمک مجموعه‌ها می‌پردازیم. در اینجا خواص ابتدایی مجموعه‌ها که به کمک اصول ZF به سادگی قابل بررسی‌اند را دانسته فرض می‌کنیم و به ارائه تعریف‌های اساسی لازم و اثبات‌های خلاصه شده بسنده می‌کنیم.

حکم ۸۸. به ازای دو مجموعه‌ی A و B ، می‌نویسیم $A \approx B$ اگر و تنها اگر تابعی یک به یک و پوشا (تناظر دوسویی) چون $f: A \rightarrow B$ موجود باشد (در این حالت گوییم که A و B هم‌توان هستند).

حکم ۸۹. $\approx$ یک مجموعه نیست (پس $\approx$ یک رابطه به مفهوم رسمی آن نیست).

اثبات. فرض کنید $\approx$ یک مجموعه باشد. در این صورت به ازای هر مجموعه x ، $(x, x) \in \approx$. در نظریه‌ی مجموعه، زوج مرتب (y, z) به صورت $\{\{y\}, \{y, z\}\}$ تعریف می‌شود. پس $\{\{x\}\} \in \approx$. پس $\{x\} \in \bigcup \approx$ و بنابراین $x \in \bigcup \bigcup \approx$. پس $\bigcup \bigcup \approx$ می‌بایست شامل همه‌ی مجموعه‌ها باشد که این ناممکن است. $\square$

حکم ۹۰. $\approx$ خواص روابط هم‌ارزی را دارد، یعنی بازتابی، متقارن و ترایی است.

اثبات. ساده است. $\square$

پس، به طور غیررسمی می‌توان صحبت از رده هم‌ارزی یک مجموعه چون x کرد، آن را با $[x]_{\approx}$ نشان می‌دهیم.

همانطور که دیدیم، فرگه برای تعریف مفهوم عدد از مفهومی مشابه رده‌های هم‌ارزی فوق استفاده کرد. اما مشکل اینجاست که این رده‌ها مجموعه نیستند.

حکم ۹۱. اگر x یک مجموعه‌ی غیر تهی باشد، آنگاه $[x]_{\approx}$ یک مجموعه نیست.

اثبات. فرض کنید $a \in x$ و $b \notin x$. در این صورت، به وضوح داریم

$$(x - \{a\}) \cup \{b\} \in [x]_{\approx}$$

پس داریم، $b \in \bigcup [x]_{\approx}$. بنابراین $\bigcup [x]_{\approx}$ شامل همه‌ی مجموعه‌هایی است که در x نیستند. از طرفی به وضوح، $x \subseteq \bigcup [x]_{\approx}$. پس اگر $[x]_{\approx}$ یک مجموعه باشد، آنگاه $\bigcup [x]_{\approx}$ ، مجموعه‌ی همه‌ی مجموعه‌ها خواهد بود که ناممکن است. $\square$

ایده‌ای که به فون‌نویمان بر می‌گردد آن است که، به جای استفاده از رده‌های هم‌ارزی، یک عضوی ویژه ازهر رده به عنوان عدد در نظر گرفته شود.

تعریف ۹۲. (عددهای طبیعی)

$$\begin{aligned} 0 &= \emptyset \\ 1 &= \{\emptyset\} \\ 2 &= \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

توجه کنید که با تعریف فوق، هر عدد n ، برابر با مجموعه‌ی متشکل از همه‌ی عددهای کوچکتر از n است،

$$n = \{0, 1, \dots, n-1\}$$

تعریف ۹۳. به ازای هر x ، $x^+ = x \cup \{x\}$ تالی x است.

بنابراین، برای مثال داریم $6 = 5^+$ و $11 = 10^+$.

تعریف ۹۴. مجموعه‌ی x را استقرایی گوئیم هرگاه $\emptyset \in x$ و به ازای هر مجموعه‌ی a ، اگر $a \in x$ آنگاه $a^+ \in x$.

توجه کنید که اکنون می‌توان اصل نامتناهی را به این شکل تعریف کرد که مجموعه‌ای استقرایی وجود دارد.

تا اینجا ما عدد طبیعی 0 ، 1 ، $\dots$ و به طور کلی n را تعریف کردیم. اما مفهوم یک عدد طبیعی را چگونه می‌توان تعریف کرد؟

تعریف ۹۵. n عددی طبیعی است هرگاه به ازای هر مجموعه‌ی استقرایی x ، $n \in x$.

با این تعریف گزاره‌ی زیر را داریم.

حکم ۹۶. مجموعه‌ی یکتایی متشکل از همه‌ی عددهای طبیعی وجود دارد.

اثبات. بنابر اصل نامتناهی، یک مجموعه‌ی استقرایی چون A وجود دارد. در این صورت

$$\{n \in A \mid n \in B, B \text{ مجموعه‌ی استقرایی}\}$$

که بنابر اصل موضوع جداسازی وجود دارد، همان مجموعه‌ی مورد نظر است. منحصر بفردی این مجموعه، از اصل گسترش نتیجه می‌شود. $\square$

حال می‌توانیم مجموعه‌ی همه‌ی عددهای طبیعی را به شکل زیر تعریف کنیم.

تعریف ۹۷. $\omega = \{n \mid n \text{ یک عدد طبیعی است}\}$

حکم ۹۸. به ازای هر مجموعه‌ی استقرایی چون A ، $\omega \subseteq A$.

اثبات. با توجه به تعاریف فوق، واضح است. $\square$

حال خاصیتی که معمولاً به عنوان اصل استقرای ریاضی نامیده می‌شود، به شکل زیر قابل بیان و اثبات است.

حکم ۹۹. اگر $A \subseteq \omega$ و A استقرایی باشد، آنگاه $A = \omega$.

اثبات. اگر A استقرایی باشد، $\omega \subseteq A$ ضمناً، بنا به فرض $A \subseteq \omega$. پس $A = \omega$. $\square$

بنا به قضیه‌ی فوق، برای اثبات خاصیتی چون $P(n)$ ، به ازای هر عدد طبیعی n ، کافی است ثابت شود که $P(0)$ ، یعنی 0 خاصیت P را دارد، و همچنین ثابت شود که به ازای هر n ، اگر $P(n)$ آنگاه $P(n+1)$.

ترتیب روی ω نیز به شکل زیر قابل تعریف است که $m < n$ اگر و تنها اگر $m \in n$ می‌توان نشان داد که این تعریف همه‌ی خواص آشنای ترتیب اعداد طبیعی را دارد.

تعریف فوق از اعداد طبیعی، به هیچ وجه تنها تعریف ممکن نیست. برای مثال می‌توان عددها را به شکل

$$0 = \emptyset$$

$$1 = \{\emptyset\}$$

$$2 = \{1\}$$

$$\vdots$$

نیز تعریف کرد و خواص معمول عددهای طبیعی را نتیجه گرفت. همین موضوع کافی است تا این عقیده که رویکرد نظریه‌ی مجموعه‌ای ماهیت اعداد را مشخص می‌کند، زیر سوال برود.

تمرین ۱۰۰. به کمک اصل بنیاد نشان دهید که زنجیره‌ای نامتناهی از مجموعه‌ها به شکل زیر وجود ندارد:

$$x_0 \ni x_1 \ni x_2 \ni \dots$$

تمرین ۱۰۱. آیا این که به شکل‌های مختلف می‌توان اعداد طبیعی را در نظریه‌ی مجموعه تعریف کرد، توجیه کافی‌ای است برای آن که عددها، مجموعه نیستند؟