



باسمه تعالی
 جمهوری اسلامی ایران
 وزارت آموزش و پرورش
 مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش پژوهان جوان
 معاونت دانش پژوهان جوان

باشگاه دانش پژوهان جوان

مبارزه علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست و جو و کشف واقعیت‌هاست. «امام خمینی (ره)»

**دفترچه سؤالات مرحله اول
 سی و دومین دوره المپیاد ریاضی سال ۱۳۹۲**

صبح - ساعت: ۹:۰۰

کد دفترچه : **۱**

مدت آزمون (دقیقه)	تعداد سوالات
۱۸۰	۲۵

استفاده از ماشین حساب ممنوع است.

توضیحات مهم

۱. کد برگه سؤالات شما ۱ است. این کد را در محل مربوط روی پاسخ‌نامه علامت بزنید. در غیر این صورت پاسخ‌نامه شما تصحیح نخواهد شد. توجه داشته باشید کد برگه سؤالات شما که در زیر هر یک از صفحه‌های این دفترچه نوشته شده است، با کد اصلی که در همین صفحه است یکی باشد.
۲. بلافاصله پس از آغاز آزمون تعداد سؤالات داخل دفترچه و وجود همه برگه‌های دفترچه سؤالات را بررسی نمایید. در صورت وجود هر گونه نقصی در دفترچه، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید.
۳. یک برگ پاسخ‌نامه در اختیار شما قرار گرفته که مشخصات شما بر روی آن نوشته شده است. در صورت نادرست بودن آن، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید.
۴. برگه پاسخ‌نامه را دستگاه تصحیح می‌کند، پس آن را تا نکتید و تمیز نگه دارید و به‌علاوه خوانا و پر رنگ بنویسید.
۵. سؤالات این آزمون به دو شکل پنج گزینه‌ای و پاسخ کوتاه است که از هم تفکیک نشده‌اند. پاسخ درست به هر دو نوع سؤال ۴ نمره مثبت دارد. پاسخ غلط به هر سؤال پنج گزینه‌ای یک نمره منفی دارد ولی پاسخ غلط به سؤالاتی که پاسخ کوتاه نمره منفی ندارد.
۶. همراه داشتن هر گونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه، ماشین حساب و لپ تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب خواهد شد.
۷. آزمون مرحله دوم برای دانش‌آموزان سال اول دبیرستان صرفاً جنبه آزمایشی و آمادگی دارد و شرکت‌کنندگان در دوره تابستان از بین دانش‌آموزان پایه دوم و سوم دبیرستان انتخاب می‌شوند.
۸. داوطلبانی می‌توانند دفترچه سؤالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته باشند. در غیر این صورت دفترچه سؤالات باید همراه پاسخ‌نامه تحویل داده شود.
۹. وبگاه کمیته علمی المپیاد ریاضی ایران www.mathysc.ir است.
۱۰. دانش‌آموز عزیز، شماره‌ی تلفن همراه قابل دسترس را به منظور تماس‌های ضروری در محل مشخص شده در پاسخ‌نامه ثبت نمایید.



آزمون مرحله اول سی و دومین المپیاد

ریاضی کشور



دانش آموز عزیز، سؤال‌های این آزمون به دو شکل پنج‌گزینه‌ای و پاسخ کوتاه است. پاسخ درست به هر دو نوع سؤال ۴ نمره مثبت دارد. پاسخ غلط به هر سؤال پنج‌گزینه‌ای ۱ نمره منفی دارد ولی پاسخ غلط به سؤال‌های پاسخ کوتاه نمره منفی ندارد. پاسخ‌نامه در مورد هر دو نوع سؤال مشابه و شامل پنج مکان خالی است که در هر کدام می‌توانید یک رقم از ارقام صفر تا نه را بنویسید. جواب سؤال‌های پاسخ کوتاه، عددی نامنفی و کم‌تر از ۱۰۰۰۰۰ است. شما باید ارقام قسمت صحیح آن را جداگانه در پاسخ‌نامه بنویسید. به عنوان مثال اگر پاسخ سؤالی ۶۹۵۰۷۳ بود شما باید در مقابل شماره سؤال در پاسخ‌نامه، چنین چیزی بنویسید:

	۶	۹	۵	۰
--	---	---	---	---

در مورد سؤال‌های پنج‌گزینه‌ای شماره گزینه درست را در مستطیل سمت راست بنویسید. مثلاً اگر گزینه شماره ۳ درست است باید در مقابل شماره سؤال در پاسخ‌نامه، چنین چیزی بنویسید:

				۳
--	--	--	--	---

لازم نیست کاملاً شبیه نمونه بالا بنویسید؛ حتی نوشتن رقم ۶ به شکل «۶» هم ایرادی ندارد ولی رقم صفر را کوچک و رقم پنج را بزرگ بنویسید تا با هم اشتباه نشوند و به‌علاوه به هیچ‌وجه از ارقام انگلیسی استفاده نکنید. با رنگ سیاه یا آبی، خوانا و پررنگ بنویسید. هر یک از ارقام را داخل یک کادر بنویسید. اگر از مداد استفاده کنید، پاک کردن برایتان مقدور است ولی از مداد اتود، که اثر آن کمرنگ و نازک است، استفاده نکنید.

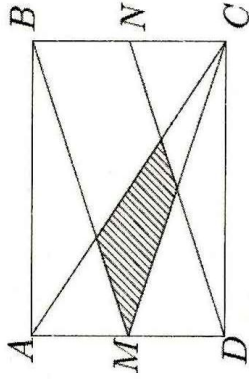
۱. سینا می‌خواهد برای دوره‌کردن کتاب‌های ریاضیات، ادبیات و فیزیک سه سال دبیرستان (۹ کتاب) برنامه‌ریزی کند به‌نحوی که کتاب‌های هر مبحث به ترتیب پایه آن‌ها مطالعه شود (برای مثال کتاب فیزیک ۱ پیش از کتاب فیزیک ۲ مطالعه شود). او به چند ترتیب مختلف می‌تواند همه کتاب‌ها را مطالعه کند؟

۲. x و y دو عدد حقیقی هستند که $x + y = 6$ و $x^2 + y^2 = 40$. مقدار $x^6 + y^6$ چه قدر است؟

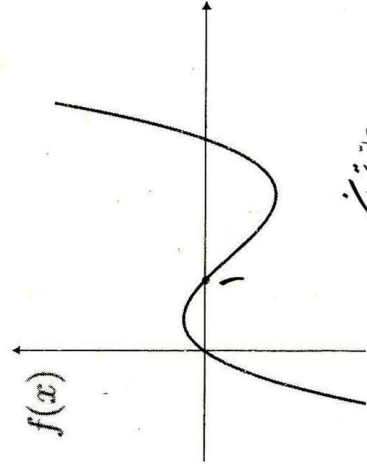


آزمون مرحله اول سی و دومین المپیاد

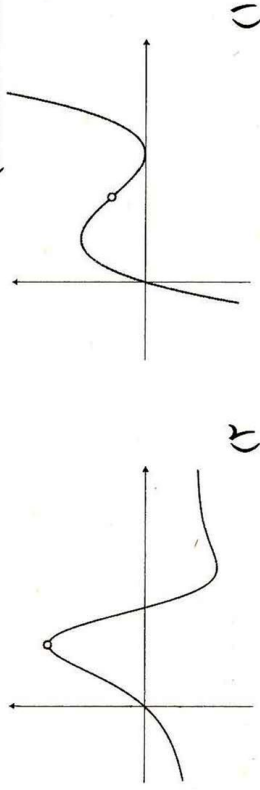
ریاضی کشور



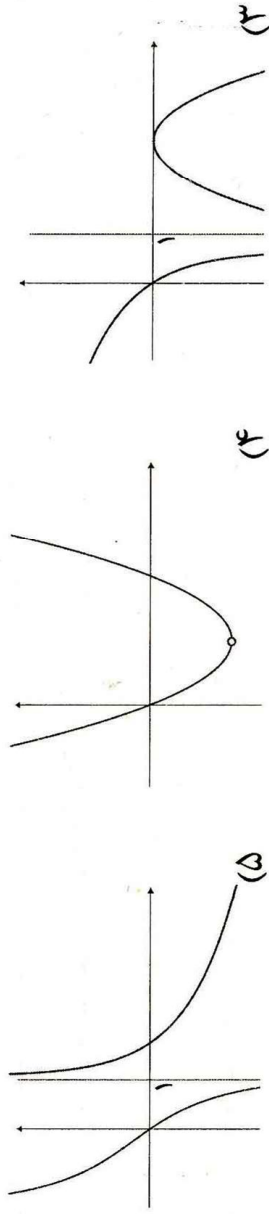
۳. در شکل روبه‌رو M و N به ترتیب وسط‌های اضلاع AD و BC از مستطیل $ABCD$ هستند. مساحت مستطیل چه مضربی از چهارضلعی هاشور خورده است؟



۴. فرض کنید نمودار تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ به شکل روبه‌رو باشد. در این صورت نمودار تابع $\frac{f(x)}{x-1}$ شبیه کدام یک از گزینه‌های زیر است؟ (نمودارهای همه گزینه‌ها در نقطه $x=1$ تعریف نشده هستند.)



کلاس چهارم
کتاب ریاضی
کتاب ریاضی
کتاب ریاضی



۵. یک عدد طبیعی را کوچولو می‌نامیم، هرگاه دست کم سه مقسوم‌علیه مثبت داشته باشد و برابر مجموع کوچک‌ترین سه مقسوم‌علیه مثبتش باشد. چند عدد کوچولو وجود دارد؟

- ۰ (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۶ (۴) بی‌نهایت (۵)

۶. در مثلث ABC نقطه D روی ضلع BC به گونه‌ای قرار گرفته که زاویه‌های BAD ، CAD و ABC با هم برابرند و طول پاره‌خط‌های BD و DC به ترتیب برابر ۱ و ۲ است. طول AB چه قدر است؟

- $\frac{\sqrt{6}}{3}$ (۵) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳) $\sqrt{3}$ (۲) $\sqrt{2}$ (۱)



آزمون مرحله اول سی و دومین المپیاد ریاضی کشور



۷. دنباله a_0, a_1, a_2, \dots از اعداد طبیعی به صورت زیر تعریف شده است:

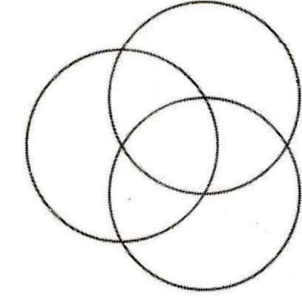
$$\begin{cases} a_0 = 1, \\ a_{n+1} = 13^{a_n} \quad n \geq 0. \end{cases}$$

- رقم یکان a_{1392} چه عددی است؟
- ۹ (۵) ۷ (۴) ۵ (۳) ۳ (۲) ۱ (۱)

۸. در مورد اعداد زیر کدام گزینه درست است؟^{۳۴}

$$a = 100!, \quad b = 2^{100}, \quad c = 2^{2^{2^{2^{2^2}}}}$$

- (۱) $a < c < b$ (۲) $b < c < a$ (۳) $c < a < b$ (۴) $b < a < c$ (۵) $a < b < c$



۹. می خواهیم با سه رنگ آبی، قرمز و سبز، هفت ناحیه درون شکل روبه رو را رنگ آمیزی کنیم، به طوری که ناحیه های همسایه رنگ های متفاوتی داشته باشند (ناحیه هایی که فقط در یک نقطه اشتراک دارند همسایه نیستند). این کار به چند طریق ممکن است؟

۱۰. وزارت راه و ترابری آزادهای به طول $524288 = 2^{19}$ متر بین زاهدان و مشهد احداث کرده است و قصد دارد در یک پروژه بلندمدت این آزاده را مجهز به چراغ های روشنایی کند. در هر روز از بین بزرگ ترین قطعه هایی از آزاده که هیچ چراغی در آن نیست، نزدیک ترین قطعه به زاهدان انتخاب شده و در نقطه وسط آن یک چراغ نصب می شود. هزار و یکمین چراغی که نصب می شود، چند متر با مشهد فاصله دارد؟

۱۱. چوپانی گوسفند گرسنه خود را در چراگاهی سرسبز با سه طناب مختلف به سه درخت بسته است. گوسفند علف های همه قسمت هایی از چراگاه که به آن دسترسی دارد را می خورد. ناحیه ای از چراگاه که گوسفند علف های آن را خورده است، کدام شکل نمی تواند باشد؟



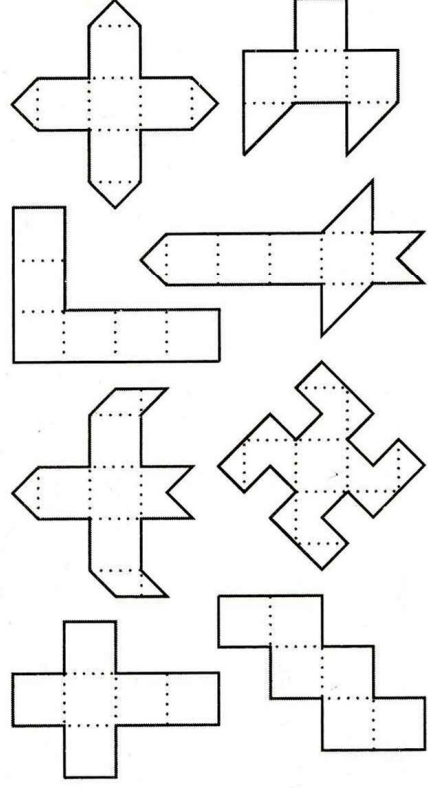
- (۱) تک نقطه (۲) (۳) (۴) (۵)



آزمون مرحله اول سی و دومین المپیاد

ریاضی کشور

۱۲. با تا کردن چند تا از شکل‌های زیر از روی خط‌چین‌ها می‌توان یک مکعب ساخت؟



۱۳. کوچک‌ترین عدد طبیعی که دارای ۱۳۹۲ مقسوم‌علیه مثبت است، چند عامل اول دارد؟

۱۴. در وب‌گاه المپیاد ریاضی ایران (www.mathsc.ir) کیفیت آزمون مرحله اول سال گذشته به نظرسنجی گذاشته شده است. گزینه‌های نظرسنجی عبارت‌اند از «خیلی خوب بود»، «عالی بود»، و «به‌تر از این نمی‌شد.»! پیش از این که عباس نظر خود را ثبت کند، درصد گزینه‌ها به ترتیب دقیقاً برابر ۲۵، ۵۰ و ۲۵ بوده است و پس از آن این نسبت‌ها به ۲۴، ۴۸ و ۲۸ تبدیل می‌شود. به غیر از عباس چند نفر در نظرسنجی شرکت کرده‌اند؟

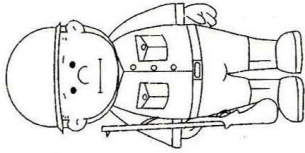
۱۵. چند زوج مرتب (p, q) از اعداد اول وجود دارد که برای آن‌ها داشته باشیم $p^2 - pq + q^2 = 37^2$.

۱۶. «ضربین حساب» ماشینی است که از یک صفحه نمایش‌گر با قابلیت نمایش اعداد خیلی بزرگ و دکمه‌هایی با شماره‌های ۱ الی ۹ تشکیل شده است. با فشار دادن هر دکمه، ضربین حساب بلافاصله عدد صفحه نمایش‌گر را در عدد مربوط به آن دکمه ضرب می‌کند و حاصل را به جای عدد قبلی در صفحه نمایش می‌دهد. اگر ابتدا عدد ۱ روی صفحه نمایش‌گر نوشته شده باشد، برای به دست آوردن عدد $5^{1392} \times 3^{1435} \times 2^{2014}$ دست‌کم چند بار باید از دکمه‌های ضربین حساب استفاده کرد؟ (برای مثال می‌توان با سه بار استفاده از دکمه‌های ضربین حساب به ۷۲۹ دست یافت، زیرا $9 \times 9 \times 9 = 729$.)

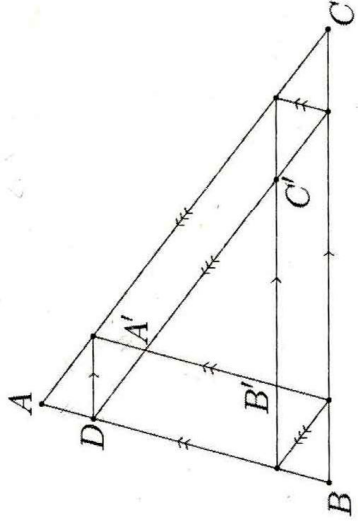


آزمون مرحله اول سی و دومین المپیاد

ریاضی کشور



۱۷. در یک پادگان ۱۱۹۶ سرباز در ۱۳ ردیف ۹۲ تایی به شکل منظم ایستاده‌اند. آخرین سرباز از ردیف آخر یک سرباز را می‌بیند اگر روی خط واصل بین آن‌ها، سرباز دیگری نباشد. او چند سرباز از ردیف اول را می‌بیند؟ (سربازها را نقطه فرض می‌کنیم).



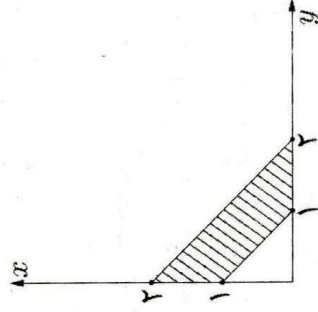
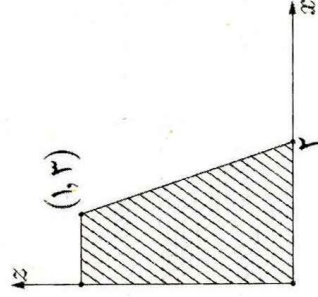
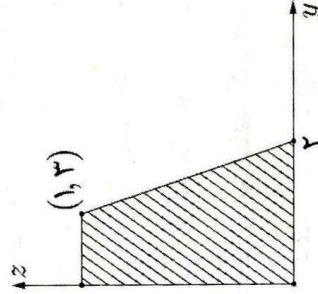
۱۸. مطابق شکل روبه‌رو خطوطی موازی اضلاع مثلث ABC رسم کرده‌ایم تا مثلث $A'B'C'$ ایجاد شود، به گونه‌ای که محیطش نصف محیط ABC باشد. طول AB چند برابر طول AD است؟

۱۹. مجموعه S را مجموعه همه اعداد حقیقی مثل a می‌گیریم که برای آن‌ها اعداد حقیقی x و y موجود باشند، به گونه‌ای که

$$a(a-1) + x(x-1) + y(y-1) = \frac{3}{2}$$

می‌دانیم که S یک بازه است. طول این بازه چقدر است؟

۲۰. تصویر عمود یک چهارضلعی مسطح در فضا روی سه صفحه مختصات به شکل‌های زیر است. مجموع مربع‌های طول قطرهای این چهارضلعی چقدر است؟





آزمون مرحله اول سی و دومین المپیاد

ریاضی کشور

۲۱. چند چهارتایی مرتب (x, y, z, t) از اعداد حقیقی یافت می شود که در معادلات زیر صدق کند؟

$$\begin{cases} xy + yz + zx = t^2 \\ yz + zt + ty = x^2 \\ zt + tx + xz = y^2 \\ tx + xy + yt = z^2 \end{cases}$$

۱ (۱)

۵ (۲)

۹ (۳)

۲۵ (۴)

بی نهایت (۵)



۲۲. تنها دزد شکرستان از دو سال پیش تحت تعقیب نظمیه شکرستان قرار دارد. طبق تحقیقات نظمیه، تعداد سفرهای او بین شکرستان و ۴ نمکستانهای شرقی، غربی، شمالی و جنوبی به صورت زیر بوده است، (برای مثال این دزد سه سفر از نمکستان شرقی به شکرستان داشته است). اکنون او در کدام شهر مخفی شده است؟

به $\begin{matrix} \text{شکرستان} \\ \text{ن. شرقی} \\ \text{ن. غربی} \\ \text{ن. شمالی} \\ \text{ن. جنوبی} \end{matrix}$ از $\begin{matrix} \text{ن. شمالی} \\ \text{ن. غربی} \\ \text{ن. شرقی} \\ \text{ن. جنوبی} \end{matrix}$

شکرستان	×	۳	۱	۰	۲
ن. شرقی	۰	×	۲	۰	۱
ن. غربی	۱	۰	×	۳	۰
ن. شمالی	۲	۰	۱	×	۱
ن. جنوبی	۲	۰	۰	۲	×

(۱) شکرستان

(۲) نمکستان شرقی

(۳) نمکستان غربی

(۴) نمکستان شمالی

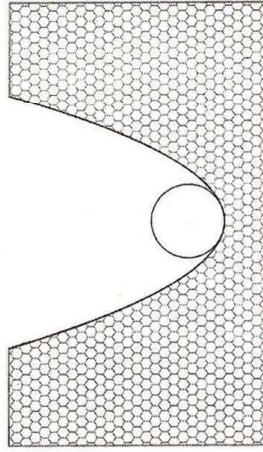
(۵) نمکستان جنوبی

۲۳. طول اضلاع AB ، AC و BC از مثلث ABC به ترتیب ۲ و ۴ و $\sqrt{7}$ است. خطی که وسطهای AB و AC را به هم وصل می کند با خطی که از B موازی با نیمساز A رسم می شود در نقطه D برخورد می کند. طول AD چه قدر است؟



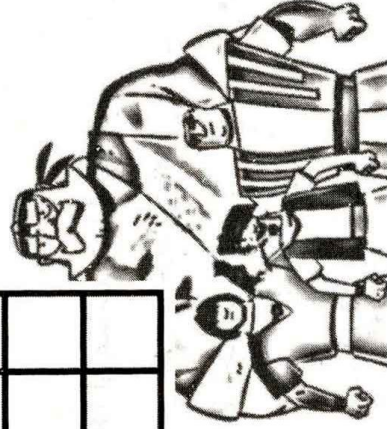
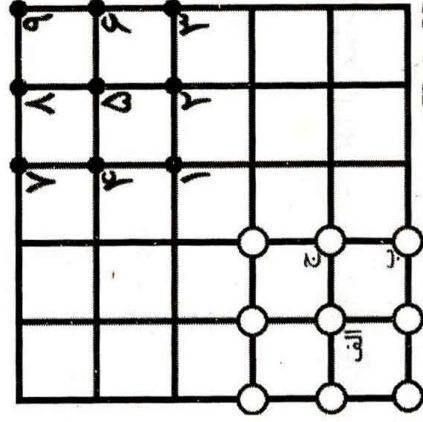
آزمون مرحله اول سی و دومین المپیاد

ریاضی کشور



۲۴. وزارت نفت کانالی بین بوشهر و ایلام حفر کرده است و قصد دارد لوله انتقال گازی را در آن قرار دهد. سطح مقطع لوله دایره و سطح مقطع کانال به شکل قسمتی از یک سهمی است. (سهمی نمودار یک چندجمله‌ای درجه دوم است.) اگر عرض و عمق کانال برابر ۱ متر باشد، قطر بزرگ‌ترین لوله‌ای که می‌توان در کانال قرار داد به طوری که با پایین‌ترین نقطه کانال تماس داشته باشد، چند سانتی‌متر است؟

۲۵. پهلوان پوریای ولی از یاور خواسته که ۹ میل زورخانه را از نقاطی که با دایره توخالی نمایش داده شده به نقاطی که با دایره توبر نمایش داده شده ببرد، به نحوی که مجموع فواصل ۹ جفت نقطه ابتدایی و انتهایی، بیش‌ترین مقدار ممکن شود. (دقت کنید که در هر نقطه یک میل قرار می‌گیرد.) در این صورت میل‌های الف و ب و ج به ترتیب باید به کدام نقاط منتقل شوند؟



- (۱) ۲، ۳، ۵
- (۲) ۸، ۷، ۵
- (۳) ۸، ۷، ۹
- (۴) ۴، ۷، ۵
- (۵) نمی‌توان تعیین کرد.