

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: تکلیف تابع چند ضابطه ای

تکلیف ویدئو: جلسه ۱۷

ادب

۱- برد تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & x < 0 \\ -|x + 2| & x \geq 0 \end{cases}$ شامل چند عدد صحیح نمی‌شود؟

بی‌شمار (۴)

۵ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

۲- اگر تابع $f(x) = \begin{cases} x + k & x \geq 2 \\ x^2 + 1 & x \leq 2 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} x + 4a & x \leq 2 \\ 2a & x = 2 \\ 3x - 1 & x > 2 \end{cases}$ مفروض باشند، $f(a) + g(k)$ کدام است؟

۶ (۴)

۸ (۳)

۱۰ (۲)

۱ (۱)

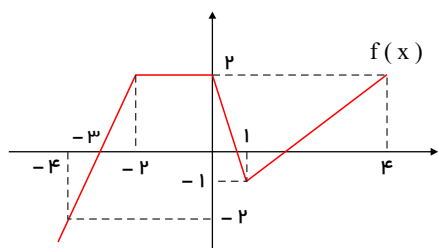
۳- با فرض $f(x) = \begin{cases} ax + b & -4 \leq x < -2 \\ cx + d & -2 \leq x < 0 \\ ex + f & 0 \leq x < 1 \\ gx + h & 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$ حاصل $a + b + c + d + e + f + g + h$ کدام است؟

۲ (۱)

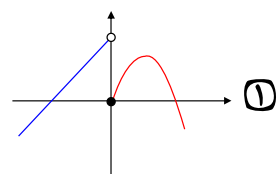
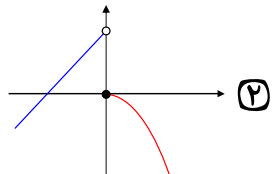
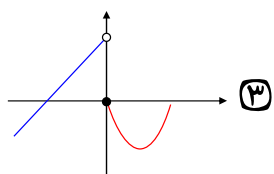
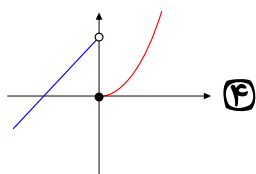
۴ (۲)

۶ (۳)

۸ (۴)



۴- کدام شکل قسمتی از نمودار تابع قطعه‌ای $f(x) = \begin{cases} 2 + x & x < 0 \\ 2x - x^2 & x \geq 0 \end{cases}$ است؟



۵- کدام یک تابع است؟

$f(x) = \begin{cases} x + 1 & x > 0 \\ 2x & x < 3 \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} x - 1 & x > 2 \\ 3x & x < 4 \end{cases}$

هیچکدام (۴)

هر دو (۳)

$g(x)$ (۲)

$f(x)$ (۱)

۶- در تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x - \sqrt{x + 4} & x > 3 \\ 2x + 3 & x \leq 3 \end{cases}$ مقدار $f(f(5)) + f(f(1))$ کدام است؟

۹ (۴)

۸ (۳)

۷ (۲)

۶ (۱)

۷- در تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x > 0 \\ 2x + 3 & x < 0 \end{cases}$ ، $f(f(-1))$ کدام است؟

صفر (۴)

-۱ (۳)

۵ (۲)

۱ (۱)

۸- برد تابع $f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -3 & x < 0 \end{cases}$ کدام است؟

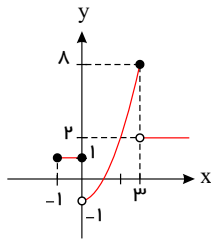
R (۴)

$[0, +\infty) \cup \{-3\}$ (۳)

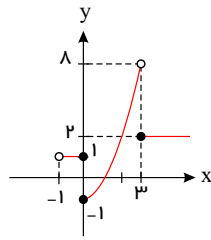
$[-3, +\infty)$ (۲)

$[0, +\infty)$ (۱)

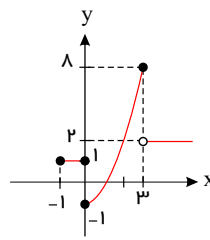
۹- نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 1 & , -1 \leq x \leq 0 \\ x^2 - 1 & , 0 < x \leq 3 \\ 2 & , x > 3 \end{cases}$ کدام است؟



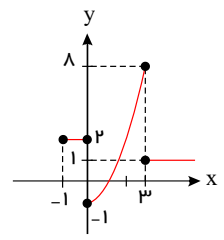
Ⓕ



Ⓖ



Ⓗ



Ⓙ

۱۰- کدام یک از گزینه‌های زیر یک تابع را نمایش می‌دهند؟

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & x > 0 \\ 2x - 4 & x < 2 \end{cases} \quad \text{Ⓕ}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x \geq 0 \\ x + 3 & x \leq 0 \end{cases} \quad \text{Ⓙ}$$

$$h(x) = \begin{cases} |x| + 1 & x \leq -2 \\ x^2 + 1 & x \geq -2 \end{cases} \quad \text{Ⓕ}$$

$$k(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ 0 & x = 0 \\ -x^2 & x \leq 0 \end{cases} \quad \text{Ⓙ}$$

۱۱- اگر f تابع همانی و g تابع ثابت برابر با (-3) باشد، حاصل عبارت $|2g(-1)| - f(-4)$ کدام است؟

Ⓙ -۲ Ⓗ ۲ Ⓖ ۱۰ Ⓕ ۷

۱۲- اگر $f(x) = (2m - 4)x - m^2 + 3$ یک تابع ثابت باشد، $f(m^3 - 1)$ کدام است؟

Ⓙ ۸ Ⓗ -۱ Ⓖ ۲ Ⓕ ۷

۱۳- اگر $f = \{(11, 0), (5, a + b), (2, 2 - a)\}$ معرف یک تابع ثابت و $g(x) = \frac{mx^3 + nx^2}{3x^2 - 2x}$ یک تابع همانی باشد، آن گاه حاصل

$bm - na$ کدام است؟

Ⓙ ۲ Ⓗ -۲ Ⓖ ۳۲ Ⓕ -۳۲

۱۴- اگر f تابع همانی، g تابع ثابت و $g(5) = 3$ باشند، مقدار $4f(g(-2)) - 2g(f(7))$ کدام است؟

Ⓙ ۶ Ⓗ -۶ Ⓖ ۱۲ Ⓕ -۱۲

۱۵- اگر f تابع همانی، g تابع ثابت و $\frac{g(5)f(5)}{f(5) + g(5)} = 1$ باشد، آنگاه حاصل $\frac{f(4) + g(4)}{g(4) + 1}$ کدام است؟

Ⓙ $\frac{3}{7}$ Ⓗ $\frac{7}{3}$ Ⓖ $\frac{7}{2}$ Ⓕ $\frac{2}{7}$

۱۶- برد تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & , x \leq -1 \\ x^2 & , -1 < x < 1 \\ x + 1 & , x \geq 1 \end{cases}$ کدام است؟

Ⓙ $[0, 1) \cup [2, +\infty)$ Ⓗ $(-\infty, -1) \cup [2, +\infty)$ Ⓖ $(-\infty, 2]$ Ⓕ $(-1, 1) \cup [2, +\infty)$

۱۷- اگر $f = \{(1, 5), (2, m + n), (3, 2m - n)\}$ تابعی ثابت و $g = \{(-1, a), (-2, b), (-3, a + b)\}$ تابع

همانی باشد، حاصل $f(3) - g(-1)$ کدام است؟

Ⓙ ۲ Ⓗ ۶ Ⓖ ۴ Ⓕ -۴

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۱

$$\begin{cases} x < 0 \Rightarrow x^2 > 0 \Rightarrow x^2 + 2 > 2 \\ x \geq 0 \Rightarrow x + 2 \geq 2 \Rightarrow |x + 2| \geq 2 \Rightarrow -|x + 2| \leq -2 \end{cases}$$

$$R_f = (-\infty, -2] \cup (2, +\infty) = \mathbb{R} - (-2, 2]$$

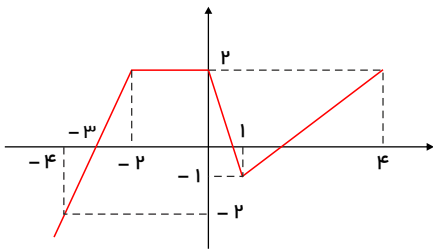
اعداد صحیح ناموجود در این بازه: $\{-1, 0, 1, 2\}$ ۲ - گزینه ۲ اگر $f(x)$ و $g(x)$ بخواهند تابع باشند باید $f(2)$ از هر دو ضابطه f مقداری یکسان داشته باشد و $g(2)$ نیز از ضابطه اول و دوم g یکسان به دست آید:

$$f(2) = 2 + k = 2^2 + 1 \Rightarrow 2 + k = 5 \Rightarrow k = 3$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x + 3 & x \geq 2 \\ x^2 + 1 & x \leq 2 \end{cases}$$

$$g(2) = 2 + 4a = 2a \Rightarrow 2a = -2 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow g(x) = \begin{cases} x - 4 & x \leq 2 \\ -2 & x = 2 \\ 3x - 1 & x > 2 \end{cases}$$

$$f(-1) + g(3) = ((-1)^2 + 1) + (3 \times 3 - 1) = 2 + 8 = 10$$



$$\begin{cases} (-4, -2) \\ (-3, 0) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = ax + b \\ -2 = -4a + b \\ 0 = -3a + b \end{cases}$$

$$-2 = -a \Rightarrow \boxed{a = 2}$$

$$0 = -3a + b \xrightarrow{a=2} 0 = -6 + b \Rightarrow \boxed{b = 6}$$

$$y = 2 = cx + d \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ d = 2 \end{cases}$$

$$y = ex + f \rightarrow \begin{cases} (0, 2) \\ (1, -1) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2 = 0 + f \Rightarrow \boxed{f = 2} \\ -1 = e + 2 \Rightarrow \boxed{e = -3} \end{cases}$$

$$y = gx + h \rightarrow \begin{cases} (1, -1) \\ (4, 2) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -1 = g + h \\ 2 = 4g + h \end{cases}$$

$$-3 = -3g \Rightarrow g = 1, \quad -1 = g + h \xrightarrow{g=1} -1 = 1 + h \Rightarrow \boxed{h = -2}$$

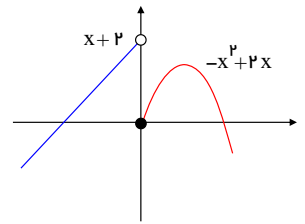
$$a + b + c + d + e + f + g + h = 2 + 6 + 0 + 2 + 2 - 3 + 1 - 2 = 8$$

$$x \geq 0 \Rightarrow y = -x^2 + 2x = x(-x + 2)$$

۳ - گزینه ۴ فرم تابع خطی: $y = ax + b$
با نوشتن معادله هر قسمت داریم:

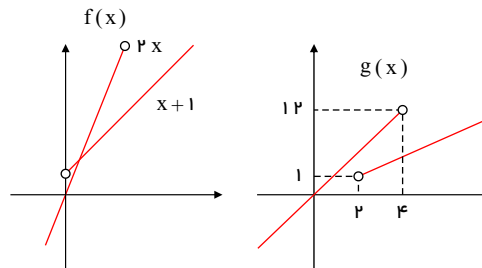
۴ - گزینه ۱

X	o	۲
X	-	+
۲-X	+	-
X(-X+۲)	-	-



۵ - گزینه ۴

با رسم دو تابع داریم:



هر دو تابع خطوط موازی محور yها را در بیش از یک نقطه قطع می کنند.

۶ - گزینه ۴

$$f(1) \xrightarrow{1 \leq 2} f(1) = 2x + 3 = 2 + 3 = 5$$

$$f(f(1)) = f(5) \xrightarrow{5 > 3} f(5) = x - \sqrt{x+4} = 5 - \sqrt{5+4} = 5 - \sqrt{9} = 5 - 3 = 2 \Rightarrow f(5) = 2$$

$$f(f(5)) = f(2) \xrightarrow{2 \leq 3} f(2) = 2x + 3 = 4 + 3 = 7$$

$$\text{پس: } f(f(5)) + f(f(1)) = 7 + 2 = 9$$

۷ - گزینه ۴

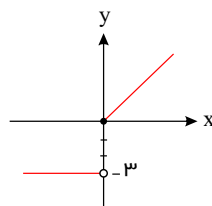
$$-1 < 0 : f(-1) = 2x + 3 \rightarrow f(-1) = -2 + 3 = 1$$

$$f(f(-1)) = f(1)$$

$$1 > 0 \rightarrow f(1) = x^2 - 1 = 1^2 - 1 = 1 - 1 = 0$$

۸ - گزینه ۳ دامنه تابع عبارتست از تصویر نمودار آن بر روی محور xها
برد تابع عبارتست از تصویر نمودار آن بر روی محور yها

$$\text{تابع } f(x) = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -3 & , x < 0 \end{cases} \text{ را رسم می کنیم:}$$

طبق شکل می بینیم برای $x \geq 0$ ، مقدار تابع در بازه $[0, +\infty)$ تغییر میکند و در ضابطه ی دوم وقتی $x < 0$ است مقدار تابع تنها عدد -3 است. پس برد تابع عبارت است از:

$$R_f = [0, +\infty) \cup \{-3\}$$

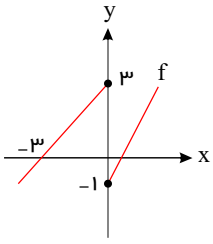
۹ - گزینه ۴ تابع $f(x) = k$ را که در آن k عددی حقیقی باشد، تابع ثابت نامیده می شود.

در بازه $[-1, 0]$ نمودار تابع به صورت خط افقی با عرض برابر با یک است. در بازه $[0, 3]$ نمودار تابع به صورت بخشی از سهمی به معادله $y_1 = x^2 - 1$ است. مقدار تابع y_1 در صفر برابر با -1 و در $x = 3$ برابر با 8 است. توجه کنید که چون $x = 0$ جزو بازه $[0, 3]$ نیست نمودار سهمی را در یک نقطه به صورت تو خالی رسم می کنیم. در بازه $(3, +\infty)$ نمودار تابع به صورت خطی افقی با عرض برابر با 2 است. توجه کنید که $x = 3$ نیز جزو بازه $(3, +\infty)$ نیست و خط در این نقطه باید تو خالی رسم شود. با توجه به توضیحات داده شده نمودار گزینه ی «۴» جواب است

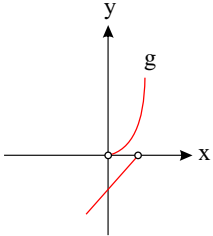
۱۰ - گزینه ۳ رابطه ای تابع است که هر خط عمودی (قائم)، نمودار آن را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

نمودار هر گزینه را رسم می کنیم:

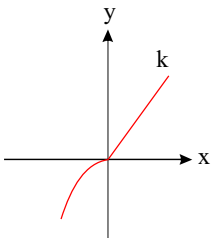
گزینه ی «۱»:



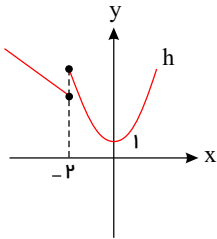
گزینه ۲:



گزینه ۳:



گزینه ۴:



با توجه به نمودارها، تنها گزینه‌ی ۳، تابع است.

۱۱ - گزینه ۳

می‌دانیم: تابع همانی تابعی است که به هر عضو از دامنه دقیقاً همان عضو را در برد نسبت می‌دهد. $(f(x) = x)$
 تابع ثابت تابعی است که به هر عضو از دامنه تنها یک عضو را در برد نسبت می‌دهد. $(f(x) = k(k \in \mathbb{R}))$

$$\text{همانی } f : f(-4) = -4 \Rightarrow -f(-4) = 4$$

$$\text{تابع ثابت } g : g(x) = -3 \Rightarrow g(-1) = -3 \Rightarrow 2g(-1) = -6 \Rightarrow |2g(-1)| = 6$$

$$|2g(-1)| - f(-4) = 6 + 4 = 10$$

۱۲ - گزینه ۲

می‌دانیم: تابع ثابت تابعی است که به هر عضو از دامنه تنها یک عضو را در برد نسبت می‌دهد. $(f(x) = k(k \in \mathbb{R}))$

$$f(x) = (2m - 4)x - m^2 + 3$$

$$2m - 4 = 0 \Rightarrow 2m = 4 \Rightarrow m = 2$$

$$f(x) = -4 + 3 = -1 \Rightarrow f(m^2 - 1) = -1$$

۱۳ - گزینه ۲

می‌دانیم: تابع همانی است که به هر عضو از دامنه دقیقاً همان عضو را در برد نسبت می‌دهد. $(f(x) = x)$
 تابع ثابت تابعی است که به هر عضو از دامنه تنها یک عضو را در برد نسبت می‌دهد. $(f(x) = k(k \in \mathbb{R}))$

$$f: f(11) = f(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} f(5) = 0 \Rightarrow a + b = 0 \\ f(2) = 0 \Rightarrow 2 - a = 0 \Rightarrow a = 2 \end{cases} \Rightarrow b = -2$$

$$g: g(x) = x = \frac{mx^3 + nx^2}{3x^2 - 2x} \Rightarrow mx^3 + nx^2 = 3x^3 - 2x^2 \Rightarrow \begin{cases} m = 3 \\ n = -2 \end{cases}$$

$$bm - na = -2 \times 3 - (-2) \times 2 = -6 + 4 = -2$$

۱۴ - گزینه ۱

می‌دانیم: تابع همانی تابعی است که به هر عضو از دامنه دقیقاً همان عضو را در برد نسبت می‌دهد. $(f(x) = x)$
تابع ثابت تابعی است که به هر عضو از دامنه تنها یک عضو را در برد نسبت می‌دهد. $(f(x) = k (k \in \mathbb{R}))$

$$\left. \begin{array}{l} \text{تابع همانی } f: f(7) = 7 \\ \text{تابع ثابت } g: g(5) = g(7) = 3 \Rightarrow -2g(7) = -6 \end{array} \right\} \Rightarrow -2g(f(7)) = -6$$

$$g(-2) = 3 \Rightarrow f(g(-2)) = f(3) = 3 \Rightarrow 4f(g(-2)) = -12$$

$$4f(g(-2)) - 2g(g(7)) = 12 - 6 = 6$$

$g(x)$ تابعی ثابت است هرگاه به فرم $g(x) = k$ باشد.

$f(x)$ تابعی همانی است هرگاه به فرم $f(x) = x$ باشد.

۱۵ - گزینه ۲ می‌دانیم:

$$g(x): \text{تابع ثابت} \Rightarrow g(x) = k \Rightarrow g(5) = k$$

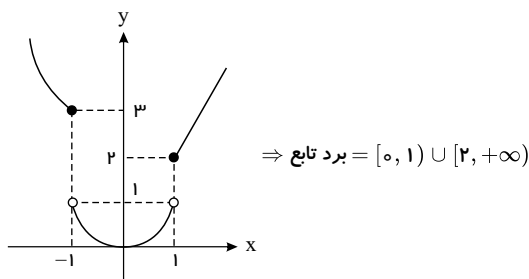
$$f(x): \text{تابع همانی} \Rightarrow f(5) = 5$$

$$\text{فرض: } \frac{k \times 5}{5 + k} = 1 \Rightarrow 5k = 5 + k \Rightarrow 4k = 5 \Rightarrow k = \frac{5}{4} \Rightarrow g(x) = \frac{5}{4}$$

$$\text{حکم: } \frac{f(4) + g(4)}{g(4) + 1} = \frac{4 + \frac{5}{4}}{\frac{5}{4} + 1} = \frac{7}{3}$$

۱۶ - گزینه ۱ بهترین روش تعیین برد این تابع، رسم نمودار آن است. به این صورت که ابتدا نمودار $y_1 = x^2 + 2$ را با شرط $x \leq -1$ سپس نمودار $y_2 = x^2$ را با شرط $1 < x < 1$ و در مرحله آخر نمودار تابع $y_3 = x + 1$ را با شرط $x \geq 1$ رسم می‌کنیم تا نمودار تابع اصلی به صورت زیر رسم گردد.

تصویر نمودار بر روی محور y ها، برد تابع را نتیجه می‌دهد.



۱۷ - گزینه ۲ چون f تابع ثابت است و عدد ۵ مؤلفه دوم یکی از زوج مرتب‌های تابع است، پس برد آن (۵) می‌باشد. در نتیجه $f(3) = 5$ می‌باشد و چون g تابع همانی است پس $g(-1) = -1$ است، در نتیجه:

$$f(3) - g(-1) = 5 - (-1) = 6$$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۱	۴ - ۱	۷ - ۴	۱۰ - ۳	۱۳ - ۲	۱۶ - ۱
۲ - ۲	۵ - ۴	۸ - ۳	۱۱ - ۳	۱۴ - ۱	۱۷ - ۲
۳ - ۴	۶ - ۴	۹ - ۴	۱۲ - ۲	۱۵ - ۲	