BT-S03 (2010/04/29)

به نام ِخداوند بخشنده‌یِ مهربان

پاسخ‌نامه یِ آزمونِ مرحله یِ دوم ؛

ششمین اُلِمپیادِ ملی یِ نجوم و اخترفیزیک

بهراد طوقی

Behrad@Toghi.org
http://www.Toghi.org

– پاسخِ سوالِ ۱ :

دستگاهِ مختصاتی به مرکزِ زمین می نهیم به طوری‌که بردار ِ مکانِ ناظر در صفحه یِ $x-z$ باشد؛ و محور ِ z آن در جهت قطبِ شمالِ سماوی باشد. $\vec{R}$ بردار ِ مکانِ ناظر و $\hat{r}$ جهتِ خورشید است.

$$\vec{R} = \cos\lambda\ \hat{i} + \sin\lambda\ \hat{k}$$

$$\hat{r} = \cos\gamma\cos(\beta-\phi)\ \hat{i} + \cos\gamma\sin(\beta-\phi)\ \hat{j} + \sin\gamma\ \hat{k}$$

شرطِ غروب ، عمود شدنِ این دو بردار است

$$\vec{R}.\hat{r} = ۰$$

$$\cos(\beta-\phi) = -\tan\gamma\tan\lambda$$

بردار ِ سرعتِ خورشید در آسمان در لحظه یِ غروب ، $\vec{v}$ ، هم بر مخروط مماس است ؛ از طرفی ضربِ چلیپایی یِ دو بردار ، برداری عمود بر هر دویِ آن‌ها می سازد

$$\hat{v} = -\sin(\beta-\phi)\ \hat{i} + \cos(\beta-\phi)\ \hat{j}$$

بردارِ عمود بر صفحه یِ دوم را با $\vec{n}$ نمایش می دهیم

$$\vec{n} \equiv \vec{v}\times\hat{r} \quad , \quad \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \equiv \hat{n}$$

$$\hat{n} = \sin\gamma\cos(\beta-\phi)\ \hat{i} + \sin\gamma\sin(\beta-\phi)\ \hat{j} - \cos\gamma\ \hat{k}$$

$$\psi = \gamma - \frac{\pi}{۲} \quad , \quad \chi = \beta - \phi$$

$$\hat{r}.\hat{n} = \cos\alpha = \sin\gamma\cos\lambda\cos(\beta-\phi) - \cos\gamma\sin\lambda$$

$$\cos\alpha = \sin\lambda\sec\gamma$$

— پاسخِ سوالِ ۲ :

شعاعِ مدارِ دایره ای یِ زمین (و البته همدم) را با r ، شعاعِ زمین را با R ، ضریبِ بازتابِ زمین و آینه را به ترتیب با α و $\widetilde{\alpha}$ ، و چگالی یِ شارِ خورشید بر سطحِ زمین را با $f_{\odot}$ ، که به صورتِ زیر تعریف می شود ، نمایش می دهیم .

$$f_{\odot} \equiv \frac{L_{\odot}}{۴\pi r^{۲}}$$

که $L_{\odot}$ در آن توانِ کلِ تابشی یِ خورشید است . $f_{\widetilde{E}}$ چگالی یِ شارِ نورِ همدم بر سطحِ زمین است.

$$\frac{f_{\widetilde{E}}}{f_{\odot}} = \pi R^{۲}\alpha \frac{۱+\sin\theta}{۲}\frac{۱}{۴\pi(۲r\sin\theta)^{۲}}A\widetilde{\alpha}\sin\theta\frac{۱}{۲\pi(۲r\cos\theta)^{۲}}(۱-\alpha)$$

$$= \frac{C}{[g_{(\theta)}]}$$

در رابطه هایِ بالا C یک عدد است و $g_{(\theta)}$ تابعی مانندِ زیر است

$$g_{(\theta)} \equiv \sin\theta - \sin^{۲}\theta$$

قدرِ همدم این‌گونه خواهد بود

$$m = m_{\odot} - ۲/۵\log\frac{f_{(\widetilde{E})}}{f_{\odot}}$$

$$= \widetilde{C} + ۲/۵\log[g_{(\theta)}]$$

که $\widetilde{C}$ هم یک عدد است .

– پاسخِ سوالِ ۳ :

شتاب در جهتِ عمود بر صفحه يِ مداری صفر است و مولفه يِ موازی با صفحه يِ مداری از نيرو يِ فشارِ تابشی کار ی انجام نمی دهد .

$$f_r = f_G \cos\theta$$

می دانيم که انرژی و تکانه یَ فوتون با رابطه يِ $E = pc$ به هم مربوط می شوند و از طرفی $f = \frac{dp}{dt}$ پس

$$f = \frac{dE}{dt}\frac{۱}{c} = \frac{P}{c}$$

در رابطه يِ بالا P کار ِ انجام شده طیِ انتقالِ تکانه يِ فوتون در واحدِ زمان است.

$$\frac{L}{۴\pi R^۲}\frac{A}{c}\cos^۲\theta\big[۲\alpha + (۱-\alpha)\big] = \frac{GMm}{R^۲}\cos\theta$$

$$A = \frac{۴\pi GMmc}{L(\alpha+۱)}\frac{۱}{\cos\theta}$$

در رابطه هایِ بالا ، L توانِ تابشی يِ کلِ خورشيد ، M جرمِ آن ، α ضريبِ بازتابِ بادبان ،و c سرعتِ نور است .

– پاسخِ سوالِ ۴ :

خواسته ي سوال واضح نيست اما حل را با فرض هايي پي مي گيريم ؛
اختلافِ زاويه ي ساعتي ي دو ستاره ثابت مي ماند.

$$\sin a = \sin\phi \sin\delta + \cos\phi \cos\delta \cos H$$

براي لحظه ي غروب داريم $a = ۰$ پس

$$\cos H^\circ = -\tan\phi \tan\delta$$

فرض كنيد داريم $\delta_۲ > \delta_۱$

$$-\cos^{-۱}(-\tan\phi\tan\delta_۱) + \cos^{-۱}(-\tan\phi\tan\delta_۲) = \cos^{-۱}(-\tan\phi\tan\delta_۱) - \frac{\pi}{۲}$$

$$\cos(۲\theta - \frac{\pi}{۲}) = \sin ۲\theta = ۲\sin\theta\cos\theta$$

$$-\tan\phi\tan\delta_۲ = ۲\sin(-\tan\phi\tan\delta_۱)\cos(-\tan\phi\tan\delta_۱)$$

اگر جوابِ معادله ي فوق را با $\widetilde{\phi}$ نمايش دهيم ، بازه ي موردنظر اين‌گونه خواهد بود

$$۰ < \phi < \widetilde{\phi}$$

– پاسخِ سوالِ ۵ :

بردار ِ سرعتِ کلِ خورشید را با $\vec{v_t}$ ، بردار ِ سرعتِ خورشید در کهکشان را با $\vec{v_s}$ ، و بردار ِ سرعتِ کهکشان را با $\vec{v_G}$ نمایش می دهیم .

$$\vec{v_t} = \vec{v_G} + \vec{v_s}$$

$$\vec{v_t} = v_t \cos b \cos l \ \hat{i} + v_t \cos b \sin l \ \hat{j} + v_t \sin b \ \hat{k}$$

$$\vec{v_s} = v_s \ \hat{j}$$

از طرفی می دانیم

$$-\frac{\Delta T}{T} = z$$

و

$$z = \sqrt{\frac{۱ + \frac{v}{c}}{۱ - \frac{v}{c}}}$$

پس

$$\left|\vec{v_t}\right| = ۳۶۸/۱ \ km.s^{-۱}$$

$$\vec{v_G} = v_t \cos b \cos l \ \hat{i} + (v_t \cos b \sin l - v_s) \ \hat{j} + v_t \sin b \ \hat{k}$$

$$\left|\vec{v_G}\right| = \sqrt{v_s^۲ + v_t^۲ - ۲ v_s v_t \cos b \sin l}$$

$$\left|\vec{v_G}\right| = ۵۴۰/۱ \ km.s^{-۱}$$

که البته اگر منظور سرعتِ کهکشان در خوشه یِ محلی باشد ، مقدارِ آن برابر $۶۲۷/۰ \ km.s^{-۱}$ می باشد .

– پاسخِ سوالِ ٦ :

از انحنا یِ سطحِ ماه و تغییر ِ مختصاتِ ماه‌مرکزی در محدوده یِ دهانه صرف‌نظر می کنیم. $\tilde{d}$ طولِ سایه یِ قله و d ارتفاعِ آن است.

$$\tilde{d} = \frac{۲۷۲}{۲۰۱۰} \times ۸۸ \times ۱۰^{۳} = ۱۱۹۰۸m$$

اگر z فاصله یِ سمت الراسی یِ خورشید از دیدِ ناظر ِ در قله باشد داریم

$$\cot z = \frac{d}{\tilde{d}} = \frac{۲۴۰۰ \times ۲۰۱۰}{۲۷۲ \times ۸۸ \times ۱۰^{۳}}$$

$$z = ۷۸.٦^{\circ}$$

خطِ واصلِ مرکزِ ماه وخورشید سطحِ ماه را در مکانی به مختصات $(\gamma, ۰)$ قطع می کند ؛ مثلثِ کروی ای که سه راسِ آن قطبِ شمالِ ماه ، جهتِ خورشید ، و قله باشد را در نظر بگیرید . از رابطه یِ کسینوس هایِ کروی برای این مثل داریم

$$\gamma = \cos^{-۱}\left[\frac{\cos z}{\cos \phi}\right] \pm l$$

که دو جوابِ این معادله این‌ها هستند

$$\gamma = ۸۵/۵^{\circ}\ ,\ ٦۳/۱^{\circ}$$

از طرفی کسر ِ روشنِ سطحِ ماه از دیدِ ناظر ِ زمینی (بر حسبِ درصد) با رابطه یِ زیر به γ مربوط می شود

$$P = \frac{۱ + \cos\gamma}{۲} \times ۱۰۰$$

در نتیجه

$$P = ۵۴\%\ ,\ ۷۳\%$$