مسئله‌ی خمِ کم‌ترین‌زمان

سوبرامانیان چاندراسِخار

دوست ندارم خارجی‌ها به خاطرِ ریاضیات مزاحمم شوند.
آیزاک نیوتُن‡ به جِی فْلَمستید‡ (در نامه ای به تاریخِ شانزدهمِ ژانویه‌ی 1699)

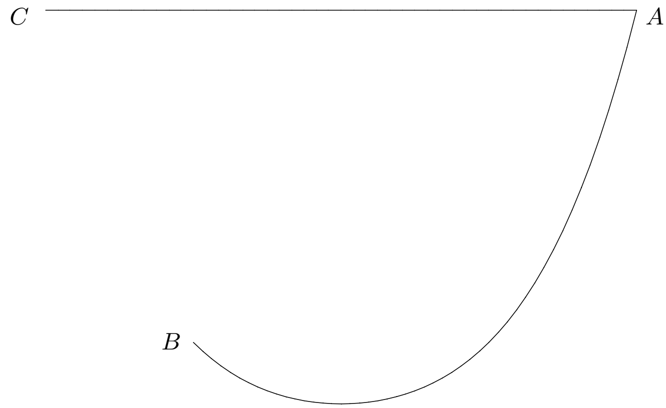
این متن ترجمه‌ی یک فصل از کتابی است که چاندراسِخار‡ از روی کتابِ پْرینکیپیا‡ی نیوتُن‡ تهیه کرده است. کتابِ چاندراسِخار‡ بازنویسیِ پْرینکیپیا‡ به زبانِ امروزی است.

٥ مقدمه

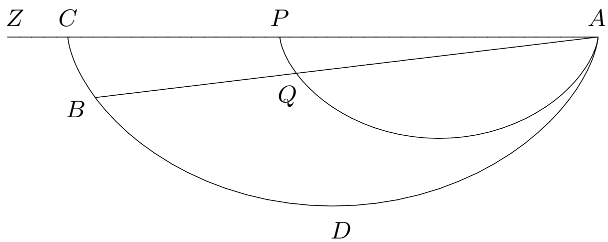
مسئله‌ی خمِ کم‌ترین‌زمان این است. فرض کنید A و B دو نقطه‌اند و A بالاتر از B است؛ و فرض کنید یک سیمِ هم‌وار در صفحه‌ی قائم این دو را به هم وصل می‌کند. ذره‌ای از حالتِ سکون در نقطه‌ی A، تحتِ گرانش روی سیم می‌لغزد و به سمتِ B می‌رود. مسئله یافتنِ خمی است که زمانِ سقوط روی آن کمینه باشد.

این مسئله را اولین بار یوهان بِرنویی‡ روزِ سالِ‌نوی 1697 به عنوانِ چالشی برای تیزترین ریاضی‌پیشه‌گانِ جهان مطرح کرد. (این در واقع یکی از دو مسئله‌ای بود که او طرح کرد.) منظورِ اصلیِ (؟) بِرنویی‡ در طرحِ این مسئله نمایشِ برتریِ ریاضی‌پیشه‌گانِ آلمانی‌ـ سوییسی به جهانیان بود. بِرنویی‡ هیچ پاسخ ی از هلند و فرانسه (؟) دریافت نکرد، پس مسئله را برایِ چارلز مُنتاگو‡ ــ رئیسِ آن موقعِ انجمنِ سلطنتی‌ــ فرستاد. به‌ترین روایت از بقیه‌ی داستان چیزی است که کَترین بارتِن (کاندویت)‡ ــ خواهرزاده‌یِ نیوتُن‡ــ حدوداً سی سال بعد نقل کرده است.

> بیست و نهمِ ژانویه‌ی 1697، [نیوتُن‡] در اوجِ اشتغال برای کارهای ضربِ سکه تا ساعتِ 4 [ــ بعد از ظهر] از برج به‌خانه‌اش [در خیابانِ جِرمین‡] نیامد. آن‌جا یک نامه‌یِ چاپی



شکل ۱



شکل ۲

شاملِ یک جفت مسئله از استادِ جوانِ خْرُنینخِن ــ یوهان بِرنویی[‡] ــ منتظرش بود. آدرسِ نامه کلی بود: به تیزترینِ ریاضی‌پیشه‌گانِ جهان. نیوتُن[‡] در حمله به مسئله تردید نکرد. در واقع (اگر داستانِ کَترین را ادامه دهیم) او تا ساعتِ 4 ـِ صبح که مسئله را حل کرد نخوابید.

[شاید لازم باشد در پرانتز بگوییم برایِ نیوتُنِ سالِ 1686 ــ که مسئله‌ی بسیار پیچیده‌ترِ دورانِ صلب با کم‌ترین مقاومت را حل کرده بود ــ این مسئله بچه‌بازی می‌بود. ظاهراً ده سال بعد ــ تحتِ فشارِ شغلِ ریاستِ ضرابخانه ــ بیش‌ترِ مدتِ آن شب تا ساعتِ 4 ـِ صبح را نیوتُن[‡] صرفِ حلِ آن مسئله کرده است. روشن است که حتا آن موقع هم نیوتُن[‡] فقط بخشی از جریانِ علمی نبود؛ همه‌ی جریان بود.]

پاسخِ نیوتُن[‡] به مونتاگو[‡] روزِ سی‌اُمِ ژانویه‌ی 1697 (روزِ بعد از دریافتِ نامه از مونتاگو) فرستاده شد و روزِ بیست‌وچهارُمِ فوریه‌ی 1697 در جلسه‌ی انجمنِ سلطنتی خوانده شد. این جواب بعداً بدونِ اسم در شماره‌ی ژانویه‌ی 1696/7 ـِ فیلاسُفیکال تْرَنزَکشِنز[‡] (جلدِ 17، شماره‌ی 224) چاپ شد.

حلِ نیوتُن‡ با آن سبکِ شاهانه‌اش این است:

از نقطه‌ی A خطِ راستِ نامحدودِ $APCZ$ را موازی‌یِ سطحِ افق بکشید. چرخ‌زادی مثلِ AQP بکشید که خطِ AB (یا امتدادیافته‌ی آن) را در نقطه‌ی Q قطع کند. سپس چرخ‌زادِ دیگری مثلِ ADC بکشید که نسبتِ قاعده و ارتفاعش به قاعده و ارتفاعِ چرخ‌زادِ قبلی (مثلاً $AC : AP$) مثلِ AB به AQ باشد. این چرخ‌زاد از نقطه‌یِ B می‌گذرد و خمی است که جرمی که تحتِ اثرِ گرانش حرکت می‌کند، از طریقِ آن در کوتاه‌ترین مدت از A به B می‌رسد؛ همان چیزی که به دنبالِ آن بودیم.

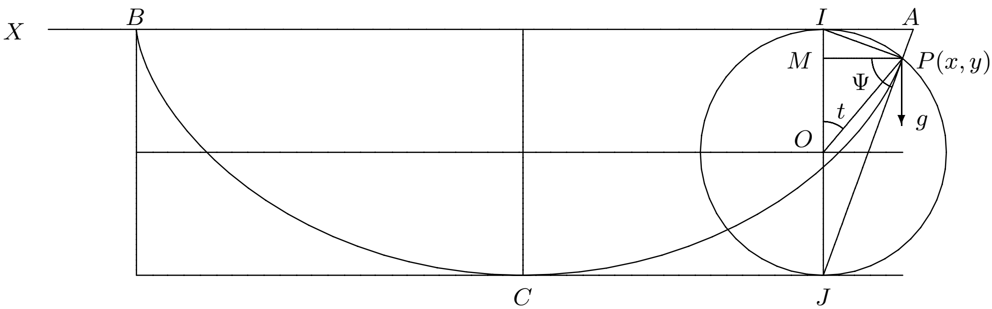
بِرنویی‡ با دیدنِ جواب ـــ که درست مثلِ دستورالعملی است که به یک بچه‌یِ کنج‌کاو می‌دهند ـــ فوراً فهمید مؤلف نیوتُن‡ است. بِرنویی‡ بعداً در نامه‌ای برای بَسانژ دُو بُوَل‡ نوشت:

به این ترتیب، آقایِ عزیز پس از آن که مسئله‌یِ من به هلند فرستاده شد و کسانِ زیادی آن را بررسی کردند، مسئله حل‌نشده ماند. پس آن را به انگلستان فرستادم. امیدِ زیاد ی داشتم آن‌جا این مسئله پایانِ به‌تر ی داشته باشد، زیرا انگلستان چند هندسه‌پیشه‌یِ عالی دارد که روش‌هایِ ما یا روش‌هایِ مشابهی را به کار می‌برند. در واقع شماره‌یِ ژانویه‌یِ فیلاسُفیکال تْرَنزَکشِنز‡ ـــ که محبت کرده‌اید و آن را برایم فرستاده‌اید ـــ نشان داد که اشتباه نکرده بودم، زیرا در این شماره یک راهِ ساختنِ خمِ سریع‌ترین سقوط آمده که مسئله را کاملاً حل می‌کند. اگر چه مؤلف با فروتنی‌یِ بیش از اندازه نامش را آشکار نکرده، می‌توان بی هیچ شکی مطمئن بود که مؤلف آقایِ نیوتُنِ‡ مشهور است: چون حتا اگر هیچ اطلاعِ دیگری جز این نمونه هم نمی‌داشتیم، او را از سبکش می‌شناختیم، چنان که شیر را از ردِ پنجه‌اش. ... فقط کاش آقای نیوتُن‡ راه‌حل و روشی را که با آن به خمِ موردِنظر رسیده منتشر کرده بود ....

۱ راه‌حلِ بی‌نامِ نیوتُن‡

این گله‌یِ برنویی‡ که نیوتُن‡ راه‌حلش را باز نکرده تا حد ی عجیب است. راه‌حل باید برای هر کسی که با نتیجه‌یِ L ـِ کتابِ I ـِ پْرینکیپیا‡ آشنا باشد بدیهی بنماید: به‌نوسان‌درآوردنِ یک جسم رویِ یک چرخ‌زاد مثلِ لغزیدنِ یک جسم تحتِ گرانش [و نیرویِ عمود بر سطحِ چرخ‌زاد] رویِ آن چرخ‌زاد است. نیوتُن‡ حتماً این مطلب را فوراً دریافته است [۱].

در شکلِ ۳، مسیرِ نقطه‌ی P روی محیطِ دایره‌یِ IPJ به شعاعِ $OP = a$ ـ که به طورِ یک‌نواخت



شکل ۳

روی خطِ افقیِ $AIBX$ می‌غلتد ـــ چرخ‌زادِ ACB است. فرض کنید بر حسبِ رادیان $t = \angle MOP$. در این صورت

$$AI = \text{arc } PI = at \tag{1}$$

(x, y) مختصاتِ دکارتی‌یِ نقطه‌یِ P، به‌ساده‌گی به دست می‌آید:

$$x = at - a\sin t = a(t - \sin t) \tag{2}$$

و

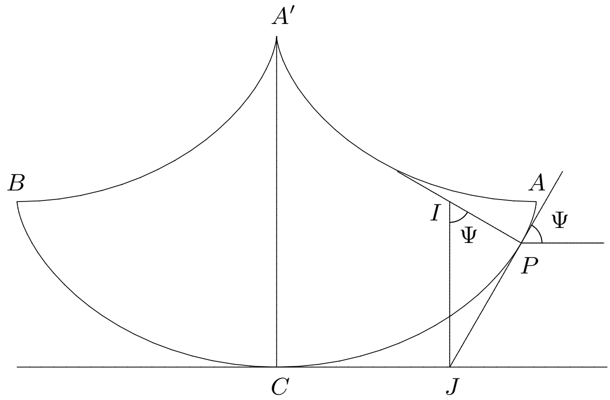
$$y = a - a\cos t = a(t - \cos t) \tag{3}$$

یکی از نتیجه‌هایی که بلافاصله از نمایشِ پارامتری‌یِ چرخ‌زاد به دست می‌آید این است که همه‌یِ چرخ‌زادها متشابه اند. ساختارِ حلِ نیوتُن‡ بر این اساس استوار است. می‌ماند نشان دهیم که ذره ـــ بدونِ کمکِ فرشته‌گان ـــ تحتِ گرانش روی چرخ‌زاد می‌لغزد. (فعلاً به خاصیتِ خمِ کم‌ترین‌زمانِ چرخ‌زاد کاری نداریم.)

مرکزِچرخشِ آنی‌یِ دایره‌یِ غلتان I است. پس جهتِ حرکتِ P بر PI عمود است، یعنی به طرفِ J است ـــ سرِ دیگرِ قطری که از I می‌گذرد. پس PJ مماسِ بر خم و PI عمود بر خم در نقطه‌یِ P اند. مؤلفه‌یِ شتاب‌ِناشی‌ازگرانشِ نقطه‌یِ P، در جهتِ حرکتش

$$g\sin\angle MPJ = g\sin\psi \tag{4}$$

است. مؤلفه‌یِ شتاب در راستایِ عمودبرسیمِ PI را سیم تأمین می‌کند. [شتابی که از (4) به دست می‌آید همان شتابِ مماسی‌ای است که از معادله‌های (2) و (3) به دست می‌آید. مترجم.]



شکل ۴

از معادله‌ی (4) نتیجه‌های دیگر ی هم به دست می‌آید. چون

$$g\sin\psi = g\frac{PJ}{IJ} = \frac{g}{2a}PJ = \frac{g}{4a}\text{arc } CP \tag{5}$$

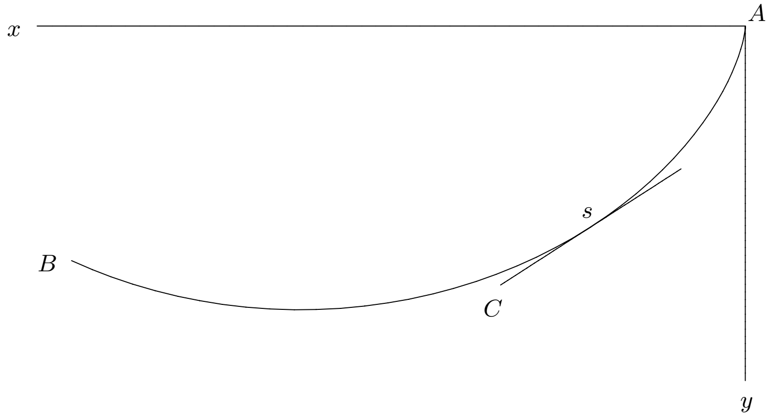
حرکت P در راستایِ خمِ ACB یک حرکتِ نوسانیِ ساده با دوره‌یِ $2\pi\sqrt{4a/g}$ است. یعنی دوره‌یِ حرکت مستقل از نقطه‌ی شروعِ حرکت است.

نقطه‌ی P، اگر به جایِ لغزیدن رویِ چرخ‌زاد با ریسمانِ $A'C$ به A' وصل باشد ــ نقطه‌یِ A' نقطه‌ی تیزی است که در آن دو شاخه‌یِ برابرِ $A'A$ و $A'B$ از یک چرخ‌زاد به هم می‌رسندــ و مقید باشد بینِ کمان‌هایِ چرخ‌زادی‌یِ $A'A$ و $A'B$ حرکت کند، همان حرکتی را خواهد داشت که در پاراگرافِ قبل توصیف شد. این آونگِ چرخ‌زادی‌یِ هویگِنس[‡] است. این آونگ خاصیتِ هم‌زمانی دارد، یعنی دوره‌یِ آن مستقل از دامنه‌اش است.

همه‌یِ مطالبِ بالا در نتیجه‌هایِ L تا LII ــ کتابِ I ــ پْرینکیپیا[‡] آمده است.

۲ راهِ‌حلی که از بیشینه‌گی به دست می‌آید

کاملاً محتمل است نیوتُن[‡] ابتدا جوابِ مسئله‌یِ برنویی[‡] را با یک نگاه ــ به همان شکلی که در بخشِ قبل دیدیمــ به دست آورده باشد، اما در عینِ حال باید فهمیده باشد که این حل به خودی‌یِ‌خود به خاصیتِ کم‌ترین زمان منجر نمی‌شود؛ و این که او نهایتاً باید همان روشی را به کار بَرَد که قبلاً برایِ حلِ مسئله‌یِ دورانِ صلبِ با کمترین مقاومت به کار برده بود. نیوتُن[‡] در نامه ای به فَتیو دو دوییِر[‡] و دِیوید



شکل ۵

گْریگُری[‡] چه‌گونه‌گی‌یِ استفاده از آن روش برایِ حلِ این مسئله را توضیح داده است. این نامه موجود است. اما اول مسئله را به زبانِ امروزی حل می‌کنیم.

خمِ هم‌واری را در نظر بگیرید که A را به B وصل می‌کند. A بالاتر از B است و ذره‌ای از حالتِ سکون در A شروع به حرکت می‌کند و تحتِ گرانش روی این خم می‌لغزد. میدانِ گرانشی در جهتِ y است. مسئله یافتنِ خمی است که زمانِ سقوطِ ذره رویِ آن تا نقطه‌یِ B کمینه باشد. فرض می‌کنیم مختصه‌هایِ x و y ـِ ذره تابعِ هم‌واری از s ـــ طولِ‌قوسِ خمـــ باشد، و

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \tag{6}$$

هم‌چنین، تعریف می‌کنیم

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt}, \quad \Longrightarrow ds = dt\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \tag{7}$$

در نتیجه‌یِ XL ـِ کتابِ I ثابت شده سرعتِ ذره ای که از حالتِ سکون به ارتفاعِ y سقوط می‌کند مستقل از جابه‌جایی‌یِ عرضیِ آن و برابرِ $\sqrt{2gy}$ است. پس زمانِ سقوطِ از A تا B می‌شود

$$t = \int_A^B \frac{ds}{\sqrt{2gy}} \tag{8}$$

از سویِ دیگر، بر اساسِ تعریف‌هایِ (6) و (7)،

$$ds = dt\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \dot{y}dt\sqrt{1 + \dot{x}^2/\dot{y}^2} = dy\sqrt{1 + (dx/dy)^2} \tag{9}$$

پس داریم

$$t = \int_A^B \left(\frac{1+x'^2}{2gy}\right)^{1/2} dy \tag{10}$$

که در آن

$$x' = \frac{dx}{dy} \tag{11}$$

تغییرِزمانِ کل در اثرِ تغییرِمسیرِ $\delta x(y)$ را δt می‌گیریم. این تغییرِمسیر، در هر نقطه‌یِ $x(y)$ دل‌بخواه است، جز در A و B ــ نقاطِ انتهاییِ مسیرــ که در آن‌جا صفر است. چون

$$\delta x' = \delta \frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy}\delta x = (\delta x)' \tag{12}$$

از رابطه‌ی (10) به دست می‌آوریم

$$\delta t = \int_A^B \frac{x'\delta x'}{[2gy(1+x'^2)]^{1/2}} dy = \int_A^B \frac{x'}{[2gy(1+x'^2)]^{1/2}} \frac{d}{dy}(\delta x) dy \tag{13}$$

با یک انتگرال‌گیریِ جزءبه‌جزء نتیجه می‌شود

$$\delta t = \left. \frac{x'\delta x'}{[2gy(1+x'^2)]^{1/2}} \right|_A^B - \int_A^B \delta x \left\{ \frac{d}{dy} \frac{x'}{[2gy(1+x'^2)]^{1/2}} \right\} dy \tag{14}$$

بخشِ انتگرال‌گیری‌شده صفر می‌شود، چون در نقاطِ A و B داریم $\delta x = 0$. پس

$$\delta t = -\int_A^B \delta x \left\{ \frac{d}{dy} \frac{x'}{[2gy(1+x'^2)]^{1/2}} \right\} dy \tag{15}$$

اگر خمِ انتخاب‌شده همان خمِ تندترین‌سقوط باشد، δt باید به ازای هر $\delta x(y)$ ای صفر شود. پس شرطِ این که خمِ انتخاب‌شده خاصیتِ فرینه‌بودن را داشته باشد این است که

$$\frac{d}{dy} \frac{x'}{[2gy(1+x'^2)]^{1/2}} = 0 \tag{16}$$

یا

$$x' = C[2gy(1+x'^2)]^{1/2} \tag{17}$$

که C مقداری ثابت است. رابطه‌یِ (17) را می‌شود به این شکل در آورد.

$$(a-y)\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = y, \qquad a = 1/(2gC^2) \tag{18}$$

یا،

$$\frac{dx}{dy} = \left(\frac{y}{a-y}\right)^{1/2} \tag{19}$$

به‌ساده‌گی می‌شود تحقیق کرد جوابِ این معادله

$$x = \frac{1}{2}(a - \sin t), \qquad y = \frac{1}{2}a(1 - \cos t) \tag{20}$$

است.

۳ راهِ‌حلِ نیوتُن

نیوتُن[‡] با انتگرالِ (8) شروع کرد ــ که باید کمینه می‌شدــ و آن را به این شکل نوشت.

$$\int_0^{\tau} F(t)\, dt \tag{21}$$

که در آن،

$$F = \left(\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2gy}\right)^{1/2} \tag{22}$$

با نمادگذاری‌یِ فْلوکسی‌[‡] نیوتُن[‡] (و با حذفِ ضریبِ $(2g)^{-1/2}$)، داریم

$$F = \left[\frac{1}{y}(dx^2 + dy^2)\right]^{1/2} \tag{23}$$

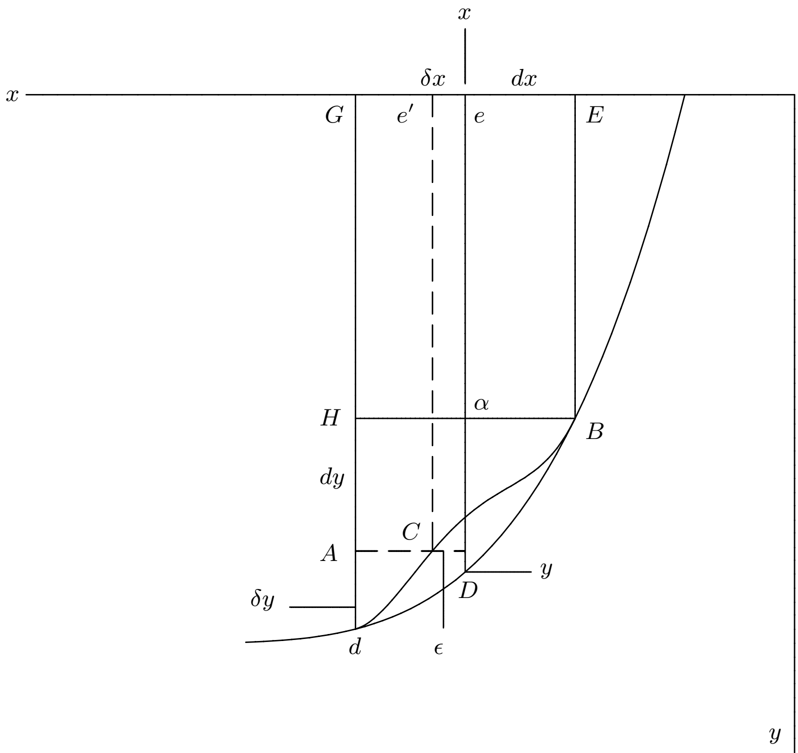
در شکلِ ٦

$$eD = y, \quad Ee = B\alpha = dx, \quad AH = D\alpha = dy \tag{24}$$

با تعریف‌هایِ

$$eG = DA = \delta x, \quad Ad = \delta y, \quad CD = e'e = \epsilon \tag{25}$$

روش نیوتُن[‡] می‌شود مقایسه‌یِ سهمِ بخشِ $BDdGE$ و بخشِ $BCdGE$ از قوسِ کمی‌جابه‌جاشده‌یِ BCd در انتگرال‌ده.



شکل ٦

سهمِ قوس‌هایِ BDd (جمعِ سهمِ ذوزنقه‌هایِ $DeEB$ و $dGeD$) و BCd (جمعِ سهمِ ذوزنقه‌هایِ $Ce'EB$ و $dGe'C$) در انتگرال‌ده، به ترتیب متناسب اند با

$$\frac{1}{\sqrt{y}}[(dx)^2 + (dy)^2]^{1/2} + \frac{1}{\sqrt{y+\delta y}}[(dx+\delta x)^2 + (dy)^2]^{1/2} \tag{26}$$

و

$$\frac{1}{\sqrt{y}}[(dx+\epsilon)^2 + (dy)^2]^{1/2} + \frac{1}{\sqrt{y+\delta y}}[(dx+\delta x-\epsilon)^2 + (dy)^2]^{1/2} \tag{27}$$

شرطِ آن که انتگرالِ Fـِ تعریف شده در (23) یک کمینه‌یِ موضعی باشد آن است که

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{y}} \quad & \{[(dx+\epsilon)^2 + (dy)^2]^{1/2} - [(dx)^2 + (dy)^2]^{1/2}\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{y+\delta y}}\{[(dx+\delta x)^2 + (dy)^2]^{1/2} - [(dx+\delta x-\epsilon)^2 + (dy)^2]^{1/2}\}\end{aligned} \tag{28}$$

در حدِ $\epsilon \to 0$ نتیجه می‌شود

$$\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{\partial}{\partial(dx)}[(dx)^2 + (dy)^2]^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{y+\delta y}}\frac{\partial}{\partial(dx)}[(dx+\delta x)^2 + (dy)^2]^{1/2} \tag{29}$$

این تساوی باید برایِ هر نِمُوِ دل‌به‌خواهِ δx و δy درست باشد. پس،

$$\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{\partial}{\partial(dx)}[(dx)^2+(dy)^2]^{1/2} = \text{ثابت} \tag{30}$$

یا ــ در نمادگذاری‌یِ رایج‌ــ

$$\frac{1}{\sqrt{2gy}}\frac{\partial}{\partial(\dot{x})}[(\dot{x})^2+(\dot{y})^2]^{1/2} = \text{ثابت} \tag{31}$$

که در آن ضریبِ $\frac{1}{\sqrt{2g}}$ را هم دوباره وارد کرده ایم. با انجامِ مشتق‌گیری، به همان رابطه‌یِ (17) می‌رسیم:

$$\frac{\dot{x}}{\sqrt{2gy[\dot{x}^2+\dot{y}^2]}} = \text{ثابت} \tag{32}$$

حالا دوباره می‌شود حل را مثلِ قبل کامل کرد.

ترجمه‌یِ امیرِ آقامحمّدی

Subramanian Chandrasekhar; “The problem of brachistochrone” in “Newton’s Principia for the common reader”, (Oxford University Press, 1996) 571–578

۴ یادداشت

[۱] ظاهراً لَیبنیتس‡ متوجهِ رابطه‌یِ بین این مسئله و نتیجه‌ی L ـِـ کتابِ I نشده بود، که با بی‌احتیاطی گفته بود فقط خبره‌های حساب می‌توانند از پسِ این مسئله بر آیند. نه این که حسابان برای حلِ این مسئله اصلاً لازم نیست، ولی ارتباطِ این مسئله با چرخ‌زاد می‌بایست برای هر کسی که بینشِ کافی داشته باشد واضح باشد.