

سیستم های دیجیتال ۱ (مدار منطقی)

فصل اول

سیستم اعداد

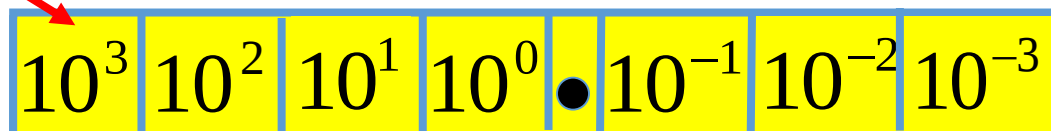
اعداد دسیمال (DECIMAL) یا دهدهی (مبنای ۱۰)

پایه (مبنا) ۱۰ است و ارقام ۰، ۱، ... ۹ می باشند.

۱-۱۰ = ارقام مورد استفاده

هر محل (مکان رقم) دارای یک وزن است:

Weights: وزن



به عنوان مثال عدد ۱۹۳۶/۲۵ را می توان به صورت زیر نمایش داد:

$$1 \times 10^3 + 9 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 6 \times 10^0 + 2 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2}$$

سیستم عدد نویسی باینری (BINARY) یا دودویی (مبنای ۲)

- پایه (مبنا) ۲ است و ارقام ۰، ۱ هستند.
- ۱-۲ = ارقام مورد استفاده

جمع اعداد باینری

$$\begin{array}{r} 111111 \\ + 111011 \\ \hline 1010100 \end{array}$$

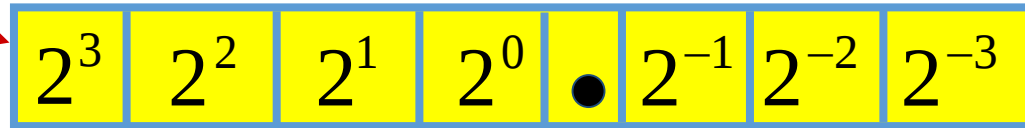
تفریق اعداد باینری

$$\begin{array}{r} 12 \\ 022002 \\ - 100111 \\ \hline 0110110 \end{array}$$

تبدیل مبنای ۲ به ۱۰

- هر محل دارای یک وزن است وزن در مبنای باینری با پایه ۲ می باشد:

Weights وزن



به عنوان مثال عدد ۱۰۱۱۱/۰۱ در مبنای ۲ را می توان به صورت زیر در مبنای ۱۰ محاسبه کرد:

$$1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 + 0 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} =$$

$$= 1 \times 16 + 0 \times 8 + 1 \times 4 + 1 \times 2 + 1 \times 1 + 0 \times 0.5 + 1 \times 0.25 = 23.25$$

سیستم عدد نویسی اکتال (OCTAL) یا هشتایی (مبنای ۸)

پایه ۸ است و رقمها ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷ هستند.
مثال:

$$\begin{array}{r} 111 \\ 73403 \\ + 77451 \\ \hline 173054 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0\text{ }9 \\ 2\text{ }1\text{ }1\text{ }7\text{ }5 \\ - 1\text{ }0\text{ }5\text{ }1\text{ }3 \\ \hline 1\text{ }0\text{ }4\text{ }6\text{ }2 \end{array}$$

تبدیل مبنای ۸ به ۱۰

✓ وزن هر مکان در مبنای اکتال، پایه ۸ است.

$$(236.4)_8 = (?)_{10}$$

✓ به عنوان مثال عدد ۲۳۶/۴ را می توان به صورت زیر در مبنای ۱۰ محاسبه کرد:

$$2 \times 8^2 + 3 \times 8^1 + 6 \times 8^0 + 4 \times 8^{-1} = 158.5$$

سیستم عدد نویسی هگزادسیمال (HEX) یا ۱۶ تایی (مبنای ۱۶)

پایه (مبنا) ۱۶ است.

۱-۱۶ = ارقام مورد استفاده (از ۰ تا ۱۵ عددهای مورد استفاده می باشند)

رقمهای ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ از سیستم دهی قرض گرفته شده اند و از A, B, C, D, E, F به

ترتیب برای نمایش رقمهای ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵ استفاده می گردد.

0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F

A=10

B=11

C=12

D=13

E=14

F=15

تبدیل مبنای ۱۶ به ۱۰

✓ وزن هر مکان در مبنای HEX، پایه ۱۶ است.

$$✓ (D63FA)_{16} = (?)_{10}$$

$$13 \times 16^4 + 6 \times 16^3 + 3 \times 16^2 + 15 \times 16^1 + 10 \times 16^0 = 877562$$

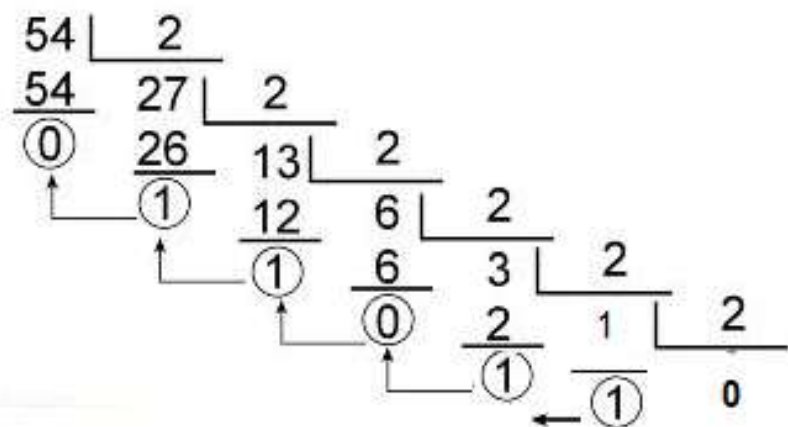
$$(D63FA)_{16} = (877562)_{10}$$

تبدیل از مبنای ده به مبنای دو

روش محاسبه: قسمت صحیح تقسیمات متوالی بر ۲ تا هنگامی که خارج قسمت برابر صفر شود و سپس نوشتن باقیمانده ها از سمت راست به چپ

قسمت اعشاری ضرب متوالی در ۲ به تعداد رقم اعشار و نوشتن عدد صحیح

مثال ۱: عدد $۵۴/۸۵۴۲$ از مبنای ۱۰ به عدد ۲ تبدیل کنید.



$$0.8542 \times 2 = \underline{1} + 0.7084$$

$$0.7084 \times 2 = 1 + 0.4168$$

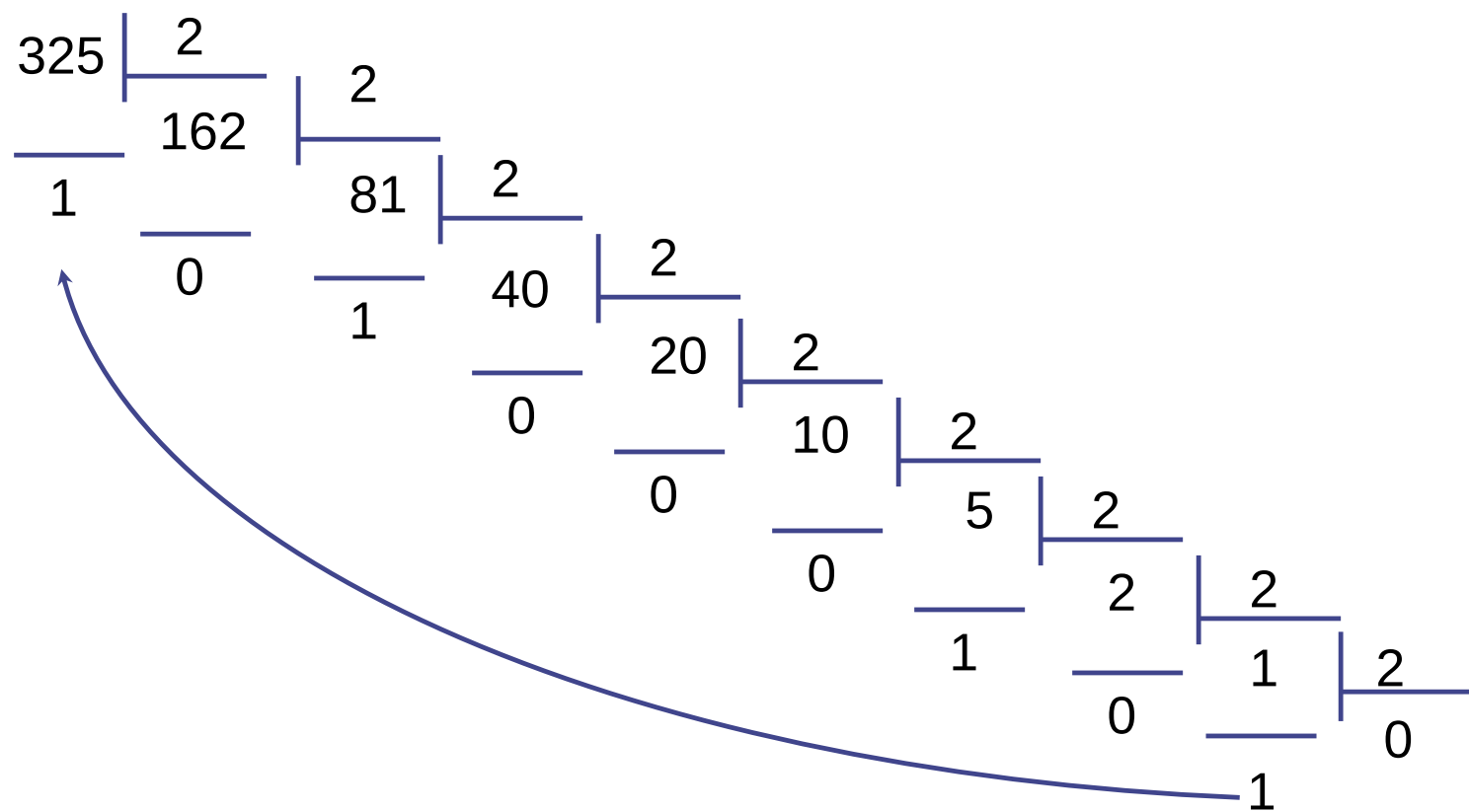
$$0.4168 \times 2 = 0 + 0.8336$$

$$0.8336 \times 2 = 1 + 0.6672$$

$$(54.8542)_{10} = (110110.1101)_2$$

مثال ٢

$$(325)_{10} \rightarrow (101000101)_2$$



تبدیل از مبنای ۱۰ به مبنای ۸

روش محاسبه: قسمت صحیح تقسیمات متوالی بر ۸ تا هنگامی که خارج قسمت برابر صفر شود و سپس نوشتن باقیمانده ها از سمت راست به چپ،

قسمت اعشاری ضرب متوالی در ۸ به تعداد رقم اعشار و نوشتن عدد صحیح
(مثال)

$$(175.3125)_{10} = (?)_8$$

	باقیمانده	خارج قسمت
175 / 8 =	7	21
21 / 8 =	5	2
2 / 8 =	2	0

$$(175)_{10} = (257)_8$$

اعشار	صحیح
0.3125 * 8 =	2 . 5
0.5 * 8 =	4 . 0

$$(175.3125)_{10} = (257.24)_8$$

$$(0.3125)_{10} = (0.24)_8$$

تبدیل از مبنای ۱۰ به مبنای ۱۶

روش محاسبه: قسمت صحیح تقسیمات متوالی بر ۱۶ تا هنگامی که خارج قسمت برابر صفر شود و سپس نوشتن باقیمانده ها از سمت راست به چپ،
قسمت اعشاری ضرب متوالی در ۱۶ به تعداد رقم اعشار و نوشتن عدد صحیح

مثال:

$$(3567)_{10} = (?)_{16}$$

	باقیمانده	خارج قسمت
$3567 / 16 =$	222	$15=F$
$222 / 16 =$	13	$14=E$
$13 / 16 =$	0	$13=D$

$$(3567)_{10} = (DEF)_{16}$$

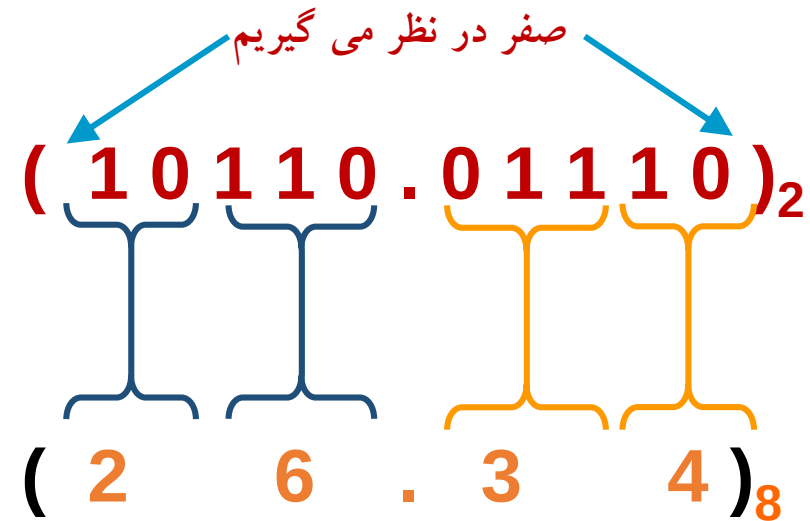
$$8 = 2^3$$

تبدیل باینری به اکتال
مبنای ۲ به ۸

روش محاسبه: قسمت عدد صحیح را از ممیز ۳ رقم به سمت چپ جدا میکنیم و معادل آن را از جدول تبدیلات مینویسیم.

قسمت اعشار را از ممیز به سمت راست ۳ رقم جدا میکنیم و معادل آن را از جدول تبدیلات مینویسیم.

مثال



تبدیل اکتال به باینری:

روش محاسبه: به ازاء هر عدد اکتال معادل باینری آن را از جدول روبرو می نویسیم.

$$(356.7)_8 = (011\ 101\ 110\ .111)_2$$

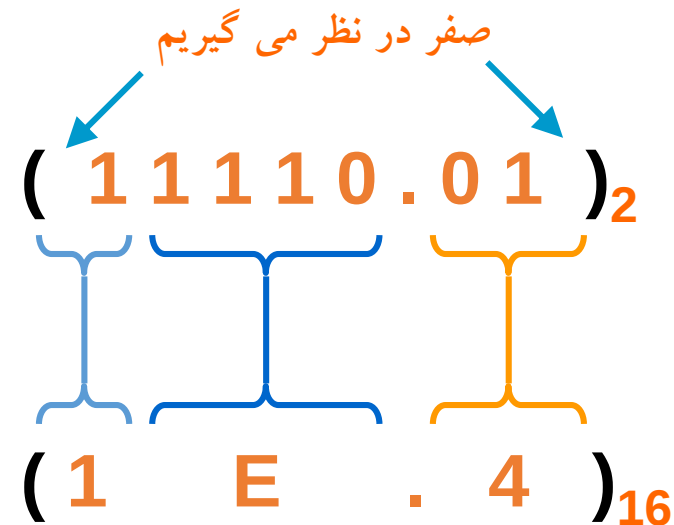
$$16 = 2^4$$

تبدیل باینری به هگز

روش محاسبه: قسمت عدد صحیح را از ممیز ۴ رقم ۴ رقم به سمت چپ جدا میکنیم و معادل آن را از جدول تبدیلات مینویسیم.

قسمت اعشار را از ممیز به سمت راست ۴ رقم ۴ رقم جدا میکنیم و معادل آن را از جدول تبدیلات مینویسیم.

مثال



تبدیل هگز به باینری:

روش محاسبه: به ازاء هر عدد اکتال معادل باینری آن را از جدول روبرو می نویسیم.

$$(A4F.7)_{16} = (1010\ 0100\ 1111\ .\ 0111)_2$$

Hex	Binary
0	0 0 0 0
1	0 0 0 1
2	0 0 1 0
3	0 0 1 1
4	0 1 0 0
5	0 1 0 1
6	0 1 1 0
7	0 1 1 1
8	1 0 0 0
9	1 0 0 1
A	1 0 1 0
B	1 0 1 1
C	1 1 0 0
D	1 1 0 1
E	1 1 1 0
F	1 1 1 1

• مکمل گیری

در کامپیوترهای دیجیتالی از تکنیک مکمل گیری برای انجام عمل تفریق یا عملیات منطقی استفاده می کنند.
دو نوع مکمل گیری داریم، هر عدد در مبنای r دارای مکمل r و $r-1$ است:

اعداد دهدهی ← مکمل ۹ و مکمل ۱۰

اعداد باینری ← مکمل ۱ و مکمل ۲

مکمل $r-1$:

اگر عدد N در پایه r دارای n رقم باشد مکمل $r-1$ آن برابر است با:

$$(r^n - 1) - N$$

مکمل r : اگر عدد N در پایه r دارای n رقم باشد مکمل $r-1$ آن برابر است با:

$$(r^n - N)$$

• مکمل ۹ عدد دهدهی N برابر است با: $(10^n - 1) - N$

• مکمل ۱۰ عدد دهدهی N برابر است با: $10^n - N$

مثال مکمل اعداد مبنای ۱۰:

✓ مکمل ۹ عدد ۱۲۳۴۵ : $(10^5 - 1) - 12345 = 87654$

✓ مکمل ۹ عدد ۰۱۲۳۴۵ : $(10^6 - 1) - 012345 = 987654$

✓ مکمل ۱۰ عدد ۷۳۹۸۲۱ : $10^6 - 739821 = 260179$

✓ مکمل ۱۰ عدد ۲۵۰۰ : $10^4 - 2500 = 7500$

✓ مکمل ۹ و ۱۰ عدد ۰۰۰۰۰۰۰۰ را پیدا کنید:

99999999 and 00000000 : جواب

مکمل ۱ عدد باینری N برابر است با: $(2^n - 1) - N$

• مکمل ۲ عدد باینری N برابر است با: $2^n - N$

- برای پیدا کردن مکمل ۱ یک عدد باینری تمام ۰ ها را یک و تمام ۱ ها را به ۰ تبدیل کنید.
- برای پیدا کردن مکمل ۲، مکمل ۱ را با ۱ جمع کنید.
- یک راه دیگر این است که اولین ۱ را از سمت راست پیدا کرده و تمام ارقام بعد از آن را معکوس کنید.

مثال: • مکمل ۱ عدد 1101011 برابر است با 0010100

• مکمل ۲ عدد 0110111 برابر است با 1001001

• مکمل ۱ و ۲ عدد 10000000 را پیدا کنید:

جواب: 01111111 و 10000000

استفاده از مکمل گیری برای تفریق اعداد بدون علامت

$$\begin{array}{r}
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \hline

 \end{array}$$

۶ ۱۲ ۴ ۱۳
~~۷~~ ~~۲~~ ~~۵~~ ~~۳~~ ۲
 ۳ ۲ ۵ ۰
 —————
 ۶ ۹ ۲ ۸ ۲

- روش تفریق که تا کنون یاد گرفته اید استفاده از رقم قرضی است.
- ولی در مواقعی که تفریق با سیستمهای دیجیتالی پیاده سازی شود به کار بردن مکملها آسانتر از راه قبلی است.

- تفریق دو عدد n رقمی و بدون علامت $(M-N)$ در مبنای r
- روش کار:

• M را با مکمل r عدد N جمع کنید: $M + (r^n - N)$

• اگر $M \geq N$ نتیجه جمع دارای رقم نقلی خواهد بود که از آن صرفنظر می کنیم.

• اگر $M \leq N$ نتیجه جمع دارای رقم نقلی نخواهد بود و نتیجه منفی است. لذا عدد را دوباره به فرم مکمل

دو تبدیل کنید تا متوجه شوید که نتیجه حاصله منفی، چه عددی است.

مثال ۱)

با به کار بردن مکمل ۱۰، تفریق ۷۲۵۳۲-۳۲۵۰ را انجام دهید.

$$M = 72532 \quad N = 3250 \quad M > N$$

• روش کار:

• M را با مکمل ۱۰ عدد N ، جمع کنید:

• $M \geq N$ می باشد در نتیجه نتیجه جمع دارای رقم نقلی خواهد بود که از آن صرفنظر می کنیم.

۷۲۵۳۲

N مکمل ۱۰ عدد N = + ۹۶۷۵۰

حاصل جمع = ۱۶۹۲۸۲

حذف رقم نقلی = - ۱۰۰۰۰۰

جواب = ۶۹۲۸۲

بیت نقلی وجود دارد و از آن صرفنظر میشود

دقت کنید که M دارای پنج رقم ولی N فقط دارای چهار رقم است. چون هر دو عدد

باید دارای تعداد ارقام برابر باشند، پس باید بصورت ۰۳۲۵۰ نوشته می شود.

مثال ۲

- با به کار بردن مکمل ۱۰، تفریق ۷۲۵۳۲-۳۲۵۰ را انجام دهید.

$$N = ۷۲۵۳۲ \quad M = ۳۲۵۰ \quad M < N$$

$$M = ۰۳۲۵۰$$

$$N \text{ عدد } ۱۰ \text{ مکمل} = + ۲۷۴۶۸$$

$$\text{حاصل جمع} = ۳۰۷۱۸$$

بیت نقلی وجود ندارد

$$- ۶۹۲۸۲ = (\text{مکمل } ۱۰ \text{ عدد } ۳۰۷۱۸) - : \text{ جواب}$$

- روش کار:

$$M \text{ را با مکمل } ۱۰ \text{ عدد } N \text{ جمع کنید: } 03250 + (10^5 - 72532)$$

- $M \leq N$ نتیجه جمع دارای رقم نقلی نخواهد بود و نتیجه منفی است. لذا عدد را دوباره به فرم مکمل دو تبدیل کنید تا متوجه شوید که نتیجه حاصله منفی چه عددی است.

✓ انجام تفریق 150 - 2100 با استفاده از مکمل ۱۰

$$M=150$$

$$N = \underline{7900} \text{ مکمل } ۱۰$$

نتیجه منفی است → بیت نقلی یا سرریز ندارد

$$\text{جمع} = 8050$$

$$\text{جواب} = - (\text{مکمل } ۱۰ \text{ عدد } ۸۰۵۰) = - ۱۹۵۰$$

$$X=1010100 \quad Y=1000011$$

مثال) تفریق دو عدد باینری

(الف) $X-Y$ و (ب) $Y-X$ را با استفاده از مکمل ۲ بدست آورید .

الف

$$X = 1010100$$

$$\text{مکمل ۲ عدد } Y = \underline{+0111101}$$

$$\text{حاصل جمع} = \overset{\circ}{0}0010001$$

$$\text{رقم نقلی حذف شده } 2^7 = \underline{-1000000}$$

$$\text{جواب } X-Y = 0010001$$

ب

$$Y = 1000011$$

$$\text{مکمل ۲ عدد } X = \underline{+0101100}$$

$$\text{حاصل جمع} = 1101111$$

رقم نقلی وجود ندارد

$$Y-X = -(\text{مکمل ۲ عدد } 1101111) = -0010001$$

تفریق اعداد بدون علامت می تواند با استفاده از مکمل (R-۱) نیز انجام شود . بخاطر

بیاورید که مکمل (R-۱) یکی کمتر از مکمل ۲ است . به این علت ، نتیجه جمع مفروق به مکمل مفروق منه حاصل جمعی تولید می کند که یکی کمتر از تفاضل صحیح بهنگام رخداد رقم نقلی نهایی است . حذف رقم نقلی نهایی و افزودن آن به حاصل جمع بنام رقم نقلی چرخشی خوانده می شود .

مثال قبل را با استفاده از مکمل ۱ تکرار کنید .

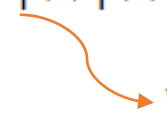
(الف)

$$X-Y = 1010100 - 1000011$$

$$X = 1010100$$

$$Y \text{ مکمل } 1 \text{ عدد} = \underline{+ 0111100}$$

$$\text{حاصل جمع} = 1001000$$

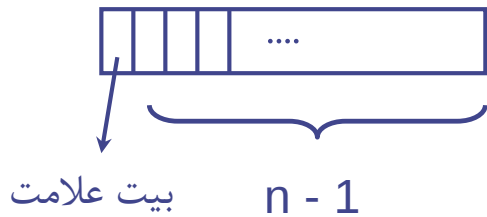
$$\text{رقم نقلی چرخشی} = \underline{1+}$$


$$X-Y = 0010001 \quad \text{جواب :}$$

اعداد منفی

بعلت محدودیت سخت افزار ، کامپیوترها باید هر چیزی را با ارقام دودویی نشان دهند که معمولاً این ارقام بیت نامیده می شوند . معمول است که سمت چپ ترین بیت عدد را به علامت اختصاص می دهند . قرار این است که اعداد مثبت را با گذاشتن ۰ و اعداد منفی را با گذاشتن ۱ در محل بیت مزبور (سمت چپ ترین بیت یا پر ارزشترین بیت) نشان دهند. توجه نمایید کاربر است که مشخص می کند که محاسبات به صورت اعداد علامتدار است یا خیر.

به عنوان مثال اگر ۸ بیت برای عدد در نظر بگیریم ، ۷ بیت جهت نمایش عدد و بیت هشتم جهت تعیین علامت بکار میرود.



• شیوه های نمایش اعداد منفی

- مکمل ۱
- مکمل ۲ (مناسبترین روش)
- مقدار و علامت

بعنوان مثال ، فرض کنید عدد ۹ بصورت دودویی با هشت بیت نشان داده شده باشد ۹ + بوسیله یک ۰ در سمت چپ ترین مکان از هشت بیت و بدنبال آن معادل دودویی ۹ ، نشان داده می شود و نتیجه ۰۰۰۰۱۰۰۱ خواهد بود. هر چند که فقط یک راه برای نمایش ۹+ وجود دارد ، برای نمایش ۹- با هشت بیت سه روش موجود است :

در نمایش مقدار علامت ۱۰۰۰۱۰۰۱

در نمایش مکمل ۱ ۱۱۱۱۰۱۱۰

درنمایش مکمل ۲ ۱۱۱۱۰۱۱۱

جمع اعداد علامت دار :

برای جمع دو عدد دودویی علامت دار، ابتدا اعداد منفی را به فرم مکمل دو نوشته میشود و جمع دو عدد را که بیت علامت نیز در این جمع منظور می گردد، انجام میشود و بیت نقلی خارج شده از بیت علامت، نیز صرفنظر می گردد. اگر بیت آخر حاصل جمع ۱ باشد یعنی جواب منفی است و باید با استفاده از مکمل ۲ ارزش عدد رو بدست بیاوریم تا متوجه شویم که نتیجه ، منفی چه عددی است.

مثال (۱)

- 49	1 0 0 1 1 1 1
+ 23	0 0 1 0 1 1 1
- 26	1 1 0 0 1 1 0

مثال ۲)

- دو عدد همراه با بیت علامتشان بایکدیگر جمع می‌شوند
- از رقم نقلی خروجی از پر ارزش‌ترین بیت صرفه نظر می‌شود.
- وجود سرریز باید بررسی شود.

overflow سرریز (نقلی)

$$\begin{array}{r} +6 \quad 00000110 \\ +9 \quad 00001001 \\ \hline +15 \quad 00001111 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -6 \quad 11111010 \\ +9 \quad 00001001 \\ \hline 3 \quad 00000011 \end{array}$$

overflow سرریز (نقلی)

$$\begin{array}{r} +6 \quad 00000110 \\ -9 \quad 11110111 \\ \hline -3 \quad 11111101 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -9 \quad 11110111 \\ +) -9 \quad 11110111 \\ \hline -18 \quad 11101110 \end{array}$$

در این دو مثال، آخرین بیت ۱ می‌باشد پس نتیجه عددی منفی خواهد

کد BCD (Binary Coded Decimal)

رقم دهدهی	B	C	D
	8	4	2 1 وزن
0	0	0	0 0
1	0	0	0 1
2	0	0	1 0
3	0	0	1 1
4	0	1	0 0
5	0	1	0 1
6	0	1	1 0
7	0	1	1 1
8	1	0	0 0
9	1	0	0 1

کدهای دودویی نظیر رقم های دهدهی ، حداقل به ۴ بیت نیاز دارند. انواع مختلف کدها را با ترکیب ۴ بیت یا بیشتر، برای نمایش کدهدهی می توان طراحی نمود. یکی از این کدها، کد BCD است.

کد BCD کدی است که در آن از معادل دودویی اعداد در مبنای ده مستقیماً استفاده می شود . به بیت های دودویی بر طبق مکانشان می توان وزن یا ارزشی نسبت داد. وزن بیتها در کد BCD به ترتیب 1، 2، 4، 8 است.

کدهای آشکار ساز خطا

اطلاعات دودویی ممکن است از یک مکان به مکان دیگر بکمک وسایل ارتباطی مثل سیمها یا موجهای رادیویی انتقال یابند. هر پارازیت خارجی که وارد وسایل فیزیکی شود ارزش بیتها را از ۰ به ۱ و یا برعکس تغییر می دهد. معمول ترین روش خطایابی، استفاده از بیت توازن (Parity Bit) است.

سیستم توازن:

یک بیت توازن به اطلاعات اضافه می گردد

توازن زوج: به نحوی که تعداد کل اهای کد زوج شود

توازن فرد: به نحوی که تعداد کل اهای کد فرد شود

مثال از توازن فرد

1011001 **1**
1010010 **0**

کد گری (انعکاسی)

Decimal number	Gray				Binary			
	g_3	g_2	g_1	g_0	b_3	b_2	b_1	b_0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0	1
2	0	0	1	1	0	0	1	0
3	0	0	1	0	0	0	1	1
4	0	1	1	0	0	1	0	0
5	0	1	1	1	0	1	0	1
6	0	1	0	1	0	1	1	0
7	0	1	0	0	0	1	1	1
8	1	1	0	0	1	0	0	0
9	1	1	0	1	1	0	0	1
10	1	1	1	1	1	0	1	0
11	1	1	1	0	1	0	1	1
12	1	0	1	0	1	1	0	0
13	1	0	1	1	1	1	0	1
14	1	0	0	1	1	1	1	0
15	1	0	0	0	1	1	1	1

سیستمهای دیجیتال فقط برای پردازش داده های گسسته طراحی می شوند. بسیاری از دستگاههای فیزیکی داده خروجی پیوسته تولید می کنند. اطلاعات پیوسته یا آنالوگ بوسیله مبدل آنالوگ به دیجیتال به فرم دیجیتال تبدیل می شوند. جهت نمایش داده، گاهی اوقات مناسب تر است که این اطلاعات مطابق جدول زیر با کد گری نمایش داده شود. مزیت کد گری نسبت به اعداد دودویی محض، این است که وقتی از یک عدد به عدد بعدی می رویم فقط یک بیت تغییر می کند. مثلاً در رفتن از ۷ به ۸، کد گری از ۰۱۰۰ به ۱۱۰۰ تغییر می یابد.

بسیاری از کاربردهای کامپیوتر نیاز به عملیات بر روی اطلاعات عددی و همچنین حروف دارد. بنابراین برای نمایش حروف کدهایی در نظر گرفته شده است، این کد از هفت بیت دودویی برای کد نمودن ۱۲۸ کاراکتر استفاده می شود. کد اسکی دارای ۹۴ کد شامل ۲۶ حرف بزرگ Z تا A، ۲۶ حروف کوچک (a تا z)، ۱۰ عدد و ۳۲ کاراکتر مخصوص علامت و حرف خاص مانند /، %، & و... می باشد.

۳۴ حرف دیگر برای کارهای کنترلی است و قابل چاپ نیستند.