

ماتریس

ضرب ماتریس ها

دکتر یوسف کوه مسکن

هندسه ۱۱۲م



AvaEducation16.blog.ir



AvaEducation16@gmail.com



@AvaEducation16



@AvaEducation16

توضیحات

- این فایل علاوه بر سایت AvaEducation16.blog.ir در کانال تلگرامی [@AvaEducation16](https://t.me/AvaEducation16) نیز موجود و قابل دانلود می‌باشد.
- این فایل جهت گسترش آموزش رایگان ارائه شده است، اما به جهت رعایت حقوق معنوی درخواست می‌شود نام منبع ذکر گردد.
- در این دسته از فایل‌ها که با روجلدی صورتی [] آغاز می‌شوند، مطالب مربوط به دوره **متوسطه** و در آن دسته که با روجلدی آبی [] آغاز می‌شوند، مطالب مربوط به دوره **دانشگاه** ارائه خواهد شد.
- نکات موجود در متن با علامت 💡 نمایش داده شده‌اند.
- در بخش پاسخنامه سوالات از علائم زیر استفاده شده است:
 - بسیار ساده 🧐 جهت آشنایی با نمونه‌های اولیه سوالات
 - ساده 🧐 جهت تثبیت مطالب
 - متوسط 🧐 جهت تمرین بیشتر مطالب
 - سخت 🧐 جهت کسب مهارت کافی و آشنایی با روش‌های حل مسائل خاص

۱ مسئله

اگر a و b در حالت کلی غیرصفر باشند و $A = \begin{bmatrix} b-a & b-a & b-a \\ a-b & a-b & a-b \\ b & b & b \end{bmatrix}$ باشد، حاصل A^n به ازای $n \in \mathbb{N}$ کدام است؟

$$(a-b)^{n-1}A \quad (۲)$$

$$(b-a)^{n-1}A \quad (۱)$$

$$b^{n-1}A \quad (۴)$$

$$a^{n-1}A \quad (۳)$$

۲ روش حل مسئله

پاسخ: برای حل این مسئله به نکته زیر توجه شود. 

 ماتریس‌هایی که سطرهاى تکرارى دارند به صورت ضرب یک ماتریس ستونی شامل درایه‌های 1 در آن سطر قابل نمایشند.

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad [\text{سطر}]$$

 ماتریس‌هایی که ستون‌های تکرارى دارند به صورت ضرب آن ستون در سطر متناظر درایه‌های 1 قابل نمایشند.

$$A = \begin{bmatrix} \text{ستون} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

در ماتریس داده شده، ستون‌ها یکسان هستند و می‌توان از نکته ارائه شده استفاده کرد.

$$A = \begin{bmatrix} b-a \\ a-b \\ b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

برای توان n می‌توان این ماتریس‌ها را به دنبال هم نوشت:

$$\begin{aligned}
 A^n &= A \times A \times \cdots \times A \\
 &= \begin{bmatrix} b-a \\ a-b \\ b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b-a \\ a-b \\ b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b-a \\ a-b \\ b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \cdots \times \begin{bmatrix} b-a \\ a-b \\ b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} b-a \\ a-b \\ b \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b-a \\ a-b \\ b \end{bmatrix} \right) \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b-a \\ a-b \\ b \end{bmatrix} \right) \times \cdots \times \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b-a \\ a-b \\ b \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} b-a \\ a-b \\ b \end{bmatrix} \times b \times b \times \cdots \times b \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} b-a \\ a-b \\ b \end{bmatrix} \times b^{n-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= b^{n-1} \begin{bmatrix} b-a \\ a-b \\ b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= b^{n-1} A
 \end{aligned}$$

گزینه ۴ صحیح است.

۳ مسئله مشابه

اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل A^6 کدام است؟

$$-32A \quad (۲)$$

$$-5A \quad (۱)$$

$$32A \quad (۴)$$

$$5A \quad (۳)$$



پاسخ: براساس نکته بیان شده، ماتریس A به صورت زیر قابل نمایش است.

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

برای توان ششم، به صورت زیر عمل می‌شود:

$$A^6 = A \times A \times \cdots \times A$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \times \cdots \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \times \cdots \times \left(\begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \times (-2)^5 \times \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \\ &= -32 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \\ &= -32A \end{aligned}$$

گزینه ۲ صحیح است.

از به کار بردن جملات تمقیرآمیز در
مورد خودتان بپرهیزید، چون متی گفتن
آن نوعی باور داشتن به آن است.



 AvaEducation16.blog.ir

 [@AvaEducation16](https://www.instagram.com/AvaEducation16)

   [@AvaEducation16](https://www.youtube.com/AvaEducation16)

 AvaEducation16@gmail.com