

# ژئودزی فیزیک

گل‌های باران زا  
باران می‌زایند  
هر کجا که گل‌ها  
در بیایند  
آنجا باران می‌آید  
و هر کجا که گل‌ها در نیایند  
آنجا  
باران نمی‌آید

دکتر یعقوب حاتم

# مدل سازی میدان ثقل زمین

## ۱- بررسی رفتار محلی میدان ثقل زمین

- تبدیل پتانسیل اعوجاج به پارامترهای دیگر میدان ثقل زمین
- گرادیان قائم ثقل
- انحنای راستای شاقولی
- اثرهای توپوگرافی و ایزوستازی

## ۲- بررسی رفتار جهانی میدان ثقل زمین

- معادلات بنیادی برای پتانسیل ثقل
- گسترش پتانسیل جاذبه به توابع ویژه (هارمونیک های کروی)
- میدان ثقل مدل (در مقابل واقعی)
- پتانسیل اعوجاج

# مدل سازی میدان ثقل زمین

## ۳- تعیین میدان ثقل زمین از روی مشاهدات ثقل

- مفهوم روش استوکس
- مفهوم روش مالدنسکی
- ثقل سنجی
- برآورد عددی انتگرال های سطحی

## ۴- تعیین میدان ثقل زمین از روی مشاهدات به ماهواره ها

- ماهواره ها و میدان جاذبه زمین
- پیش بینی مدارهای ماهواره ها
- آنالیز آشفتگی های مداری
- ارزیابی عددی پارامترهای میدان ثقل زمین

# مدل سازی میدان ثقل زمین

## ۵- تعیین میدان ثقل زمین از روی انحرافات قائم و از روی داده های متفاوت

- راه حل هندسی برای تعیین ژئوئید
- تبدیل پارامترهای میدان ثقل زمین
- متراکم سازی و پالایش انحرافات قائم
- پاسخ هائی برای ژئوئید از روی داده های متفاوت

# ۱- بررسی رفتار محلی میدان ثقل زمین

پارامترهای مختلف **مشاهده شده** از میدان ثقل زمین، معمولاً می توانند به پارامترهای **دیگر** این میدان تبدیل شوند، بطوریکه منشاء ارزشمندی از اطلاعات را از این میدان بدست دهند. **عوارض محلی میدان ثقل** زمین نقش مهمی در تعیین موقعیت ژئودتیکی ایفا می کنند. پس، فهمیدن رفتار محلی این میدان و روابط محلی بین پارامترهای مختلف آن فایده مند است. در این بررسی، ابتدا **تعریف** پارامترهای میدان ثقل زمین و **ارتباط آنها با پتانسیل ثقل واقعی** ارائه می شود. بعد، **گرادیان قائم ثقل**، با موقعیت ویژه آن در بسیاری مسائل ژئودتیک، بحث می شود. سپس، مسائل مربوط به **انحنای راستای شاقولی** بررسی می شود. در انتها، **دو دلیل اصلی** تغییرات میدان ثقل زمین، **ناهمواریهها و ایزوستازی**، شرح داده می شوند.

## ۱.۱- تبدیل پتانسیل اعوجاج به پارامترهای دیگر میدان ثقل زمین

سه پارامتر پایه از میدان ثقل زمین شامل: **آناملوی ثقل**، **زاویه انحراف قائم**، و **ارتفاع ژئوئید** است. در اینجا حالت های مختلف این پارامترها، که می توانند تعریف و استفاده شوند، ارائه می شوند.

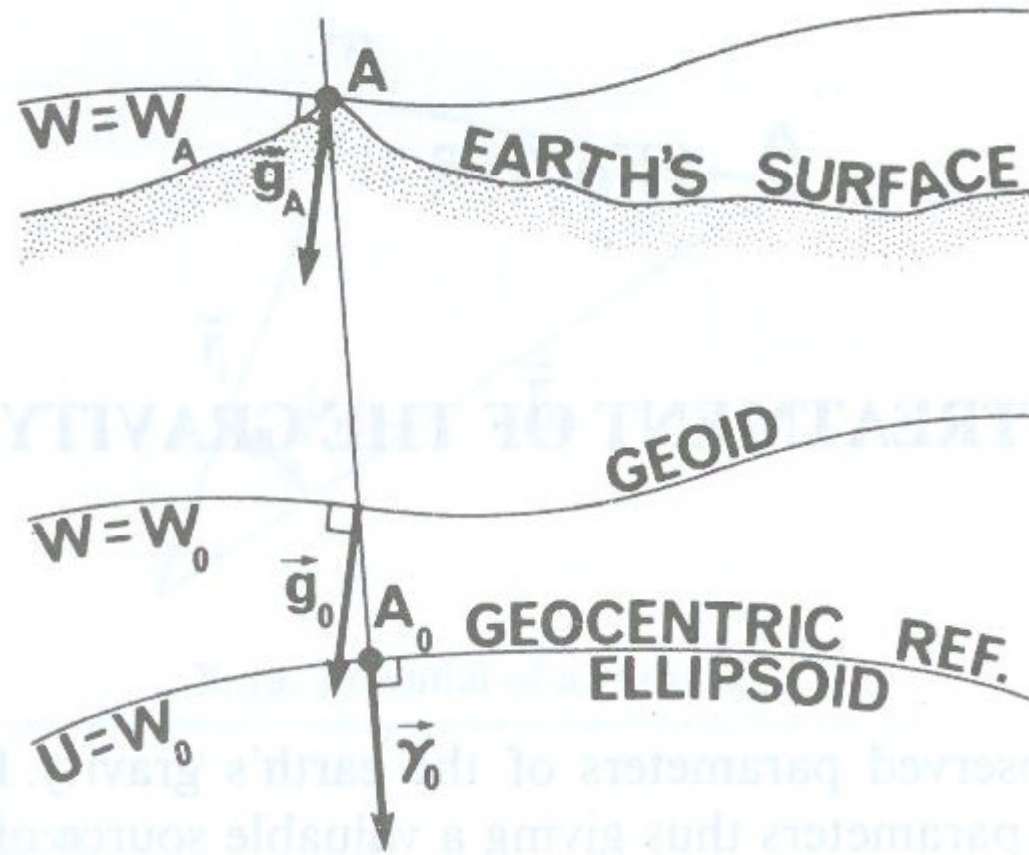
آناملوی ثقل بصورت یک مقدار اسکالر تعریف می شود، که اندازه آن برابر اختلاف بین مقدار شتاب ثقل واقعی بر روی ژئوئید،  $g_0$ ، و شتاب ثقل نرمال بر روی بیضوی ژئوسنتریک،  $\gamma_0$ ، است

$$\Delta g = g_0 - \gamma_0$$

(۱)

این آناملوی ثقل، بصورت آناملوی ثقل بر روی ژئوئید، یا آناملوی ثقل ژئوئیدی نامیده می شود. واضح است که در خشکی، شتاب ثقل مشاهداتی بر روی سطح زمین،  $g_A$ ، بایستی به شتاب ثقل بر روی سطح ژئوئید،  $g_0$ ، انتقال یابد. بطور نظیر، شتاب ثقل مشاهداتی در زیر دریا باید با یک تصحیح مناسب به  $g_0$  تبدیل شود.

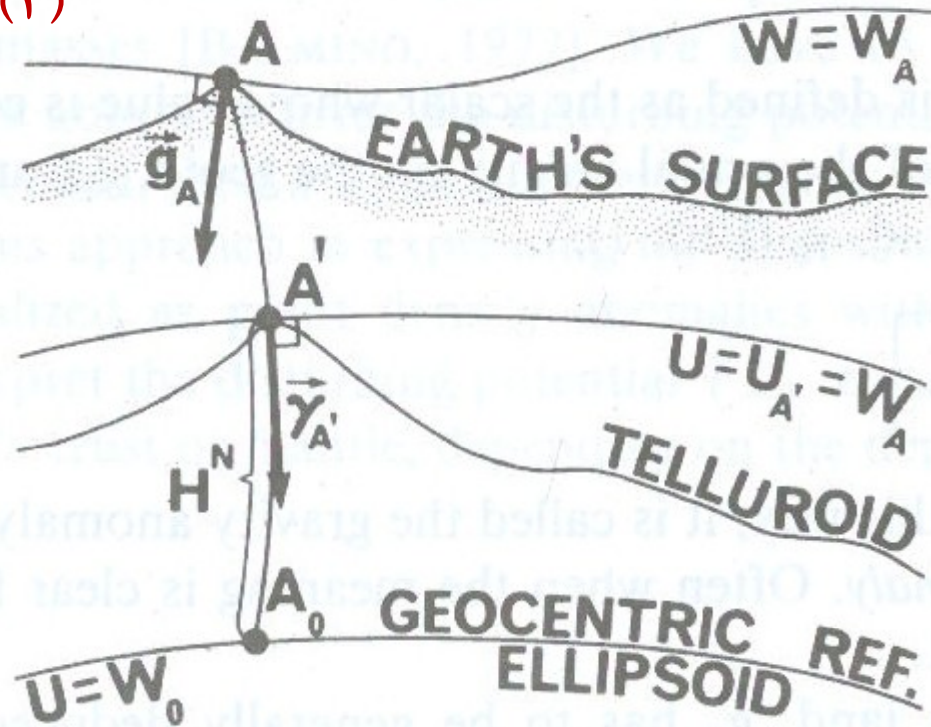
با توجه به روشی که شتاب ثقل مشاهداتی به روی سطح ژئوئید منتقل می شود، چند نوع آناملوی ثقل ژئوئیدی ایجاد می شود، که آناملوی ثقل هوای آزاد یکی از آنهاست. در قسمت بعدی، انواع گرادیان های قائم ثقل که بین سطح زمین و ژئوئید معتبر هستند، ارائه می شوند. این موارد، روش های مختلف انتقال ثقل را سبب می شوند، و در نتیجه آناملوی های مختلف ثقل را بدست می دهند.



شکل ۱.۱. آنامولی ثقل ژئوئیدی

یک نوع دیگر آنامولی، متفاوت با آنامولی ثقل ژئوئیدی، بصورت آنامولی ثقل سطحی است  $\widetilde{\Delta g}$ ، که بصورت اختلاف بین مقدار شتاب ثقل مشاهداتی بر روی سطح زمین و شتاب ثقل نرمال بر روی تلوروئید است.

$$\widetilde{\Delta g} = g_A - \gamma_{A'} \quad (2)$$



شکل ۱.۲. آنامولی ثقل سطحی



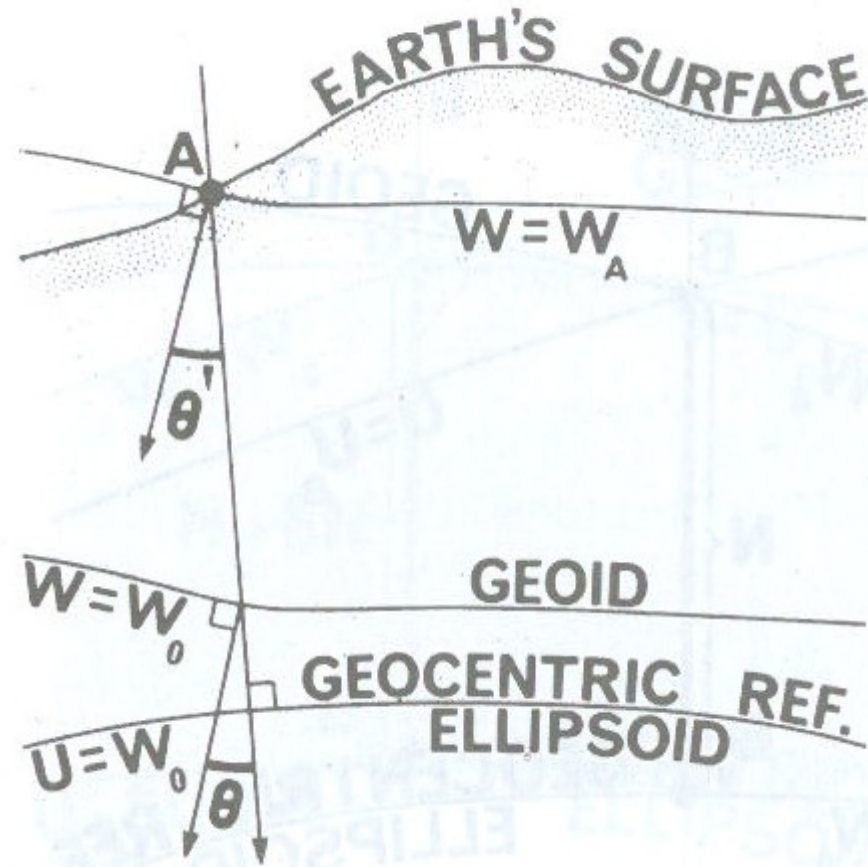
در محاسبه آنامولی ثقل سطحی، نیازی به اطلاعات گرادیان ثقل واقعی در داخل زمین نیست. مقدار دقیق شتاب ثقل نرمال بر روی تلوروئید می تواند از روی رابطه زیر، با جاگذاری ارتفاع نرمال بجای ارتفاع ژئودتیک، بدست آید.

$$\gamma = 980.624(1 - 0.002644 \cos 2\phi + 0.000007 \cos^2 2\phi) - 0.3086 h - 0.0002 h \cos 2\phi + 7.1 \times 10^{-8} h^2 \text{ Gal.}$$

BOWIE AND AVERS [1914]

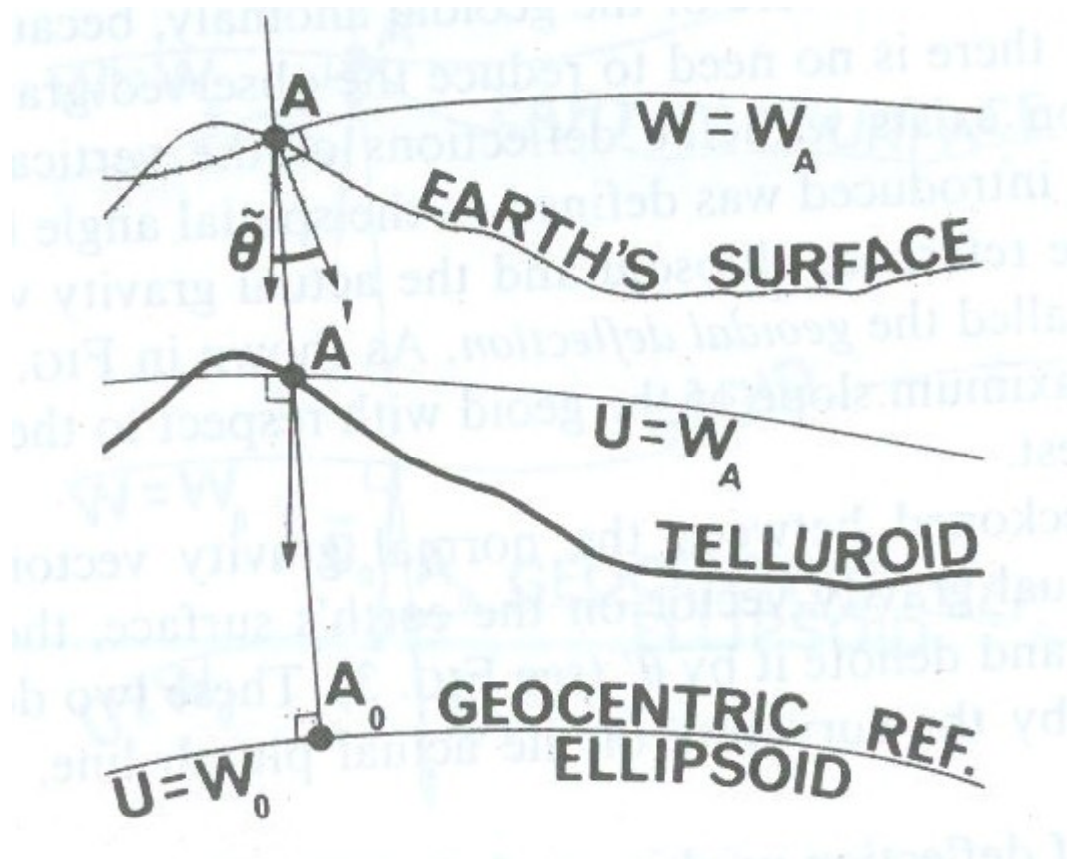
بنابراین، بر خلاف اینکه چند نوع آنامولی ثقل ژئوئیدی داشتیم، فقط یک نوع آنامولی ثقل سطحی داریم، برای اینکه روش محاسبه  $\gamma_A$  یکتا است، و هیچگونه نیازی به انتقال شتاب ثقل مشاهداتی  $g_A$  نیست.

یک شرایط مشابه، نظیر آنامولی ثقل، برای زوایای انحراف قائم وجود دارد. یک نوع از آنها، بصورت زاویه فضائی بین بردار شتاب ثقل نرمال بر روی بیضوی مقایسه و بردار شتاب ثقل واقعی بر روی ژئوئید تعریف می شود. این نوع، بصورت زاویه انحراف قائم ژئوئیدی  $\theta$  شناخته می شود. این کمیت همچنین می تواند بصورت بیشترین شیب ژئوئید نسبت به بیضوی مقایسه تفسیر شود. اگر این زاویه، بین بردار شتاب ثقل نرمال بر روی بیضوی مقایسه و بردار شتاب ثقل واقعی بر روی سطح زمین در نظر گرفته شود، در اینصورت زاویه انحراف قائم سطحی  $\theta'$  بوجود می آید. تفاوت دو نوع زاویه انحراف قائم، ژئوئیدی و سطحی، بوسیله انحنای راستای شاقولی واقعی ایجاد می شود.



شکل ۱.۳. زاویه انحراف قائم ژئوئیدی و سطحی

نوع سوم زاویه انحراف قائم مورد استفاده در ژئودزی بصورت زاویه بین بردار شتاب ثقل واقعی بر روی سطح زمین و بردار شتاب ثقل نرمال بر روی تلوروئید تعریف می شود. این زاویه، بصورت زاویه انحراف قائم مالدنسکی  $\tilde{\theta}$  نامیده می شود. با مقایسه  $\tilde{\theta}$  و  $\theta'$  نتیجه می شود که اختلاف بین دو زاویه انحراف قائم سطحی و مالدنسکی از روی اندازه انحنای راستای شاقولی میدان ثقل نرمال، یعنی انحنای راستای شاقولی نرمال، بین بیضوی مقایسه و تلوروئید ایجاد می شود.



شکل ۱.۴. زاویه انحراف قائم مالدنسکی

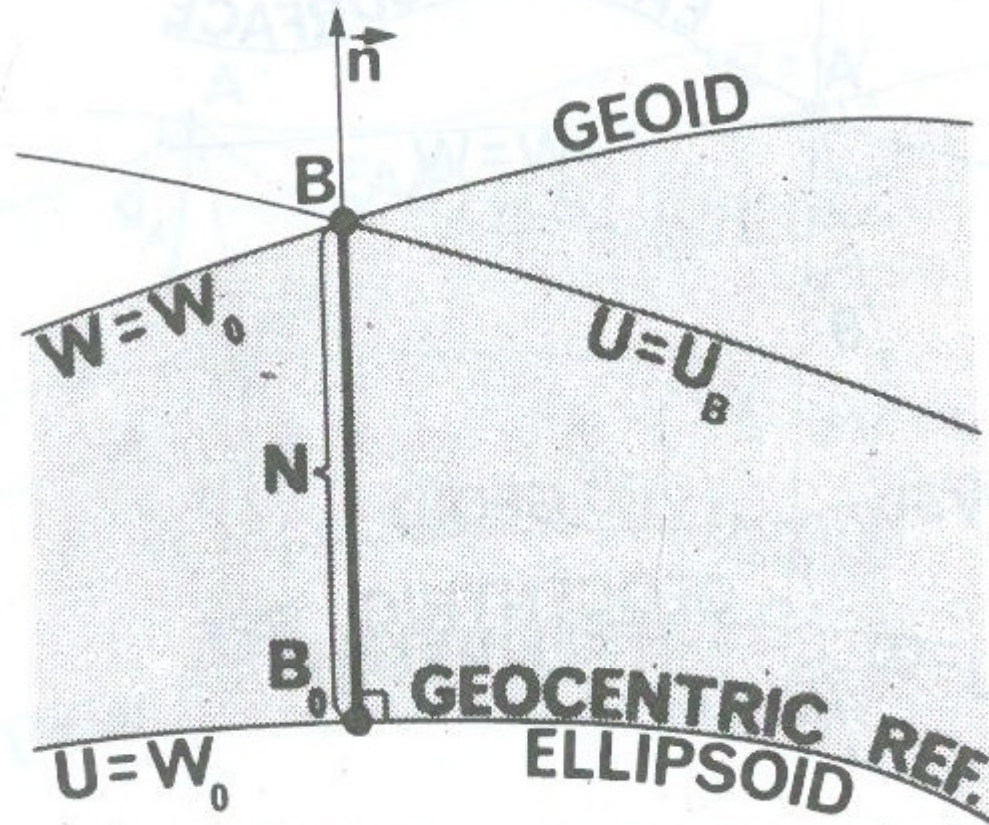
هر سه نوع زاویه انحراف قائم بررسی شده، به بیضوی مقایسه ژئوسنتریک مولد ثقل نرمال نسبت داده شده اند. **نظیر این سه نوع زاویه انحراف قائم، که به بیضوی رفرانس ژئودتیک ( در حالت کلی غیر ژئوسنتریک) منتسب شوند، می توانند تعریف شوند. بعد خواهیم دید که چطور این کمیت ها برای تعیین میدان ثقل زمین کاربرد دارند.**

نکته مهم این است که، اگرچه زوایای انحراف قائم ژئودتیک مفید هستند، **آنامولی های ثقل منتسب به بیضوی مقایسه ژئودتیک تعریف نمی شوند. دلیل آن، به این صورت است که بیضوی مقایسه ژئودتیک نمی تواند بصورت شکل مدل زمین در نظر گرفته شود، و بنابراین شتاب ثقل نرمال منتسب به آن وجود ندارد.**

یک پارامتر مهم دیگر از میدان ثقل زمین، ارتفاع ژئوئید است. **همچنین ارتفاع کوازی ژئوئید، که بصورت آنامولی ارتفاع نامیده می شود.**

در حیطة تعیین میدان ثقل زمین، **کوازی ژئوئید (که یک سطح هم پتانسیل نیست و هیچگونه ارتباط مستقیمی با ثقل ندارد) اغلب بعنوان یک تقریب از ژئوئید بررسی می شود.**

حال ببینیم که این کمیت ها چطور به میدان ثقل زمین، و بطور خاص به پتانسیل اعوجاج، مرتبط می شوند. **فرض کنیم که گرادیان قائم پتانسیل ثقل نرمال بین بیضوی و ژئوئید یک مقدار ثابت است. بنابراین، رابطه زیر را خواهیم داشت:**



شکل ۱.۵. فرمول برنز

$$U_B - U_{B_0} = U_B - W_0 = \frac{\partial U}{\partial n} \Big|_{B_0} N = -\gamma_0 N \quad (3)$$

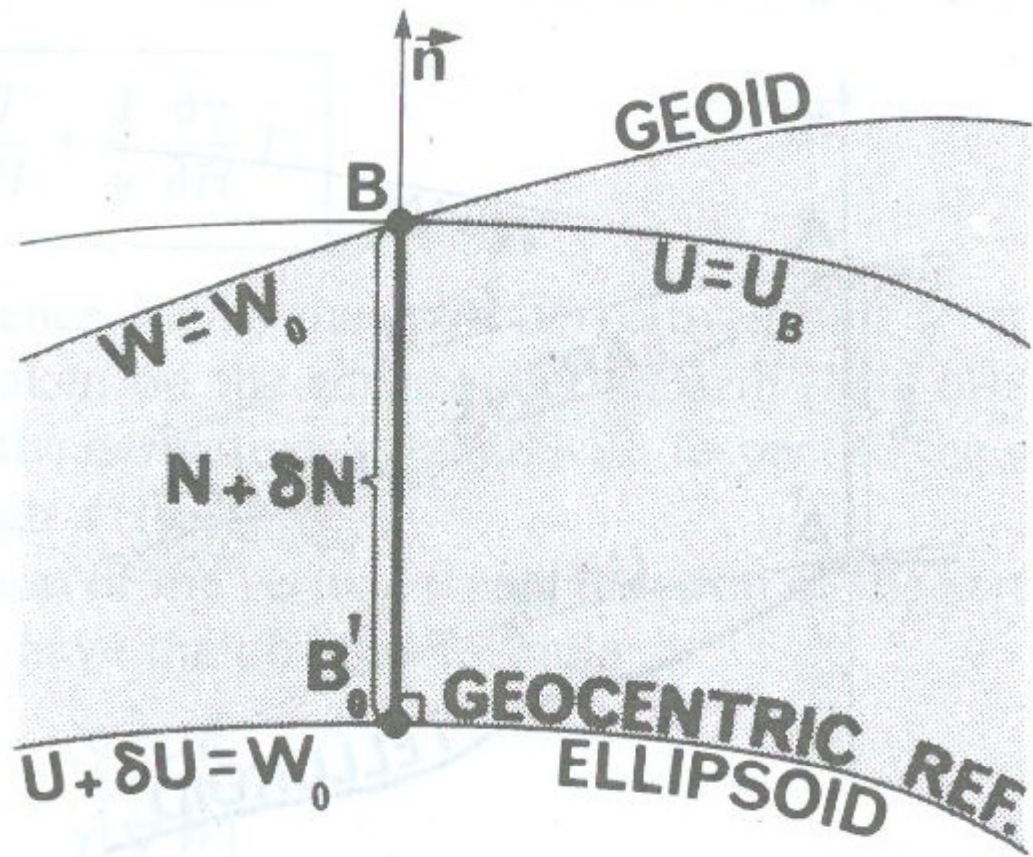
با توجه به اینکه عبارت  $W_0 - U_B$  برابر پتانسیل اعوجاج  $T$  در  $B$  است، داریم:

$$N = T/\gamma_0, \quad (4)$$

که اندیس  $B$  حذف شده، و در حقیقت  $T$  بر روی ژئوئید در نظر گرفته می شود. این فرمول بعنوان فرمول برنز شناخته می شود و بطور گسترده در ژئودزی استفاده می شود. در نتیجه گیری فوق، این نکته فرض شده که میدان ثقل نرمال بطور دقیق تعریف شده، بطوریکه پتانسیل نرمال روی بیضوی برابر پتانسیل واقعی بر روی ژئوئید است. در واقعیت، یک خطای  $\delta M$  در جرم برآورد شده برای زمین وجود دارد. یک خطای  $\delta M$  در  $M^N$  نه تنها سبب ایجاد خطا در پتانسیل اعوجاج  $T$  به اندازه  $\delta T$  می شود، بلکه  $\gamma_0$  نیز دارای خطا بصورت زیر می شود:

$$\delta \gamma_0 = -\frac{G\delta M}{r^2} = \frac{\delta U}{r} = -\frac{\delta T}{r} \quad (5)$$

بنابراین، شرایط از شکل ۵ به شکل ۶ تغییر پیدا می کند.



شکل ۱.۶. در حالت برآورد نادقیق پتانسیل نرمال

همچنین، رابطه ۳ بصورت زیر تغییر می کند

$$U_B - (W_0 - \delta U) = -(\gamma_0 + \delta\gamma_0)(N + \delta N) \quad (۶)$$

و فرمول برنز تعمیم یافته نتیجه می شود:

$$N + \delta N = \frac{T + \delta T}{\gamma_0 + \delta\gamma_0} \quad (۷)$$

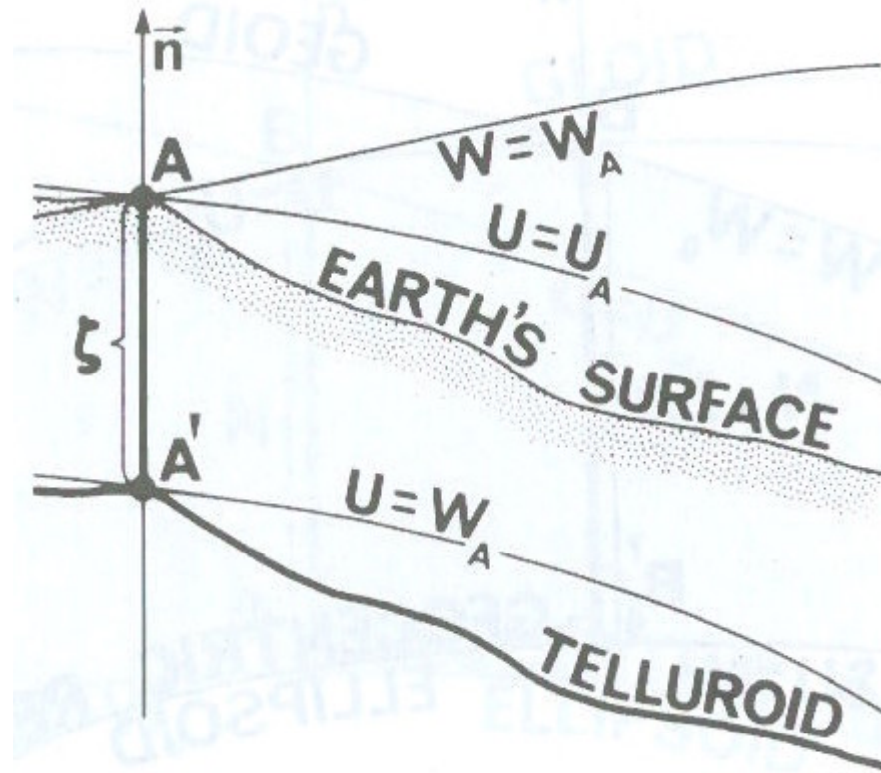
که در آن

$$\delta N \doteq \frac{\delta T}{\gamma_0} \left( 1 + \frac{N}{r} \right) \doteq \frac{\delta T}{\gamma_0} \quad (۸)$$

و یک بررسی ساده نشان می دهد که یک خطای نسبی  $10^{-6}$  در تعیین **GM** منجر به یک خطای ثابت  $|\delta N| \doteq 6$  متر می گردد. این نتیجه بایستی بصورت یک خطا در ابعاد بیضوی رفرانس ژئوسنتریک تفسیر شود، که یک نمایش دیگری از نحوه ارتباط کمیت های فیزیکی و هندسی را نشان می دهد.



بطور واضح، یک فرمول نظیر فرمول برنز را می توان برای آنامولی ارتفاع بدست آورد.



شکل ۱.۷. فرمول برنز برای آنامولی ارتفاع

از روی شکل ۷ داریم:

$$U_A - W_A = \left. \frac{\partial U}{\partial n} \right|_{A'} \zeta = -\gamma_{A'} \zeta \quad (9)$$

با جاگذاری  $T_A$  برای طرف چپ رابطه فوق، داریم:

$$\boxed{\zeta = T_A / \gamma_{A'}} \quad (10)$$

که  $T_A$  روی سطح زمین و  $\gamma_{A'}$  روی تلورئید برآورد می شوند

فرمول برنز در حالت تعمیم یافته برای آنامولی ارتفاع، نظیر حالت قبلی (برای ژئوئید) حاصل می شود.

با در نظر گرفتن رابطه بین آنامولی ثقل ژئوئیدی و پتانسیل ثقل  $W$ ، می توانیم رابطه زیر را به وضوح داشته باشیم:

$$\Delta g = |\nabla W|_B - |\nabla U|_{B_0} \quad (11)$$

یک معادله با علاقمندی بیشتر، معادله ارتباط دهنده  $\Delta g$  به  $T$  است. برای ایجاد آن، ابتدا، مشتق رابطه (۳) را در امتداد نرمال بر بیضوی  $\bar{n}$  بدست می آوریم. مشتق جمله اول، با دقت بسیار زیاد، برابر  $-\gamma_B$  است. و مشتق جمله دوم بطور دقیق برابر  $-\gamma_0$  می شود. بنابراین، با توجه به اینکه  $N$  بصورت تابعی از  $H$  نیست، و با توجه به اینکه مشتق آن در امتداد نرمال برابر صفر است، رابطه زیر بدست می آید (شکل ۸):

$$-\gamma_B + \gamma_0 \doteq - \left. \frac{\partial \gamma}{\partial H} \right|_{B_0} N \quad (12)$$

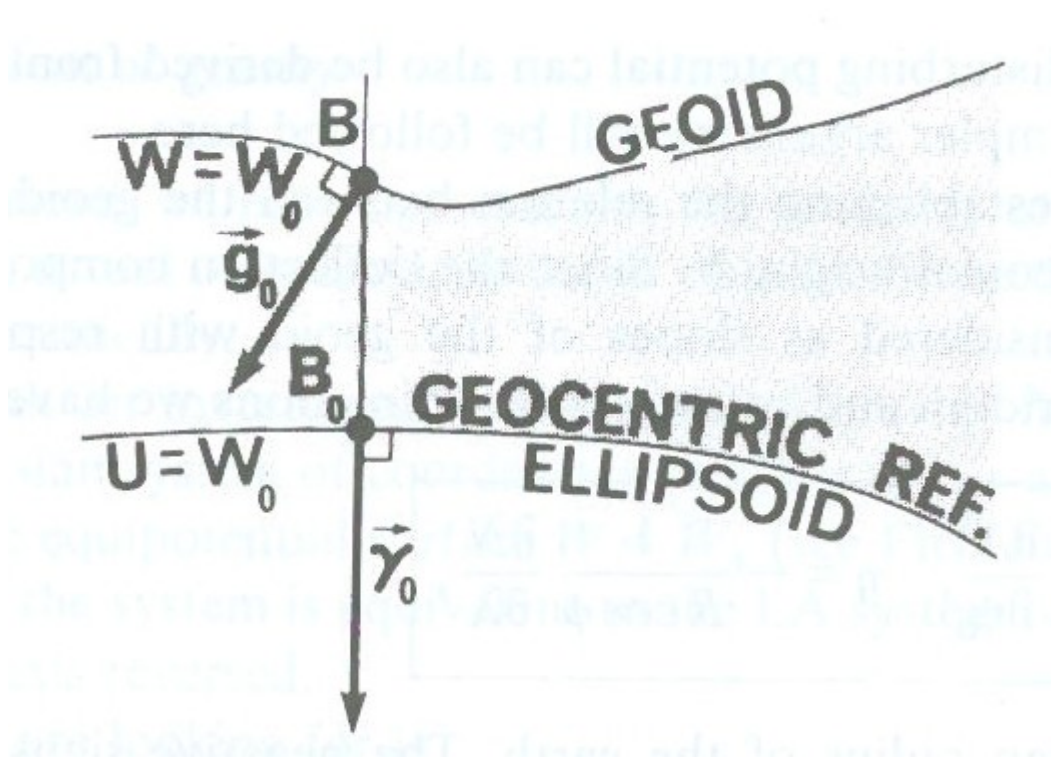
در ادامه، معادله پتانسیل اعوجاج  $T=W-U$  را در نقطه  $B$  بر روی ژئوئید در نظر می گیریم، و دوباره مشتق آن را نسبت به  $H$  ارزیابی می کنیم. رابطه زیر بدست می آید:

$$-g_0 + \gamma_B \doteq \left. \frac{\partial T}{\partial H} \right|_B \quad (13)$$

با جمع کردن روابط (۱۲) و (۱۳)، و بکارگیری فرمول برنز، در نهایت بدست می آوریم:

$$g_0 - \gamma_0 = \Delta g \doteq - \frac{\partial T}{\partial H} + \frac{1}{\gamma_0} \frac{\partial \gamma}{\partial H} T, \quad (14)$$

که هر دو مشتق در (۱۴) می توانند بر روی ژئوئید ارزیابی شوند. فرمول (۱۴) بعنوان معادله بنیادی ثقل سنجی در ژئودزی شناخته می شود.



شکل ۱.۸. آنامولی ثقل ژئوئیدی و پتانسیل

فرمول (۱۴) می تواند برای حالتی که جرم  $M^N$  بطور صحیح ارزیابی نشده باشد، با یک تقریب به اندازه کافی خوب به شرح زیر بدست آید :

$$\Delta g - \delta\gamma \doteq -\frac{\partial T}{\partial H} + \frac{1}{\gamma_0} \frac{\partial \gamma}{\partial H} (T + \delta T) \quad (15)$$

یک فرمول کاملاً مشابه با (۱۴) برای حالت آنامولی ثقل سطحی به بصورت زیر است :

$$\widetilde{\Delta g} \doteq -\frac{\partial T}{\partial H} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial H} T, \quad (16)$$

با تنها تفاوتی که در این حالت رخ می دهد این است که مشتق ها و  $\gamma$  بر روی سطح تلوروئید برآورد می شوند و  $\mathbf{T}$  روی سطح زمین در نظر گرفته می شود. همچنین، راستای مشتق ها نسبت به سطح هم پتانسیل نرمال گذرنده از  $A'$  در نظر گرفته می شود (شکل ۷).

سرانجام، زاویه انحراف قائم  $\theta$  بعنوان یک تابع از پتانسیل ثقل زمین می تواند به شرح زیر ارزیابی شود :

$$\cos \theta = \frac{\bar{\gamma} \cdot \bar{g}}{\gamma \cdot g} = \frac{\bar{\gamma} \nabla W}{\gamma |\nabla W|} \quad (17)$$

که برای هر سه نوع زاویه انحراف قرائم (ژئوئیدی، سطحی و مالدنسکی) می تواند استفاده شود.

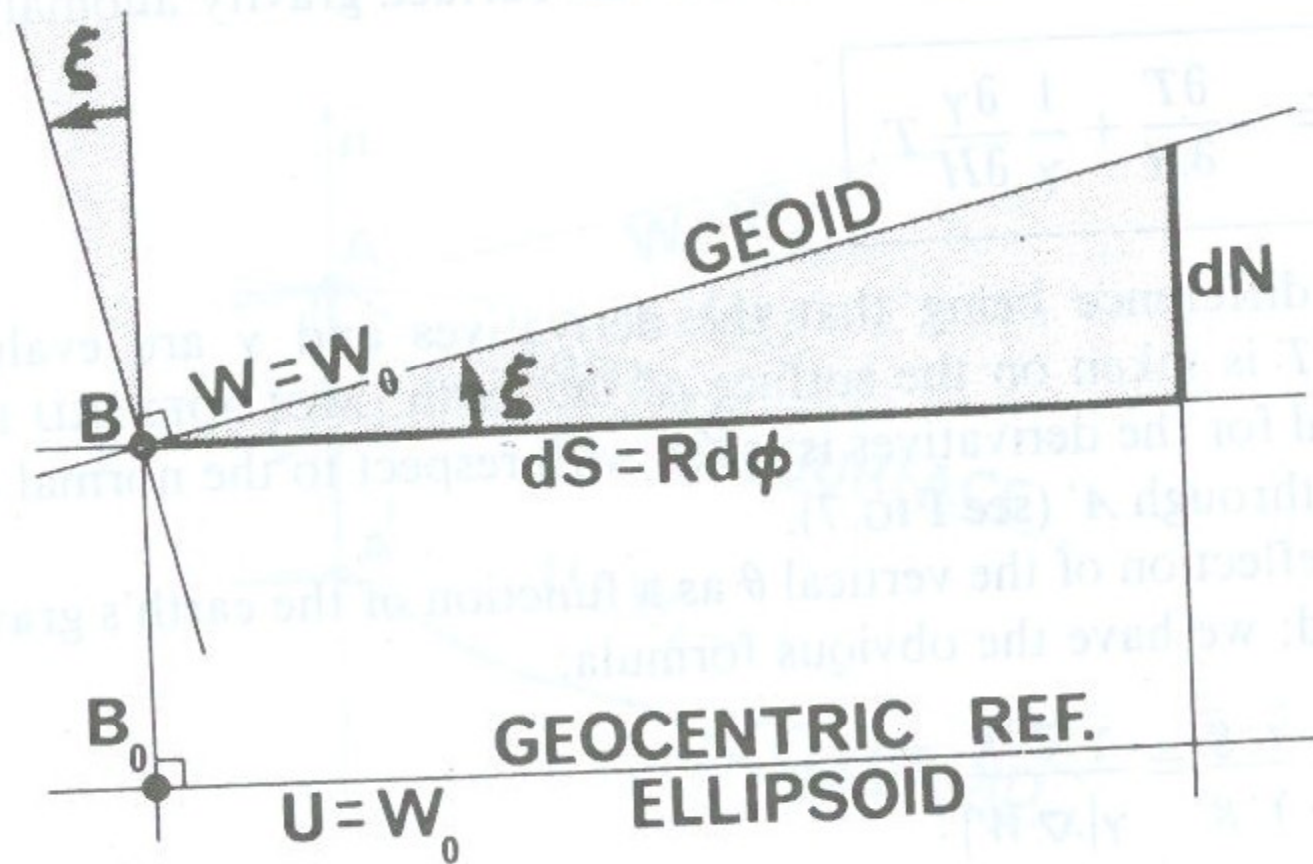
ارتباط بین زاویه انحراف قائم و پتانسیل اعوجاج می تواند از (۱۷) مورد بررسی قرار گیرد. یک حالت ساده تر، ارتباط بین مولفه های زاویه انحراف قائم و پتانسیل اعوجاج به شرح زیر است :

ابتدا رابطه بین مولفه های زاویه انحراف قائم ژئوئیدی را با ارتفاع ژئوئید بررسی می کنیم. از آنجا که مولفه های زاویه انحراف قائم در نقطه مورد علاقه می توانند بعنوان شیب ژئوئید نسبت به بیضوی مقایسه در امتدادهای نصف النهاری و مقطع قائم اولیه در نظر گرفته شوند ( شکل ۹)، داریم:

$$\xi = -\frac{1}{R} \frac{\partial N}{\partial \phi_0}, \quad \eta = -\frac{1}{R \cos \phi} \frac{\partial N}{\partial \lambda}, \quad (18)$$

که در آن  $R$  شعاع متوسط زمین است. علامت های منفی بر حسب قرارداد برای مولفه های زاویه انحراف قائم، نظیر آنچه که در ژئودزی معمول است، در نظر گرفته می شوند. بعضاً در مناطقی نظیر آمریکای شمالی علامت  $\eta$  بصورت مثبت لحاظ می شود. روابط نظیر بین مولفه های زاویه انحراف قائم مالدنسکی و آنامولی ارتفاع  $\zeta$  وجود دارد (در این رابطه بعد صحبت خواهد شد). حال با جاگذاری برای  $N$  در روابط (۱۸) از روی فرمول برنز، با در نظر گرفتن این نکته که  $\gamma_0$  تابعی از نیست، به شرح زیر بدست می آوریم :

$$\xi = \frac{T}{R \gamma_0^2} \frac{\partial \gamma_0}{\partial \phi} - \frac{1}{R \gamma_0} \frac{\partial T}{\partial \phi}, \quad \eta = -\frac{1}{R \gamma_0 \cos \phi} \frac{\partial T}{\partial \lambda}. \quad (19)$$

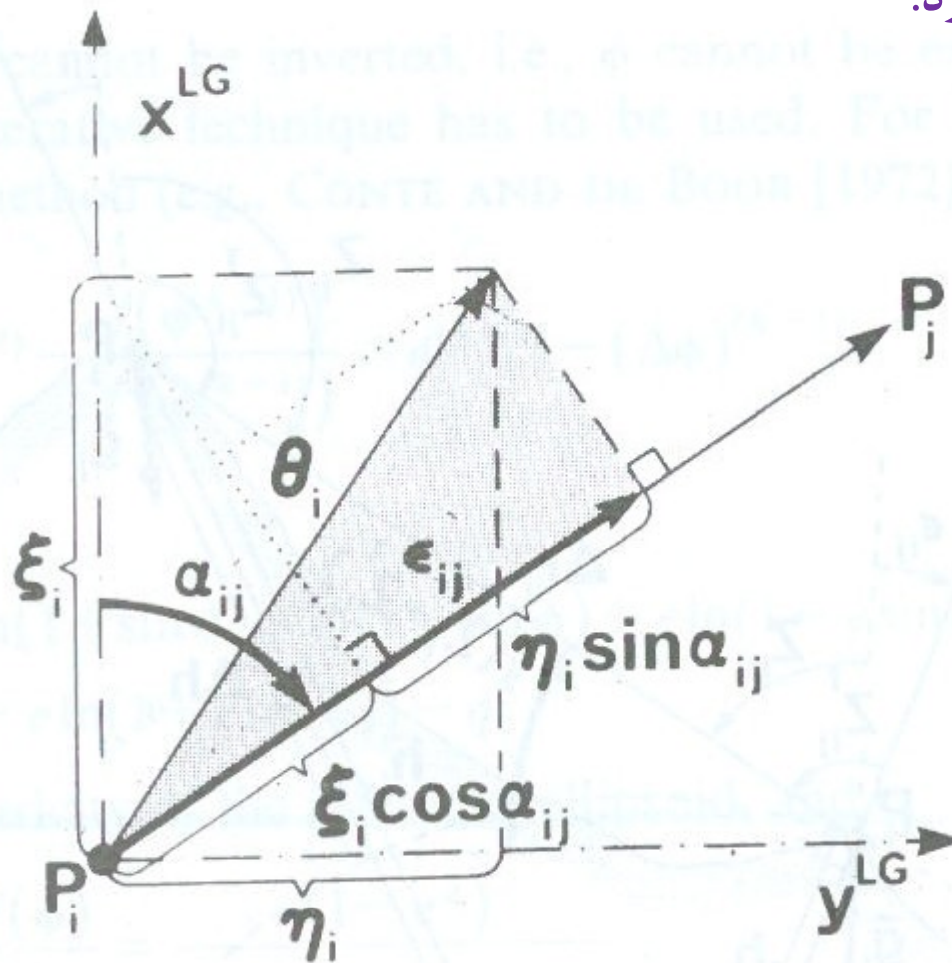


شکل ۱.۹. مولفه های زاویه انحراف قائم و ارتفاع ژئوئید

تعیین مولفه زاویه انحراف قائم در یک آزمایش مشخص  $\alpha$  بصورت زیر می تواند انجام شود:

$$\epsilon_{ij} = \xi_i \cos \alpha_{ij} + \eta_i \sin \alpha_{ij},$$

بطور شهودی مشخص است یک خطای ثابت  $\delta M$  که  $U$  را متاثر می کند، هیچگونه تاثیری بر روی مولفه های زاویه انحراف قائم ندارد.



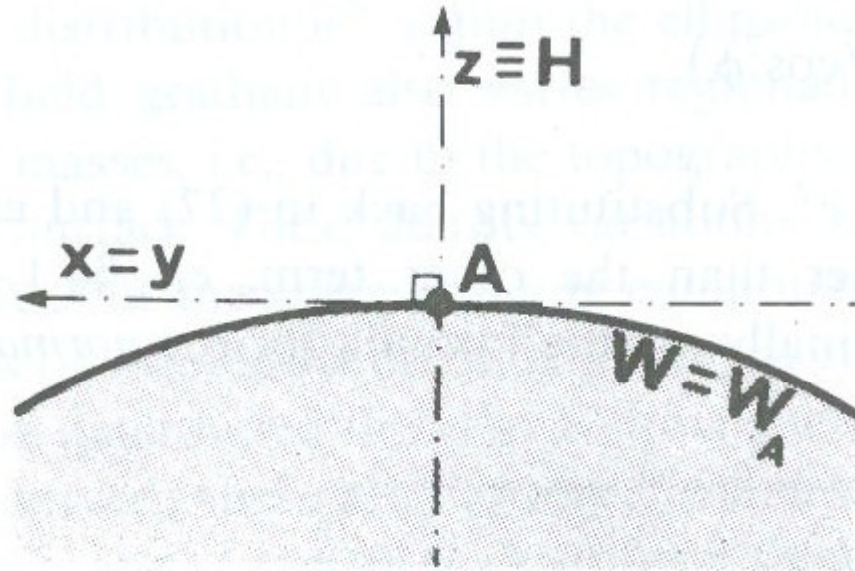
شکل. زاویه انحراف قائم تصویر شده در امتداد  $\alpha_{ij}$  علاقه



## ۱.۲- گرادیان قائم ثقل

در موارد مختلف، ما به گرادیان قائم ثقل، از نوع واقعی یا نرمال، و در داخل یا خارج از سطح زمین، نیاز پیدا می کنیم.

این موضوع را با بررسی میدان ثقل واقعی شروع می کنیم. یک سیستم مختصات کارتزین محلی دست راستی را در نظر می گیریم، بطوریکه محور  $z$  این سیستم با نرمال خارجی سطح هم پتانسیل  $W = W_A$  در نقطه  $A$  انطباق پیدا می کند ( شکل ۱۰). همچنین محور  $x$  به سمت شمال قرار می گیرد، بطوریکه سیستم مختصات ایجاد شده معادل یک سیستم  $LA$  با امتداد محور  $y$  معکوس شده است.



شکل ۱.۱۰. سیستم مختصات کارتزین محلی (سیستم  $LA$  با محور  $y$  معکوس شده).

کمیتی که ما به دنبال آن هستیم، بصورت زیر است :

$$\frac{\partial g}{\partial h} = \frac{\partial g}{\partial H} = \frac{\partial g}{\partial z} = - \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \quad (20)$$

با استفاده از معادله دیفرانسیل جزئی بنیادی (از مرتبه دوم) برای پتانسیل ثقل به شرح زیر :

$$\nabla^2 W(\vec{r}_A) = -4\pi G\sigma(\vec{r}_A) + 2\omega^2.$$

می توانیم رابطه (20) را بصورت زیر بازنویسی کنیم :

$$\frac{\partial g}{\partial H} \Big|_A = - \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \Big|_A = 4\pi G\sigma_A - 2\omega^2 + \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \Big|_A \quad (21)$$

که چگالی  $\sigma_A$  بر اساس موقعیت نقطه **A** بر آورد می شود (شامل چگالی متکثر برای نقاط واقع بر مرز دو لایه با چگالی های مختلف)، و همه جملات در (12)، بغیر از آخرین جمله، بایستی شفاف و شناخته شده باشند. برای تفسیر جمله آخر، جمع مشتقات دوم پتانسیل در امتدادهای افقی، از شیوه زیر استفاده می کنیم که در آن معادله سطح هم پتانسیل :

$$W(x, y, z) = W_A \quad (22)$$

به کار گرفته می شود. این معادله غیر صریح، همچنین می تواند بصورت صریح به شکل زیر نوشته شود:

$$z = z(x, y)$$

(۲۳)

بر طبق قوانین مربوط به مشتقات کل، مشتق کل دوم  $W$  نسبت به  $x$  (بعنوان مثال)، بصورت زیر است:

$$\frac{d^2W}{dx^2} = \frac{\partial^2W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2W}{\partial x \partial z} \frac{dz}{dx} + \frac{\partial^2W}{\partial z \partial x} \frac{dz}{dx} + \frac{\partial^2W}{\partial z^2} \left( \frac{dz}{dx} \right)^2 + \frac{\partial W}{\partial z} \frac{d^2z}{dx^2} \quad (24)$$

ولی این مشتق کل برابر صفر است، زیرا ما این بررسی را برای یک سطح هم پتانسیل انجام می دهیم. به دلیل اینکه سطح هم پتانسیل مورد بررسی دارای یک مقدار حدی محلی در نقطه  $A$  است (در سیستم مختصات انتخاب شده)، حتی جمله  $dz/dx$  صفر می شود. بنابراین، رابطه (۲۴) بصورت زیر در می آید:

$$\frac{\partial^2W}{\partial x^2} = - \frac{\partial W}{\partial z} \frac{d^2z}{dx^2} = g \frac{d^2z}{dx^2} \quad (25)$$

از هندسه دیفرانسیل، مشتق دوم  $d^2z/dx^2$  در نقطه  $A$  بطور مستقیم برابر انحنای  $k_{W_x}$  برای پروفیل  $z = z(x)$  از سطح مورد بررسی است، از آنجائی که  $z = z(x)$  دارای یک مقدار حدی در نقطه  $A$  است. یک معادله مشابه برای پروفیل  $z = z(y)$  برقرار است. اگر متوسط مقادیر انحنای  $k_{W_x}$  و  $k_{W_y}$  را با  $-J$  نمایش دهیم (با ضرایب پتانسیل اشتباه نشود)، رابطه (۲۱) بصورت زیر می شود:

$$\frac{\partial g}{\partial H} = -2gJ + 4\pi G\sigma - 2\omega^2.$$

(۲۶)

این رابطه ابتدا بوسیله برنز فرموله شد، و بطور دقیق برای هر نقطه در فضا معتبر است وقتی که مقدار صحیح چگالی (متکثر) مربوط به نقاط واقع بر مرز بین دو محیط با چگالی های مختلف در نظر گرفته شود. توجه شود که یک ناپیوستگی برای  $\partial g / \partial H$  در مرز لایه های با چگالی مختلف  $\sigma$  وجود دارد.

رابطه (۲۶) همچنین برای میدان ثقل نرمال می تواند استفاده شود. اگر خودمان را به فضای خارج از سطح بیضوی ژئوسنتریک محدود کنیم، که چگالی در آن صفر است، بدست می آوریم:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial H} = -2\gamma J^N - 2\omega^2$$

(۲۷)

که در آن  $J^N$  انحنای متوسط سطح هم پتانسیل نرمال مورد بررسی است. بر روی سطح بیضوی مقایسه، انحنای متوسط می تواند از روی فرمول اولر به سادگی برآورد شود:

$$J_0^N = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{N} \right)$$

(۲۸)

که در آن  $M$  و  $N$  شعاع های انحنای بیضوی در امتدادهای نصف النهاری و مقطع قائم اولیه هستند. این پارامترها توابعی بر حسب اندازه و شکل بیضوی، و عرض  $\phi$  هستند. با جاگذاری برای  $M$  و  $N$  در (۲۸)،

بعد از ساده سازی، بدست می آوریم :

$$J_0^N \doteq \frac{b}{a^2} (1 + 2f \cos^2 \phi) \quad (29)$$

که در مرتبه  $e^2$  صحیح است. با جاگذاری (۲۹) در (۲۷) و بیان جمله تصحیحی  $2\omega^2$ ، خیلی کوچکتر از جمله دیگر، بر حسب پارامتر ژئودتیک  $m$  و  $\gamma$ ، سرانجام فرمول مورد نظر برای گرادیان ثقل نرمال به شکلی که در ژئودزی استفاده می شود، حاصل می گردد :

$$\left. \frac{\partial \gamma}{\partial H} \right|_0 \doteq - \frac{2\gamma_0}{a} (1 + m + 2f \cos^2 \phi). \quad (30)$$

پارامتر ژئودتیک بصورت زیر است :

$$m = \frac{\omega^2 a^3}{GM}$$

علامت منفی در رابطه (۳۰)، همینطور در (۲۶)، نشان می دهد که گرادیان ثقل با افزایش ارتفاع کاهش پیدا می کند، همانگونه که انتظار می رود. توجه شود که گرادیان ثقل (۲۶) وقتی استفاده می شود که شتاب ثقل نرمال در بالای بیضوی مورد نیاز است.

می توانیم رابطه (۳۰) را بصورت زیر بازنویسی کنیم :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \gamma}{\partial H} \right|_0 &\doteq - \frac{2\gamma_E}{a} 1.006\ 73 (1 - 0.001\ 415 \sin^2 \phi) \\ &\doteq - 0.308\ 745 [\text{mGal/m}] (1 - 0.001\ 415 \sin^2 \phi) \end{aligned} \quad (31)$$

با در نظر گرفتن مقدار میانگین برای  $\sin^2 \phi$  برابر 0.4، بدست می آوریم :

$$\boxed{\left. \frac{\partial \gamma}{\partial H} \right|_0 \doteq - 0.3086 \text{ mGal/m.}} \quad (32)$$

این مقدار تقریبی گرادیان ثقل نرمال است که در تعریف ارتفاع های ویگنال استفاده شده است. مقدار یکسان با این گرادیان برای **گرادیان هوای آزاد** با در نظر گرفتن مقدار شتاب ثقل بصورت زیر بدست آمده است :

$$g \doteq \frac{GM}{r^2} - \omega^2 r \cos^2 \phi \quad (33)$$

جمله دوم در سمت راست، شتاب گریز از مرکز است. با دیفراسیل گیری نسبت به  $r$  نتیجه می دهد :

$$\frac{\partial g}{\partial r} \doteq \frac{\partial g}{\partial H} \doteq - \frac{2GM}{r^3} - \omega^2 \cos^2 \phi \quad (34)$$

با جاگذاری مقدار شعاع متوسط زمین  $R$  به جای  $r$ ، بصورت زیر حاصل می شود :

$$\frac{\partial g}{\partial H} \doteq (-0.3083 - 0.000532 \cos^2 \phi) \text{mGal/m} \quad (35)$$

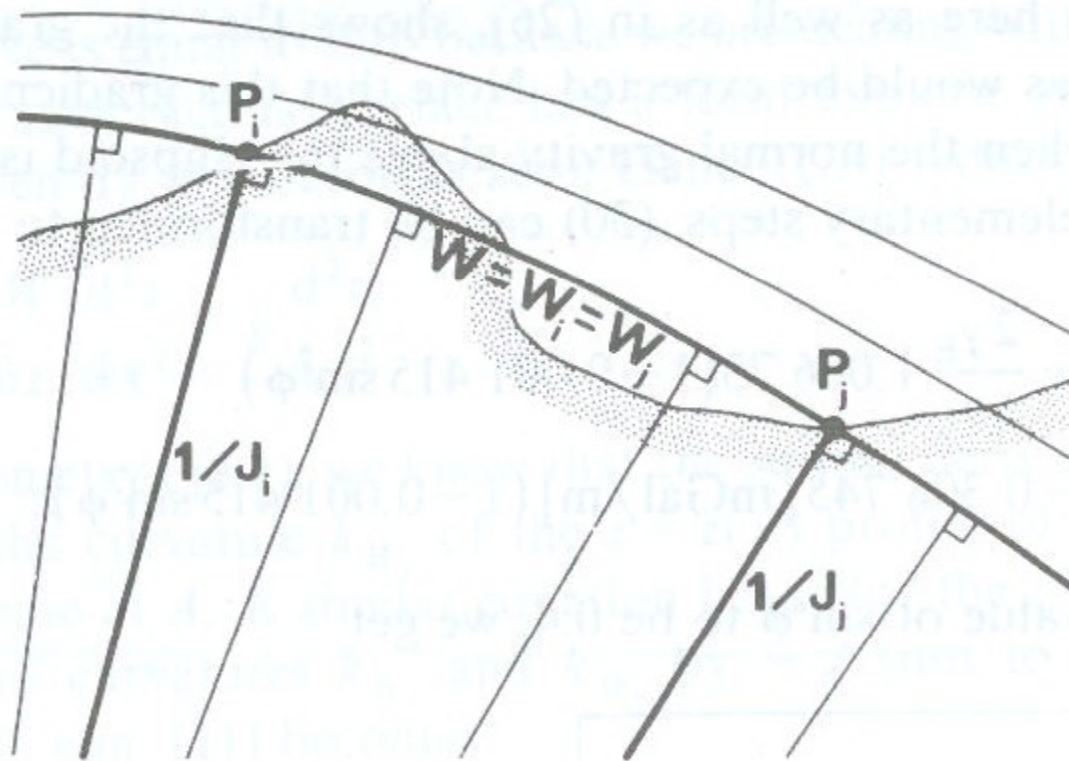
اگر مقدار متوسط  $0.6$  برای  $\cos^2 \phi$  در نظر گرفته شود، مقدار تقریباً یکسانی نظیر رابطه (۳۲) بدست می آوریم. مقدار متوسط یکسانی، همچنین، از روی رابطه (۲۶) حاصل می شود اگر مقادیر مختلف  $\sigma = 0$  و  $J = 1/R$ ، و مقدار متوسط شتاب ثقل در آن لحاظ شود. معادله (۲۶) نمی تواند برای ارزیابی گرادیان ثقل نرمال در داخل بیضوی مقایسه استفاده شود، از آنجا که توزیع جرم نرمال  $\sigma^N$  در داخل بیضوی تعریف نشده است.

گرادیان میدان ثقل واقعی همچنین بطور منطقه ای و محلی به دلیل توزیع غیریکنواخت اجرام، یعنی به دلیل توپوگرافی و نوسانات چگالی در زیر سطح فیزیکی زمین، تغییر می کند. این تغییرات چگالی، در مقدار متغیر انحنای متوسط سطوح هم پتانسیل مربوطه  $J$  منعکس می شود (شکل ۱۱). مقادیر منطقه ای درست برای  $J$  از روی شکل منطقه ای ژئوئید می تواند بدست آید. مقادیر محلی باید مستقیماً تعیین شوند. نه شعاع انحناء و نه انحنای مربوط به آن  $J$ ، نمی توانند مشاهده شوند. البته تکنیک هائی موجود است که **کمیت های دیگری** را مورد اندازه گیری قرار می دهند و  $J$  از روی آنها بدست می آید. یکی از این کمیت ها، **زاویه انحراف قائم** است.

عوارض محلی دیگر از میدان ثقل واقعی می توانند مستقیماً بوسیله تجهیزات مختلف اندازه گیری شوند. با استفاده از تکنیک بهبود داده شده توسط اتووش، می توانیم کمیت های زیر را در سیستم مختصات ارائه شده در شکل ۱۰ بدست آوریم :

$$\frac{\partial g}{\partial x}, \quad \frac{\partial g}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$$

(۳۶)



شکل ۱.۱۱. انحنای سطوح هم پتانسیل



برای تعیین  $\partial g / \partial H$  در داخل زمین، فرضیاتی در رابطه با توزیع چگالی باید در نظر گرفته شود. بسیاری از این فرضیات برای اهداف مختلف پیشنهاد و استفاده شدند. در این قسمت، دو گرادیان که معمولاً استفاده می شوند، ارائه می گردند: اولی به نام **گرادیان پوانکاره و پری**، و دومین گرادیان که بوسیله بوگه ایجاد شد (**گرادیان بوگه**).

**الف - گرادیان پوانکاره-پری**: این گرادیان بر اساس این فرض که حاصل ضرب  $gJ$  برای میدان ثقل واقعی، بطور متوسط، برابر حاصل ضرب  $\gamma J^N$  برای میدان ثقل نرمال است. زیر این فرض، با انجام تفاضل (۲۷) از (۲۶)، بدست می آوریم:

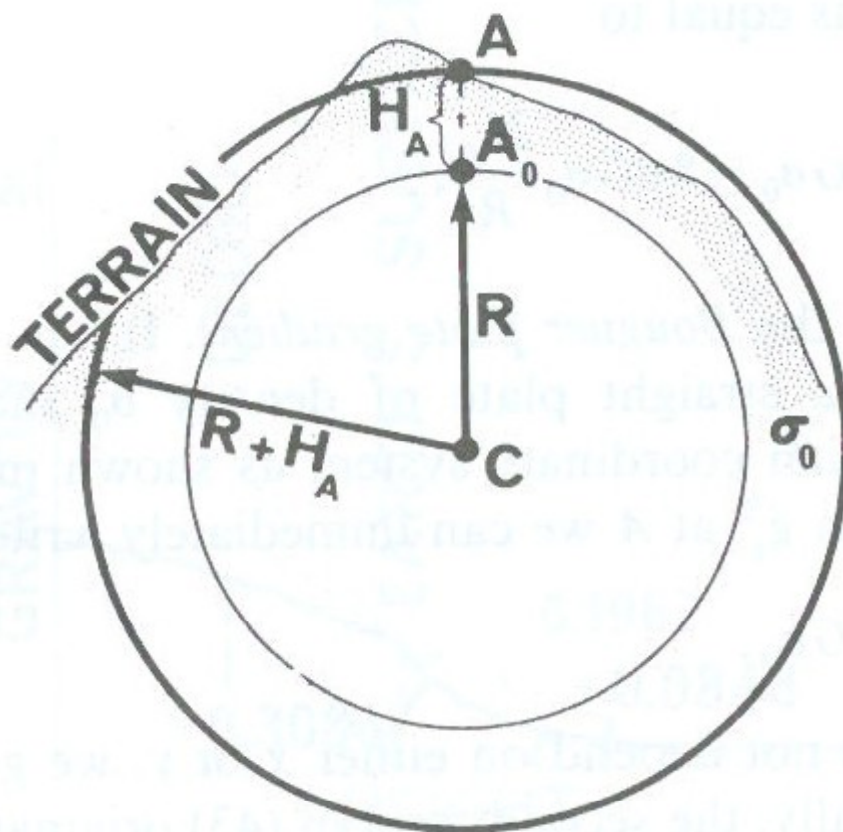
$$\frac{\partial g}{\partial H} \doteq \frac{\partial \gamma}{\partial H} + 4\pi G\sigma \quad (۳۷)$$

بعد، با در نظر گرفتن  $\partial \gamma / \partial H \doteq -0.3086 \text{ mGal/m}$  و یک مقدار متوسط چگالی به این صورت  $\sigma = 2.67 \text{ g cm}^{-3}$ ، بدست می آوریم:

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial H} \doteq -0.0848 \text{ mGal/m.}} \quad (۳۸)$$

این گرادیان برای برآورد ارتفاع های ارتومتریک هلمرت استفاده می شود، و می تواند بعنوان یک تقریب خوب برای لایه های زیرین نزدیک به سطح زمین در نظر گرفته شود، همانطور که، بعنوان مثال با مقدار مشاهداتی گزارش شده  $-81 \mu\text{Gal/m}$  گواهی می شود.

ب- **گرادیان بوگه** : برای فهم ایده پایه مربوط به گرادیان بوگه، شکل (۱۲) را در نظر می گیریم. برای تعیین گرادیان ثقل بین نقطه زمینی **A** و نقطه نظیر  $A_0$  روی ژئوئید، فرض می کنیم که ژئوئید یک کره با شعاع **R** است. بنابراین، گرادیان مورد نظر در دو مرحله برآورد می شود: **اول**، قسمتی از گرادیان به دلیل این ژئوئید (کروی) فرض شده بدست می آید، و **بعد**، قسمت باقیمانده گرادیان به دلیل پوسته کروی  $\sigma_0$  با ضخامت  $H_A$  و دانسیته یکنواخت  $\sigma_0$  تعیین می شود.



شکل ۱.۱۲. گرادیان بوگه

مرحله اول، دوباره **گرادیان هوای آزاد** را نتیجه می دهد، اگر توزیع یکنواخت جانبی برای اجرام در نظر گرفته شود. مرحله دوم، یک مقدار بیشتر نیاز به بررسی دارد. شتاب جاذبه  $\bar{g}_g^\ominus$  ناشی از پوسته کروی، ارائه شده در مختصات کروی ژئوسنتریک، در نقطه A در معادله زیر صدق می کند:

$$\text{div } \bar{g}_g^\ominus = \nabla \cdot \bar{g}_g^\ominus(r, \theta, \lambda)|_A = -2\pi G \sigma_0 \quad (39)$$

از آنجا که پوسته بصورت کروی فرض شده، بنابراین  $\bar{g}_g^\ominus$ ، در سیستم مختصات انتخاب شده، بصورت **فقط تابعی از r** است، و مشتقات نسبت به  $\theta$  و  $\lambda$  ناپدید می شوند. با در نظر گرفتن این نکته که امتداد  $\bar{g}_g^\ominus$  در **جهت مخالف** امتداد r است (بنابراین با تغییر علامت)، رابطه (39) بصورت زیر در می آید:

$$\frac{2}{r_A} g_g^\ominus(r_A) + \left. \frac{\partial g_g^\ominus}{\partial r} \right|_A = 2\pi G \sigma_0 \quad (40)$$

که جمله دوم گرادیان مورد نظر ماست. شتاب جاذبه  $\bar{g}_g^\ominus$  به دلیل پوسته کروی به آسانی تعیین می شود، بخاطر اینکه میدان پوسته بصورت شعاعی است. بدست می آوریم:

$$g_g^\ominus(r_A) = \frac{GM^\ominus}{(R + H_A)^2} \quad (41)$$

که در آن  $M^{\mathcal{E}}$  به شکل زیر است :

$$M^{\mathcal{E}} = \frac{4}{3}\pi\sigma_0[(R + H_A)^3 - R^3] \doteq 4\pi\sigma_0 R^2 H_A \quad (42)$$

بنابراین گرادیان در نقطه A برابر است با :

$$\left. \frac{\partial g_g^{\mathcal{E}}}{\partial H} \right|_A \doteq +2\pi G\sigma_0 - 8\pi G\sigma_0 \frac{H_A}{R} \quad (43)$$

جمله اول در سمت راست (43) **گرادیان صفحه بوگه** نامیده می شود. این گرادیان می تواند به آسانی بصورت گرادیان ایجاد شده توسط **یک پلیت مستقیم** با چگالی  $\sigma_0$  که تا بی نهایت ادامه پیدا می کند، بدست آید. با انتخاب یک سیستم مختصات کارتزین محلی نظیر آنچه در شکل ۱۳ نشان داده شده، برای شتاب جاذبه پلیت  $\bar{g}_g^{\mathcal{P}}$  در A می توانیم بصورت زیر بنویسیم :

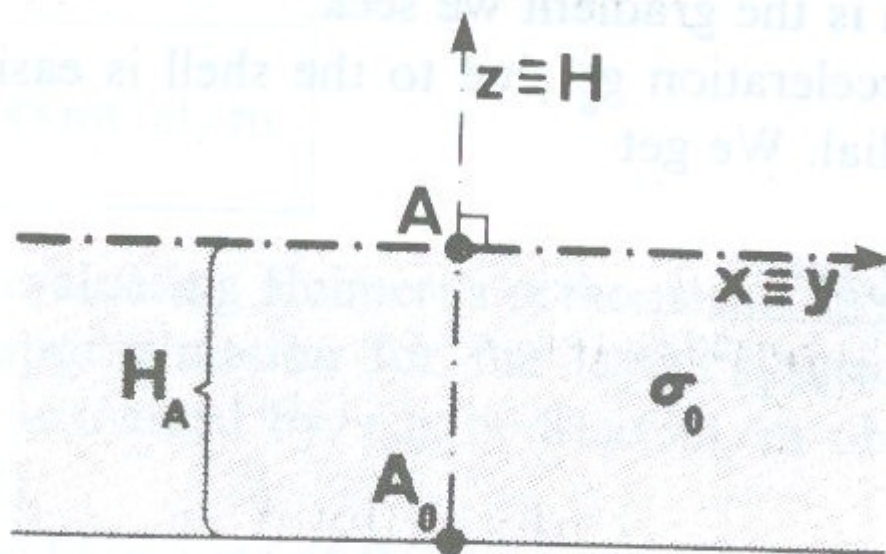
$$\nabla \cdot \bar{g}_p^{\mathcal{P}} = -2\pi G\sigma_0 \quad (44)$$

و از آنجا که این میدان به X یا Y بستگی ندارد، معادله برای **جمله اول** در (43) حاصل می شود. بطور منطقی، **جمله دوم** در (43) از روی این حقیقت ایجاد می شود که پوسته بصورت صفحه ای است که دور ژئوئید خمیده می شود. به همین دلیل بصورت **گرادیان انحناء** نامیده می شود.

ذکر این نکته جالب توجه است که **گرادیان انحناء خیلی کوچک** است،  $+0.00012 \text{ mGal/m}$  برای هر کیلوتر از  $H$ ، و بنابراین، معمولاً صرفنظر می شود. در نتیجه، پوسته کروی بر روی سطح پوسته، گرادیانی ایجاد می کند که برای همه مقاصد اجرائی، برابر گرادیان پلیت بوگه است. با تعیین گرادیان پوسته مورد بررسی، باید آن را به گرادیان هوای آزاد اضافه کنیم. با فرض چگالی پوسته  $\sigma_0$  برابر  $2.67 \text{ g cm}^{-3}$ ، در نهایت گرادیان بوگه بصورت زیر حاصل می شود:

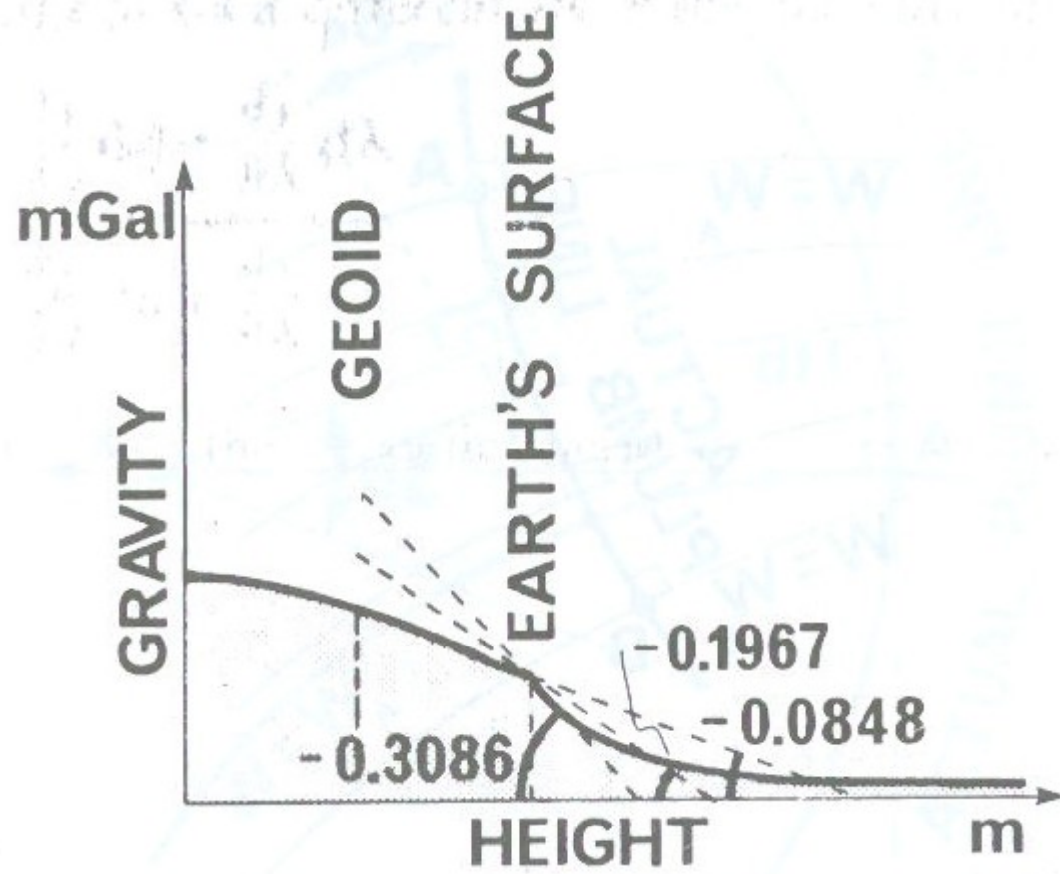
$$\frac{\partial g}{\partial H} \doteq -0.1967 \text{ mGal/m.}$$

(۴۵)



شکل ۱.۱۳. پلیت بوگه

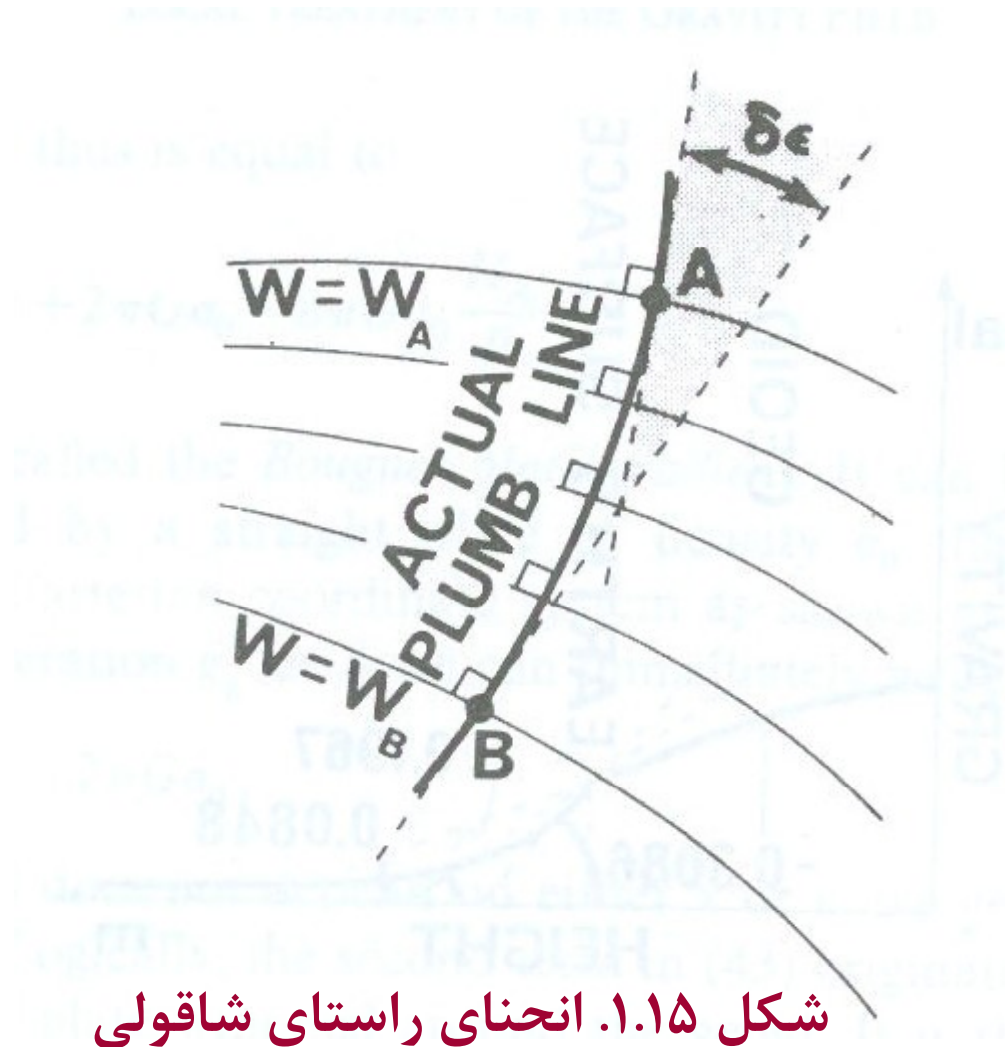
در انتهای این قسمت، در رابطه با گرادیان ها، نکاتی ارائه می شود. **گرادیان بوگه**، بطور دقیق مقدار متوسط گرادیان های **هوای آزاد و پوانکاره-پری** است. توضیح این حقیقت ساده می شود اگر به هر سه گرادیان بصورت دیورژانس های  $\bar{g}$  نگاه کنیم. در حالیکه گرادیان هوای آزاد بصورت دیورژانس  $\bar{g}$  در فضای خالی ارزیابی می شود  $\sigma = 0$ ، و گرادیان پوانکاره-پری بصورت دیورژانس  $\bar{g}$  در داخل زمین برآورد می شود، گرادیان بوگه بر روی سطح فیزیکی زمین تعیین می شود (برای  $\sigma/2$ ). بنابراین، گرادیان بوگه در داخل و خارج از سطح زمین یک مقدار منطبق بر حقیقت نیست. ارتباط سه گرادیان ثقل مختلف **بر روی، در بالای، و در زیر** سطح زمین در شکل ۱۴ نمایش داده شده است.



شکل ۱.۱۴. گرادیان قائم ثقل

### ۱.۳- انحنای راستای شاقولی

خاصیت مهم دیگر میدان ثقل با طبیعت محلی، انحنای راستای شاقولی، واقعی یا نرمال، است.

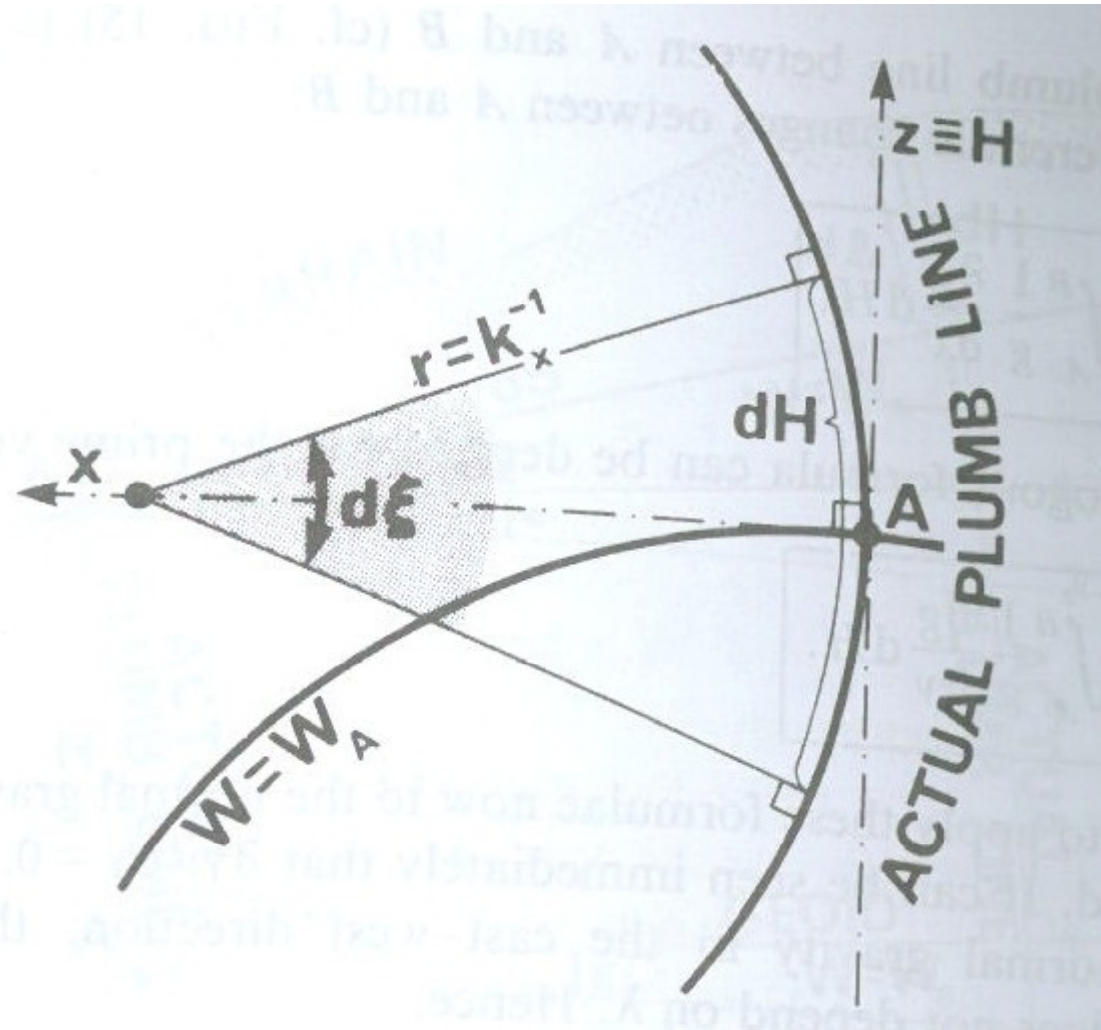


برای نشان دادن اینکه چگونه انحنای راستای شاقولی به پارامترهای دیگر میدان ثقل مرتبط می شود، شکل ۱۵ را در نظر می گیریم. هدف، بررسی زاویه  $\delta\epsilon$  یا تصاویر آن در صفحات نصف النهاری و مقطع قائم اولیه است.

شکل ۱.۱۵. انحنای راستای شاقولی



در اینجا نیز از یک سیستم مختصات کارتیزین محلی دست راستی استفاده می کنیم، بطوریکه محور  $z$  آن مماس بر راستای شاقولی در نقطه  $A$  و به سمت بالا مثبت باشد. محور  $x$  آن به سمت شمال قرار گیرد، به گونه ای که یک سیستم مختصات  $LA$  با محور  $y$  معکوس شده ایجاد شود.



شکل ۱.۱۶. سیستم مختصات کارتیزین محلی (سیستم  $LA$  با محور  $y$  معکوس شده)

با توجه به شکل ۱۶، اول انحناء در صفحه نصف النهاری  $xz$  را بررسی می کنیم. معادله تصویر خط شاقولی در صفحه  $xz$  می تواند بصورت زیر نوشته شود :

$$x = x(z) \quad (46)$$

واضح است که این تابع در نقطه  $A$  دارای مقدار حدی است، یعنی :

$$\left. \frac{dx}{dz} \right|_A = 0 \quad (47)$$

بنابراین انحناء تصویر راستای شاقولی در صفحه  $xz$  نصف النهاری،  $k_x$  ، بصورت زیر می شود :  
( با نتیجه گیری نظیر آنچه در حالت تغییرات قائم ثقل بررسی شد )

$$k_x \Big|_A = \left. \frac{d^2x}{dz^2} \right|_A \quad (48)$$

برای ارزیابی مشتق دوم در  $A$ ، معادله دیفرانسیل خط شاقولی فرموله می شود. اگر یک بردار بینهایت کوچک  $d\bar{a}$  بصورت زیر در نظر گرفته شود :

$$d\bar{a} = dx\bar{i} + dy\bar{j} + dz\bar{k} \quad (49)$$

و آن را موازی بردار ثقل (با معادله زیر) ایجاد نمائیم :

$$\bar{g} = \nabla W = \frac{\partial W}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial W}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial W}{\partial z} \bar{k} \quad (50)$$

معادله دیفرانسیل زیر حاصل می شود :

$$\boxed{dx / \frac{\partial W}{\partial x} = dy / \frac{\partial W}{\partial y} = dz / \frac{\partial W}{\partial z}} \quad (51)$$

مشتق اول **x** نسبت به **z** بصورت زیر می شود :

$$\frac{dx}{dz} = \frac{\partial W}{\partial x} / \frac{\partial W}{\partial z} \quad (52)$$

و مشتق دوم (**x** نسبت به **z**) بصورت مشتق کلّ مشتق اول می شود :

$$\frac{d^2x}{dz^2} = \left( \frac{\partial W}{\partial z} \right)^{-2} \left[ \frac{\partial W}{\partial z} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{dx}{dz} \right) - \frac{\partial W}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z \partial x} \frac{dx}{dz} \right) \right] \quad (53)$$

بخاطر اینکه محور  $x$  مماس بر سطح هم پتانسیل  $W = W_A$  است ( شکل ۱۶)، نتیجه می شود :  
 $\partial W / \partial x = 0$ ، و با در نظر گرفتن (۴۷)، رابطه (۵۳) بصورت زیر می شود :

$$k_x \Big|_A = \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z} / \frac{\partial W}{\partial z} \Big|_A \quad (۵۴)$$

با فرض اینکه  $W$  در امتداد خط شاقولی به اندازه کافی هموار باشد، می توانیم جملات مختلف را در مشتق دوم جابجا نمائیم، و در نهایت بدست بصورت زیر می آوریم :

$$k_x \Big|_A = \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial x} \Big|_A \quad (۵۵)$$

برای تبدیل انحناء به تغییر دیفرانسیلی  $d\xi$  از مولفه نصف النهاری انحراف قائم  $\xi$ ، معادله آشکار (شکل ۱۶) بصورت زیر است :

$$d\xi = -k_x dH \quad (۵۶)$$

که در اینجا نیز علامت منفی بیانگر علامت قرار دادی برای مولفه های زاویه انحراف قائم است.

تغییر کلی  $d\xi$  در  $\xi$  به دلیل انحنای خط شاقولی بین **A** و **B** (شکل ۱۵) با انتگرال گیری تغییرات دیفرانسیلی بین **A** و **B** بصورت زیر بدست می آید:

$$\delta\xi = - \int_A^B \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial x} dH. \quad (57)$$

یک فرمول کاملاً مشابه می تواند برای مولفه مقطع قائم اولیه به شرح زیر حاصل شود:

$$\delta\eta = + \int_A^B \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial y} dH. \quad (58)$$

حال می توان فرمول های فوق را برای میدان ثقل نرمال در بالای بیضوی ژئوسنتریک بررسی کرد. میتوان به سهولت نتیجه گرفت:  $\partial\gamma/\partial y = 0$  با توجه به اینکه هیچگونه تغییر در ثقل نرمال در جهت شرقی - غربی نیست، میدان نرمال متقارن است و وابستگی به  $\lambda$  ندارد. بنابراین:

$$\delta\eta^N = 0. \quad (59)$$

از طرف دیگر، ثقل نرمال در جهت شمالی - جنوبی تغییر می کند، به دلیل وابستگی میدان نرمال به  $\phi$ . با در نظر گرفتن دو جمله اول از شتاب ثقل نرمال بر روی بیضوی، می توانیم شتاب ثقل نرمال را به شرح زیر بنویسیم:

$$\gamma(\phi, h) = \gamma_0(\phi) + \frac{\partial\gamma}{\partial h} h \doteq \gamma_E (1 + \tilde{f} \sin^2\phi) + \frac{\partial\gamma}{\partial h} h \quad (60)$$

$$\gamma_0(\phi) \doteq \gamma_E (1 + \alpha \sin^2\phi + \beta \sin^2 2\phi),$$

$$f = \frac{a-b}{a}$$

فشرده گی هندسی:

$$(\gamma_P - \gamma_E) / \gamma_E = \tilde{f}$$

فشرده گی ثقل:

$$\alpha \doteq \tilde{f}$$

$$\beta \doteq f(f - \tilde{f}) / 4$$

در تقریب اول، گرادیان  $\partial\gamma/\partial h = \partial\gamma/\partial H$  مقدار ثابت است (رابطه ۳۰)، و بدست می آوریم:

$$\frac{\partial\gamma}{\partial x} = \frac{1}{R(\phi)} \frac{\partial\gamma}{\partial\phi} \doteq \frac{\gamma_E}{R} \tilde{f} \sin 2\phi \quad (61)$$

برای منطقه بالای سطح بیضوی فرانس، نتیجه می گیریم (از روابط ۵۷ و ۶۱):

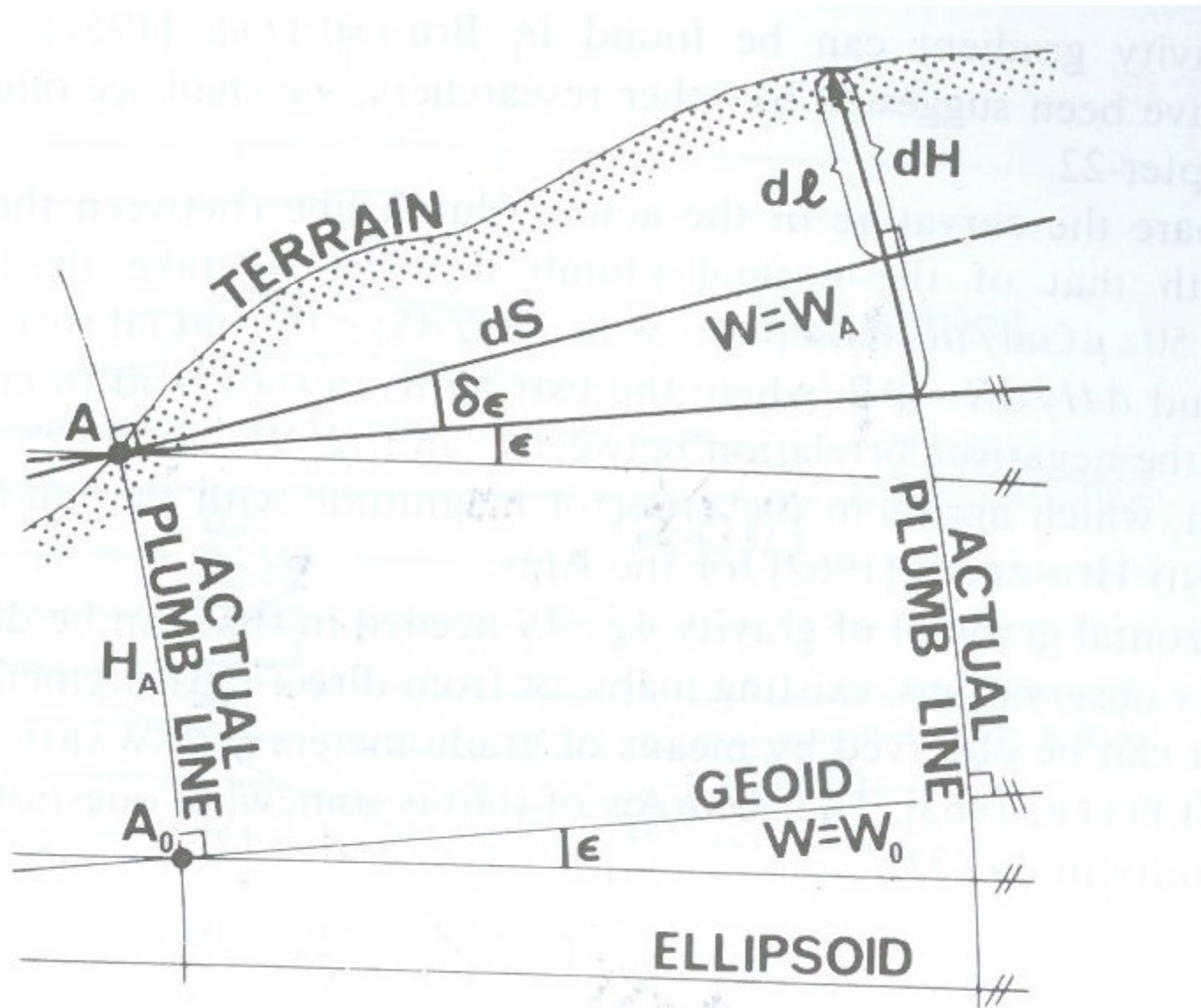
$$\delta\xi^N \doteq - \int_A^B \frac{\gamma_E}{\gamma R} \tilde{f} \sin 2\phi dH \doteq 0.17'' \sin 2\phi \Delta H_{AB}, \quad (62)$$

که  $\Delta H_{AB}$  به کیلومتر است.

قابل ذکر است که انحنای راستای شاقولی نرمال بسیار کوچک است. توضیح بیشتر، این انحنای نرمال تنها بطور ضعیفی به انحنای راستای شاقولی واقعی مرتبط می شود. برخلاف حالت ذکر شده برای انحنای شاقولی نرمال، انحنای راستای شاقولی واقعی دارای نامنظمی بمراتب بیشتر و مقدار بمراتب بزرگتر است. بنابراین، برخلاف انحنای نرمال، برآورد اثر انحنای واقعی کار خیلی دشواری است. برای برآورد این اثر، نقطه A را بر روی سطح زمین و یک نقطه بسیار نزدیک دیگر (بطور دیفرانسیلی) با میزان جدائی dS در نظر می گیریم. بنابراین، تصویر تغییر  $\delta\epsilon$  در زاویه انحراف  $\epsilon$  به دلیل انحنای خط شاقولی تصویر شده در صفحه قائم گذرنده از این دو نقطه برابر است با:

$$\delta\epsilon = \frac{dH - dl}{dS} \quad (63)$$

که در آن dH تغییر دیفرانسیلی در ارتفاع ارتومتریک در امتداد dS است، و dl تغییر در ارتفاع مشاهده شده در امتداد dS است (شکل ۱۷).



شکل ۱.۱۷. ارتباط بین انحنای شاقولی و ارتفاع

ولی، عبارت  $dH - dl$  بطور ساده بیانگر تغییر در تصحیح ارتومتریک OC در امتداد  $dS$  است، یعنی  $dOC$  از روی تعریف ارتفاع ارتومتریک، در چند مرحله ساده، می توانیم بدست آوریم :

$$dOC = H_A \frac{\bar{g}'_A - \bar{g}'}{\bar{g}'} + dl \frac{\bar{g} - \bar{g}'}{\bar{g}'} \quad (64)$$

که  $\bar{g}'_A$  ثقل متوسط نقطه A، و  $\bar{g}'$  ثقل متوسط نقطه دوم است ( هر دو در حالت تعریف ارتفاع ارتومتریک، یعنی متوسط ثقل بین نقطه زمینی و ژئوئید در راستای شاقولی ). متوسط ثقل سطحی بین دو نقطه با  $\bar{g}$  نمایش داده می شود.

حال می توانیم بنویسیم:  $\bar{g}'_A = g_A - \frac{1}{2}(\partial g / \partial H)H_A$ ،  $\bar{g} = g_A + \frac{1}{2}(\partial g / \partial S)dS$ ، و  $\bar{g}' = g + \frac{1}{2}(\partial g / \partial H)H$ . همچنین، فرض می کنیم  $\partial g / \partial H$  برابر مقدار ثابت باشد، یا به عبارت دیگر،  $\partial^2 g / (\partial H \partial S)$  برابر صفر شود. در نتیجه، (64) بصورت زیر می شود :

$$dOC = \frac{\frac{\partial g}{\partial H} H dH - \frac{\partial g}{\partial S} H dS}{2\bar{g}} \quad (65)$$

بنابراین، زاویه انحراف قائم در امتداد مورد علاقه بصورت زیر می شود :

$$\delta\epsilon = - \frac{H}{2\bar{g}} \left( \frac{\partial g}{\partial S} - \frac{\partial g}{\partial H} \frac{dH}{dS} \right), \quad (66)$$

که تمام کمیت ها، بغیر از  $\partial g / \partial H$  می توانند بر روی سطح زمین مشاهده شوند.



برای مقایسه انحنای راستای شاقولی واقعی (بین ژئوئید و سطح زمین) و انحنای راستای شاقولی نرمال، شرایط زیر را در نظر می گیریم:

$$|\partial\gamma/\partial S| \leq 0.5 \text{ } \mu\text{Gal/m} \text{ (در مقایسه با: } \partial g/\partial S = -50 \text{ } \mu\text{Gal/m)}$$

$\partial g/\partial H = -85 \text{ } \mu\text{Gal/m}$  و  $dH/dS = 0.2$ ، که دو جمله در رابطه (۶۶) در جهت حذف

یکدیگر، به دلیل وابستگی منفی بین  $g$  و  $H$ ، عمل می کنند. مقدار  $\delta\epsilon \doteq 3.3''$  به ازای هر کیلومتر

ارتفاع بدست می آوریم، که از لحاظ اندازه با مقدار گزارش شده در آلپ در توافق است.

گرادیان مسطحاتی ثقل  $\partial g/\partial S$ ، مورد نیاز در رابطه (۶۶)، می تواند یا از روی مشاهدات ثقل،

نقشه های ثقل موجود، و یا از روی مشاهدات مستقیم تعیین شود. **گرادیان مسطحاتی ثقل** می تواند

بوسیله **گرادیومتر** یا **ترازوی پیچشی (Torsion balance)** اندازه گیری شود.

### ۱.۳- اثرهای توپوگرافی و ایزوستازی

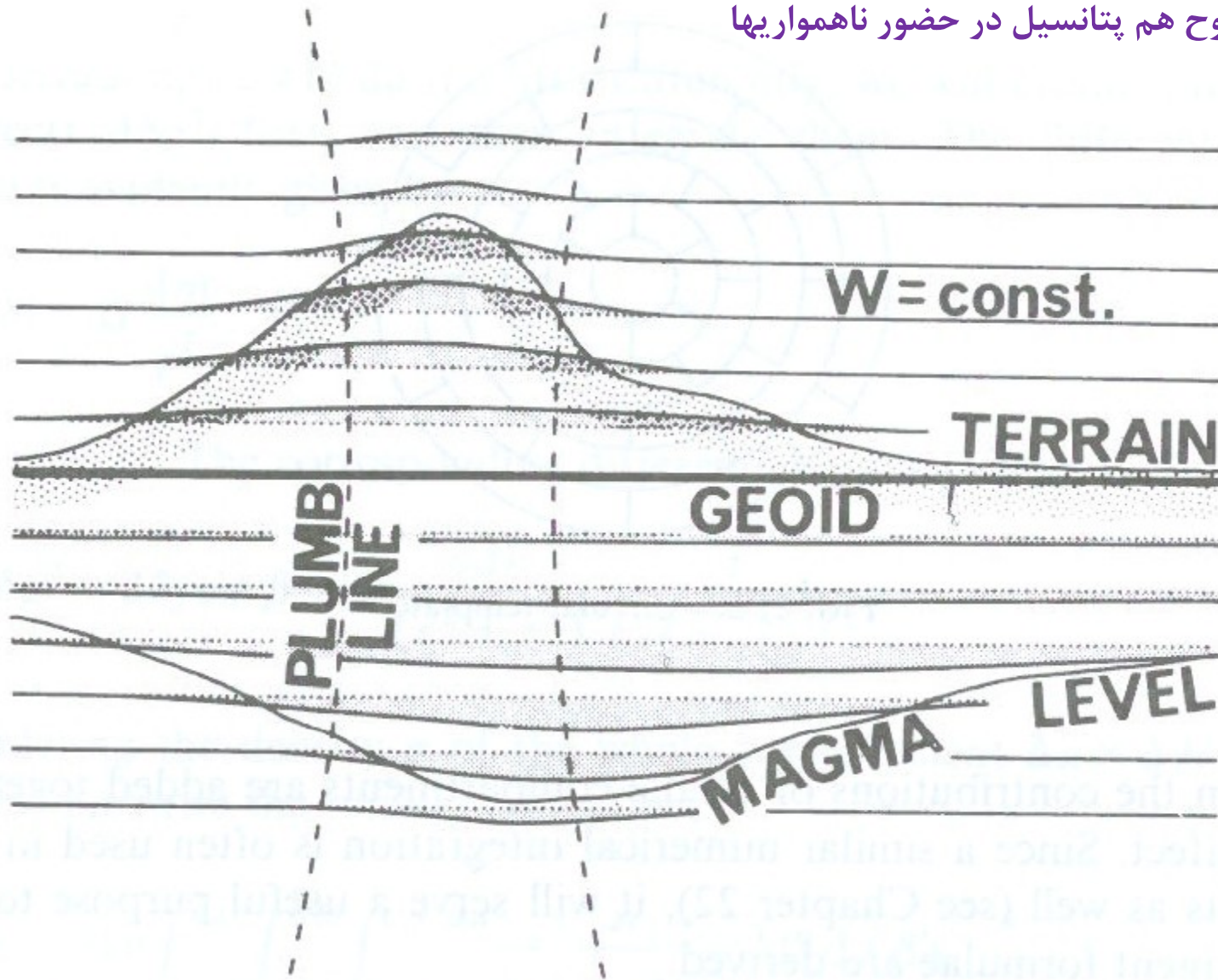
رفتار محلی میدان ثقل واقعی، توزیع نامنظم محلی و منطقه ای اجرام را منعکس می کند. بیشترین نامنظمی به دلیل شکل نامنظم سطح زمین، و با صراحت کمتری، به دلیل ایزوستازی ایجاد می شود.

پوسته جامد زمین، در بخش اعظم سطح زمین، در وضعیت تعادل ایزوستاتیکی است. این به این معنی است که ژئوئید، بعنوان یک سطح هم پتانسیل، نایستی شکل خود را زیر تأثیر حضور توپوگرافی نامنظم متأثر ببیند. اثر اجرام اضافی در بالای ژئوئید بوسیله یک کمبود چگالی در اعماق زیر زمین تعدیل می شود. حالت معکوس این حالت در دریاها رخ می دهد، اثر کمبود اجرام در این مناطق بوسیله اجرام چگال تر در اعماق زیر زمین جبران می شود. شکل سطوح هم پتانسیل و خطوط شاقولی در شکل ۱۸ نمایش داده شده است.

از طرف دیگر، مشاهدات ما بر روی سطح زمین به شدت بوسیله توپوگرافی متأثرند. یک مثال از این تأثیر را در رابطه (۶۶) می بینیم: جمله  $dH/dS$  بطور ساده شیب سطح فیزیکی زمین است. جمله دوم در این رابطه بیانگر اثر توپوگرافی بر روی انحنای راستای شاقولی واقعی است. واضح است که انحنای راستای شاقولی در مناطق دشت و هموار صفر نیست.

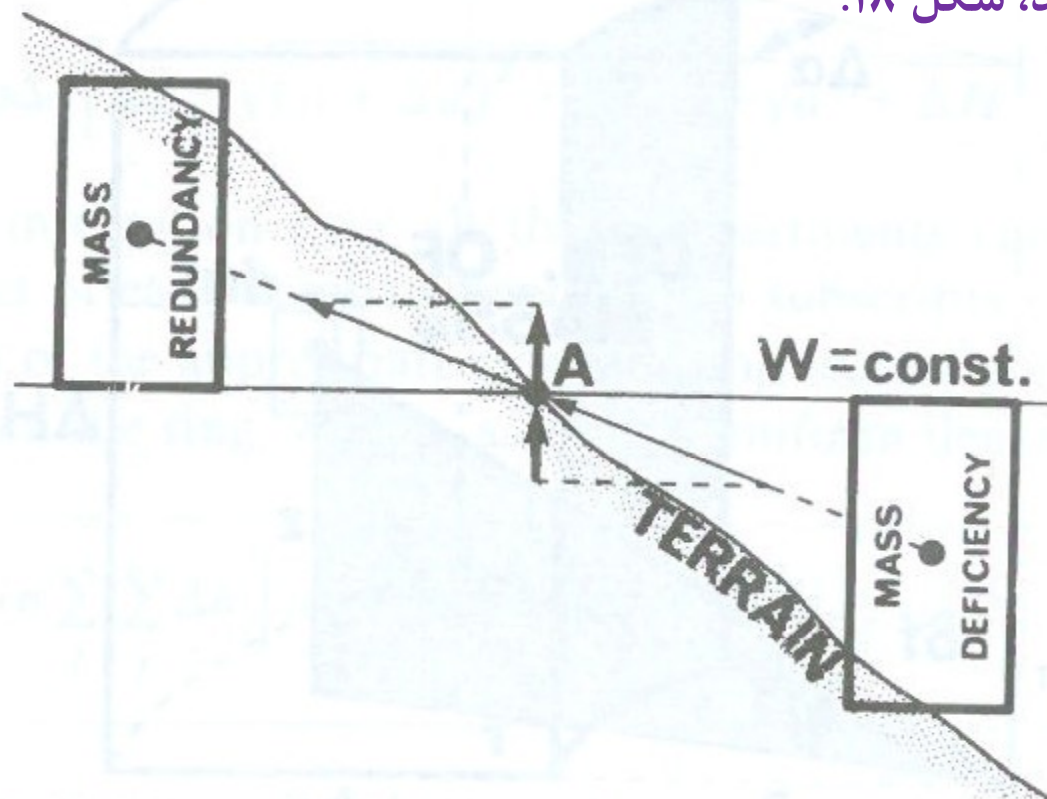
بطور روشن، ناهمواریهای توپوگرافی بر روی شتاب ثقل نیز دارای اثر است. این اثر در شکل ۱۹ نشان داده شده است. واضح است که، در مقایسه با سطح افقی، حضور توپوگرافی، بصورت شیب، در همسایه گی یک نقطه ایجاد یک شتاب جاذبه می کند که همیشه به سمت بالا است، و فرقی نمی کند که ناهمواریها بصورت اضافه جرم (تپه) یا کمبود جرم (دره) باشند.

فاصله بین سطوح هم پتانسیل در حضور ناهمواریها  
بیشتر می شود



شکل ۱.۱۸. اثرهای توپوگرافی و ایزوستازی

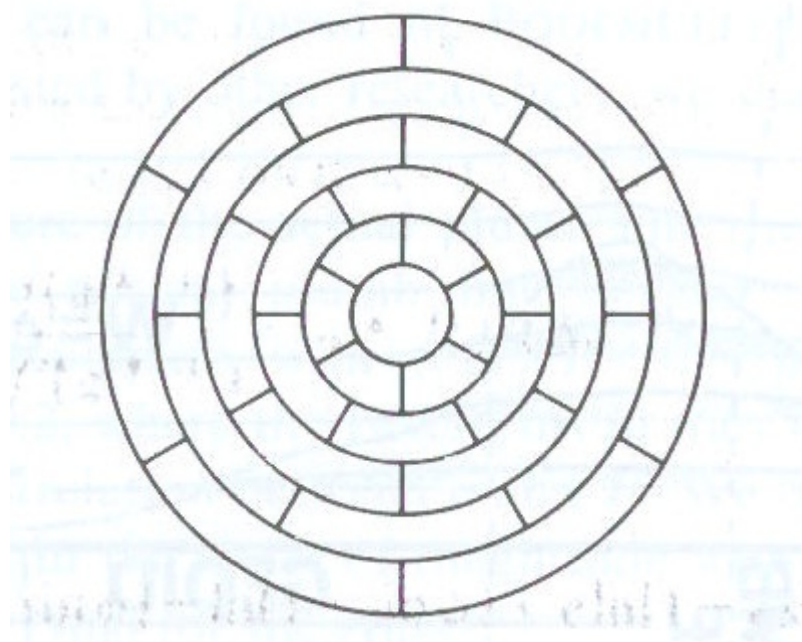
بنابراین، حضور ناهمواریها بصورت یک کاهش ثقل در نقطه مورد نظر است، در مقایسه با حالتی که سطح زمین به شکل کاملاً افقی باشد. بنابراین فاصله بین سطوح هم پتانسیل در حضور ناهمواریها بیشتر می شود، شکل ۱۸.



شکل ۱.۱۹. اثر توپوگرافی بر روی ثقل مشاهده شده

بخاطر اینکه ناهمواریهای توپوگرافی بصورت نامنظم است، اثر آن بر روی شتاب ثقل نمی تواند بصورت تحلیلی تعیین شود، و از انتگرال های عددی بر روی سطح زمین باید استفاده شود. برای این منظور، سطح زمین به قطعات مختلف (سلولها) تقسیم بندی می شود، سهم ناهمواریها برای هر قطعه بطور مستقل تعیین می شود، و سپس سهم های تمامی قطعات به هم اضافه می شود تا اثر کل ناهمواریها بر روی شتاب ثقل بدست آید.

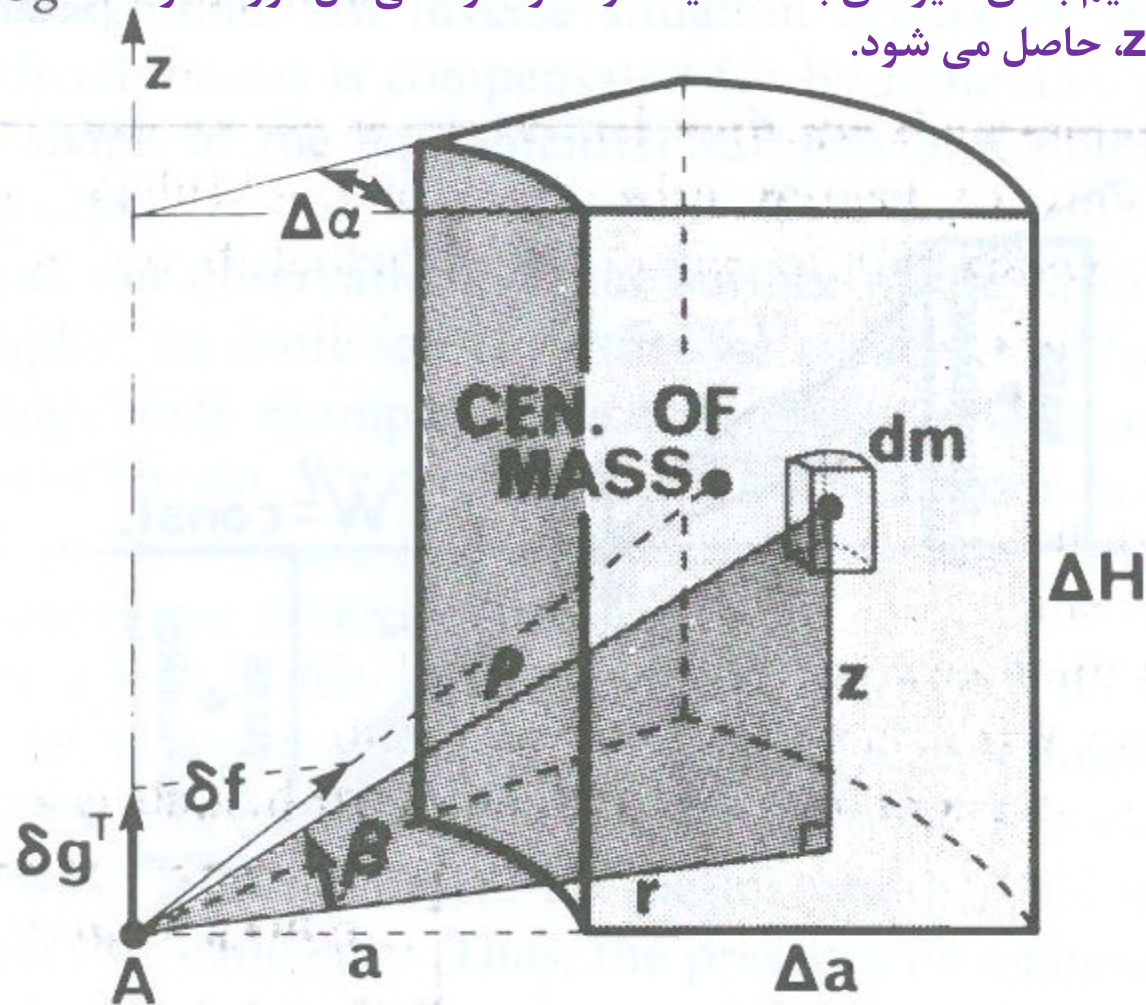
تقسیم بندی، به شکل های مختلف انجام می شود. تقسیم بندی دایره ای، با سیستم مختصات استوانه ای، بیشتر معمول است. برای تعیین سهم ثقلی یک تقسیم بندی دایره ای، شکل ۲۱ را در نظر می گیریم.



شکل ۱.۲۰. تقسیم بندی دایره ای

شکل ۲۱ یک تقسیم بندی دایره ای از ناهمواریها با ارتفاع متوسط  $\Delta H$  در بالای نقطه محاسبه را نشان می دهد. اثر کل ثقلی آن  $\delta f$  می تواند با انتگرال گیری یک اثر جزئی  $d\delta f$  مربوط به المان جزئی جرم  $dm$  بر

روی کل جرم این تقسیم بندی دایره ای بدست آید. در آخر، اثر ثقلی کل مورد نظر ما،  $\delta g^T$ ، با تعیین تصویر  $\delta f$  در امتداد قائم، محور  $Z$ ، حاصل می شود.



شکل ۱.۲۱. جاذبه یک قطعه

در اینجا، ابتدا اثر جزئی ثقل در امتداد قائم را،  $d\delta g^T$ ، تعیین می‌کنیم و سپس از آن انتگرال گیری می‌کنیم

$$d\delta f = G \frac{dm}{\rho^2} \quad \text{شتاب جاذبه جزئی بصورت:} \quad (67)$$

$$\rho^2 = r^2 + z^2 \quad \text{که در آن:}$$

و شتاب جاذبه جزئی نظیر  
در راستای قائم بصورت:

$$d\delta g^T = d\delta f \sin \beta = G \frac{\sigma dV}{(r^2 + z^2)} \frac{z}{(r^2 + z^2)^{1/2}} \quad (68)$$

حال اگر چگالی در کل تقسیم بندی  $\Delta a \times \Delta H \times a \Delta \alpha$  یک مقدار ثابت در نظر بگیریم، اثر ثقلی کل برای این تقسیم بندی بصورت زیر می‌شود:

$$\delta g^T = G \sigma \int_{\alpha=0}^{\Delta \alpha} \int_{z=0}^{\Delta H} \int_{r=a}^{a+\Delta a} \frac{zr}{(r^2 + z^2)^{3/2}} dr dz d\alpha. \quad (69)$$

با انتگرال گیری نسبت به آلفا نتیجه می‌دهد:

$$\delta g^T = G \sigma \Delta \alpha \int_{z=0}^{\Delta H} \int_{r=a}^{a+\Delta a} \frac{zr}{(r^2 + z^2)^{3/2}} dr dz. \quad (70)$$

با جاگذاری  $\rho^2 = r^2 + z^2$  ، بعد از انتگرال گیری نسبت به  $\rho$  بدست می آوریم :

$$\delta g^T = G\sigma\Delta\alpha \int_a^{a+\Delta a} \left( 1 - \frac{r}{(r^2 + \Delta H^2)^{1/2}} \right) dr \quad (71)$$

و این انتگرال با جاگذاری نظیر بالا، بصورت  $\rho^2 = r^2 + \Delta H^2$  ، بصورت زیر حاصل می شود :

$$\delta g^T = G\sigma\Delta\alpha \left[ \Delta a - \sqrt{(a + \Delta a)^2 + \Delta H^2} + \sqrt{a^2 + \Delta H^2} \right]. \quad (72)$$

حال انتگرال گیری عددی بر روی تمامی تقسیم بندی ها می تواند انجام شود. اگر اثر هر تقسیم بندی با دو اندیس  $l$  و  $j$  نمایش داده شود، که اندیس اول بیانگر موقعیت دایره ای یک حلقه مشخص است، و اندیس دوم بیانگر موقعیت یک تقسیم بندی در داخل آن آن حلقه مورد نظر. با فرض ثابت بودن چگالی، بدست می آوریم :

$$\delta g^T = G\sigma \sum_l \sum_j \Delta\alpha_j \left[ a_{l+1} - a_l + \sqrt{a_l^2 + \Delta H_{j,l}^2} - \sqrt{a_{l+1}^2 + \Delta H_{j,l}^2} \right]. \quad (73)$$

با افزایش  $a$  عبارت داخل کروشه به سمت صفر میل می کند. از نظر اجرائی، این انتگرال فقط تا چند ده کیلومتر از نقطه محاسبه انجام می شود. در حقیقت، این رابطه با تقریب صفحه ای، با اغماض از کرویت زمین، معتبر است



برای تعیین مقادیر حدی برای اثر توپوگرافی، مدل گرادیان ارتفاعی ثقل (رابطه ۲۶) را به شکل زیر می نویسیم :

$$\frac{\partial g}{\partial H} = k\pi G\sigma - 2\omega^2 - 2gJ \quad (74)$$

از روی رابطه ۷۴ روشن است که به ازای  $k=0$  گرادیان هوای آزاد (معتبر در خارج از سطح زمین) نتیجه می شود، در صورتیکه به ازای  $k=4$  گرادیان پوانکاره - پری (معتبر در داخل زمین) بدست می آید. در این رابطه مقدار  $k$  به شکل سطح زمین بستگی دارد (شکل ۲۲).

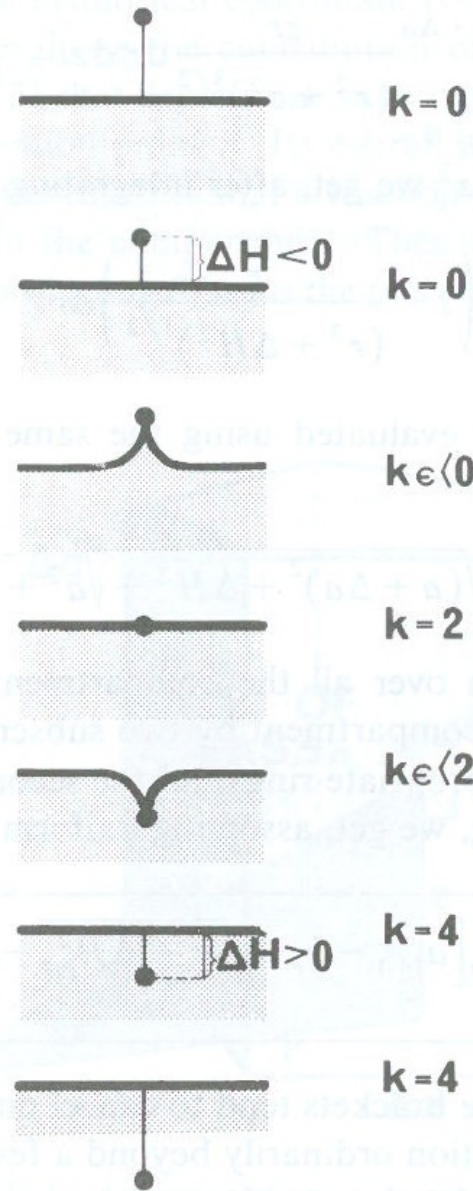
حال با در نظر گرفتن این نکته که گرادیان بوگه  $(\partial g/\partial H)^B$  از روی رابطه ۷۴ با لحاظ  $k=2$  حاصل می شود، رابطه ۷۴ را به شکل زیر می توانیم بازنویسی کنیم :

$$\frac{\partial g}{\partial H} = \left(\frac{\partial g}{\partial H}\right)^B + (k-2)\pi G\sigma \quad (75)$$

که جمله دوم در طرف راست این رابطه گرادیان ثقل به دلیل اجرام توپوگرافی (گرادیان ثقل توپوگرافیکی)  $(\partial g/\partial H)^T$  است. گرادیان ثقل توپوگرافی باید به گرادیان ثقل بوگه اضافه شود تا گرادیان سطحی کل بدست آید.

بطور واضح، گرادیان توپوگرافی در نامساوی زیر صدق می کند :

$$-0.1119 \text{ mGal/m} \leq \left(\frac{\partial g}{\partial H}\right)^T \leq 0.1119 \text{ mGal/m} \quad (76)$$



شکل ۱.۲۲. اثر توپوگرافی بر روی گرادیان قائم ثقل

بنابراین، گرادیان سطحی کل بین مقدار گرادیان پوانکاره - پری  $-0.0848 \text{ mGal/m}$  و مقدار گرادیان هوای آزاد  $-0.3086 \text{ mGal/m}$  قرار می گیرد ( شکل ۲۳).

مقدار گرادیان هوای آزاد برای حالت توپوگرافی شبیه سوزن  $k=0$  حاصل می شود، در صورتیکه مقدار گرادیان پوانکاره - پری برای حالت توپوگرافی شبیه چاه  $k=4$  بدست می آید.

برای تعیین اثر توپوگرافی  $\delta g^T$  بر روی ثقل مشاهداتی، باید گرادیان توپوگرافی را در ارتفاع عوارض ناهمواریها نسبت به نقطه مشاهداتی، یعنی  $\Delta H$ ، ضرب کنیم ( شکل ۲۲).

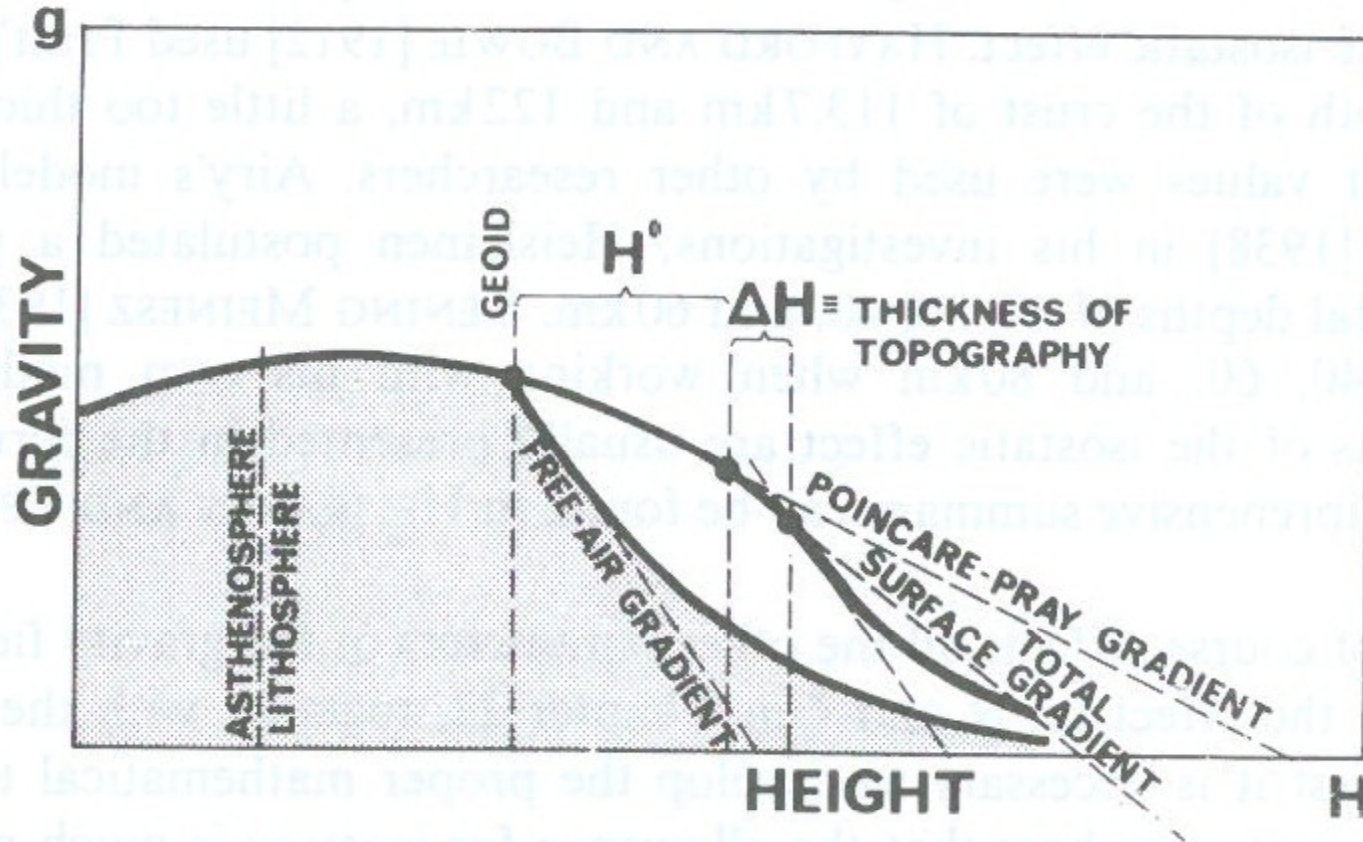
توپوگرافی شبیه سوزن با یک  $\Delta H$  منفی مشخص می شود، در صورتیکه توپوگرافی شبیه چاه با یک مقدار مثبت  $\Delta H$  بیان می گردد. در هر دو حالت، حاصلضرب زیر :

$$\delta g^T = \left( \frac{\partial g}{\partial H} \right)^T \Delta H \quad (77)$$

یک مقدار مثبت است، همانطور که قبلاً نشان داده شد ( شکل ۱۹).

برای کاربردهای ژئوفیزیکی، اثر توپوگرافی معمولاً به آنامولی ثقل بوگه اضافه می شود که به شرح زیر است :

$$\Delta g^{(B)} = g - \left( \frac{\partial g}{\partial H} \right)^B H - \gamma_0 \quad (78)$$



شکل ۱.۲۳. تغییرات ثقل با ارتفاع و با توپوگرافی ( حالت زمین بدون توپوگرافی بصورت خاکستری)

## ۲- بررسی رفتار جهانی میدان ثقل زمین

- معادلات بنیادی برای پتانسیل ثقل
- گسترش پتانسیل جاذبه به توابع ویژه (هارمونیک های کروی)
- میدان ثقل مدل (در مقابل واقعی)
- پتانسیل اعوجاج

## ۲- بررسی رفتار جهانی میدان ثقل زمین

هدف این فصل، ایجاد ابزارهای ریاضی لازم جهت بررسی میدان ثقل زمین در ابعاد جهانی است. ابتدا مسئله مقدار مرزی پایه برای پتانسیل ثقل ارائه می شود. بعد، انتخاب سیستم های مختصات مناسب، و معرفی روش جداسازی متغیرها برای بیان پتانسیل جاذبه به شکل یک سری شامل بی نهایت جمله انجام می شود. سپس، میدان ثقل نرمال مورد بررسی قرار می گیرد. در آخر، یک کمیت خیلی مهم، یعنی پتانسیل اعوجاج، تعریف می شود. کمیتی که به ما امکان می دهد تا بسیاری از مدل های ریاضی استفاده شده در بعد را خطی نمائیم.

### ۲.۱- معادلات بنیادی برای پتانسیل ثقل

میدان برداری شتاب ثقل می تواند بصورت کامل و یکتا بوسیله یک میدان اسکالر ( پتانسیل ثقل ) بیان شود. به کمک پتانسیل ثقل می توان پارامترهای دیگر میدان ثقل را تعیین نمود. در اینجا بر روی تعیین پتانسیل ثقل متمرکز می شویم، تا پارامترهای دیگر از روی آن قابل تعیین شوند. برای بدست آوردن معادله دیفرانسیل جزئی بنیادی، که رفتار پتانسیل ثقل را شرح می دهد، ابتدا یک نگاهی به رفتار محلی بردار جاذبه می اندازیم. رفتار بردار شتاب جاذبه بطور کامل بوسیله کرل و دیورژانس آن، که در همسایه گی آن نقطه داده می شود، شرح داده می شود.

معرفی اپراتورهای ریاضی مختلف: اگر  $F$  یک میدان برداری و مشتق پذیر باشد:

$$F(x, y, z) = P(x, y, z)i + Q(x, y, z)j + R(x, y, z)k$$

در اینصورت کرل آن بصورت زیر، یک میدان برداری دیگر است:

$$\text{Curl } F = \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) i + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) j + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) k \quad \text{اپراتور کرل:}$$

و یا بصورت (ضرب خارجی صوری):

$$\text{Curl } F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$\nabla \times a = \text{curl}(a) \quad \text{اپراتور کرل:}$$

دیورژانس یک میدان برداری، خودش یک میدان اسکالر است (بصورت ضرب داخلی صوری):

$$\text{div } F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

$$\nabla \cdot a = \text{div}(a) \quad \text{اپراتور دیورژانس:}$$

where  $a, a$  are scalar and vector functions

گرادیان یک میدان اسکالر، خودش یک میدان برداری است:

$$\text{grad } \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} i + \frac{\partial \phi}{\partial y} j + \frac{\partial \phi}{\partial z} k$$

$$\nabla a = \text{grad}(a) \quad \text{اپراتور گرادیان:}$$

لاپلاسی یک میدان اسکالر، خودش یک میدان اسکالر است

$$\Delta \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

$$\Delta = \nabla^2 \quad \text{اپراتور لاپلاسی:}$$

از آنجا که میدان پتانسیل جاذبه بصورت غیر دورانی، و در تقریب اول، پایستار (عدم تغییر نسبت به زمان) است، می توانیم رابطه زیر را بنویسیم :

$$\text{curl } \nabla W_g(\vec{r}_A) = \text{curl } \vec{g}_g(\vec{r}_A) = \nabla \times \vec{g}_g(\vec{r}_A) = \vec{0} \quad (1)$$

که برای هر نقطه ای معتبر است.

از طرف دیگر، دیورژانس بردار شتاب جاذبه می تواند بصورت مقدار حدی فرمول گوس به شرح زیر نوشته شود :

$$\text{div } \vec{g}_g(\vec{r}_A) = \nabla \cdot \vec{g}_g(\vec{r}_A) = \lim_{V_A \rightarrow 0} \frac{\oiint_S \vec{g}_g(\vec{r}) \cdot \vec{n} dS}{V_A} \quad (2)$$

که در آن  $V_A$  حجم محصور شده توسط سطح  $S$  است، و  $\vec{n}$  بردار واحد به سمت خارج و عمود بر سطح  $S$  است ( شکل ۱).

اگر انتگرال فلوی جاذبه  $\oiint_S \vec{g}_g \cdot \vec{n} dS$  مثبت باشد، نقطه  $A$  چشمه نامیده می شود، و اگر این انتگرال منفی باشد، نقطه  $A$  حفره نامیده می شود. اگر مقدار انتگرال ذکر شده صفر شود، شتاب جاذبه در نقطه  $A$  واگرا نیست.



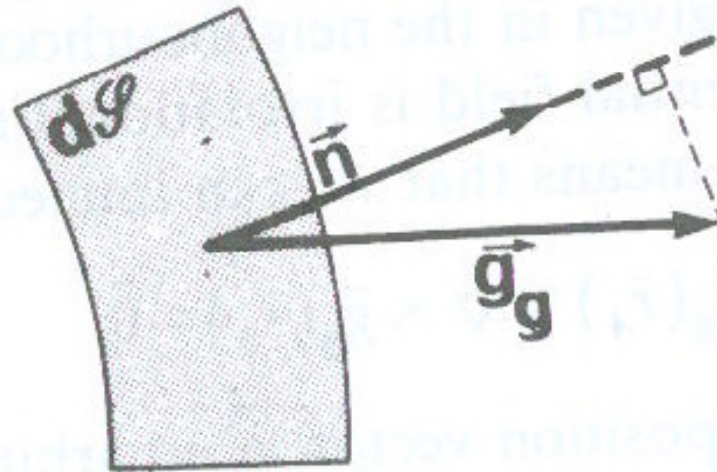
حال سؤال مهم این است : آیا دیورژانس شتاب جاذبه یک مقدار مثبت، منفی، یا صفر است ؟

برای پاسخ به این سؤال، جرم  $M$  مربوط به حجم  $V$  را که توسط سطح  $S$  محصور شده، به شکل زیر در نظر می گیریم :

$$M = V_A \sigma(\vec{r}_A)$$

(۳)

با در نظر گرفتن این نکته که برای یک حجم به اندازه کوچک  $V$ ، چگالی آن یک مقدار ثابت است.



شکل ۲.۱. فلوی جاذبه

اگر برای سادگی، مبدأ سیستم مختصات را منطبق بر مرکز حجم  $V$  در نظر بگیریم، شتاب جاذبه ایجاد شده توسط حجم  $V$  به شرح زیر است:

$$\bar{g}_g(\bar{r}_A) = \frac{GM}{|\bar{r}_A|^3} \bar{r}_A \quad (4)$$

می توان نشان داد که در برآورد مقدار حد در نظر گرفته شده در رابطه (۲)، شکل سطح  $S$  اهمیتی ندارد، وقتی که بطور کامل حجم  $V$  را دربر بگیرد. بنابراین، برای سادگی، یک سطح کروی می تواند انتخاب شود. در این حالت، واضح است که بردار شتاب جاذبه تولید شده بوسیله حجم کروی  $V$ ، در همه جا بر سطح  $S$  عمود است، و عبارت  $\bar{g}_g \cdot \bar{n}$  برابر  $g_g$  است. فلوی جاذبه بنابراین می تواند بصورت زیر نوشته شود:

$$\bar{g}_g \cdot \bar{n} d\mathcal{S} = g_g d\mathcal{S} = -\frac{GM}{|\bar{r}|^2} d\mathcal{S} = -\frac{G\sigma(\bar{r}_A)V_A}{|\bar{r}|^2} d\mathcal{S} \quad (5)$$

که در آن  $r$  شعاع کره  $S$  است.

با در نظر گرفتن این نکته که مساحت سطح یک کره با شعاع  $r$  برابر  $4\pi r^2$  است، به آسانی نتیجه می شود که انتگرال فلوی جاذبه بصورت زیر است:

$$\oiint_{\mathcal{S}} \vec{g}_g \cdot \vec{n} d\mathcal{S} = -4\pi G \sigma(\vec{r}_A) V_A \quad (6)$$

و با تقسیم آن بر  $V$  و تعیین حد آن، بدست می آوریم:

$$\text{div } \vec{g}_g(\vec{r}_A) = -4\pi G \sigma(\vec{r}_A) \quad (7)$$

این رابطه در هر سیستم مختصاتی معتبر است. تفسیر آن به شرح زیر است:

از آنجا که  $\sigma(\vec{r}_A)$  یک کمیت غیر منفی است، نقطه  $A$  می تواند یا یک حفره از شتاب جاذبه  $\vec{g}_g(\vec{r}_A)$  باشد (اگر  $\sigma(\vec{r}_A) > 0$ )، و یا دیورژانس بردار شتاب جاذبه در نقطه  $A$  برابر صفر می شود (اگر  $\sigma(\vec{r}_A) = 0$ ).

بعد بررسی رفتار محلی شتاب جاذبه، حال شتاب گریز از مرکز را در نظر می گیریم. میدان شتاب گریز از مرکز، غیر دورانی است و داریم:

$$\text{curl } \vec{g}_c(\vec{r}_A) = \vec{0} \quad (8)$$

دیورژانس شتاب گریز از مرکز به سادگی برآورد می شود، اگر سیستم مختصات کارتزین سه بعدی را در نظر بگیریم، که محور  $Z$  آن بر محور دوران زمین منطبق شود. با توجه به روابط زیر:

$$f = p\omega^2 m \quad p = \sqrt{x^2 + y^2} \doteq a \cos \phi$$

بدست می آوریم:

$$\vec{g}_c(\vec{r}_A) = \omega^2 (x_A \vec{i} + y_A \vec{j}) \quad (9)$$

و دیورژانس شتاب گریز از مرکز بصورت زیر می شوند:

$$\text{div } \vec{g}_c(\vec{r}_A) = 2\omega^2 \quad (10)$$

دیورژانس شتاب گریز از مرکز، بصورت یک میدان اسکالر، اگر به هر سیستم مختصاتی انتقال پیدا کند، مقدار آن تغییر نمی کند، از آنجا که رفتار شتاب گریز از مرکز به سیستم مختصات وابسته نیست.

بنابراین، دیورژانس شتاب گریز از مرکز بصورت مقدار ثابت در تمام فضا باقی می ماند.

باتوجه به اینکه شتاب ثقل بصورت مجموع دو شتاب جاذبه و گریز از مرکز است، که بررسی شدند، بنا بر خطی بودن اپراتور دیورژانس، بدست می آوریم :

$$\nabla \cdot \bar{g}(\bar{r}_A) = \text{div } \bar{g}(\bar{r}_A) = -4\pi G\sigma(\bar{r}_A) + 2\omega^2 \quad (11)$$

و با توجه به اینکه  $\bar{g} = \nabla W$ ، در نهایت نتیجه می گیریم :

$$\nabla^2 W(\bar{r}_A) = -4\pi G\sigma(\bar{r}_A) + 2\omega^2. \quad (12)$$

که معادله دیفرانسیل جزئی بنیادی (از مرتبه دوم) برای پتانسیل ثقل است، که هدف بدست آوردن آن بود. این معادله از نوع پواسون است.

اگرچه رابطه (۱۲) بهمین صورت در سرتاسر فضا معتبر است، دو حالت خاص از آن در خیلی از موارد مورد علاقه است :

۱- کاربرد رابطه (۱۲) در فضای خالی ( $\sigma = 0$ )، که بصورت زیر می شود :

$$\nabla^2 W(\vec{r}) = 2\omega^2 \quad (13)$$

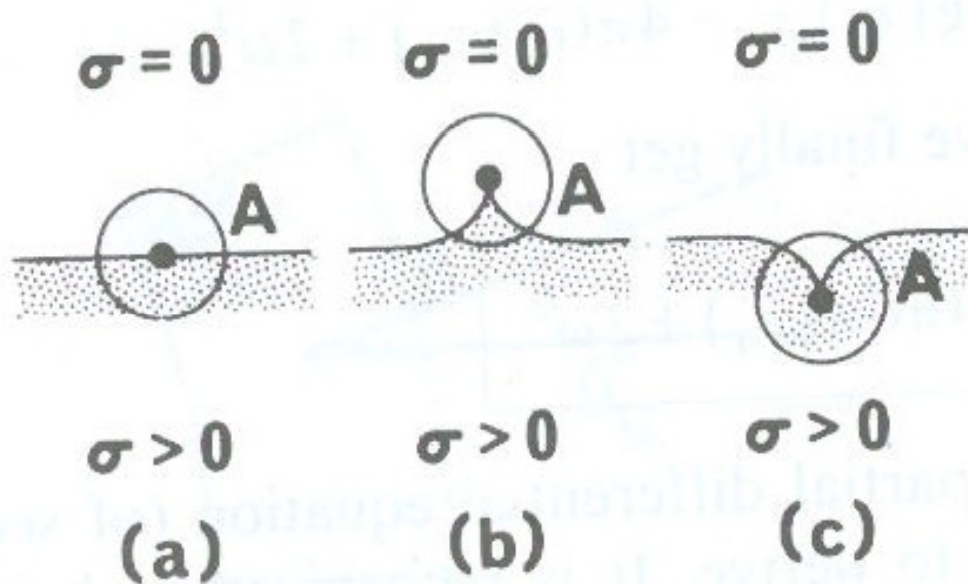
با صرفنظر از چگالی اتمسفر (که با توجه به چگالی زمین، دارای چگالی خیلی کوچک و قابل اغماض است)، می توانیم بگوئیم که رابطه (۱۳) برای خارج از سطح زمین معتبر است.

۲- حالت خاص دوم از رابطه ۱۲، می تواند برای سطح زمین فرموله شود. یک نقطه روی سطح زمین دارای بخشی از چگالی نقطه ای است که بطور کامل در داخل زمین قرار می گیرد. بعبارت دیگر، هر همسایه دیفرانسیلی از نقطه A روی سطح فیزیکی زمین، بخشی از آن بصورت خالی و بخشی دارای جرم و چگالی است. بنابراین :

$$\nabla^2 W(\vec{r}_A) = -k\pi G\sigma(\vec{r}_A) + 2\omega^2 \quad (14)$$

که  $\sigma(\vec{r}_A)$  چگالی مواد روی سطح زمین است و  $k \in (0, 4)$  ( شکل ۲).

دو رابطه ۱۳ و ۱۴ نشان می دهند که مشتقات مرتبه دوم پتانسیل ثقل ( شامل سمت چپ این دو رابطه) بر روی هر مرز بین دو محیط با چگالی های مختلف بصورت ناپیوسته هستند (سطح زمین یک مثال قابل توجه است).



شکل ۲.۲. نقطه واقع بر سطح زمین.

(a)  $k=2$ ; (b)  $0 < k < 2$ ; (c)  $2 < k < 4$

همچنین قابل ذکر است که معادله دیفرانسیل جزئی پایه برای پتانسیل جاذبه در خارج از سطح زمین (یعنی در فضای خالی از جرم)، که معادله پتانسیل نامیده می شود، از نوع لاپلاس است :

$$\nabla^2 W_g = 0.$$

(۱۵)

پتانسیل جاذبه در فضای خالی یک تابع هارمونیک است.

مسئله تعیین میدان ثقل زمین، می تواند به دو بخش تعیین میدان جاذبه زمین و تعیین میدان گریز از مرکز تقسیم شود. اگرچه تعیین میدان جاذبه یک کار بسیار جالب توجه است، تعیین میدان گریز از مرکز اینطور نیست. زیرا شتاب گریز از مرکز یک تابع ساده از موقعیت است، و سرعت زاویه ای دوران زمین با دقت بالائی شناخته شده است. بنابراین، تمام بررسی ها، بر روی تعیین میدان جاذبه زمین متمرکز می شود.



علاقه مندی در حیطه ژئودزی (برای دانستن تابع پتانسیل) :

۱- خارج از سطح زمین تا ارتفاع چند هزار کیلومتر

۲- روی سطح زمین

۳- لایه فوقانی پوسته جامد زمین (در داخل زمین)

بنابر خصوصیات معادلات دیفرانسیل که در داخل و خارج زمین معتبر هستند، منطقه مورد علاقه به دو بخش داخل و خارج سطح زمین تقسیم می شود.

و برای پتانسیل جاذبه : ۱- پتانسیل جاذبه خارجی (خارج از سطح زمین) یا جواب خارجی

۲- پتانسیل جاذبه داخلی (داخل سطح زمین) یا جواب داخلی

داریم.

برای خارج از سطح زمین، پتانسیل جاذبه خارجی، تعیین آن ساده تر است (جواب معادله لاپلاس).

متأسفانه، سطح زمین، بعنوان مرز، به اندازه کافی هموار نیست تا جواب واحد

برای پتانسیل جاذبه خارجی بدست دهد.

(بررسی بیشتر این مسئله در مبحث بعد : ۳- تعیین میدان ثقل زمین از روی مشاهدات ثقل)

دو تکنیک برای حل مسئله مقدار مرزی :

۱- تبدیل به معادلات انتگرال

۲- روش جداسازی متغیرها (تکنیک فوریه) (مورد تاکید بیشتر)

۱- تبدیل به معادلات انتگرال :

برای فرموله کردن معادله انتگرال برای مسئله مقدار مرزی مورد نظر ما، اتحاد دوم گرین را به شکل زیر در نظر می گیریم :

$$\oiint_{\mathcal{S}} \left( \frac{P \partial Q}{\partial n} - \frac{Q \partial P}{\partial n} \right) d\mathcal{S} = \iiint_{\mathcal{B}} (P \nabla^2 Q - Q \nabla^2 P) d\mathcal{B}$$

(که به از فرمول گاوس (ارتباط دهنده انتگرال های سطحی و حجمی) به صورت زیر :

$$\oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} d\mathcal{S} = \iiint_{\mathcal{B}} \nabla \cdot \mathbf{a} d\mathcal{B}$$

با در نظر گرفتن :  $\mathbf{a} = P \nabla Q$  حاصل می شود.  
 $\mathbf{b} = Q \nabla P$

اگر توابع اسکالر را بصورت زیر فرض کنیم :

$$Q(\vec{r}) = W_g(\vec{r})$$

$$P(\vec{r}_A) = 1/|\vec{r} - \vec{r}_A| = 1/\rho$$

تابع دوم بصورت یک کرنل است (تابعی از دو نقطه) :

$$P(\vec{r}_A, \vec{r}) = 1/\rho$$

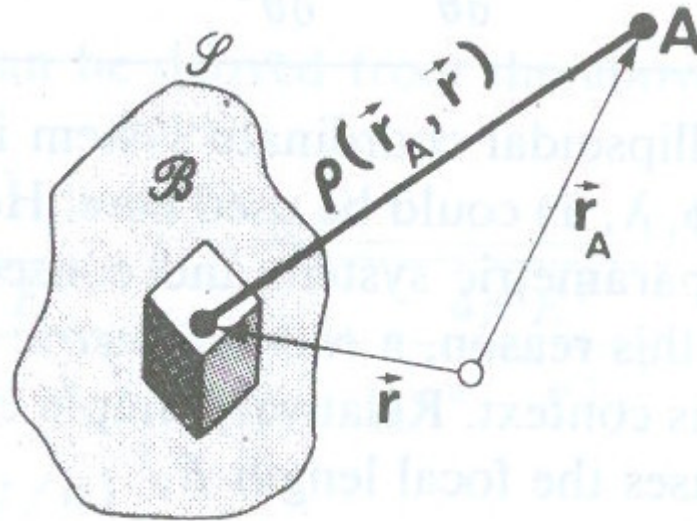
و همچنین یک تابع هارمونیک است، و بصورت تابع هارمونیک پایه نامیده می شود (شکل ۳).

با این مفروضات، رابطه زیر :

$$\oint_{\mathcal{S}} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial W_g(\vec{r})}{\partial n} - W_g(\vec{r}) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{\rho} \right] d\mathcal{S} - \iiint_{\mathcal{B}} \frac{1}{\rho} \nabla^2 W_g(\vec{r}) d\mathcal{B} \quad (16)$$

$$= - \iiint_{\mathcal{B}} W_g(\vec{r}) \nabla^2 \left( \frac{1}{\rho} \right) d\mathcal{B},$$

به نام اتحاد سوّم گرین حاصل می شود.



شکل ۲.۳. تابع هارمونیک پایه

بسته به اینکه نقطه مورد علاقه در داخل زمین، روی سطح زمین، و خارج از سطح زمین قرار بگیرد، سمت راست معادله (۱۶) مقادیر مختلف پیدا می کند و این رابطه بصورت :

$$\oiint_{\mathcal{S}} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial W_g}{\partial n} - W_g \frac{\partial \rho^{-1}}{\partial n} \right) d\mathcal{S} - \iiint_{\mathcal{B}} \frac{1}{\rho} \nabla^2 W_g d\mathcal{B} =$$

$$= \begin{cases} 4\pi W_g(\vec{r}_A), & A \text{ inside } \mathcal{S}, \\ 2\pi W_g(\vec{r}_A), & A \text{ on smooth } \mathcal{S}, \\ 0, & A \text{ outside } \mathcal{S}. \end{cases} \quad (17)$$

در می آید.

با در نظر گرفتن اینکه در داخل زمین داریم :  $\nabla^2 W_g(\vec{r}) = -4\pi G \sigma(\vec{r})$

انتگرال حجم در (۱۷) برابر:  $4\pi G \iiint_{\mathcal{B}} [\sigma(\vec{r})/\rho] d\mathcal{B}$  یا برابر  $4\pi W_g(\vec{r}_A)$  می شود.

بنابراین، در نهایت بدست می آوریم:

این جواب مسئله مقدار  
مرزی پواسون برای  
پتانسیل جاذبه (۱۸)  
به فرم انتگرال است.

$$\oiint_{\mathcal{S}} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial W_g}{\partial n} - W_g \frac{\partial \rho^{-1}}{\partial n} \right) d\mathcal{S} = \begin{cases} 0, & A \text{ inside } \mathcal{S}, \\ -2\pi W_g(\vec{r}_A), & A \text{ on smooth } \mathcal{S}, \\ -4\pi W_g(\vec{r}_A), & A \text{ outside } \mathcal{S}. \end{cases}$$

در حالت خاص، برای خارج از سطح زمین، جواب مسئله مقدار مرزی لاپلاس است.

برای بکارگیری تکنیک دوم (روش جداسازی متغیرها)، نیاز به سیستم های مختصات مناسب تر نسبت به سیستم کارتزین است

از طرف دیگر، نمایش اپراتور لاپلاسین، در سیستم های مختصات مختلف، تغییر می کند.

در سیستم مختصات کروی، رابطه (۱۵)، لاپلاسین پتانسیل جاذبه، بصورت زیر می شود :

$$2r \frac{\partial W_g}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2 W_g}{\partial r^2} + \cot \theta \frac{\partial W_g}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 W_g}{\partial \theta^2} + \sin^{-2} \theta \frac{\partial^2 W_g}{\partial \lambda^2} = 0. \quad (19)$$

در سیستم مختصات بیضوی، رابطه (۱۵)، لاپلاسین پتانسیل جاذبه، به شکل زیر در می آید:

$$2u \frac{\partial W_g}{\partial u} + (u^2 + E^2) \frac{\partial^2 W_g}{\partial u^2} + \cot \Theta \frac{\partial W_g}{\partial \Theta} + \frac{\partial^2 W_g}{\partial \Theta^2} + \frac{u^2 + E^2 \cos^2 \Theta}{(u^2 + E^2) \sin^2 \Theta} \frac{\partial^2 W_g}{\partial \lambda^2} = 0. \quad (26)$$

$$E = \sqrt{a^2 - b^2} = ae$$

## ۲.۲- گسترش پتانسیل جاذبه بر حسب توابع ویژه (توابع هارمونیک کروی)

۲- روش جداسازی متغیرها (تکنیک فوریه)

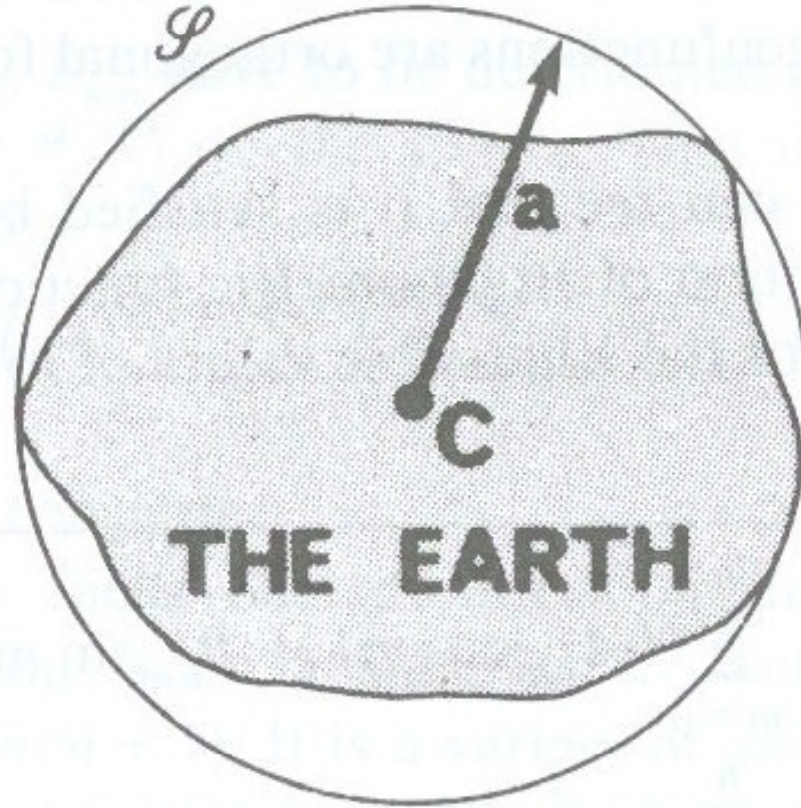
با بکارگیری روش جداسازی متغیرها، رابطه ۱۹ (معادله لاپلاس در سیستم مختصات کروی) را در نظر می‌گیریم و جواب پتانسیل جاذبه را بصورت حاصلضرب سه تابع به شرح زیر جستجو می‌کنیم:

$$J(\theta, \lambda)$$
$$W_g(r, \theta, \lambda) = R(r) \cdot T(\theta) \cdot L(\lambda) \quad (27)$$

همچنین فایده مند است اگر حاصلضرب دو تابع آخر را بصورت یک تابع  $J$  نمایش دهیم.

اگر سیستم مختصات کروی را به گونه ای انتخاب کنیم که مبدأ آن نزدیک مرکز جرم زمین قرار گیرد، سطح زمین خیلی نزدیک به سطح کره  $r = R$  خواهد شد. در نتیجه، تابع اول در رابطه ۲۷ رفتار  $W_g$  را در امتداد تقریباً عمود بر سطح زمین شرح می‌دهد، در صورتیکه تابع  $J$  تغییرات پتانسیل جاذبه را بر روی سطح زمین بیان می‌کند. به بیان دقیق تر، اگر یک کره  $S$  با  $r = a$ ، که کره بریلوئن نامیده می‌شود (شکل ۲.۵)، را در نظر بگیریم که کل اجرام زمین را دربر می‌گیرد، در اینصورت بر این کره تابع اول یعنی  $R$  یک مقدار ثابت می‌شود، و تمام تغییرات  $W_g$  بر روی  $S$  با  $J$  مشخص می‌شود. توضیح بیشتر، برای بررسی هدفمندی این قسمت، این کره می‌تواند بعنوان مرز پائین برای مسئله مقدار مرزی خارجی، و مرز بالا برای مسئله مقدار مرزی داخلی در نظر گرفته شود.

بطور واضح، با صرفنظر از اتمسفر، رابطه ۱۹ در خارج از این کره معتبر است.



شکل ۲.۵. کره بریلوئن

با اولین بکارگیری روش فوریه بر روی رابطه ۱۹، نتیجه می دهد :

$$r^2 R'' + 2rR' - c_1 R = 0 \quad (28)$$

و

$$\cot \theta \frac{\partial J}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 J}{\partial \theta^2} + \sin^{-2} \theta \frac{\partial^2 J}{\partial \lambda^2} + c_1 J = 0 \quad (29)$$

معادله ۲۸ یک معادله دیفرانسیل معمولی از مرتبه دوم است، پریم ها نشان دهنده مشتق نسبت به  $\theta$  است. معادله ۲۹ هنوز یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی نسبت به دو متغیر است.

با دومین بکارگیری روش فوریه بر روی رابطه ۲۹، نتیجه می دهد :

$$\sin^2 \theta T'' + \sin \theta \cos \theta T' + (c_1 \sin^2 \theta - c_2) T = 0 \quad (30)$$

و

$$L'' + c_2 L = 0 \quad (31)$$

در دو معادله اخیر، پارامترهای  $\theta$  و  $\lambda$  جدا شده اند. دستگاه معادلات شامل سه معادله دیفرانسیل معمولی بدست آمده، یعنی معادلات ۲۸، ۳۰ و ۳۱، هم ارز معادله ۱۹ است. ارتباط بین آنها از طریق ثابت های  $c_1$  و  $c_2$  محقق می شود. این سه معادله دیفرانسیل معمولی، جواب عمومی برای توابع  $R$  و  $T$  و  $L$  را بدست می دهند.



ابتدا دو معادله آخر را بررسی می کنیم. معادله ۳۱ مربوط به یک حرکت هارمونیک ساده است با مقادیر ویژه  $m = \sqrt{c_2}$  و توابع ویژه بصورت مثلثاتی ( سینوس و کسینوس). هر ترکیب خطی  $L$  از این توابع ویژه در معادله ۳۱ صدق می کند.

$$L = A_{nm} \cos m\lambda + B_{nm} \sin m\lambda$$

با جاگذاری  $t$  برای  $\cos\theta$  و  $m^2$  برای  $c_2$  در رابطه ۳۰، بدست می آوریم:

$$(1-t^2)T'' - 2tT' + \left(c_1 - \frac{m^2}{1-t^2}\right)T = 0 \quad (32)$$

که در رابطه اخیر مشتق ها نسبت به  $t$  گرفته می شوند. این رابطه یک معادله لژاندر مرتبه دوم برای  $T$  است. مناسب است که جواب را فقط برای مقادیری از  $m$  که در جواب ۳۱ صدق می کنند، یعنی فقط برای مقادیر ویژه معادله ۳۱، جستجو کنیم. این نکته نشان داده شده که رابطه ۳۲ فقط برای مقادیر ویژه  $c_1$  بصورت زیر، جوابی بدست می دهد:

$$c_1 = n(n+1), \quad n = m, m+1, m+2, \dots, \quad (33)$$

وقتی که  $\theta \in (0, \pi)$ . اینها مقادیر ویژه مجاز برای معادله لژاندر هستند. توابع ویژه نظیر، بصورت توابع وابسته لژاندر (از درجه  $n$  و مرتبه  $m$ ) هستند که بصورت زیر ارائه می شوند:

$$P_{nm}(t) = (1-t^2)^{m/2} \frac{d^m}{dt^m} P_n(t) \quad (34)$$

که در آن

$$P_n(t) = \frac{1}{n!2^n} \frac{d^n}{dt^n} (t^2-1)^n \quad (35)$$

بصورت توابع لژاندر هستند. این نکته در اینجا قابل ذکر است که توابع ویژه برای  $t \in (-1, 1)$  یعنی  $\theta \in (0, \pi)$  با وزن  $w(t) = 1$  متعامد هستند.

با مراجعه به [رابطه ۲۹](#)، می توانیم ببینیم که این معادله با هر تابع **J** که بصورت حاصلضرب دو عبارت به شرح روبرو ایجاد می شود : ۱- یک ترکیب خطی از توابع مثلثاتی، و ۲- یک ترکیب خطی از توابع ویژه [۳۴](#) برای مقادیر مجاز  $m$  و  $n$  صدق می کند. این حاصلضرب می تواند بصورت زیر نمایش داده شود :

$$J(\theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (A_{nm} \cos m\lambda + B_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos \theta)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (A_{nm} Y_{nm}^c + B_{nm} Y_{nm}^s),$$

(36)

که در آن  $A_{nm}$  و  $B_{nm}$  یکسری اعداد دلخواه هستند. توابع :

$$Y_{nm}^c = \cos m\lambda P_{nm}(\cos \theta)$$

$$Y_{nm}^s = \sin m\lambda P_{nm}(\cos \theta)$$


بصورت توابع هارمونیک کروی (سطحی) نامیده می شوند. این توابع می توانند بصورت توابع ویژه معادله لاپلاس در مختصات کروی بر روی سطح یک کره در نظر گرفته شوند. اعداد صحیح :

$$m = 0, 1, 2, \dots; n = m, m+1, m+2, \dots,$$

یا بطور یکسان اعداد صحیح :

$$n = 0, 1, 2, \dots; m = 0; 1, \dots, n,$$

مقادیر ویژه معادله لاپلاس هستند.

یکبار دیگر، قابل ذکر است که هارمونیک های کروی، بعنوان توابع ویژه، براستی بر روی سطح یک کره  $S$  متعامد می باشند، یعنی برای هر موقعیت متعلق به  $(\theta, \lambda) \in (0, \pi) \times (-\pi, \pi)$  

یعنی معادله زیر

$$\iint_S Y_{nm}^k(\theta, \lambda) Y_{ij}^l(\theta, \lambda) d\nu = 0 \quad (37)$$

برای شرایط:  $i \neq n$  or  $j \neq m$  or  $k \neq l$  معتبر است.

همچنین، نُرم توابع ویژه، برای هر دو اندیس بالای **C** و **S**، بصورت زیر هستند :

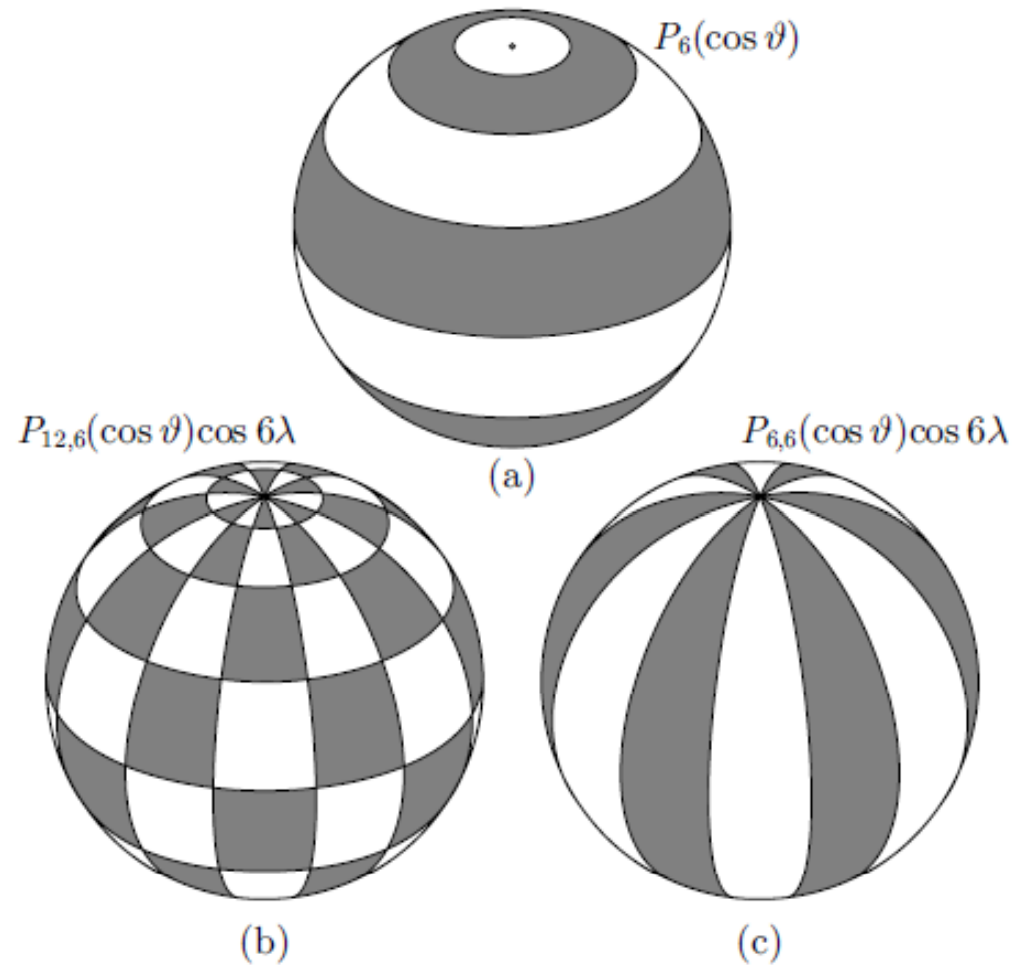
$$\|Y_{nm}\|^2 = \iint_{\mathcal{S}} Y_{nm}^2 d\nu = \begin{cases} \frac{4\pi}{2n+1}, & m=0, \\ \frac{2\pi}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}, & m \neq 0. \end{cases} \quad (38)$$

توابع بصورت :  $\tilde{Y}_{nm} = Y_{nm} / \|Y_{nm}\|$ ، بنابراین، ارتو نرمال هستند، یعنی :

$$\|\tilde{Y}_{nm}\| = 1 \quad (39)$$

و این توابع بصورت **توابع هارمونیک کروی نرمالایز شده** (بطور کامل) نامیده می شوند. توابع هارمونیک های کروی برای  $m = 0$  بصورت **هارمونیک های زونال** نامیده می شوند (قطاع های افقی)، و برای  $m \neq 0$  بصورت **هارمونیک های تسرال** خوانده می شوند (قطاع های مربعی یا مربع مستطیل)، و برای  $n = m$  بصورت **هارمونیک های سکتوریال** شناخته می شوند (قطاع های قائم)، **شکل ۲.۶**.

با مراجعه به مسئله اصلی مورد دنبال، یعنی **مسئله خارجی برای Wg** (خارج از کره بریلوئن)، حال می توانیم از هارمونیک های کروی به آسانی برای حل آن استفاده کنیم. با در نظر گرفتن روابط ۲۷ و ۳۶، جواب مورد نظر بطور واضح به شکل زیر می شود :



شکل ۲.۶. هارمونیک های کروی مختلف : (a) زونال، (b) تسرال، (c) سکتوریال

$$W_g(r, \theta, \lambda) = R(r) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (A_{nm} Y_{nm}^c(\theta, \lambda) + B_{nm} Y_{nm}^s(\theta, \lambda)) \quad (40)$$

در اینجا، ضرائب  $A_{nm}$  و  $B_{nm}$  به گونه ای باید تعیین شوند که در مقادیر مرزی بر روی کره  $W_g(r=a, \theta, \lambda)$  صدق کنند. یعنی معادله زیر باید برقرار باشد:

$$W_g(a, \theta, \lambda) = R(a) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (A_{nm} Y_{nm}^c(\theta, \lambda) + B_{nm} Y_{nm}^s(\theta, \lambda)) \quad (41)$$

که در آن  $R(a)$  یک مقدار ثابت است.

حال می توانیم سومین معادله دیفرانسیل معمولی، معادله (۲۸)، را بررسی کنیم. در اینجا نیز، این نکته مهم است که جواب را فقط برای مقادیر مجاز  $c_1 = n(n+1)$  تعیین کنیم. این معادله نوعی از معادله اولر است و به آسانی با جاگذاری  $\exp(t)$  برای  $r$  حل می شود. معلوم می شود که دو خانواده از توابع،  $R_1$  و  $R_2$ ، بصورت زیر:

$$R_1(r) = \exp(nt) = r^n, \quad R_2(r) = \exp((-n-1)t) = r^{-(n+1)} \quad (42)$$

برای هر مقدار مجاز  $n$ ، در معادله مورد نظر صدق می کنند.

نخستین خانواده از توابع،  $R_1$ ، با افزایش نامحدود  $r$ ، بطور نامحدودی افزایش پیدا می کند. این شرایط با رفتار فیزیکی پتانسیل جاذبه ناسازگار است. بنابراین، وقتی که یک جواب برای مسئله خارجی مورد نظر است، ما ناگزیریم از خانواده دوم از توابع،  $R_2$ ، استفاده کنیم تا جواب را با نیازهای فیزیکی سازگار سازیم. با دلایل نظیر، برای تعیین جواب جهت مسئله داخلی لاپلاس، از  $R_1$  استفاده می شود.

این حالت معمول است که تابع شعاعی  $R = R_2$  بصورت بدون واحد در نظر گرفته شود، بطوریکه فقط ضرائب  $A_{nm}$  و  $B_{nm}$  در رابطه ۴۰ حاملین واحدهای فیزیکی باشند. این کار بطور طبیعی از طریق مقیاس گذاری سیستم مختصات کروی انجام می شود، به گونه ای که شعاع کره مرز بصورت واحد لحاظ می شود: یعنی به جای استفاده از  $r$ ، ما از  $r/a$  استفاده می کنیم. در این سیستم مختصات، توابع شعاعی بصورت زیر در می آیند:

$$\left(\frac{r}{a}\right)^{-(n+1)} = \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}, \quad n=0, 1, \dots \quad (43)$$

این مقیاس گذاری، حتی مقادیر ضرائب در رابطه ۴۰ را تحت تأثیر قرار می دهد، به گونه ای که مقدار درست  $W_g$  را بدست می دهد. حال رابطه ۴۰ را به شکل نهائی آن ارائه می کنیم. برای پتانسیل جاذبه ای خارجی، داریم:

$$W_g(r, \theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^n (A_{nm} \cos m\lambda + B_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos \theta).$$

فرم بسط یافته  
پتانسیل جاذبه:

(۴۴)

معادله ۴۴ هم ارز معادله زیر است :

$$W_g(\bar{r}_A) = G \iiint_{\mathfrak{B}} \frac{\sigma(\bar{r})}{|\bar{r} - \bar{r}_A|} d\mathfrak{B}.$$

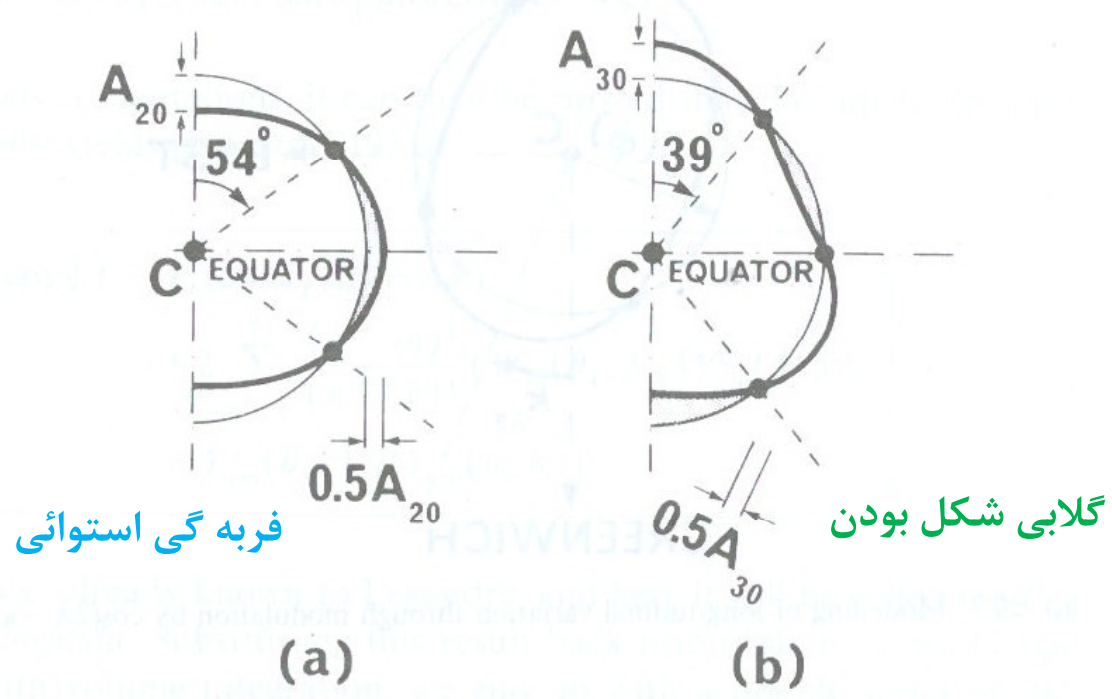
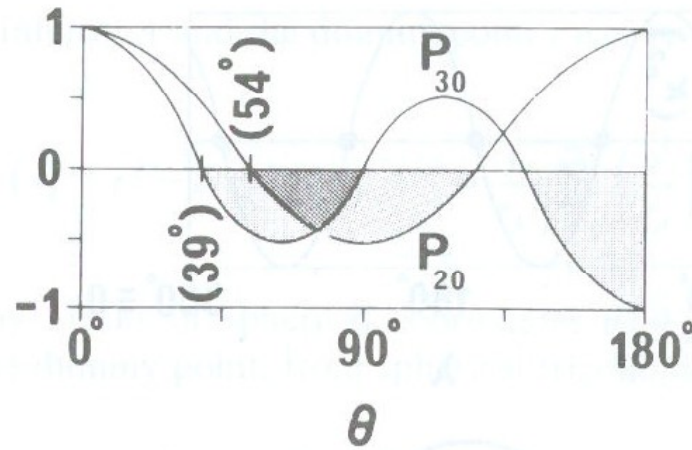
فرم بسته پتانسیل جاذبه :  
(\* )

تنها تفاوت بین این دو معادله این است که بجای مجهول چگالی جرم  $\sigma$ ، در رابطه ۴۴ ما بطور نامحدودی تعداد زیاد ضرائب مجهول  $A_{nm}$  و  $B_{nm}$  را داریم (به واحد پتانسیل). معادله ۴۴ بصورت گسترش پتانسیل جاذبه به هارمونیک های کروی، یا گسترش به توابع ویژه معادله لاپلاس در مختصات کروی شناخته می شود.

جالب است مشخص نمائیم که شکل سطوح هم پتانسیل  $W_g$ ، حاصل از رابطه ۴۴، به جملات مشخصی از این سری بستگی دارد. فربه گی و برآمدگی استوائی به دلیل حضور جمله  $(2,0)$  در این سری است، مدلسازی این فربه گی استوائی به کمک هارمونیک زونال  $P_{2,0}$  در شکل ۲.۷a نمایش داده شده است. همچنین، گلابی شکل بودن زمین به دلیل حضور جمله  $(3,0)$  است، شکل ۲.۷b.

هارمونیک های تسرال (مربعی) می توانند به این صورت در نظر گرفته شوند که بوسیله یک پروفیل نصف النهاری ایجاد می شوند، و سپس بصورت طولی (در امتداد طول جغرافیائی) تلفیق می شوند. با نشان دادن عبارت  $(A_{nm}^2 + B_{nm}^2)$  با  $R_{nm}^2$  و نسبت  $B_{nm}/A_{nm}$  با  $K_{nm}$ ، می توانیم رابطه زیر را داشته باشیم :





فربه گی استوائی

گلابی شکل بودن

شکل ۲.۷. مدلسازی فربه گی استوائی و گلابی شکل بودن (سطوح هم پتانسیل) زمین

$$(A_{nm} \cos m\lambda + B_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos \theta) = R_{nm} P_{nm}(\cos \theta) \cos(m\lambda - \kappa_{nm}) \quad (45)$$

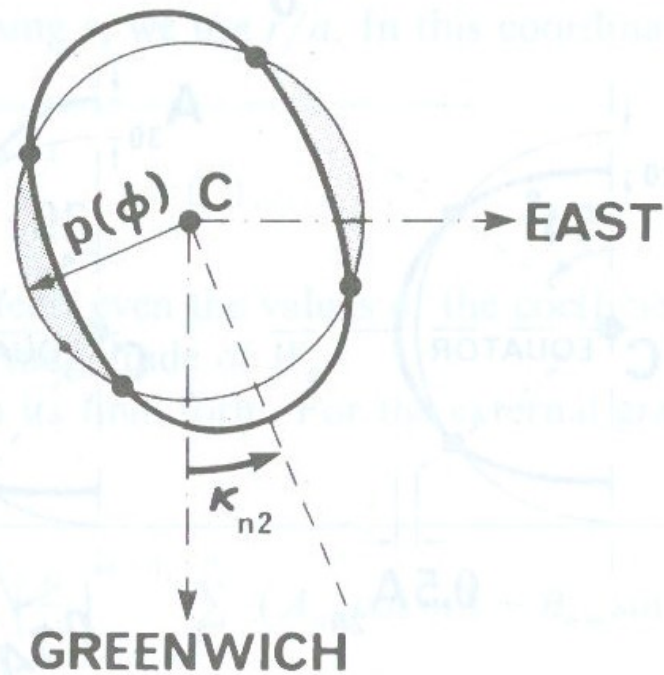
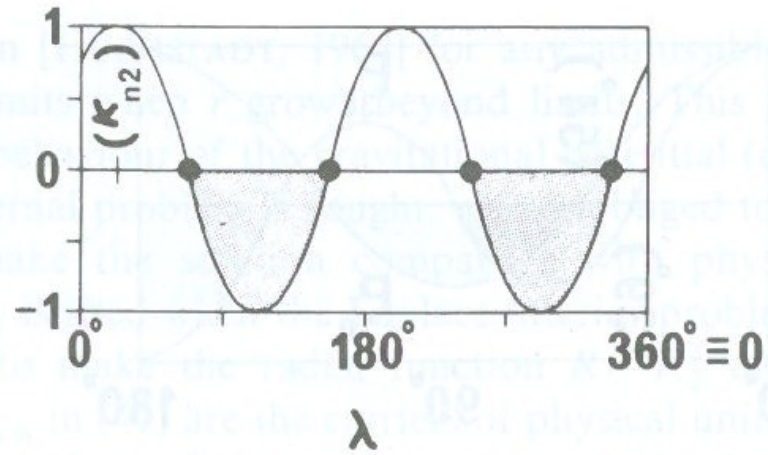
بطور واضح، مولفه نصف النهاری پایه  $R_{nm} P_{nm}(\cos \theta)$  با مولفه  $\cos(m\lambda - \kappa_{nm})$  تلفیق می شود. شکل ۲.۸ یک حالت مربوط به  $m = 2$  را نمایش می دهد.

قبل از تعیین ضرائب مجهول پتانسیل، ابتدا نقش جملات شعاعی  $(a/r)^{n+1}$  را بررسی می کنیم. در خارج از کره مرز، مقادیر این جملات شعاعی با افزایش  $n$  میرا می شوند (کاهش پیدا می کنند)، بخاطر اینکه  $a/r < 1$ . این عبارت به این معنی است که با افزایش ارتفاع، طول موج عوارض با فرکانس بالا  $(n, m)$  از میدان پتانسیل تمایل به هموار شدن دارند. این نتیجه خیلی مهم است.

حال سؤال این است که مزیت بدست آوردن رابطه ۴۴ (فرم بسط یافته پتانسیل جاذبه) نسبت به رابطه \* (فرم بسته پتانسیل جاذبه) در چیست، از آنجا که ما فقط یک تابع مجهول بر حسب موقعیت (یعنی چگالی  $\sigma$ ) و موجود در \* را با یک سری کامل از بی شمار مجهولات (ضرائب) جایگزین کردیم. در حقیقت، با ایجاد رابطه ۴۴ حداقل یک قدم به طرف جلو برداشته ایم، زیرا الآن می توانیم ضرائب مندرج در ۴۴ را به کمک داده های روی سطح زمین و بالای سطح زمین برآورد کنیم، به جای اینکه به داده های توزیع جرم در داخل زمین وابسته باشند. اگر مقدار پتانسیل جاذبه بر روی کره مرز  $S$  ( $r = a$ ) معلوم باشد، یعنی اگر

$$V(\theta, \lambda) = W_g(a, \theta, \lambda) \quad (46)$$

معلوم باشد، در اینصورت ضرائب پتانسیل  $A_{nm}$  و  $B_{nm}$  می توانند از طریق یک روند استاندارد گسترش  $\nabla$  به هارمونیک های کره تعیین شوند.



شکل ۲.۸. مدلسازی تغییرات طولی از طریق تلفیق با  $\cos(2\lambda - \kappa_{n2})$

معادلات برای ضرائب پتانسیل، در اینجا برای سادگی، وقتی که توابع هارمونیک کروی نرمالایز استفاده شده اند، ارائه می شوند :

$$\begin{aligned}\tilde{A}_{nm} &= \iint_{\mathcal{S}} V(\theta, \lambda) \tilde{Y}_{nm}^c(\theta, \lambda) d\nu \\ \tilde{B}_{nm} &= \iint_{\mathcal{S}} V(\theta, \lambda) \tilde{Y}_{nm}^s(\theta, \lambda) d\nu\end{aligned}\quad (47)$$

فرق فرمول های پیچیده تر برای توابع هارمونیک کروی معمولی (نرمالایز نشده) با فرمول های فوق تنها به اینصورت است، که در روابط فوق این توابع بر نرم خود تقسیم شده اند.

از آنجا که یک رابطه ضمنی بین **چگالی  $\sigma$**  و ضرائب پتانسیل  **$A_{nm}$**  و  **$B_{nm}$**  موجود است، ممکن است کسی وسوسه شود که یک نگاه نزدیک تری به این رابطه داشته باشد. بعنوان مثال، با دانستن ضرائب پتانسیل، آیا می توان به اطلاعاتی راجع به توزیع داخلی اجرام زمین دست یافت؟ برای پاسخ به این سؤال، ابتدا رابطه (مستقیم) بین ضرائب پتانسیل با **دانسیته** را بررسی می کنیم. **فرم بسته پتانسیل جاذبه** را به صورت زیر در نظر می گیریم :

$$W_g(\bar{r}_A) = G \iiint_{\mathcal{B}} \frac{\sigma(\bar{r})}{\rho(\bar{r}_A, \bar{r})} d\mathcal{B}\quad (48)$$

با نمایش زاویه فضائی بین  $\vec{r}_A$  و  $\vec{r}$  با  $\psi$ ، عکس فاصله  $\rho$  بین نقطه مورد علاقه A و نقطه متغیر  $\vec{r}$  می تواند بصورت زیر ارائه شود:

$$\rho^{-1}(\vec{r}_A, \vec{r}) = (r_A^2 + r^2 - 2rr_A \cos \psi)^{-1/2} = \frac{1}{r_A} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r_A}\right)^n P_n(\cos \psi) \quad (49)$$

با بیان  $\cos \psi$  بوسیله مختصات کروی نقطه A  $(\theta_A, \lambda_A)$  و مختصات کروی نقطه متغیر  $(\theta, \lambda)$ ، از مثلثات کروی بدست می آوریم:

$$\cos \psi = \cos \theta_A \cos \theta + \sin \theta_A \sin \theta \cos(\lambda - \lambda_A) \quad (50)$$

بعد از محاسبات متعدد، با جاگذاری برای  $\cos \psi$  از 50 در 49، نتیجه زیر حاصل می شود:

$$\begin{aligned} P_n(\cos \psi) = & P_n(\cos \theta_A) P_n(\cos \theta) \\ & + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} (Y_{nm}^c(\theta_A, \lambda_A) Y_{nm}^c(\theta, \lambda) \\ & + Y_{nm}^s(\theta_A, \lambda_A) Y_{nm}^s(\theta, \lambda)). \end{aligned} \quad (51)$$

این فرمول بعنوان فرمول لژاندر یا فرمول تجزیه لژاندر نامیده می شود. با جاگذاری این نتیجه در 48 و عوض کردن جمع ها (سیگماها) و انتگرالگیری حجم با یکدیگر، به یک سری دوگانه نظیر 44 می رسیم.

با مساوی قرار دادن جمله به جمله این دو سری (یعنی سری دوگانه ذکر شده و ۴۴)، در نهایت بدست می آوریم:

$$A_{n0} = \frac{G}{a} \iiint_{\mathfrak{B}} \sigma(\vec{r}) \left(\frac{r}{a}\right)^n Y_{n0}^c(\theta) d\mathfrak{B}, \quad (52)$$

$$\begin{Bmatrix} A_{nm} \\ B_{nm} \end{Bmatrix} = \frac{2G}{a} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \iiint_{\mathfrak{B}} \sigma(\vec{r}) \left(\frac{r}{a}\right)^n \begin{Bmatrix} Y_{nm}^c(\theta, \lambda) \\ Y_{nm}^s(\theta, \lambda) \end{Bmatrix} d\mathfrak{B}$$

این ها معادلاتی هستند که **ضرائب پتانسیل** را، با واحد پتانسیل، بطور مستقیم به **توزیع چگالی**  $\sigma$  مرتبط می کنند.

**مسئله معکوس**، یعنی **تعیین**  $\sigma$  بصورت تابعی از **ضرائب پتانسیل امکان پذیر نیست**. با وجود این، حداقل یک میزان شناخت غیر مستقیم برای **توزیع چگالی** از روی **ضرائب پتانسیل** می تواند کسب شود: یعنی، **یک ارتباط** بین بعضی از **ضرائب پتانسیل** و **مختصات مرکز جرم زمین**، **ممان های اصلی اینرسی** و همچنین **اینرسی های حاصلضرب** وجود دارد. برای بدست آوردن این ارتباط، یک سیستم مختصات **کارتزین ثابت** شده به زمین را در نظر می گیریم. با انتقال مختصات **کروی** نقطه متغیر  $r, \theta, \lambda$  استفاده شده در ۵۲ به این سیستم مختصات **کارتزین**  $\vec{r}' \equiv (x', y', z')$ ، می توان نشان داد که **دوازده تابع هارمونیک کروی نخست** بصورت زیر می شوند:

دوازده تابع هارمونیک کروی نخست در سیستم مختصات کارتزین انتخاب شده :

$$\begin{aligned}
 Y_{0,0}^c(x', y', z') &= 1, & Y_{0,0}^s(x', y', z') &= 0, \\
 Y_{1,0}^c(x', y', z') &= \frac{z'}{r'}, & Y_{1,0}^s(x', y', z') &= 0, \\
 Y_{1,1}^c(x', y', z') &= \frac{x'}{r'}, & Y_{1,1}^s(x', y', z') &= \frac{y'}{r'}, \\
 Y_{2,0}^c(x', y', z') &= \frac{-x'^2 - y'^2 + 2z'^2}{2r'^2}, & Y_{2,0}^s(x', y', z') &= 0, \\
 Y_{2,1}^c(x', y', z') &= \frac{3x'z'}{r'^2}, & Y_{2,1}^s(x', y', z') &= \frac{3y'z'}{r'^2}, \\
 Y_{2,2}^c(x', y', z') &= \frac{3(x'^2 - y'^2)}{r'^2}, & Y_{2,2}^s(x', y', z') &= \frac{6x'y'}{r'^2}.
 \end{aligned}
 \tag{۵۳}$$

با جاگذاری این روابط در ۵۲، دوازده ضریب پتانسیل نخست به شکل زیر حاصل می شوند :

دوازده ضریب پتانسیل نخست در سیستم مختصات کارتزین انتخاب شده :

$$\begin{aligned}A_{0,0} &= \frac{G}{a} M, & B_{0,0} &= 0, \\A_{1,0} &= \frac{G}{a^2} M z'_c, & B_{1,0} &= 0, \\A_{1,1} &= \frac{G}{a^2} M x'_c, & B_{1,1} &= \frac{G}{a^2} M y'_c, \\A_{2,0} &= \frac{G}{a^3} \left( \frac{I'_x + I'_y}{2} - I'_z \right), & B_{2,0} &= 0, \\A_{2,1} &= \frac{G}{a^3} I'_{xz}, & B_{2,1} &= \frac{G}{a^3} I'_{yz}, \\A_{2,2} &= \frac{G}{4a^3} (I'_y - I'_x), & B_{2,2} &= \frac{G}{2a^3} I'_{xy},\end{aligned}$$

(۵۴)

که تمامی این ضرایب به واحد پتانسیل می باشند.



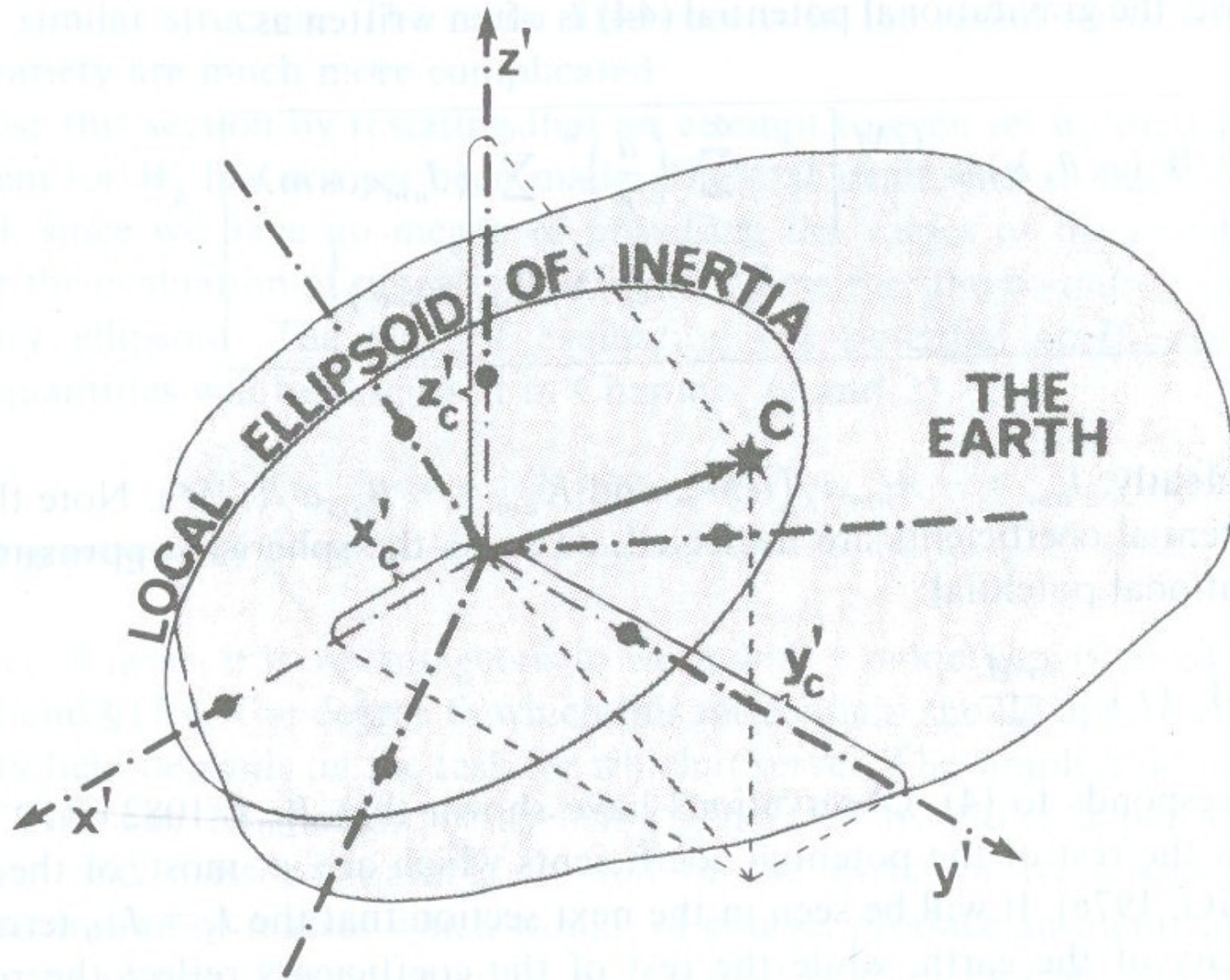
در روابط اخیر،  $x'_c, y'_c, z'_c$  مختصات مرکز جرم زمین در سیستم مختصات کارتیزین انتخاب شده هستند (شکل ۲.۹)، بعنوان مثال:  $x'_c = M^{-1} \iiint_{\mathbb{B}} x' \sigma(\bar{r}) d\mathbb{B}$ . ممان های اینرسی زمین بصورت:  $I'_x, I'_y, I'_z$  نسبت به محورهای مختصات سیستم مختصات دارای پریم هستند، بعنوان مثال:  $I'_x = \iiint_{\mathbb{B}} (y'^2 + z'^2) \sigma(\bar{r}) d\mathbb{B}$ ، و کمیت های  $I'_{xy}, I'_{xz}, I'_{yz}$  بصورت حاصلضرب های اینرسی زمین هستند، بعنوان مثال:  $I'_{xy} = \iiint_{\mathbb{B}} x' y' \sigma(\bar{r}) d\mathbb{B}$ . بطور واضح، این ضرائب پتانسیل با مرتبه پائین، نه تنها موقعیت مرکز جرم زمین را نشان می دهند، بلکه توجیه و ابعاد بیضوی اینرشیا در مبدأ سیستم مختصات انتخاب شده را نیز مشخص می کنند. ضرائب پتانسیل با مرتبه بالاتر دارای تفسیر مشابه ولی پیچیده تر (و بنابراین کم فایده تر) هستند.

**روابط ۵۴** بسیار مهم هستند، وقتی که بخواهیم سیستم مختصات ژئوسنتریک طبیعی

ایجاد کنیم. اگر سیستم مختصات به گونه ای انتخاب شود که:  $A_{1,0} = A_{1,1} = B_{1,1} = 0$  در این حالت، این سیستم ژئوسنتریک است.

اگر، علاوه بر شرط فوق، داشته باشیم:  $A_{2,1} = B_{2,1} = B_{2,2} = 0$ ، در این حالت، این سیستم با بیضوی اصلی اینرشیا هم محور می شود، یعنی، بصورت سیستم ژئوسنتریک طبیعی در می آید. در این حالت،  $I'_x = I_1, I'_y = I_2, I'_z = I_3$ ، و داریم:

$$A_{2,0} = \frac{G}{a^3} \left( \frac{I_1 + I_2}{2} - I_3 \right), \quad A_{2,2} = \frac{G}{4a^3} (I_2 - I_1) \quad (55)$$



شکل ۲.۹. بیضوی محلی اینرشیا

سیستم مختصات ژئوسنتریک طبیعی اشاره شده، از طریق معادلات تبدیل زیر با سیستم مختصات اصلی مرتبط می شود:

$$\bar{r} = R(\omega_1, \omega_2, \omega_3)(\bar{r}' - \bar{r}'_c) \quad (56)$$

که در آن  $\bar{r}'_c = (x'_c, y'_c, z'_c)$  و عبارت  $R(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  ماتریس دوران است. سه زاویه دوران، امگاها، از طریق قطری سازی مقدار ویژه تنسور اصلی اینرشیا (برآورده شده برای مرکز جرم زمین)، بصورت زیر، بدست می آیند:

$$\begin{bmatrix} I_x & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_y & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_z \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \quad (57)$$

همانطور که قبلاً دیده شد، کلیه ضرائب پتانسیل دارای واحد فیزیکی پتاسیل، یعنی  $\text{cm}^2 \text{s}^{-2}$  هستند. اغلب کار کردن با ضرائب پتانسیل بدون واحد معمول است. برای این منظور، پتانسیل جاذبه (44) اغلب بصورت زیر نوشته می شود:

$$W_g(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{r} \left[ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (J_{nm} \cos m\lambda + K_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos \theta) \right], \quad (58)$$

که در آن :  $J_{nm} = -A_{nm}a/(GM)$  و  $K_{nm} = -B_{nm}a/(GM)$  است. توجه شود وقتی که کلیه ضرائب پتانسیل صرفنظر شوند، **تقریب کروی پتانسیل جاذبه** بدست می آید :

$$W_g^S(r) = \frac{GM}{r} \quad (59)$$

**مشاهدات** نشان داده اند که **ضریب پتانسیل**  $J_{2,0} = 1082.63 \cdot 10^{-6}$  بسیار بزرگتر از بقیه ضرائب پتانسیل است، که حداکثر از مرتبه  $10^{-6}$  هستند. در ادامه می بینیم که ضریب  $J_2 = J_{2,0}$  بیانگر بیضویت زمین است، در صورتیکه، بقیه ضرائب نامنظمی های باقیمانده را منعکس می کنند. در سیستم مختصات طبیعی، تعریف شده در (56)، داریم :

$$J_{2,0} = J_2 = - \frac{\left(\frac{1}{2}(I_1 + I_2) - I_3\right)}{Ma^2} = \frac{I_3 - I_1}{Ma^2} \quad (60)$$

بنابراین **تقریب بیضوی پتانسیل جاذبه** بصورت زیر می شود :

$$\begin{aligned} W_g^E(r, \theta) &= \frac{GM}{r} - \frac{G(I_3 - I_1)}{r^3} P_2(\cos \theta) \\ &= \frac{GM}{r} \left( 1 + \frac{I_3 - I_1}{2Mr^2} \right) - \frac{3G(I_3 - I_1)}{2r^3} \cos^2 \theta \end{aligned} \quad (61)$$

تابحال، توجه ما معطوف به بیان پتانسیل جاذبه به فرم هارمونیک های کروی بود. یک رَوَند نظیر می تواند برای بیان پتانسیل جاذبه به فرم توابع هارمونیک بیضوی طی شود. نتیجه نهائی بصورت زیر در می آید :

$$W_g(u, \theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n q_{nm}(u, E, b) (A_{nm} Y_{nm}^c(\Theta, \lambda) + B_{nm} Y_{nm}^s(\Theta, \lambda)), \quad (62)$$

که در آن  $q_{nm}(u, E, b) = Q_{nm}(iu/E) / Q_{nm}(ib/E)$  و  $i = \sqrt{-1}$ ، و توابع لژاندر از نوع دوّم اند. رابطه (62) برای خارج از مرز بیضوی  $(E, b)$  معتبر است. ضرائب پتانسیل در این رابطه از روی روابط نظیر (47) برآورد می شوند. در اینجا بیضوی  $(E, b)$  نقشی، مثل کره  $r = a$  را در حالت بررسی کروی، ایفاء می کند. توجه شود که دو سری (44) و (62) دارای ساختار مشابه هستند. تفاوت اصلی در این دو معادله، در جملات شعاعی است، که در نوع بیضوی بسیار پیچیده تر است.

قابل ذکر است که هنوز ارائه و حل مسئله مقدار مرزی برای تعیین پتانسیل جاذبه، انجام نشده است. حالت بررسی شده، بصورت کاملاً نظری بوده، از آنجا که ما هیچ روشی برای فراهم کردن مقادیر پتانسیل جاذبه به منظور برآورد ضرائب پتانسیل، (47)، بر روی مرز کره یا مرز بیضوی نداریم.

روش برآورد ضرائب پتانسیل از روی کمیت های مشاهداتی، در فصول آتی بحث می شود.

## ۲.۳- میدان ثقل مدل (نرمال)

در خیلی از موارد، کار با یک میدان ثقل مدل، یک مزیت است. درجه ای که این مدل بایستی میدان ثقل واقعی را تقریب کند، بستگی به آن کاربرد مورد نظر دارد. ساده ترین مدل، یک مدل شعاعی است. این میدان می تواند توسط یک ذره بدون بُعد و با جرمی برابر جرم زمین ایجاد شود، یا اینکه بوسیله یک کره با توزیع جرم های به شکل شعاعی در لایه های مختلف زمین، که یک میدان مدل یکسان را در خارج از کره ایجاد می کنند. پتانسیل این میدان کروی بوسیله (۵۹) بیان می شود، که نشان می دهد این میدان فقط تابعی از فاصله از مرکز این میدان است. سطوح هم پتانسیل یک میدان کروی، بصورت سطوح کروی هم مرکز با شعاع های مختلف هستند. این میدان کروی، در مباحث کاربرد ماهواره ها بطور وسیعی استفاده می شود.

یک تقریب نزدیک تر به واقعیت، یک میدان مدل بیضوی است. در ژئودزی، این میدان با شرایط و مفروضات زیر ایجاد می شود :

- ۱- دارای سرعت زاویه دورانی برابر میدان واقعی، یا برابر سرعت زاویه دورانی زمین واقعی است
- ۲- توسط یک بیضوی دو محوری ژئوسنتریک با بهترین برازش، با پارامترهای  $a$  و  $b$ ، تولید می شود.
- ۳- یکی از سطوح هم پتانسیل این میدان مدل، که پتانسیل  $U_0$  آن برابر پتانسیل میدان ثقل واقعی  $W_0$  بر سطح بیضوی مولد این میدان منطبق می شود.

یک مدل با خصوصیات فوق، یک مدل ثقل نرمال نامیده می شود و پتانسیل آن با  $U$  نمایش داده می شود.

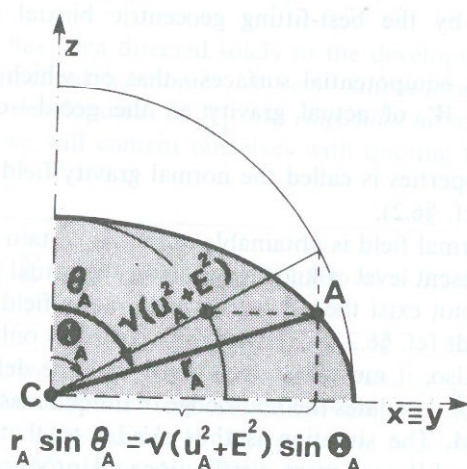
قابل ذکر است که برای ایجاد یک میدان ثقل نرمال، نیازی به دانستن توزیع دانسیته داخل زمین، و نیز استفاده از تنها یک مدل توزیع دانسیته، نیست. نظیر میدان شعاعی بررسی شده، در اینجا نیز توزیع های مختلف دانسیته، همگی یک میدان مدل یکسان را ایجاد می کنند.

$$U(u, \Theta) = W_g^N(u, \Theta) + W_c(u, \Theta) \quad (63)$$

پتانسیل جاذبه نرمال،  $W_g^N(u, \Theta)$ ، باید در شرط های ۲ و ۳ را صدق کند

$$W_c(u, \Theta) = \frac{1}{2} \omega^2 (u^2 + E^2) \sin^2 \Theta \quad (64)$$

پتانسیل گریز از مرکز



شکل ۲.۱۰. پتانسیل گریز از مرکز در مختصات بیضوی

شرط سوّم ایجاب می کند که :

$$U(b, \Theta) = W_0 \quad (65)$$

با جاگذاری برای  $U$  از (63) و (64)، رابطه (65) بصورت زیر می شود :

$$W_g^N(b, \Theta) + \frac{1}{2} \omega^2 a^2 \sin^2 \Theta = W_0 \quad (66)$$

حال، باید  $W_g^N(u, \Theta)$  را تعیین نمود. از آنجا که پتانسیل جاذبه نرمال متقارن است، هر سری نظیر (62) شامل جملات فقط زونال می شود، یعنی  $m=0$ . بنابراین، معادله عمومی  $W_g^N(u, \Theta)$  بصورت زیر در می آید :

$$W_g^N(u, \Theta) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(u, E, b) A_n P_n(\cos \Theta) \quad (67)$$

ولی روی سطح بیضوی  $(b, E)$ ، داریم :  $u=b$ ، و تمام جملات شعاعی برابر یک می شوند، زیرا داریم :

$$q_n(b, E, b) = Q_{nm} \left( i \frac{b}{E} \right) / Q_{nm} \left( i \frac{b}{E} \right) = 1 \quad (68)$$



بنابراین (۶۶) بصورت زیر می شود :

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\cos \Theta) = W_0 - \frac{1}{2} \omega^2 a^2 \sin^2 \Theta$$

$$= W_0 P_0(\cos \Theta) - \frac{1}{2} \omega^2 a^2 \frac{2}{3} [P_0(\cos \Theta) - P_2(\cos \Theta)] \quad (۶۹)$$

بایستی ضرائب نظیر در سمت چپ و راست با هم مساوی باشند. بنابراین، نتیجه می گیریم :

$$A_0 = W_0 - \frac{\omega^2 a^2}{3}, \quad A_1 = 0,$$

$$A_2 = \frac{\omega^2 a^2}{3}, \quad A_n = 0, \quad n = 3, 4, \dots \quad (۷۰)$$

و پتانسیل جاذبه نرمال بصورت زیر می شود :

$$W_g^N(u, \Theta) = q_0(u, E, b) \left( W_0 - \frac{\omega^2 a^2}{3} \right) + q_2(u, E, b) \frac{\omega^2 a^2}{3} P_2(\cos \Theta) \quad (۷۱)$$

$$P_0(t) = 1, \quad P_3(t) = \frac{5}{2} t^3 - \frac{3}{2} t,$$

$$P_1(t) = t, \quad P_4(t) = \frac{35}{8} t^4 - \frac{15}{4} t^2 + \frac{3}{8},$$

$$P_2(t) = \frac{3}{2} t^2 - \frac{1}{2}, \quad P_5(t) = \frac{63}{8} t^5 - \frac{35}{4} t^3 + \frac{15}{8} t$$

چند جمله ای های لژاندر :

$$t = \cos \vartheta$$

در آخر، می خواهیم پتانسیل ثقل نرمال  $U$  را بصورت تابعی از  $GM$ ، بجای تابعی از  $W_0$ ، بیان کنیم. ( که پارامتر اول می تواند بطور مستقیم تعیین شود، و دومی نمی تواند). بنابراین، برای حذف  $W_0$  از (۷۱)،  $q_0$  را بر حسب  $r$  بیان می کنیم:

$$q_0(u, E, b) = \arctan\left(\frac{E}{u}\right) / \arctan\left(\frac{E}{b}\right) \doteq \frac{E}{r} \arctan^{-1}\left(\frac{E}{b}\right) \quad (72)$$

با مقایسه پتانسیل جاذبه نرمال با پتانسیل جاذبه واقعی  $Wg$ ، بدست می آوریم:

$$\frac{E}{r} \arctan^{-1}\left(\frac{E}{b}\right) \left( W_0 - \frac{\omega^2 a^2}{3} \right) \doteq \frac{GM}{r} \quad (73)$$

با تعیین  $W_0$  بر حسب  $GM$  و جاگذاری آن در (۶۶)، در نهایت پتانسیل نرمال در مختصات بیضوی بصورت زیر می شود:

$$U(u, \Theta) \doteq \frac{GM}{E} \arctan\left(\frac{E}{u}\right) + \frac{\omega^2(u^2 + E^2)}{3} (1 - P_2(\cos \Theta)) + q_2(u, E, b) \frac{\omega^2 a^2}{3} P_2(\cos \Theta). \quad (74)$$

در خیلی از کاربردها، پتانسیل نرمال در مختصات کروی بیان می شود. برای این منظور، از بیان پتانسیل جاذبه بصورت هارمونیک های کروی (۵۸) استفاده می کنیم، و پتانسیل جاذبه نرمال نظیر را تعیین می کنیم. این پتانسیل باید در رابطه زیر صدق کند :

$$U(r, \theta) = W_g^N(r, \theta) + W_c(r, \theta) \quad (۷۵)$$

باتوجه به اینکه، پتانسیل جاذبه نرمال باید متقارن باشد، فقط هارمونیک های زونال باید در نظر گرفته شوند. همچنین، از آنجا که میدان نرمال نسبت به استوا هم متقارن است، کلیه هارمونیک های درجه فرد هم ناپدید می شوند. پتانسیل ثقل نرمال در نهایت بصورت زیر در می آید :

$$U(r, \theta) = \frac{GM}{r} \left( 1 - \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} \left( \frac{a}{r} \right)^n J_n^N P_n(\cos \theta) \right), \quad (۷۶)$$

$$J_n^N = J_{n0}^N$$

که در آن، ضرائب پتانسیل نرمال از روی اندازه و شکل بیضوی مقایسه ژئوسنتریک، سرعت زاویه ای دوران زمین، و جرم زمین تعیین می شوند، و بصورت توابعی از این پارامترها هستند.

بعنوان مثال،  $J_2^N$ ، که جمله گریز از مرکز را بصورت جذب شده در خود دارا است، می توان نشان داد که بصورت زیر است :

$$J_2^N = \frac{2}{3}f - \frac{1}{3}m - \frac{1}{3}f^2 + \frac{2}{21}fm \quad (77)$$

$$m = \frac{\omega^2 a^3}{GM}$$

که در آن  $m$  پارامتر ژئودتیک است :

برای مقاصد عملی، در نظر گرفتن چند ضریب اول پتانسیل نرمال در (۷۶) کفایت می کند. این چند ضریب اول، به همراه  $a$ ،  $GM$  و  $\omega$ ، بطور یکتا پتانسیل ثقل نرمال، و بنابراین، میدان ثقل نرمال را مشخص می کنند.

قابل اشاره است که به منظور تعریف میدان ثقل نرمال، بطور معمول فرض می شود که جرم زمین شامل جرم اتمسفر نیز است، یعنی جرم زمین به میزان  $0.89 \times 10^{-6} M$  افزایش پیدا می کند. با این اوصاف، میدان ثقل نرمال تولید شده توسط بیضوی، در فضای خالی بالای سطح بیضوی منتشر می شود.

قبل از بررسی شتاب ثقل نرمال، یک نکته قابل ذکر است. تابحال، میدان های مدل شعاعی و بیضوی در نظر گرفته شدند. اگرچه در طیف وسیعی از کاربردها میدان بیضوی، بطور خاص میدان نرمال، یک مدل مناسبی است، مواردی است که یک تقریب بهتر از میدان ثقل واقعی نیاز است. در چنین مواردی، یک سری بُرش داده شده کروی یا بیضوی، که ضرائب پتانسیل آن از روی داده های میدان واقعی تعیین شده اند، می تواند بعنوان یک مدل استفاده شود. بطور واضح، سطوح هم پتانسیل این میدان مدل با مرتبه بالاتر، به همواری سطوح هم پتانسیل میدان نرمال نیست. و از طرف دیگر، جدائی آنها از سطوح هم پتانسیل میدان واقعی، خیلی زیاد نیست.

قابل ذکر است که میدان های مقایسه مرتبه بالاتر اشاره شده، ممکن است نه بصورت محوری متقارن باشند، یعنی ممکن است به  $\lambda$  بستگی داشته باشند، و نه نسبت به استوا متقارن باشند، یعنی ممکن است شامل هارمونیک های مرتبه فرد باشند. بعنوان مثال، یک سطح مقایسه گلابی شکل، شامل جمله (3,0) است.

هر میدان ثقل مدل، مدل شتاب ثقل مربوط به خود را داراست. شتاب ثقل مدل، بصورت گرادیان میدان پتانسیل مدل تعریف می شود. شتاب ثقل تولید شده بوسیله یک میدان شعاعی را از قبل آشنا هستیم:

$$g \doteq G \frac{M}{r^2}$$

و همچنین با فرمول های شتاب ثقل نرمال، نظیر فرمول بین المللی شتاب ثقل ۱۹۸۰ به شرح زیر، آشنائی داریم:

$$\gamma_0 \doteq 978.0327(1 + 0.0052790414 \sin^2\phi + 0.0000232718 \sin^4\phi + 0.0000001262 \sin^6\phi) \text{ Gal.}$$

حال می خواهیم نشان دهیم که چگونه این معادلات برای شتاب ثقل نرمال حاصل شده اند. مرسوم ترین سیستم مختصات برای این بررسی، سیستم مختصات بیضوی است. برای تعیین گرادیان پتانسیل ثقل نرمال ارائه شده در (۷۴)، عمل گرادیان ابتدا در سیستم بیضوی نوشته می شود. رابطه زیر را بدست می آوریم:

$$\vec{\gamma}(u, \Theta) = \nabla U(u, \Theta) = \sqrt{\frac{u^2 + E^2}{u^2 + E^2 \cos^2 \Theta}} \frac{\partial U}{\partial u} \vec{e}_u$$

گرادیان پتانسیل ثقل نرمال  
در سیستم مختصات بیضوی :

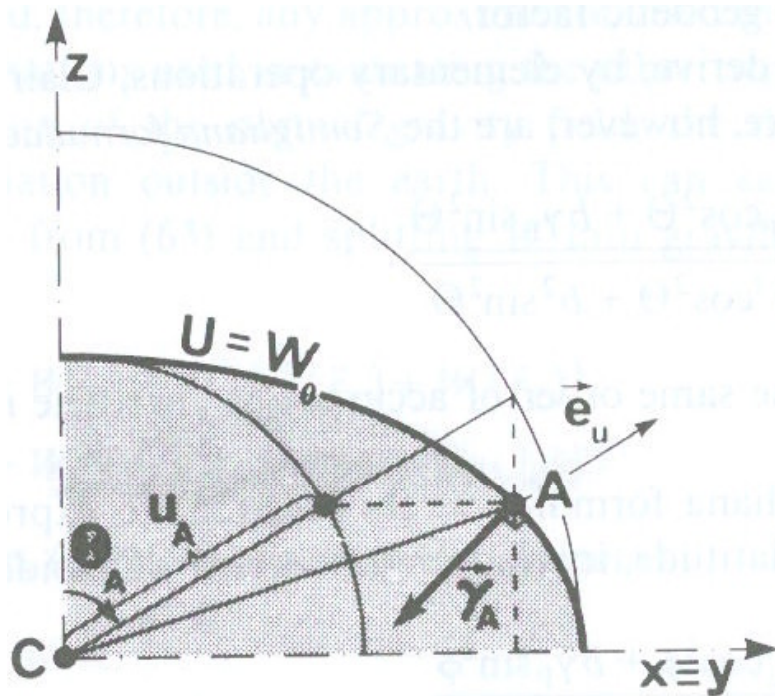
$$+ \frac{1}{\sqrt{u^2 + E^2 \cos^2 \Theta}} \frac{\partial U}{\partial \Theta} \vec{e}_\Theta + \frac{1}{\sqrt{(u^2 + E^2) \sin \Theta}} \frac{\partial U}{\partial \lambda} \vec{e}_\lambda \quad (78)$$

جمله سوم در سمت راست رابطه فوق، صفر می شود، به دلیل اینکه پتانسیل نرمال  $U$  تابعی از  $\lambda$  نیست. همچنین، در همسایه گی بیضوی مقایسه ژئوسنتریک، راستای شتاب ثقل نرمال تقریباً در راستای  $U$  قرار می گیرد، وقتی که فشردگی بیضوی کوچک است، شکل ۲.۱۱ این را نشان می دهد. در هیچ مکان اختلاف این دو امتداد

از مقدار ۱۳ دقیقه کمانی بیشتر نمی شود. بنابراین، با یک دقت خیلی بالا (بهتر از ۰.۲ میکروگال)

حتی جمله دوم شامل نرخ تغییر نسبت به  $\Theta$  می تواند حذف شود، بطوریکه برای مقدار شتاب ثقل نرمال می توانیم رابطه زیر را بنویسیم (علامت منفی به دلیل جهت های مخالف  $\vec{\gamma}$  و  $\vec{e}_u$  است):

$$\gamma(u, \Theta) \doteq - \sqrt{\frac{u^2 + E^2}{u^2 + E^2 \cos^2 \Theta}} \frac{\partial U}{\partial u} \quad (79)$$



شکل ۲.۱۱. امتداد شتاب ثقل نرمال

حال با برآورد مشتق جزئی  $U$  از روی (۷۴)، که مشتق

$q_2(u, b, E)$  برابر  $-3b^3/u^4$  است (با دقت نسبی  $e^4$ )، بدست می آوریم :

$$\gamma(u, \Theta) \doteq - \sqrt{\frac{u^2 + E^2}{u^2 + E^2 \cos^2 \Theta}} \left[ - \frac{GM}{u^2 + E^2} - \frac{a^2 \omega^2 b^3}{u^4} P_2(\cos \Theta) + \frac{2\omega^2 u}{3} (1 - P_2(\cos \Theta)) \right]. \quad (80)$$

در هنگام کار با شتاب ثقل نرمال، معمول است که ابتدا آن را بر روی بیضوی مقایسه ژئوسنتریک برآورد نموده و سپس آن را برای اثر موقعیت مربوط به بالای سطح بیضوی تصحیح نمود. روش ذکر شده به این دلیل است که گرادیان قائم شتاب ثقل نرمال می تواند به آسانی تعیین شود. بنابراین، می خواهیم فرمول مورد نظر برای تعیین شتاب ثقل نرمال بر روی سطح بیضوی را بدست آوریم، همانطور که دیدیم، روی بیضوی داریم:  $u=b$ ، و رابطه (80) بعد از انجام برخی اعمال ریاضی پایه،  $\gamma_0$  بصورت زیر در می آید:

$$\gamma_0(\Theta) = \gamma(b, \Theta) \doteq \frac{GM}{a\sqrt{a^2 \cos^2 \Theta + b^2 \sin^2 \Theta}} \left( 1 - \frac{2}{3}m + \left( \frac{a^2}{b^2}m + \frac{2}{3}m \right) P_2(\cos \Theta) \right) \quad (81)$$

که در آن  $m$  پارامتر ژئودتیک است. از (81)، بعد از انجام اعمال پایه، می توانیم تئوری کلرو را بدست آوریم:

$$f = \frac{5}{2} \frac{\omega^2 a}{\gamma_E} - \frac{\gamma_P - \gamma_E}{\gamma_E} \quad (\gamma_P - \gamma_E) / \gamma_E = \tilde{f} \quad \text{فشرده گی شتاب ثقل}$$

وقتی داده های شتاب ثقل در نقاط مختلف روی سطح زمین موجود باشند، می توانند برای تعیین شکل زمین نیز استفاده شوند. تئوری کلرو ارتباط بین شتاب ثقل، و اندازه و شکل زمین را شرح می دهد.

و در ادامه فرمول های سومیگلیانا داریم، که فرمول اول سومیگلیانا بصورت زیر است :

$$\gamma_0(\Theta) \doteq \frac{a\gamma_P \cos^2 \Theta + b\gamma_E \sin^2 \Theta}{\sqrt{a^2 \cos^2 \Theta + b^2 \sin^2 \Theta}} \quad \text{فرمول اول سومیگلیانا} \quad (۸۲)$$

که با دقتی هم مرتبه با دقت (۷۴)، معتبر است. **شتاب ثقل های نرمال** در **قطب** و در **استوا** در رابطه فوق ظاهر شده اند.

فرمول دوم سومیگلیانا، بیان **شتاب ثقل نرمال** بعنوان **تابعی از عرض ژئودتیک**، بجای **تابعی از مختصات دوم بیضوی**  $\Theta$ ، با استفاده از  $\tan \Theta = \frac{a}{b} \cot \phi$ ، بصورت زیر است :

$$\gamma_0(\phi) \doteq \frac{a\gamma_E \cos^2 \phi + b\gamma_P \sin^2 \phi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \phi + b^2 \sin^2 \phi}} \quad \text{فرمول دوم سومیگلیانا} \quad (۸۳)$$

برای تبدیل فرمول اخیر به **شکل فرمول کاسینی**، استفاده شده **بعنوان نخستین فرمول بین المللی شتاب ثقل**، ابتدا  $\cos^2 \phi$  بصورت  $1 - \sin^2 \phi$  نوشته می شود، و از **فشردگی های شتاب ثقل و هندسی** استفاده می گردد. بعد از انجام چند عمل پایه، در نهایت بدست می آوریم :

$$\gamma_0(\phi) \doteq \gamma_E \frac{1 + (\bar{f} - f - f\bar{f}) \sin^2 \phi}{\sqrt{1 + (f^2 - 2f) \sin^2 \phi}} \quad (۸۴)$$

با گسترش **مخرج کسر رابطه اخیر** به **سری توانی** و **صرفنظر از جملات مرتبه بالاتر**، نتیجه می گیریم:



$$\gamma_0(\phi) \doteq \gamma_E (1 + \alpha \sin^2 \phi + \beta \sin^2 2\phi),$$

(۸۵)

که در آن  $\alpha \doteq \bar{f}$  فشردگی شتاب ثقل، و  $\beta \doteq f(f - \bar{f})/4$  است. این فرمول دارای دقت از مرتبه  $e^2$ ، یعنی در حدود 50 میکروگال است. برای تکمیل این بحث، قابل اشاره است که فرمول های مشابه برای شتاب ثقل نرمال، می توانند از روی (۷۶) با استفاده از مختصات کروی بجای مختصات بیضوی بدست آیند. در این رابطه، Levallois روابطی برای  $\alpha$  و  $\beta$  بصورت توابعی از ضرائب پتانسیل نرمال به روش ذکر شده بدست آورده است.

## ۲.۴- پتانسیل اعوجاج :

کاربرد اصلی میدان ثقل نرمال در تعیین پتانسیل اعوجاج  $T$  است که بصورت زیر تعریف می شود :

$$T(\bar{r}_A) = W(\bar{r}_A) - U(\bar{r}_A)$$

(۸۶)

کمیت  $T$  نامنظمی های منطقه ای و محلی  $W$  را نمایش می دهد. از آنجا که  $U$  کلیت میدان ثقل واقعی  $W$  را مدلسازی می کند، پتانسیل اعوجاج بسیار کوچکتر از هر کدام از این دو پتانسیل ( $U$  و  $W$ ) است، و بنابراین، هر نوع اعمال تقریبی در ارزیابی  $T$  بسیار کم خطرتر از اعمال تقریب ها در ارزیابی دو پتانسیل ذکر شده، یعنی  $W$  و  $U$ ، است.

بنا به تعریف میدان ثقل نرمال، پتانسیل اعوجاج برای خارج از سطح زمین، در معادله لاپلاس صدق می کند. این نتیجه می تواند به آسانی با جاگذاری برای  $U$  در رابطه ۸۶ از روی رابطه ۶۳، و دو بخش کردن  $W$  به پتانسیل های جاذبه و گریز از مرکز، به شرح زیر بدست آید:

$$\begin{aligned} T(\bar{r}_A) &= W_g(\bar{r}_A) + W_c(\bar{r}_A) - (W_g^N(\bar{r}_A) + W_c(\bar{r}_A)) \\ &= W_g(\bar{r}_A) - W_g^N(\bar{r}_A). \end{aligned} \quad (87)$$

با صرف نظر از جرم اتمسفر، با توجه به رابطه ۱۵، معادله لاپلاس برای  $T$  به شرح زیر:

$$\boxed{\nabla^2 T(\bar{r}_A) = 0} \quad (88)$$

برای خارج از سطح زمین حاصل می شود.

برای هدفمندی زیادی، معمول است که پتانسیل اعوجاج بر حسب هارمونیک های کروی نوشته شود. با جاگذاری در رابطه ۸۶ از روی روابط ۵۸ و ۷۶، رابطه ذکر شده را به شرح زیر بدست می آوریم:

$$\begin{aligned}
T(r, \theta, \lambda) = & \frac{GM}{r} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n (J_n^N - J_n) P_n(\cos \theta) \\
& - \frac{GM}{r} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n J_n P_n(\cos \theta) \\
& - \frac{GM}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=1}^n (J_{nm} \cos m\lambda + K_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos \theta)
\end{aligned} \tag{۸۹}$$

معادله فوق اغلب به شکل زیر نوشته می شود :

$$T(r, \theta, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(r, \theta, \lambda), \tag{۹۰}$$

که در آن  $T_n$  بعنوان مولفه های  $T$  برای مرتبه های مشخص  $n$  شناخته می شود. بعنوان مثال :

$$T_5(r, \theta, \lambda) = - \frac{GM}{r} \left(\frac{a}{r}\right)^5 \sum_{m=0}^5 (J_{5m} \cos m\lambda + K_{5m} \sin m\lambda) P_{5m}(\cos \theta)$$

توجه شود که برای میدان نرمال بطور دقیق انتخاب شده، ضریب  $J_2^N$  برابر  $J_2$  می شود. همچنین، اگر سیستم مختصات کروی مورد نظر بر سیستم ژئوسنتریک طبیعی انطباق پیدا کند، بعضی ضرائب پتانسیل ناپدید می شوند، و بطور خاص، رابطه زیر نتیجه می شود:

$$\begin{aligned}
 T(r, \theta, \lambda) = & \frac{GMa^2}{r^3} J_{2,2} \cos 2\lambda P_{2,2}(\cos \theta) \\
 & + \frac{GM}{r} \sum_{n=4,6,\dots}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n (J_n^N - J_n) P_n(\cos \theta) \\
 & - \frac{GM}{r} \sum_{n=3,5,\dots}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n J_n P_n(\cos \theta) \\
 & - \frac{GM}{r} \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=1}^n (J_{nm} \cos m\lambda + K_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos \theta)
 \end{aligned} \tag{91}$$

این رابطه می تواند بصورت زیر نوشته شود:

$$T(r, \theta, \lambda) = \sum_{n=2}^{\infty} T_n(r, \theta, \lambda) \tag{92}$$

با فهم این نکته که  $T_2$  فقط شامل جمله  $J_{2,2}$  است، که در هر شرایطی خیلی کوچک است، از آنجا که:  $I_1 \doteq I_2$  (با توجه به ضرائب رابطه ۵۴)

جالب توجه است بینیم **جرم بیضوی ژئوسنتریک موّلد میدان نرمال**، یعنی  $M^N$ ، اگر بطور دقیق برآورد نشود، چه اتفاقی برای پتانسیل اعوجاج می افتد. در این حالت، روابط ۹۰ و ۹۲ یک جمله مطلق اضافه به شرح زیر خواهند داشت :

$$\delta T = -\delta U = T_0 = \frac{GM}{r} - \frac{GM^N}{r} = -\frac{G}{r}(M^N - M) = -\frac{G}{r}\delta M \quad (93)$$

از آنجا که دانش کنونی ما از **دقت مقدار GM** بهتر از  $10^{-6}GM$  است، خطای نظیر  $T_0$  سبب یک خطای سیستماتیک جهانی (ثابت) از مرتبه **یک میلی گال** بر روی **آنامولی های ثقل** می شود. **خطای نسبی نظیر** (از مرتبه  $10^{-6}$ ) در پارامترهای دیگر میدان نرمال، یعنی در  $\omega$  و  $a$  و  $v_2$ ، اثر بسیار کوچتری روی  $T$  دارد، که از روی ۸۹ می توان آن را دید.

حال می خواهیم **یک فرمول سازی بدیل** را برای پتانسیل اعوجاج بر اساس معادله انتگرال ۱۷ دنبال کنیم. برای سادگی، این فرمول سازی را **فقط برای روی سطح زمین** در نظر می گیریم. برای رسیدن به معادله مورد نظر، اتحاد سوّم گرین را برای بخش نرمال  $W_g^N$  از پتانسیل جاذبه  $W_g$  به کار می گیریم (حالت وسط رابطه ۱۷ به ازای  $W_g^N$ ). به شرح زیر بدست می آوریم :

$$\iint_S \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial W_g^N}{\partial n} - W_g^N \frac{\partial \rho^{-1}}{\partial n} \right) dS - \iiint_{\mathbb{B}} \frac{1}{\rho} \nabla^2 W_g^N d\mathbb{B} = 2\pi W_g^N(\vec{r}_A) \quad (94)$$

( برای  $A$  روی سطح  $S$  )

که  $n$  باز هم عمود بر سطح زمین به طرف خارج است.

توجه شود برای اینکه بتوانیم معادله ۹۴ را بنویسیم، پتانسیل جاذبه نرمال  $W_g^N$  در حالی که شکل تحلیلی خود را حفظ می کند (رابطه ۷۱)، باید معنی متفاوتی بدهد. ما باید در نظر بگیریم که این دفعه پتانسیل جاذبه نرمال، به جای بیضوی ژئوسنتریک، توسط خود زمین تولید می شود. بنابراین، باید یک زمین مدل فرض شود وجود دارد که در اندازه و شکل همانند زمین واقعی است، ولی در توزیع اجرام با زمین واقعی فرق می کند. این فرض کاملاً قابل قبولی است وقتی که در نظر بگیریم که میدان جاذبه نرمال می تواند بطور کامل بعنوان یک کمیت معمول مورد بررسی قرار گیرد بدون اینکه نیاز باشد برای جسم مولد شکلی لحاظ شود. دوباره، با توجه به رابطه ۱۲ (معادله بنیادی دیفرانسیل جزئی از مرتبه دوم) می توانیم بصورت زیر بنویسیم:

$$\nabla^2 W_g^N(\vec{r}) = -4\pi G \sigma^N(\vec{r}) \quad (۹۵)$$

که در آن  $\sigma^N(\vec{r})$  چگالی جرم در داخل زمین است که میدان جاذبه نرمال مورد نیاز را تولید می کند. با جاگذاری ۹۵ در ۹۴، بدست می آوریم:

$$\oiint_{\mathcal{S}} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial W_g^N}{\partial n} - W_g^N \frac{\partial \rho^{-1}}{\partial n} \right) d\mathcal{S} = -2\pi W_g^N(\vec{r}_A) \quad (۹۶)$$

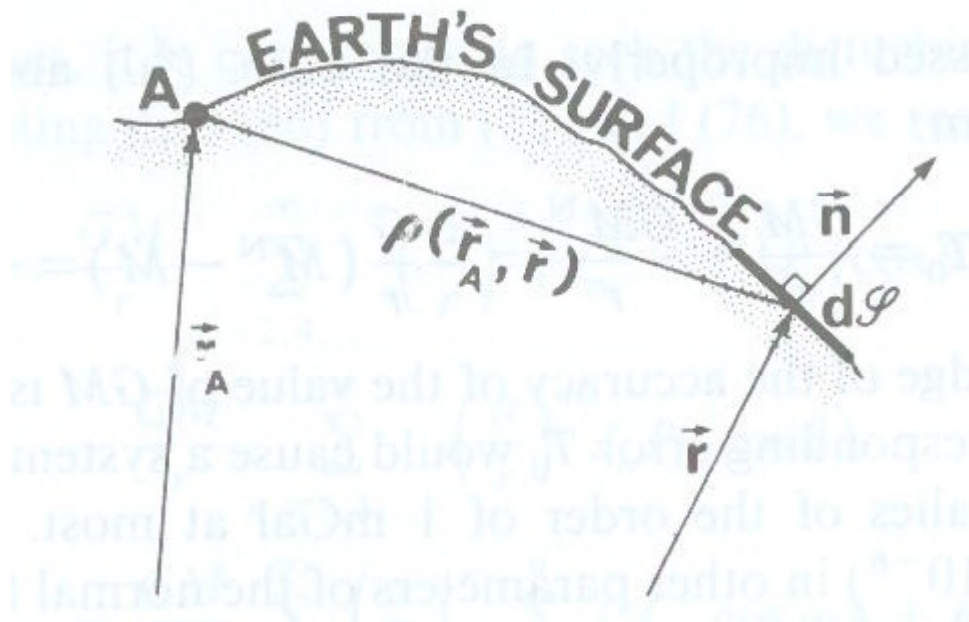
با توجه به اینکه:

$$G \iiint_{\mathcal{B}} \frac{\sigma^N(\vec{r})}{\rho(\vec{r}, \vec{r}_A)} d\mathcal{B} = W_g^N(\vec{r}_A) \quad (۹۷)$$

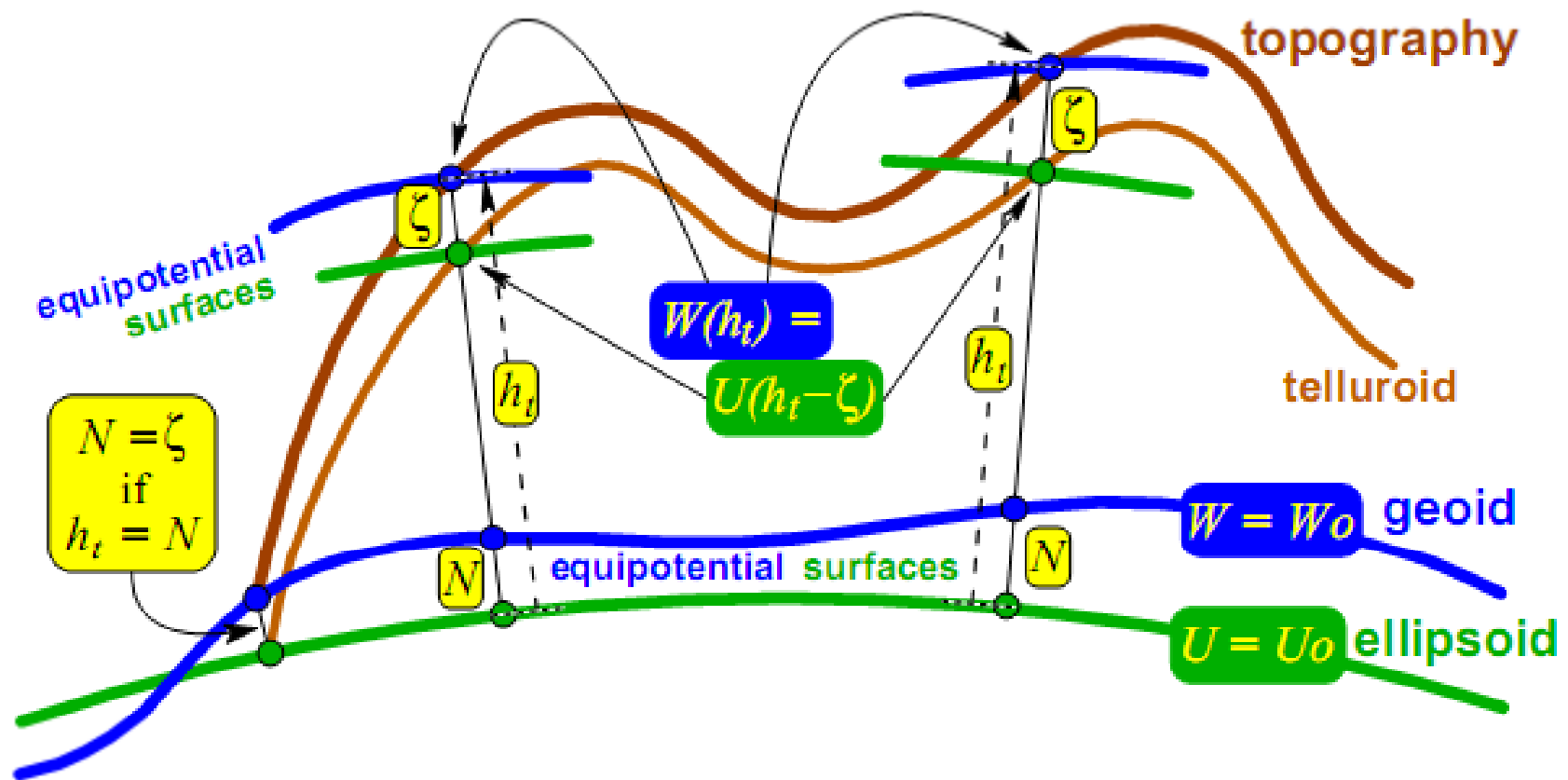
بعد از کم کردن رابطه ۹۶ از رابطه ۱۸، و در نظر گرفتن رابطه ۸۷، و نیز انجام یک آرایش مجدد برای جملات مختلف، بدست می آوریم:

$$T(\vec{r}_A) - \frac{1}{2\pi} \oint_{\mathcal{S}} \left[ T(\vec{r}) \frac{\partial \rho^{-1}}{\partial n} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial T(\vec{r})}{\partial n} \right] d\mathcal{S} = 0. \quad (98)$$

این رابطه بعنوان معادله انتگرال مالدنسکی برای پتانسیل اعوجاج  $T$  شناخته می شود. این معادله برای روی سطح زمین معتبر بوده و رابطه ای دقیق است (بدون تقریب).



شکل ۲.۱۲. پتانسیل اعوجاج بر روی سطح زمین



شکل ۲.۱۳. نمایش سطوح و ارتفاع های مختلف در تعیین میدان ثقل زمین



## ۳- تعیین میدان ثقل زمین از روی مشاهدات ثقل

- مفهوم روش استوکس
- مفهوم روش مالدنسکی
- ثقل سنجی
- برآورد عددی انتگرال های سطحی

### ۳- تعیین میدان ثقل زمین از روی مشاهدات ثقل

در دو فصل قبل، روابط نظری مختلف و موجود بین پارامترهای میدان ثقل زمین ارائه شد، ولی درباره تعیین مقادیر این پارامترها، خیلی کم بررسی شد. همچنین، هیچگونه کوششی برای ایجاد مدل های ریاضی مرتبط کننده این پارامترها با کمیت های مشاهداتی انجام نشد.

در این فصل، مسئله کلاسیک میدان ثقل زمین - چگونه اطلاعات کاملی درباره این میدان از روی مشاهدات فقط مقدار شتاب ثقل بدست آوریم - بررسی می شود.

در قسمت اول تکنیک استاندارد پیشنهاد شده توسط ریاضی دان انگلیسی بنام استوکس در اواسط قرن نوزدهم، معرفی می شود. در قسمت دوّم یک روش مدرن ایجاد شده توسط فیزیک دان روسی بنام مالدنسکی، در حدود صد سال قبل، ارائه می شود. در قسمت سوم روش های گردآوری داده های ثقل و تبدیل آنها به آنامولی های متوسط و مناسب برای ارزیابی پارامترهای دیگر بررسی می شوند.

در قسمت آخر چگونگی فائق آمدن بر بعضی مشکلات موجود در برآورد انتگرال های سطحی مورد نیاز شرح داده می شود.

## ۱- مفهوم روش استوکس :

روش کلاسیک استوکس برای تعیین پارامترهای میدان ثقل از روی مشاهدات مقدار شتاب ثقل، بر اساس حل مسئله مقدار مرزی خارجی برای پتانسیل اعوجاج  $T$  است. برای نشان دادن اینکه این روش چطوری کار می کند، با حل مسئله ارائه شده در فصل قبل شروع می کنیم. اگر فرض کنیم ( با دانستن اینکه خیلی نادرست است ) که هیچ جرمی در خارج از ژئوئید نیست، در این صورت معادله لاپلاس برای پتانسیل اعوجاج، رابطه ۸۸ فصل قبل، برای خارج از سطح ژئوئید معتبر است. از آنجا که پتانسیل اعوجاج  $T$  روی سطح بیضوی نه معلوم است و نه قابل مشاهده، مقادیر مرزی مختلف باید استفاده شود، یعنی، یک مسئله مقدار مرزی با نوع متفاوت باید فرمول سازی شود. در اینجا معادله بنیادی ثقل سنجی، رابطه ۱۴ فصل اول، استفاده می شود. به کمک گرادیان شتاب ثقل نرمال، رابطه ۳۰ فصل اول، و صرفنظر کردن از جملات از مرتبه فشردگی، رابطه ۱۴ فصل اول را می توانیم بصورت زیر بازنویسی کنیم :

$$\Delta g \doteq -\frac{2}{R}T - \frac{\partial T}{\partial H} \quad (1)$$

که  $R$  باز هم شعاع متوسط زمین است. این معادله مقادیر مرزی را تجهیز می کند، و می تواند به همراه رابطه ۸۸ فصل دوم بعنوان یک مسئله مقدار مرزی از نوع ترکیبی، که تابع  $T$  مورد جستجو و مشتق آن  $\partial T / \partial H$  را دربر می گیرد، و هر دوی این موارد به سطح ژئوئید ارجاع می شوند.

$$\nabla^2 T(\bar{r}_A) = 0$$

بطور واضح، **مقادیر مرزی  $\Delta g$**  می تواند از روی مقادیر مشاهده شده  **$g$  و  $H$**  از روی یکسری اعمال ساده تعیین شود، و میتواند بعنوان کمیت های مشاهده پذیر بررسی شود. در **ادبیات ژئودزی**، این مسئله اغلب بعنوان **مسئله مقدار مرزی ژئودتیک** شناخته می شود. جواب مسئله مقدار مرزی ژئودتیک اغلب بصورت **سری هارمونیک بیضوی**، رابطه ۶۲ فصل دوم، به شکل زیر دنبال می شود:

$$T(u_A, \Theta_A, \lambda_A) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n q_{nm}(u_A) [A_{nm}(T) \cos m\lambda_A + B_{nm}(T) \sin m\lambda_A] P_{nm}(\cos \Theta_A) \quad (2)$$

با **گسترش مقدار مرزی  $\Delta g$**  در نظر گرفته شده، با فرض اینکه فعلاً بر روی بیضوی باشند، به سری هارمونیک بیضوی، بدست می آوریم:

$$\Delta g(\Theta_A, \lambda_A) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n [A_{nm}(\Delta g) \cos m\lambda_A + B_{nm}(\Delta g) \sin m\lambda_A] P_{nm}(\cos \Theta_A) \quad (3)$$

که ضرائب بصورت زیر ارائه می شوند (با توجه به روابط ۳۸ و ۴۷ فصل دوم):

$$\begin{Bmatrix} A_{nm}(\Delta g) \\ B_{nm}(\Delta g) \end{Bmatrix} = \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{2n+1}{2\pi} \iint_{\mathcal{E}} \Delta g(\Theta, \lambda) \begin{Bmatrix} \cos m\lambda \\ \sin m\lambda \end{Bmatrix} P_{nm}(\cos \Theta) d\nu \quad (4)$$

توجه شود که در رابطه قبل برای  $m=0$ ، بجای  $2\pi$  باید  $4\pi$  را جایگزین کنیم، و انتگرال گیری بر روی بیضوی  $\mathcal{E}$  انجام می شود. بر روی این بیضوی، توابع شعاعی  $q_{nm}(u)$  برابر یک هستند. بغیر از مقادیر مربوط به ضرائب، سری (۲) بر روی بیضوی با سری (۳) یکسان می شود. برای ایجاد رابطه بین دو مجموعه ضرائب (بطوریکه جواب مسئله مقدار مرزی ژئودتیک می تواند بر حسب مقدار مرزی  $\Delta g$  ارائه شود)، معادلات (۲) و (۳) در (۱) جاگذاری می شوند. بدست می آوریم:

$$\begin{Bmatrix} A_{nm}(\Delta g) \\ D_{nm}(\Delta g) \end{Bmatrix} = -\frac{2}{R} \begin{Bmatrix} A_{nm}(T) \\ B_{nm}(T) \end{Bmatrix} - \frac{\partial q_{nm}(u)}{\partial H} \begin{Bmatrix} A_{nm}(T) \\ B_{nm}(T) \end{Bmatrix}, \quad (5)$$

$$n=0, \dots, \infty; m=0, \dots, n$$

دوباره، با دقت از مرتبه فشردگی، مشتق جمله شعاعی بیضوی با مشتق جمله شعاعی کروی برابر است، یعنی داریم:

$$\frac{\partial q_{nm}(u)}{\partial H} \doteq \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{a}{r} \right)^{n+1} = - \left( \frac{a}{r} \right)^{n+1} \frac{(n+1)}{r} \quad (6)$$

و بطور خاص برای روی بیضوی یا روی ژئوئید بدست می آوریم:

$$\frac{\partial q_{nm}(u)}{\partial H} \doteq - \frac{n+1}{R} \quad (7)$$

بنابراین روابطه مورد علاقه بین دو مجموعه ضرائب بطور تقریبی به شرح زیر است :

$$\begin{Bmatrix} A_{nm}(T) \\ B_{nm}(T) \end{Bmatrix} \doteq \frac{R}{n-1} \begin{Bmatrix} A_{nm}(\Delta g) \\ B_{nm}(\Delta g) \end{Bmatrix} \quad (8)$$

بطور واضح، برای  $n=1$  رابطه (۷) تعریف نشده است. اگر یک بیضوی مقایسه ژئوسنتریک بطور دقیق توجیه شده در نظر گرفته شود، در این حالت ضرائب مربوط به  $n=1$ ، یعنی  $A_1(T)$ ،  $A_{1,1}(T)$ ،  $B_1(T)$ ،  $B_{1,1}(T)$  همگی در هر شرایطی صفر می شوند (از روی مطالب قسمت دوم فصل دوم این نتیجه گیری تأیید می شود). بنابراین، برای این بیضوی ژئوسنتریک، می توانیم بصورت زیر بنویسیم :

$$T(\Theta_A, \lambda_A) = -RA_0(\Delta g) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{R}{n-1} \sum_{m=0}^n [A_{nm}(\Delta g) \cos m\lambda_A + B_{nm}(\Delta g) \sin m\lambda_A] P_{nm}(\cos \Theta_A), \quad (9)$$

که با دقت از مرتبه فشردگی، جمله  $\cos \Theta_A$  می تواند با  $\sin \phi_A$  جایگزین شود. جمله مرتبه صفر :

$$T_0 = -RA_0(\Delta g) = -\frac{R}{4\pi} \iint_{\mathcal{S}} \Delta g d\nu = -R\Delta g_0 \quad (10)$$

یک خطای ثابت در  $T$  بخاطر برآورد نادقیق جرم کل  $M^N$  بیضوی مقایسه مورد نیاز در میدان نرمال است.

کمیت  $\Delta g_0$  بیانگر میانگین جهانی آنامولی های ثقل است. این میانگین جهانی می تواند برای ارزیابی درستی مقدار جرم زمین استفاده شود. با ترکیب رابطه (۱۰) و رابطه ۹۳ فصل دوم، بدست می آوریم :

$$\Delta g_0 = \frac{G \delta M}{R^2} \quad (11)$$

با فرض  $\delta M = 0$  و استفاده از نماد رابطه ۹۰ فصل دوم، در نهایت می توانیم به شرح زیر بنویسیم :

$$T(\phi_A, \lambda_A) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{R}{n-1} \Delta g_n(\phi_A, \lambda_A). \quad (12)$$

همانطور که جواب نباید شامل هارمونیک های مرتبه اول شود، این هارمونیک ها گاهی هارمونیک های قدغن نامیده می شوند. این یک راه دیگر است برای گفتن اینکه جواب فقط برای یک بیضوی ژئوسنتریک بطور دقیق توجیه شده وجود دارد.

این جواب بصورت سری برای پتانسیل اعوجاج (برای یک بیضوی مقایسه ژئوسنتریک با جرمی برابر جرم زمین معتبر است) حال می تواند به یک فرم بسته تبدیل شود. برای انجام این مورد، انتگرال گیری سطحی را ( در معادلات مربوط به ضرائب  $A_{nm}(\Delta g), B_{nm}(\Delta g)$  ) با جمع جابجا می کنیم، و به شرح زیر بدست می آوریم :

$$\begin{aligned}
T(\phi_A, \lambda_A) &\doteq \frac{R}{4\pi} \iint_{\mathcal{E}} \Delta g(\phi, \lambda) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{k(2n+1)}{n-1} \\
&\times \sum_{m=0}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} (\cos m\lambda_A \cos m\lambda + \sin m\lambda_A \sin m\lambda) \quad (13) \\
&\times P_{nm}(\sin \phi_A) P_{nm}(\sin \phi) d\nu, \quad k = \begin{cases} 1 & \text{for } m = 0 \\ 2 & \text{for } m > 0, \end{cases}
\end{aligned}$$

که انتگرال گیری نسبت به آرگومان های  $\phi, \lambda$  بر روی بیضوی  $\mathcal{E}$  انجام می شود. با استفاده از رابطه ۵۱ فصل دوم (فرمول تجزیه لژاندر)، بدست می آوریم:

$$T(\phi_A, \lambda_A) \doteq \frac{R}{4\pi} \iint_{\mathcal{E}} \Delta g(\phi, \lambda) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos \psi) d\nu \quad (14)$$

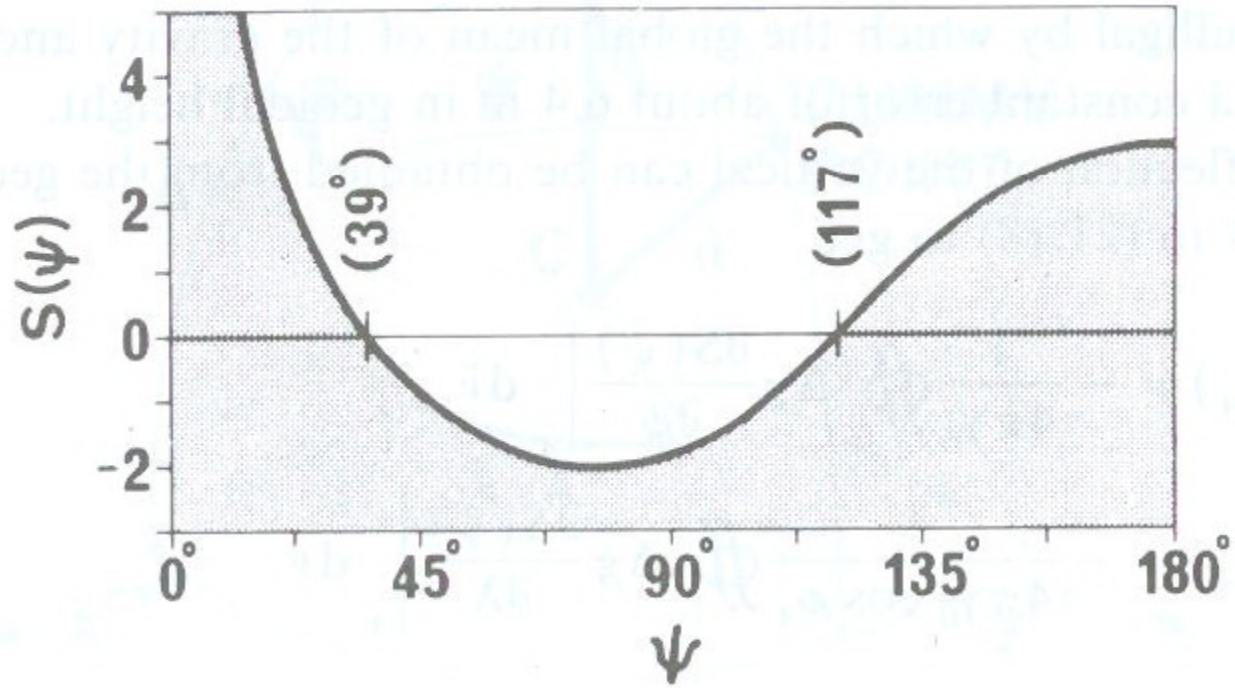
که  $\psi$  فاصله زاویه ای بین  $(\phi, \lambda)$  و  $(\phi_A, \lambda_A)$  است.

در (۱۴)، سری مورد نظر فقط تابعی از  $\psi$  است. یک فرم بسته از این سری بصورت زیر است:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos \psi) = S(\psi) = 1 + \frac{1}{\sin \frac{1}{2}\psi} - 6 \sin \frac{1}{2}\psi - 5 \cos \psi - 3 \cos \psi \ln(\sin \frac{1}{2}\psi + \sin^2 \frac{1}{2}\psi) \quad (15)$$

تابع استوکس





شکل ۳.۱. تابع استوکس

این تابع بصورت **تابع استوکس** شناخته می شود، و نمودار آن در شکل ۱ نمایش داده شده است. با جاگذاری این تابع در رابطه (۱۴)، در نهایت جواب بصورت بسته برای مسئله مقدار مرزی در نظر گرفته شده به شکل زیر بدست می آید :

### انتگرال استوکس

$$T(\phi_A, \lambda_A) \doteq \frac{R}{4\pi} \iint_{\mathcal{E}} \Delta g(\phi, \lambda) S(\psi(\phi_A, \lambda_A, \phi, \lambda)) d\nu, \quad (16)$$

که **انتگرال استوکس** نامیده می شود. از نقطه نظر جواب مسئله مقدار مرزی، **تابع استوکس** بطور ساده **یک تابع گرین** است. این تابع همچنین می تواند بصورت یک کرنل انتگرال گیری در نظر گرفته شود. بنابراین **انتگرال استوکس** یک جواب از نوع **گرین** برای مسئله مقدار مرزی ژئودتیک است.

**تابع استوکس** یک **کرنل هموزن** (ناوابسته به موقعیت دو نقطه) و **ایزوتروپیک** (ناوابسته به امتداد دو نقطه) است.

پتانسیل اعوجاج در رابطه ۱۶ می تواند از طریق **فرمول برنز**، رابطه ۴ فصل اول، به ارتفاع ژئوئید تبدیل شود :

$$N(\phi_A, \lambda_A) \doteq \frac{R}{4\pi\gamma_0} \iint_{\mathcal{E}} \Delta g(\phi, \lambda) S(\psi) d\nu, \quad (17)$$

**فرمول استوکس**

این رابطه بعنوان **فرمول استوکس** شناخته می شود، و **مهمترین فرمول در این فصل** است. اگر بیضوی مقایسه ژئوسنتریک دارای **اختلاف جرم با زمین** به میزان  $\delta M$  باشد، در این صورت ارتفاع های ژئوئید بصورت زیر می شوند :

$$\begin{aligned}
 N + N_0 &= -\frac{G\delta M}{R\gamma_0} + \frac{R}{4\pi\gamma_0} \iint_{\mathcal{E}} \Delta g S(\psi) d\nu \\
 &= -\frac{R\Delta g_0}{\gamma_0} + \frac{R}{4\pi\gamma_0} \iint_{\mathcal{E}} \Delta g S(\psi) d\nu.
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

**انحراف قائم ژئوئیدی** می تواند از روی ارتفاع ژئوئید با جاگذاری برای  $N$  در **رابطه ۱۸ فصل اول** بصورت زیر حاصل شود :

$$\begin{aligned}
 \xi(\phi_A, \lambda_A) &= -\frac{1}{4\pi\gamma_0} \iint_{\mathcal{E}} \Delta g \frac{\partial S(\psi)}{\partial \phi} \Big|_A d\nu, \\
 \eta(\phi_A, \lambda_A) &= -\frac{1}{4\pi\gamma_0 \cos \phi_A} \iint_{\mathcal{E}} \Delta g \frac{\partial S(\psi)}{\partial \lambda} \Big|_A d\nu
 \end{aligned}
 \tag{19}$$

مشتق های رابطه اخیر از روی قاعده زنجیره ای برآورد شوند، که وابستگی غیر صریح  $\psi$  به  $\phi$  و  $\lambda$  بوسیله رابطه (۵۰) فصل قبل داده شده است (بعد از جاگذاری  $\theta$  با  $(\pi/2 - \phi)$ ). بدست می آوریم:

$$\left. \frac{\partial S(\psi)}{\partial \phi} \right|_A \doteq \frac{\cos \phi_A \sin \phi - \sin \phi_A \cos \phi \cos(\lambda - \lambda_A)}{-\sin \psi} \frac{dS}{d\psi} \quad (20)$$

$$\left. \frac{\partial S(\psi)}{\partial \lambda} \right|_A \doteq \frac{-\cos \phi_A \cos \phi \sin(\lambda - \lambda_A)}{-\sin \psi} \frac{dS}{d\psi}$$

از طرف دیگر، با دوران  $\bar{u}_p$  به  $\bar{u}$  (شکل ۲)، بصورت زیر حاصل می شود:

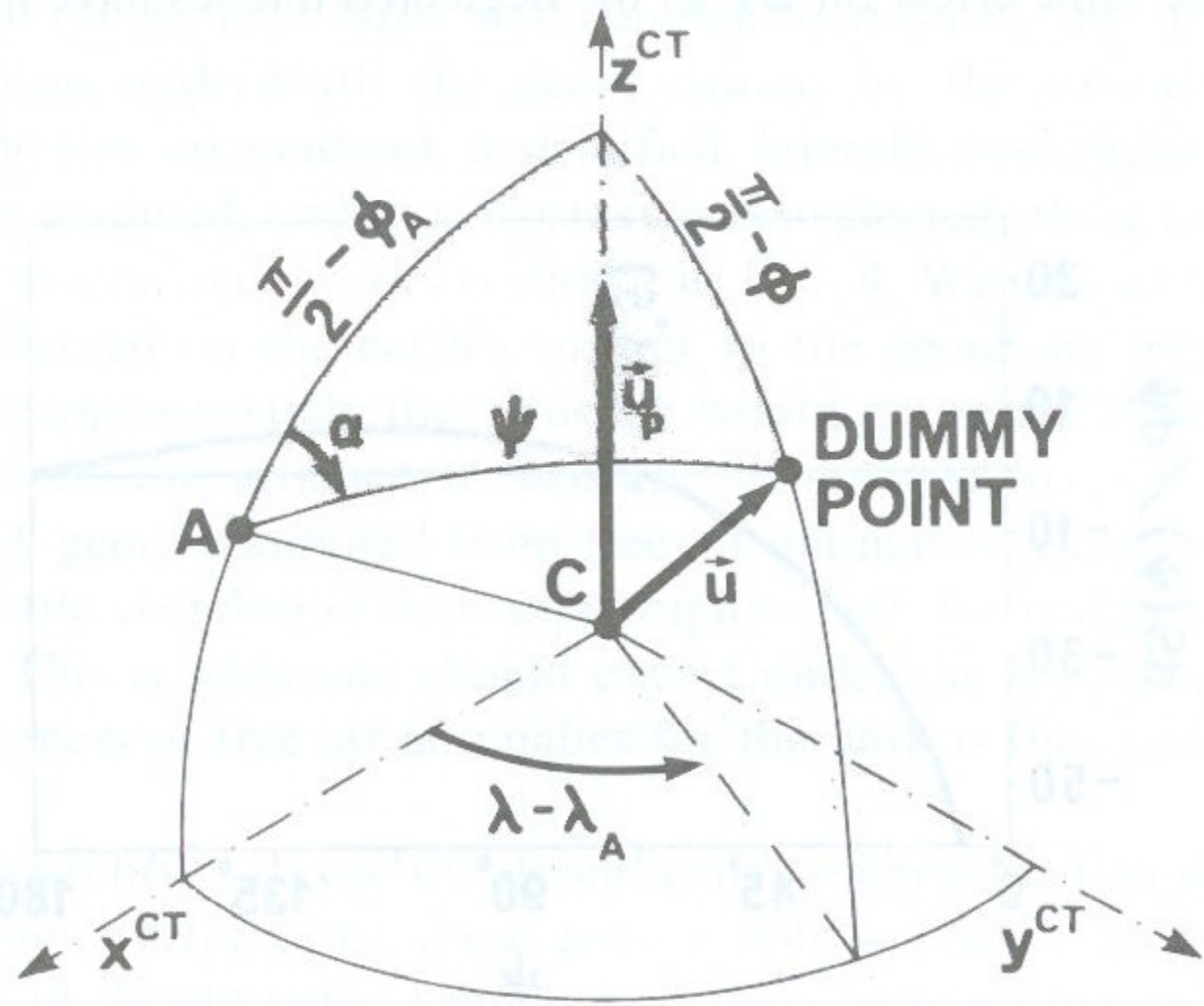
$$\bar{u} = \mathbf{R}_2(\phi_A) \mathbf{R}_1(-\alpha) \mathbf{R}_2\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) \bar{u}_p \quad (21)$$

مولفه دوّم نتیجه می دهد:

$$\sin \psi \sin \alpha = -\cos \phi \sin(\lambda - \lambda_A) \quad (22)$$

با ضرب مولفه اوّل در  $\sin \phi_A$ ، مولفه سوّم در  $-\cos \phi_A$ ، و جمع آنها با هم، بدست می آوریم:

$$\sin \psi \cos \alpha = \cos \phi_A \sin \phi - \sin \phi_A \cos \phi \cos(\lambda - \lambda_A) \quad (23)$$



شکل ۳.۲. مثلث کروی

و با در نظر گرفتن روابط قبلی، در نهایت نتیجه زیر بدست می آید :

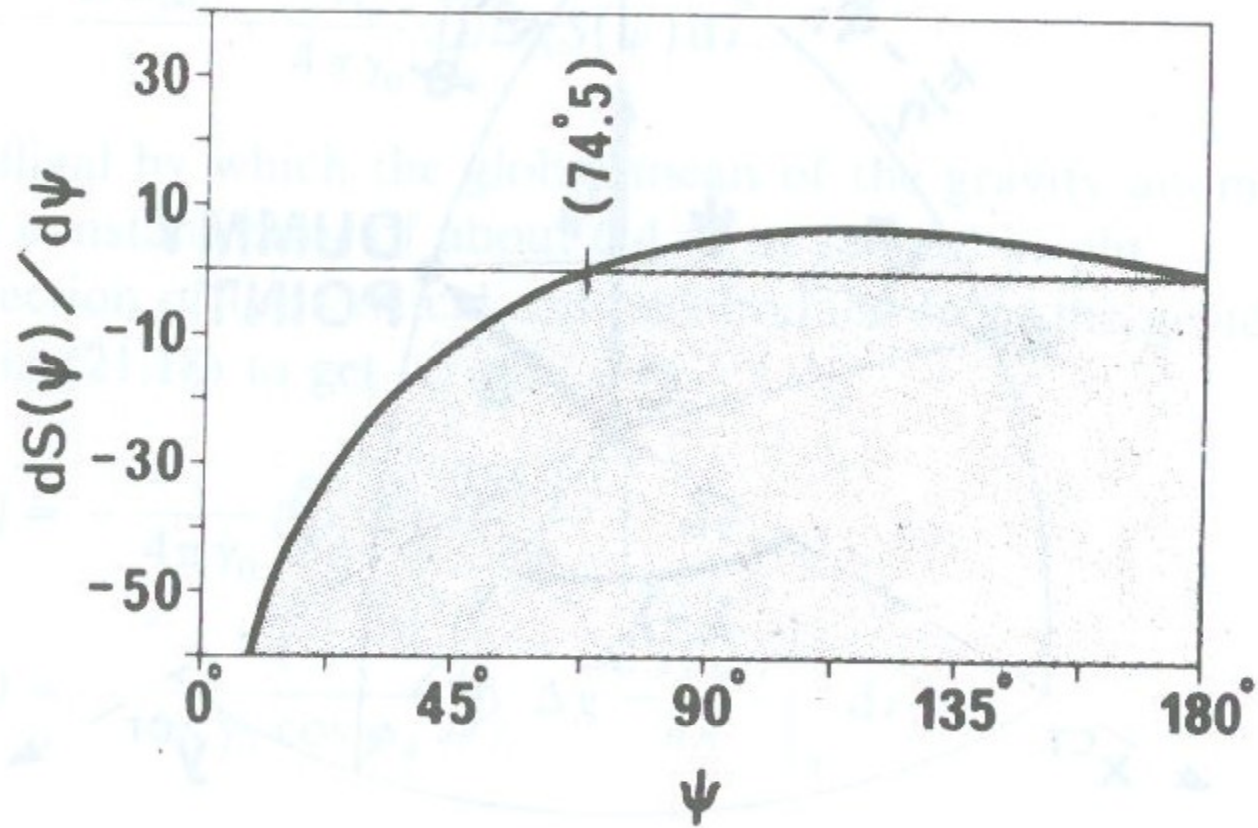
$$\left\{ \begin{array}{l} \xi(\phi_A, \lambda_A) \\ \eta(\phi_A, \lambda_A) \end{array} \right\} = \frac{1}{4\pi\gamma_0} \iint_{\mathcal{E}} \Delta g(\phi, \lambda) \left\{ \begin{array}{l} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{array} \right\} \frac{dS(\psi)}{d\psi} d\nu. \quad (24)$$

این معادلات بعنوان فرمول های وینگ - مینیز شناخته می شوند.

مشتق تابع استوکس یک کرنل است ( ایزوتروپیک نیست، وابسته به امتداد بین دو نقطه)، و بصورت تابع وینگ مینیز شناخته می شود، و به فرم بسته به شکل زیر نوشته می شود :

$$\begin{aligned} \frac{dS(\psi)}{d\psi} = & -\frac{\cos \psi}{2 \sin^2 \frac{1}{2}\psi} + 8 \sin \psi - 6 \cos \frac{1}{2}\psi \\ & - 3 \frac{1 - \sin \frac{1}{2}\psi}{\sin \psi} + 3 \sin \psi \ln(\sin \frac{1}{2}\psi + \sin^2 \frac{1}{2}\psi) \end{aligned} \quad (25)$$

نمودار تابع وینگ مینیز در شکل ۳ نمایش داده شده است. واضح است که خطای ثابت  $T_0$  تاثیری بر مولفه های زاویه انحراف قائم ندارد.



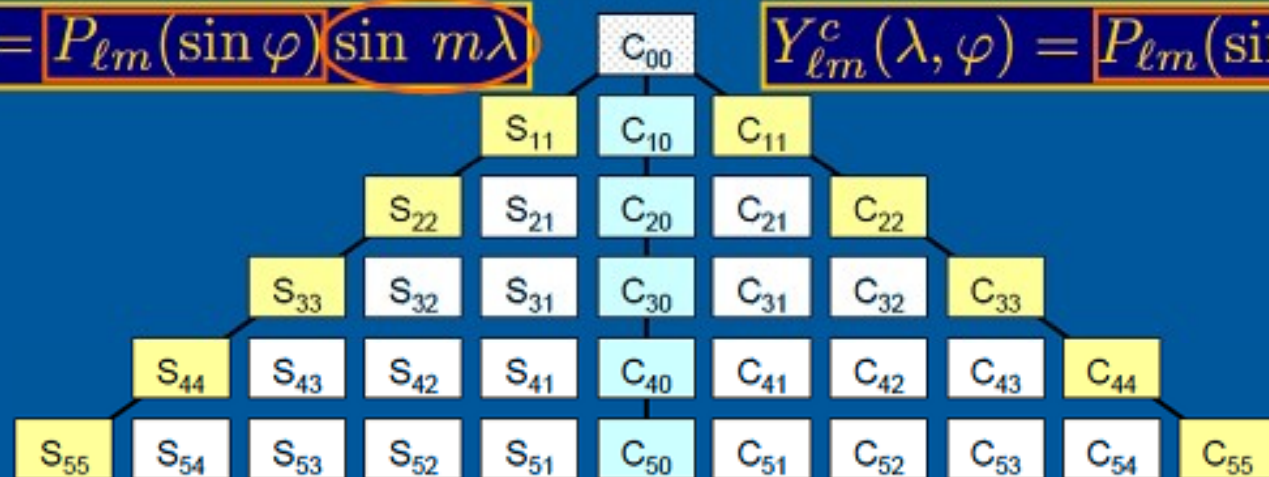
شکل ۳.۳. تابع ونینگ - مینیز

# Mathematical Representation

$$W_a(r, \lambda, \varphi) = \frac{GM}{r} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{\ell} \sum_{m=0}^{\ell} [C_{\ell m} Y_{\ell m}^c(\lambda, \varphi) + S_{\ell m} Y_{\ell m}^s(\lambda, \varphi)]$$

$$Y_{\ell m}^s(\lambda, \varphi) = P_{\ell m}(\sin \varphi) \sin m\lambda$$

$$Y_{\ell m}^c(\lambda, \varphi) = P_{\ell m}(\sin \varphi) \cos m\lambda$$



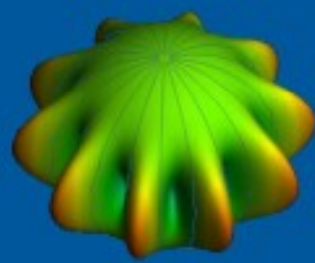
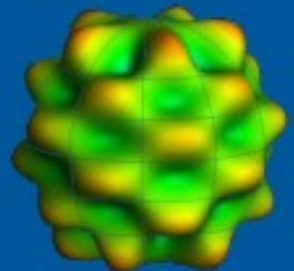
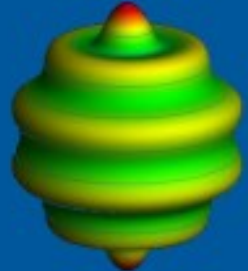
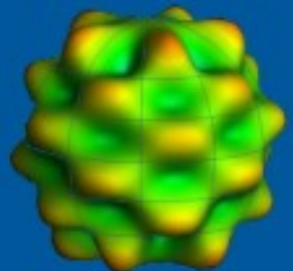
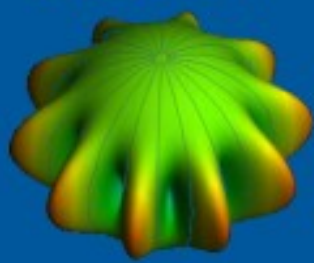
sectorial

tesseral

zonal

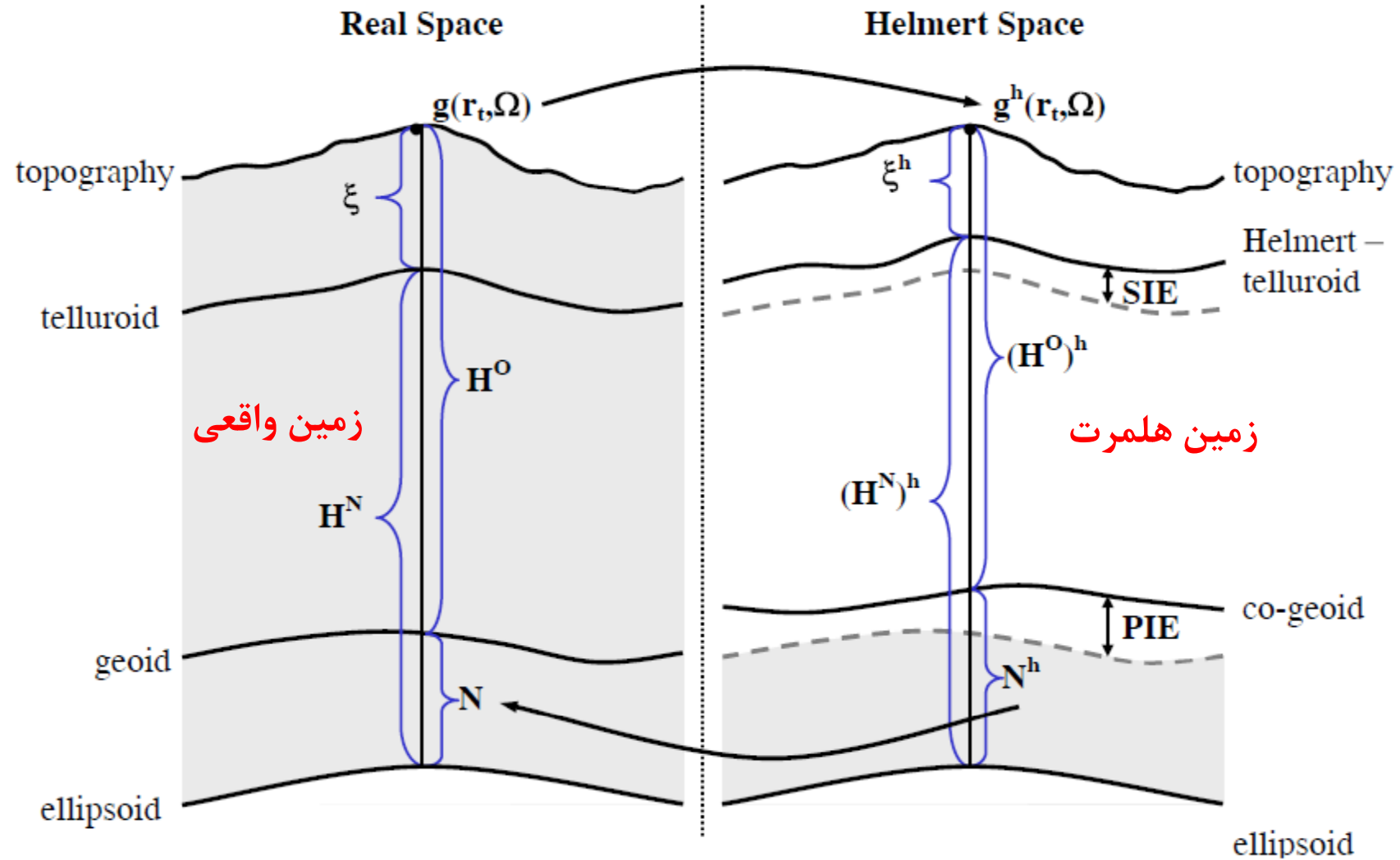
tesseral

sectorial





# کمیت های مختلف در فضاها واقعی و هلمرت



(ایجاد فضای هارمونیک در بالای مرز ژئوئید به کمک زمین هلمرت)

برای هارمونیک ساختن فضای بالای مرز، یعنی خارج از سطح ژئوئید، به دو روش عمل می کنیم :

۱- تمامی اجرام توپوگرافی بالای سطح ژئوئید و همچنین جرم اتمسفر را بصورت محاسباتی فشرده می کنیم، بطوریکه یک لایه سطحی خیلی چگال و ثقیل ایجاد می شود. این لایه سطحی چگال با ضخامت خیلی جزئی هم وزن کلیه اجرام توگرافی و اتمسفر متراکم شده به شرح فوق الذکر است. لایه سطحی متراکم شده را بطور محاسباتی بر روی سطح ژئوئید قرار می دهیم. با انجام این کار، کلیه پارامترهای میدان ثقل زمین تغییر می کنند و فضای هلمرت یا زمین هلمرت ایجاد می شود. بالای سطح ژئوئید در زمین هلمرت هیچ جرمی نیست، بنابراین فضای هارمونیک ایجاد شده است. روش فوق، بصورت روش دوّم متراکم سازی هلمرت نامیده می شود.

۲- روش حذف - محاسبه - ترمیم (با برداشت - محاسبه - برگشت): در این روش، اثر ثقلی کلیه اجرام بالای سطح مرز را بطور محاسباتی تعیین نموده و مشاهدات ثقل را از آن تصحیح می کنیم. در نتیجه، فضا هارمونیک شده، و محاسبات را برای تعیین پارامترهای میدان ثقل زمین، نظیر ارتفاع ژئوئید، انجام می دهیم، و بعد اثرات حذف شده را به نتایج بر می گردانیم.

$$\text{پتانسیل ثقل هلمرت} : W^h(r, \Omega) = W(r, \Omega) - \delta V^t(r, \Omega) - \delta V^a(r, \Omega)$$

$$\text{پتانسیل باقیمانده توپوگرافی} : \delta V^t(r, \Omega) = V^t(r, \Omega) - V^c(r, \Omega)$$

$$\text{پتانسیل باقیمانده اتمسفر} : \delta V^a(r, \Omega) = V^a(r, \Omega) - V^{ca}(r, \Omega)$$

$$\text{پتانسیل اعوجاج هلمرت} : T^h(r, \Omega) = W^h(r, \Omega) - U(r, \Omega) = T(r, \Omega) - \delta V^t(r, \Omega) - \delta V^a(r, \Omega)$$

معادله لاپلاس برای

پتانسیل اعوجاج هلمرت

$$\nabla^2 T^h(r, \Omega) = 0$$

$$r \geq r_g$$

اثر مستقیم اتمسفر **DAE** اثر مستقیم توپوگرافی **DTE** شتاب ثقل هلمرت

$$g^h(r_t, \Omega) = g(r_t, \Omega) + \delta A^t(r_t, \Omega) + \delta A^a(r_t, \Omega)$$

**DTE**

$$\delta A^t(r_t, \Omega) = \frac{\partial \delta V^t(r_t, \Omega)}{\partial r} = \frac{\partial V^t(r_t, \Omega)}{\partial r} - \frac{\partial V^c(r_t, \Omega)}{\partial r} = A^t(r_t, \Omega) - A^c(r_t, \Omega),$$

**DAE**

$$\delta A^a(r_t, \Omega) = \frac{\partial \delta V^a(r_t, \Omega)}{\partial r} = \frac{\partial V^a(r_t, \Omega)}{\partial r} - \frac{\partial V^{ca}(r_t, \Omega)}{\partial r} = A^a(r_t, \Omega) - A^{ca}(r_t, \Omega)$$

نوسان جاذبه

$$\delta g^h(r_t, \Omega) = -\frac{\partial T^h(r_t, \Omega)}{\partial r} + \varepsilon_{\delta g}(r_t, \Omega) = g(r_t, \Omega) - \gamma(r_t, \Omega) + \varepsilon_{\delta g}(r_t, \Omega) + \delta A^t(r_t, \Omega) + \delta A^a(r_t, \Omega)$$

آناملوی ثقل هلمرت

اصحیح بیضوی برای نوسان جاذبه

اصحیح بیضوی برای تقریب کروی

$$\Delta g^h(r_t, \Omega) = \Delta g^{FA}(r_t, \Omega) + \delta A^t(r_t, \Omega) + \delta A^a(r_t, \Omega) + \varepsilon_{\delta g}(r_t, \Omega) + \frac{2}{r_t} \delta V^t(r_t, \Omega) + \frac{2}{r_t} \delta V^a(r_t, \Omega) - \varepsilon_n(r_t, \Omega)$$

**DTE**

**DAE**

**SITE**

**SIAE**

اثر غیرمستقیم ثانویه توپوگرافی (بر روی شتاب جاذبه)

secondary indirect topographic effect

اثر غیرمستقیم ثانویه اتمسفر (بر روی شتاب جاذبه)

## مسئله مقدار مرزی استوکس در فضای ثقل هلمرت

$$N^H(\Omega) = \frac{R}{4\pi\gamma_o(\phi)} \iint_{\Omega' \in \Omega_o} \Delta g^H(R, \Omega') S(\psi(\Omega, \Omega')) d\Omega'$$

$$S(\psi(\Omega, \Omega')) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos\psi(\Omega, \Omega')) = 1 + \operatorname{cosec} \frac{\psi(\Omega, \Omega')}{2} - 6 \sin \frac{\psi(\Omega, \Omega')}{2} - 5 \cos\psi(\Omega, \Omega') - 3 \cos\psi(\Omega, \Omega') \ln \left( \sin \frac{\psi(\Omega, \Omega')}{2} + \sin^2 \frac{\psi(\Omega, \Omega')}{2} \right)$$

پس از محاسبه ارتفاع کو ژئوئید (ژئوئید در فضای هلمرت)، بوسیله اثرهای غیرمستقیم توپوگرافی و اتمسفر، آنرا تبدیل به ارتفاع ژئوئید می کنیم. بشرح زیر:

$$N(\Omega) = \frac{T(R, \Omega)}{\gamma_o(\phi)}, \quad \text{فرمول برنز:}$$

$$N^H(\Omega) = \frac{T^H(R, \Omega)}{\gamma_o(\phi)} = \frac{T(R, \Omega) - \delta V^t(R, \Omega) - \delta V^a(R, \Omega)}{\gamma_o(\phi)} \quad \text{فرمول برنز در فضای هلمرت:}$$

$$\delta N(\Omega) = N(\Omega) - N^H(\Omega) = \frac{T(R, \Omega)}{\gamma_o(\phi)} - \frac{T^H(R, \Omega)}{\gamma_o(\phi)} = \frac{\delta V^t(R, \Omega)}{\gamma_o(\phi)} + \frac{\delta V^a(R, \Omega)}{\gamma_o(\phi)}$$

**PITE**      **PIAE**

اثر غیرمستقیم اولیه توپوگرافی (بر روی ارتفاع ژئوئید)

primary indirect topographical effect

اثر غیرمستقیم اولیه اتمسفر (بر روی ارتفاع ژئوئید)

## ۵- تعیین میدان ثقل زمین از روی انحرافات قائم و از روی داده های متفاوت

- راه حل هندسی برای تعیین ژئوئید
- تبدیل پارامترهای میدان ثقل زمین
- متراکم سازی و پالایش انحرافات قائم
- پاسخ هائی برای ژئوئید از روی داده های متفاوت

**زاویه انحراف قائم** یکی از پارامترهای پر اهمیت میدان ثقل زمین است. بنا به تعریف، زاویه فضائی بین راستای بردار شتاب ثقل واقعی و راستای بردار شتاب ثقل نرمال، زاویه انحراف قائم نامیده می شود. به دلیل اینکه بردار نخست بر همه سطوح هم پتانسیل از جمله ژئوئید عمود است، و همچنین بردار دوم بر سطح بیضوی عمود می باشد، در حقیقت زاویه انحراف قائم بیانگر بیشترین شیب سطح ژئوئید نسبت به سطح بیضوی در هر نقطه دلخواه است. اگر بیضوی مورد استفاده ژئوسنتریک باشد، زاویه انحراف قائم مطلق، و اگر ژئوسنتریک نباشد، زاویه انحراف قائم نسبی خواهیم داشت. همچنین، اگر زاویه بین دو راستای شتاب ثقل واقعی و شتاب ثقل نرمال در سطح زمین تعریف شود، زاویه انحراف قائم سطحی، و اگر زاویه بین این دو بردار در سطح ژئوئید در نظر گرفته شود، زاویه انحراف قائم ژئوئیدی خواهیم داشت. زاویه انحراف قائم ژئوئیدی در روش استوکس، و زاویه انحراف قائم سطحی در روش مالدنسکی برای مدلسازی میدان ثقل زمین استفاده می شوند. بطور روشن، مقادیر زاویه های انحراف قائم ژئوئیدی و سطحی در یک نقطه واحد متفاوت هستند، به خاطر اینکه راستای شاقولی بین سطح فیزیکی زمین و سطح ژئوئید دارای انحنا و تاب می باشد، و خط شاقولی بصورت یک منحنی سه بعدی و فضائی در می آید. این اختلاف، طبق تجربه های اجرائی مختلف، در مناطق کوهستانی شدید به مقادیر بزرگ از جنس ۱۲ ثانیه کمائی هم می رسد. بخاطر اینکه زاویه انحراف قائم یک زاویه فضائی یعنی سه بعدی است، مرسوم است که به دو مولفه عمود بر هم تجزیه شود، و حاصل بصورت مولفه های زاویه انحراف قائم خوانده می شوند. این مولفه ها از تصویر کردن زاویه انحراف قائم در دو صفحه نصف النهاری و مقطع قائم اولیه حاصل می شوند و به ترتیب مولفه های نصف النهاری و مقطع قائم اولیه نامیده می شوند. علامت های هر دو مولفه، بصورت مرسوم مثبت در نظر گرفته می شوند اگر راستای بردار شتاب ثقل واقعی در سمت شمال و در سمت شرق راستای بردار شتاب ثقل نرمال قرار گیرند، در غیر اینصورت علامت آنها منفی می شوند. این قرار داد برای هر دو نیمکره شمالی و جنوبی زمین رعایت می شود. بنابراین، مولفه نصف النهاری انحراف قائم، بیانگر شیب ژئوئید نسبت به بیضوی در راستای شمالی- جنوبی، و مولفه مقطع قائم اولیه زاویه انحراف قائم، نشان دهنده شیب ژئوئید نسبت به بیضوی در راستای شرقی- غربی است. اگر شیب های ژئوئید به سمت های شمال و شرق کاهش پیدا کنند، مولفه های زاویه های انحراف قائم دارای علامت مثبت می شوند، و اگر شیب ها افزایش پیدا کنند، علامت های مولفه ها منفی می شوند.

مقادیر زاویه های انحراف قائم را می توان به دو بخش تقسیم کرد: بخش نخست منعکس کننده آرایش دانسیته منطقه ای است، و بخش دوم منعکس کننده پیچیده گی توپوگرافی سطح زمین به همراه آنامولی های دانسیته نزدیک سطح زمین است. بخش نخست بطور معمول در مناطق دشت خودش را نشان می دهد، و بخش دوم در مناطق کوهستانی نمایان می شود. بیشترین مقادیر زاویه انحراف قائم در مناطق کوهستانی شدید تا حد یک دقیق کمائی هم بدست آمده است.

کاربردهای مختلف و پر اهمیتی برای مولفه های زاویه انحراف قائم در حیطه های متفاوت در علوم مختلف زمین وجود دارد. این مقادیر، در محاسبات شبکه های ملی ژئودزی هندسی برای انتقال مشاهدات آزیموت و زاویه به روی سطح بیضوی مورد نیاز است. همچنین مولفه های زاویه انحراف قائم در ژئودزی فیزیک با استفاده از تکنیک تراز یابی هلمرت برای محاسبه سطح ژئوئید مورد استفاده قرار می گیرند. در ژئوفیزیک، با استفاده از مولفه های زاویه انحراف قائم برای مقاصد اکتشاف معادن و منابع زیر زمینی بهره می برند. در مطالعات ژئودینامیکی، از این مولفه ها با اندازه گیری های مکرر برای تعیین تغییرات شیب سطوح هم پتانسیل استفاده می کنند. همچنین تعیین مکرر این انحراف های قائم، بطور مشخص در مولفه نصف النهاری، در هر نقطه دلخواه، میزان حرکت قطب و تغییرات آن را بدست می دهد که یکی از پر اهمیت ترین پدیده های ژئودینامیکی زمین است.

روش های مختلف برای تعیین و تولید مولفه های زاویه انحراف قائم ساخته شده اند. روش نجومی بصورت کلاسیک، بیش از یک قرن مورد استفاده قرار می گیرد، که با استفاده از یک دوربین زاویه یاب دقیق و انجام مشاهدات بر روی زوج ستاره های شرقی - غربی و شمالی - جنوبی، موقعیت نجومی نقاط مشاهده و محاسبه می شوند و در همین نقاط موقعیت ژئودتیکی نقاط نیز با استفاده از مشاهدات فاصله و زاویه بر اساس شبکه های مسطحاتی ژئودزی مشاهده و محاسبه می شوند، و در نهایت با استفاده از دو سری موقعیت نجومی و ژئودتیکی، مولفه های زاویه انحراف قائم قابل محاسبه هستند. این نقاط، نقاط لاپلاس نامیده می شوند. این روش، کند و پرهزینه است و برای انجام مشاهدات و ایجاد یک ایستگاه نجوم دقیق، نیاز به چندین هفته مشاهدات بر روی ستاره ها طی شب های متوالی است.

روش بدیل و مدرن برای روش فوق، که حدود پانزده سال است که تکمیل شده است، استفاده از یک دوربین رقومی زنیت است که از آسمان پُر ستاره بالای سر در شب، تصویر رقومی تهیه می کند و با استفاده از یک ساعت اتمی حاصل از یک گیرنده جی پی اس زمان دقیق تهیه تصویر ثبت می شود و همچنین یک کامپیوتر بصورت تمام اتوماتیک برای پردازش تصاویر پر ستاره بر اساس تکنیک های مختلف پردازش تصاویر استفاده می شود، و طی نیم ساعت، با استفاده از شصت تصویر و شامل چندین هزار ستاره ثبت شده، و نیز با بکارگیری موقعیت معلوم ستاره ها از روی کاتالوگ های موقعیت ستارگان، و تعیین موقعیت دقیق ژئودتیکی ایستگاه با جی پی اس، مولفه های زاویه انحراف قائم ایستگاه بطور دقیق با دقت ۰.۱ - ۰.۰۵ ثانیه کمائی تعیین می شوند. با توجه به اینکه زمان چندین هفته مورد نیاز در روش نجوم کلاسیک به نیم ساعت در روش نجوم مدرن کاهش یافته است و همچنین دقت بیشتری حاصل شده است، این روش تحول شگرفی را در حیطه مدلسازی میدان ثقل زمین و تعیین مولفه های زاویه انحراف قائم سبب شده، و طی سال های اخیر بصورت گسترده و روز افزون در سطح دنیا مورد استفاده و استقبال قرار گرفته است.

روش دیگر برای تعیین و تکثیر مولفه های زاویه های انحراف قائم، روش ثقل سنجی است. با توجه به اینکه داده های شتاب ثقل به مراتب خیلی بیشتر در دنیا طی چندین قرن اخیر گردآوری شده است، و از طرف دیگر، با توجه به اینکه برای بسیاری از کاربردهای مولفه های انحراف قائم، نیاز است که این مولفه ها بر روی یک شبکه متراکم و منظم تولید شوند، روش ثقل سنجی مناسب ترین روش برای تولید، تکثیر و پیش بینی مولفه های زاویه انحراف قائم است. به همین جهت، اساس و قلب بحث و محاسبات، بر روی این روش استوار است. با استفاده از آنامولی های جاذبه هوای آزاد و فرمول های انتگرال دوگانه وینینگ- مینیز، مولفه های زاویه انحراف قائم برای هر منطقه ای می تواند بر روی یک شبکه متراکم، مثلاً با تراکم، ۶ دقیقه در ۶ دقیقه، محاسبه شده و مورد تفسیر قرار بگیرند. برای این محاسبات، آنامولی های جاذبه هوای آزاد بعنوان ورودی فرمول های وینینگ- مینیز، تا شعاع حداقل ۳ درجه به شعاع نقطه محاسبه می تواند استفاده شود.

امروزه انبوه داده های ثقل به روش های مختلف، از جمله زمینی و ماهواره ای، از کل زمین تهیه می شوند. داده های ثقل ماهواره ای به فرم مدل های جهانی ژئوپتانسیل یا ثقل بصورت ضرائب هارمونیک های کروی و دقت این ضرائب شامل چهار ستون داده تا درجه و مرتبه مشخصی، ارائه می شوند. مزیت داده های ثقل ماهواره ای، دارای توزیع هموزن و یکنواخت برای کل زمین است. از روی این مدل ها می توان پارامترهای مختلف میدان ثقل زمین، نظیر ارتفاع ژئوئید و آنامولی هوای آزاد، را محاسبه کرد، که بطور مشخص برای محاسبه مولفه های انحراف قائم نیاز به آنامولی های جاذبه هوای آزاد بر روی یک شبکه منظم تا سه درجه بیرون از منطقه محاسبه است. در بررسی های مختلف، چندین مدل جهانی ژئوپتانسیل مختلف می تواند مورد ارزیابی قرار گیرد، که در نهایت نتایج مربوط به مدل EGM08، به خاطر اینکه دارای بیشترین جزئیات از میدان ثقل زمین است، و تا درجه و مرتبه ۲۱۶۰ و ۲۱۹۰ بصورت ضرائب هارمونیک های کروی را شامل می شود که معادل یک میزان تفکیک در حوزه فاصله در حدود ۱۰ کیلومتر در ۱۰ کیلومتر است، و اساساً مولفه های زاویه انحراف قائم به جزئیات خیلی وابسته اند، یکی از مناسب ترین مدل ها می تواند ارزیابی شود.

# تعیین میدان ثقل زمین از داده های انحراف قائم

در این فصل، یک مفهوم ساده هندسی از تعیین ارتفاع ژئوئید بر اساس مولفه های زاویه انحراف قائم ارائه می شود. مغایر با روش ثقل سنجی بررسی شده برای تعیین ژئوئید در مباحث قبلی که دارای یک خصوصیت جهانی است، روش هندسی مورد بررسی در اینجا برای تعیین ژئوئید دارای خصوصیت محلی یا منطقه ای است.

زاویه انحراف قائم، بیانگر بیشترین شیب ژئوئید نسبت به بیضوی مقایسه است، شکل ۱. زاویه انحراف قائم ژئوئیدی می تواند از روی زاویه انحراف قائم سطحی به همراه یک تصحیح مربوط به اثر انحنای راستای شاقولی واقعی بین سطح زمین و سطح ژئوئید حاصل شود. زاویه انحراف قائم سطحی، می تواند از روی دو نوع موقعیت (طول و عرض) نجومی و ژئودتیک در یک نقطه مشترک تعیین شود، و در اجرا اغلب بعنوان انحراف قائم نجومی، یا انحراف قائم نجوم - ژئودتیک نامیده می شود.

بطور واضح، اگر مختصات نجومی و ژئودتیک با هم مساوی باشند، شیب ژئوئید نسبت به بیضوی مقایسه برابر صفر است، و ژئوئید در آن نقطه موازی سطح بیضوی مقایسه است.

به دلیل اینکه در خیلی از مواقع بیضوی های مقایسه برای تعیین موقعیت ژئودتیکی، ژئوسنتریک نیستند، ژئوئید محاسبه شده مبتنی بر مولفه های زاویه قائم نیز به یک بیضوی غیر ژئوسنتریک در این مواقع ارجاع می شود. همچنین، به دلیل اینکه ارتباط بین مولفه های زاویه انحراف قائم و ارتفاع ژئوئید کاملاً محلی است، اطلاعات زاویه انحراف قائم فقط در منطقه مورد علاقه برای تعیین ژئوئید در آن منطقه مورد نیاز است.



فقط اختلاف ارتفاع ژئوئید بین دو نقطه می تواند از روی مولفه های زاویه انحراف قائم تعیین شود. رابطه بین شیب ژئوئید  $\epsilon$  در هر امتداد دلخواه  $\alpha$  با تغییر جزئی ارتفاع ژئوئید  $dN$  ، بطور ساده شکل تعمیم یافته رابطه ۱۸ فصل اول است. با یکسان در نظر گرفتن علامت قرار دادی برای  $\xi$  و  $\eta$  ، می توانیم بنویسیم :

$$\epsilon = -\frac{dN}{dS}$$

ارتباط بین  $\epsilon$  و مولفه های زاویه انحراف قائم در شکل ۲ ارائه شده اند. حال فرض می کنیم که مولفه های زاویه انحراف قائم در طول یک منحنی بر روی ژئوئید معلوم اند. بنابراین اختلاف ارتفاع ژئوئید بین دو نقطه انتهائی  $A$  و  $B$  از منحنی ذکر شده می تواند به شرح زیر برآورد شود :

$$N_B - N_A = \int_A^B dN = - \int_A^B \epsilon dS = - \int_A^B (\xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha) dS$$

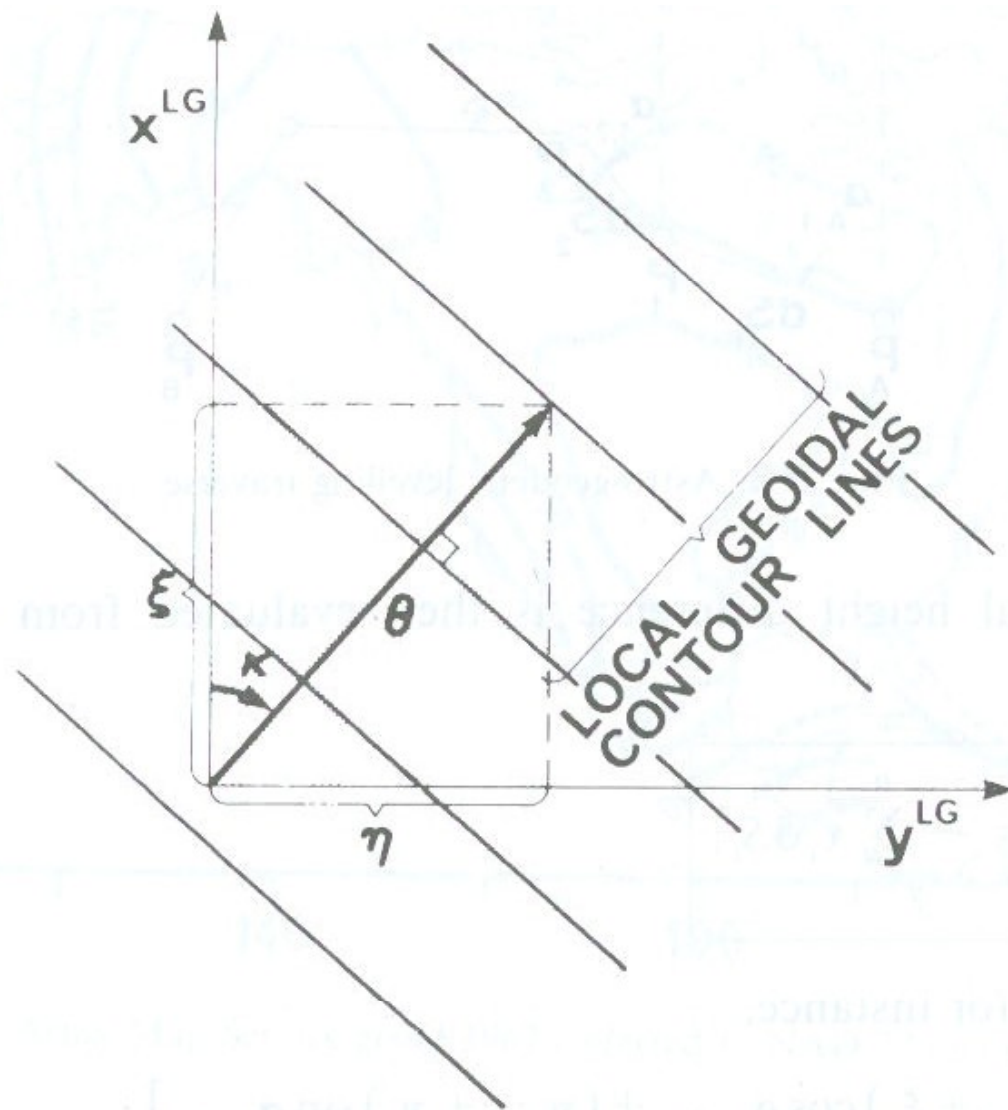
در عمل و اجراء، مولفه های زاویه انحراف قائم فقط بر روی تعداد مشخصی از نقاط کنترل ژئودتیک، بعنوان نقاط انحراف قائم، معلوم اند، و بهترین کار قابل انجام این است که نقاط انتهائی منحنی فوق را بوسیله یک پیمایش دربر گیرنده نقاط انحراف قائم ذکر شده به هم ربط دهیم، نظیر شکل ۳. اختلاف ارتفاع ژئوئید، بنابراین، از روی فرمول تقریبی زیر ارزیابی می شود : ترازیابی نجوم - ژئودتیک

یا  
ترازیابی هلمرت

$$N_B - N_A \doteq - \sum_{i=1}^n \epsilon_i dS_i,$$

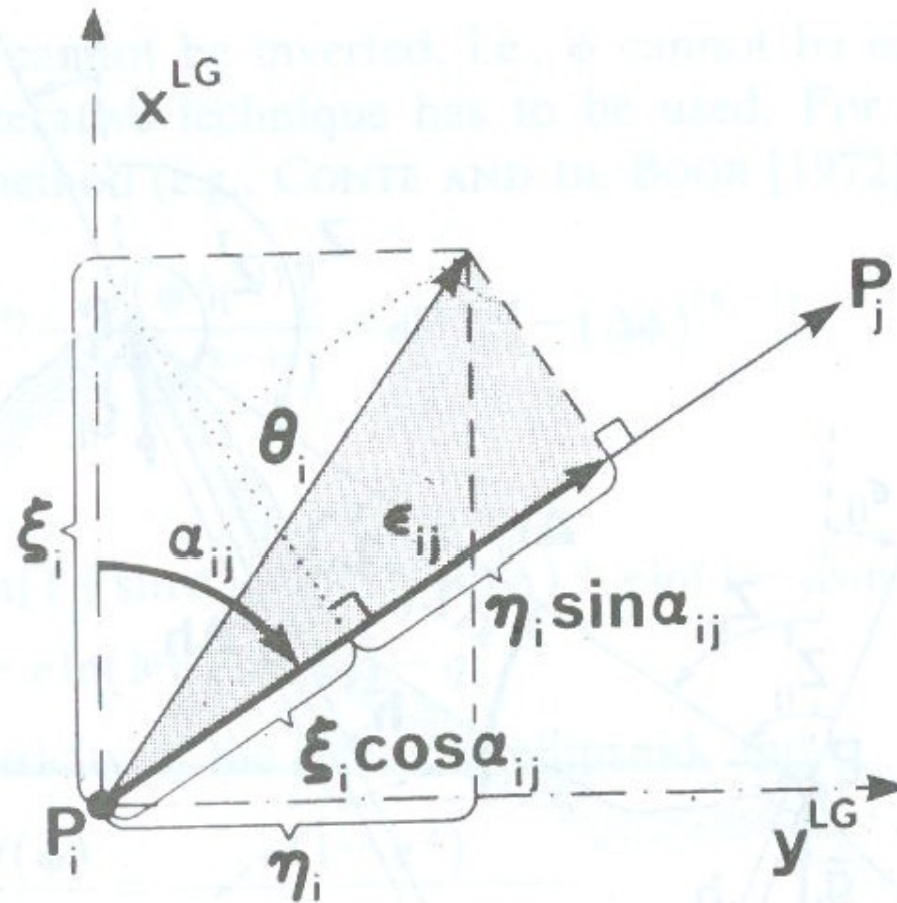
که در رابطه روبرو، شیب ژئوئید بصورت زیر است :

$$\epsilon_i = \frac{1}{2} [(\xi_{i-1} + \xi_i) \cos \alpha_{i-1,i} + (\eta_{i-1} + \eta_i) \sin \alpha_{i-1,i}]$$

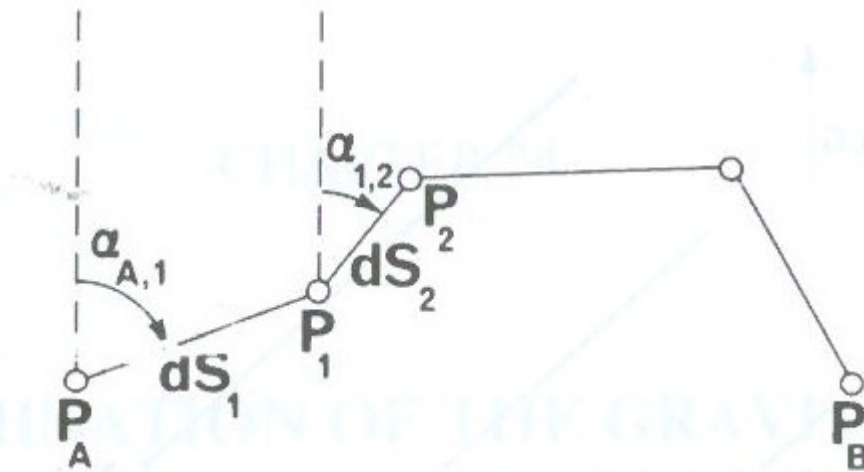


شکل ۱. مولفه های زاویه انحراف قائم و شیب ژئوئید

$$\epsilon_{ij} = \xi_i \cos \alpha_{ij} + \eta_i \sin \alpha_{ij},$$



شکل ۲. تصویر زاویه انحراف قائم  $\theta$  در امتداد دلخواه  $\alpha$ ،  $(\epsilon)$



شکل ۳. پیمایش نجوم - ژئودتیک

تکنیک بررسی شده برای تعیین اختلاف ارتفاع ژئوئید از روی مولفه های زاویه انحراف قائم، بصورت **ترازیابی نجوم - ژئودتیک** (یا **ترازیابی هلمرت**) نامیده می شود. بطور واضح، در یک شبکه مسطحاتی، پیمایش های مختلفی می تواند انتخاب شود، که در امتداد جاده های مختلف هستند. این پیمایش ها برای ایجاد یک **شبکه انحراف قائم**، نظیر **شبکه های ترازیابی دقیق** یا **ثقل**، می توانند به هم متصل شوند. بنابراین، یک **شبکه ترازیابی نجوم - ژئودتیک** می تواند با تکنیک های مشابهی (نظیر شبکه های ترازیابی دقیق و ثقل) **مورد سرشکنی** قرار گیرد.

برای تبدیل اختلاف ارتفاع های ژئوئید سرشکن شده به ارتفاع های ژئوئید، ارتفاع ژئوئید حداقل **یک نقطه**، ترجیحاً یک نقطه انحراف قائم، باید معلوم باشد.

واضح است که با بکارگیری مولفه های زاویه انحراف قائم، فقط برای محاسبه شیب ژئوئید در طول یک پیمایش از پیش مشخص، نمی توانیم از همه اطلاعات ذاتی موجود در مولفه های زاویه انحراف قائم استفاده کنیم. بطور روشن ترجیح داده می شود که **تغییرات ارتفاع ژئوئید** بر اساس یک **شیوه سطحی**، از طریق **یک روش دو بُعدی** تعیین شود. در چنین روش دو بُعدی، ارتفاع ژئوئید **N** بصورت تابعی بر حسب موقعیت **X** و **Y** بیان می شود، که **مختصات X و Y** در یک سیستم کارتیزین محلی ارائه می شوند. ارتفاع ژئوئید **N** در این حالت می تواند به یک **فرم خطی دو بُعدی** (تکنیک UNB) به شرح زیر:

$$N(x, y) = \tilde{\Phi}^T(x, y)c + c_0 = \tilde{N}(x, y) + c_0 \quad (\text{تکنیک UNB})$$

با استفاده از هر **دستگاه  $\phi$**  با **n تابع پایه** مدلسازی شود. مختصات کارتیزین محلی مورد استفاده به شرح زیر، تقریبی از سیستم مختصات ژئودتیک محلی (LG) است.

$$x = R(\phi - \phi_0), \quad y = R \cos \phi_0 (\lambda - \lambda_0)$$

← تعیین اختلاف ارتفاع های ژئوئید با استفاده از مولفه های زاویه انحراف قائم در امتداد یک پیمایش، روش ترازیبی نجوم - ژئودتیک یا ترازیبی هلمرت نامیده می شود.

تعیین اختلاف ارتفاع های ژئوئید با استفاده از مولفه های زاویه انحراف قائم در امتداد یک شبکه، تکنیک UNB نامیده می شود. →

از آنجا که شیب های ژئوئید در امتدادهای نصف النهاری  $\xi$  و مقطع قائم اولیه  $\eta$  معلوم هستند، معادلات زیر را می نویسیم :

$$-\xi(x, y) = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Phi_i(x, y)}{\partial x} c_i = \mathbf{B}_\xi^T(x, y) \mathbf{c}$$

$$-\eta(x, y) = \frac{\partial N(x, y)}{\partial y} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Phi_i(x, y)}{\partial y} c_i = \mathbf{B}_\eta^T(x, y) \mathbf{c}$$

این ها معادلات مشاهدات خطی هستند که ضرائب  $\mathbf{c}$  می توانند با استفاده از رگرسیون کمترین مربعات برآورد شوند. معادلات نرمال برای رگرسیون کمترین مربعات بصورت زیرند :

$$\left( \mathbf{B}_\xi \mathbf{C}_\xi^{-1} \mathbf{B}_\xi^T + \mathbf{B}_\eta \mathbf{C}_\eta^{-1} \mathbf{B}_\eta^T \right) \hat{\mathbf{c}} = -\mathbf{B}_\xi \mathbf{C}_\xi^{-1} \xi - \mathbf{B}_\eta \mathbf{C}_\eta^{-1} \eta.$$

نظیر روش ترازیبی نجوم - ژئودتیک هلمرت، در اینجا نیز تعیین مستقیم ارتفاع های ژئوئید ( به دلیل طبیعت کمیت های مشاهده پذیر یعنی مقادیر شیب ژئوئید) امکانپذیر نیست. سطح تعیین شده  $\tilde{N}(x, y)$  بطور دلخواه جابجا شده، و دارای یک مقدار دلخواه  $\tilde{N}(0,0)$  در مبدأ سیستم مختصات (0,0) است. مقدار جمله مطلق  $\mathbf{c}_0$  باید بطور جداگانه ارزیابی شود. ساده ترین راه برای اینکار، از روی رابطه زیر است:

$$c_0 = N_0 - \tilde{N}(x_0, y_0)$$

که در آن  $N_0 = N(x_0, y_0)$  مقدار تعریف شده ارتفاع ژئوئید در نقطه مبدأ شبکه  $(x_0, y_0)$  است، و  $\tilde{N}(x_0, y_0)$  مقدار محاسبه شده از روی  $\tilde{\Phi}^T(x_0, y_0)c$  است.

برای برآورد ماتریس های کواریانس  $C_\xi, C_\eta$ ، بایستی خطاهای موجود در هر دو نوع مختصات نجومی و ژئودتیک مورد استفاده برای تعیین مولفه های زاویه انحراف قائم، در نظر گرفته شوند. ماتریس کواریانس ضرائب ژئوئیدی برآورده شده  $C$  بصورت زیر محاسبه می شود:

$$C_{\hat{c}} = \left( B_\xi C_\xi^{-1} B_\xi^T + B_\eta C_\eta^{-1} B_\eta^T \right)^{-1},$$

و دقت ارتفاع های ژئوئید محاسبه شده به شکل زیر تعیین می شود:

$$\sigma_{\hat{N}}(x, y) = \sqrt{\left( \tilde{\Phi}^T(x, y) C_{\hat{c}} \tilde{\Phi}(x, y) \right)}$$

در بررسی های بالا، توابع پایه می توانند بصورت چند جمله ای های جبری ترکیبی تا مرتبه مشخصی در نظر گرفته شوند.

در تکنیک UNB (مدل دو بعدی) در مقایسه با روش ترازیبی هلمرت، فاصله بین نقاط انحراف قائم می تواند تقریباً دو برابر شود، و دقت یکسان برای تعیین ژئوئید حاصل شود. یعنی در حالت شبکه، در مقایسه با پیمایش، نیاز به داده های انحراف قائم بمراتب کمتری برای حصول دقت یکسان برای ژئوئید است.

This document was created with Win2PDF available at <http://www.daneprairie.com>.  
The unregistered version of Win2PDF is for evaluation or non-commercial use only.