سری :

سری :
همگرا ← سری به یک عدد میل کند
واگرا ← سری به ∞ میل می‌کند و یا به چند مقدار

۱) تعیین همگرایی

۱) آزمون نسبت ← $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|>1$

۲) آزمون مقایسه

$\boxed{f<g \begin{cases} f \text{ واگرا} \rightarrow g \text{ واگرا} \\ g \text{ همگرا} \rightarrow f \text{ همگرا} \end{cases}}$

۳) آزمون متناوب

$\sum(-1)^n a_n \begin{cases} ⓐ \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \\ ⓑ \text{ نزولی} \end{cases}$

۲) بازه و شعاع همگرایی

۱) آزمون ریشه: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}<1$

۲) آزمون نسبت ← $\boxed{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1}$ مهم *

۳) بسط

۱) تیلور: $f(x-a)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)$

۲) مک لورن: $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)$

(اذن دخول سری برای همگرایی ← $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$)

(نکته دبیرستان : حد در ∞ = $\frac{\text{بالاترین درجه صورت}}{\text{بالاترین درجه مخرج}}$)

(انتگرال و سری $\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{x^p}$ ← $P=1$ ← واگرا) (برای $P<1$ هم واگراست)

(آزمون انتگرال ← اگر در تشخیص همگرایی واگرایی دچار مشکل شدید ایده خوبی است)

انتگرال :

(همگرا ← حاصل انتگرال یک عدد است) (واگرا ← حاصل انتگرال ∞ می‌شود)

ناسره نوع ۱: $\int_a^{\infty}$ یا $\int_{-\infty}^{b}$ یا $\int_{-\infty}^{\infty}$

$\int \frac{1}{x^p}dx$:
- $P>1$ ← همگراست.
- $P\leq 1$ ← واگراست.

ناسره نوع ۱ است، هم مفهوم سری

ناسره نوع ۲: $\int_a^b \frac{1}{x-a}$ یا $\int_a^b \frac{1}{x-b}$

$\int \frac{1}{x^p}dx$:
- $P<1$ ← همگراست
- $P\geq 1$ ← واگراست.

نکته * مهمترین آزمون تشخیص همگرایی انتگرال ← مقایسه ← (مثل سری)

* بدترین حالت می‌گیم انتگرال است بعنوان یک ایده همیشگی *

تشخیص روش : «تشخیص همگرایی، واگرایی» #سری

① وجود فاکتوریل ! ← آزمون نسبت * $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1$ ؛ آزمون ریشه $\sqrt[n]{a_n}$ $\lim_{n\to\infty}$ ⇐ $=1$

② عدم وجود فاکتوریل ← آزمون مقایسه ← سری $\frac{1}{x^p}$ ⟨ $P>1$ همگرا ، $P\leq 1$ واگرا

بزرگه همگرا ← کوچیکه همگرا
کوچیکه واگرا ← بزرگه واگرا

③ وجود e و Ln ← آزمون انتگرال * ← محاسبه انتگرال بجای سری ⟨ عدد ← همگرا ، ∞ ← واگرا

← و هر کجا گیر کردید!

④ وجود $(-1)^n$ ← آزمون متناوب (لایبنیتز) (a_n) ⟨ ① $\lim_{n\to\infty} a_n=0$ ② نزولی باشد

مثال ۱) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\,(2n)!}{(3n)!}$ $\xrightarrow{\text{آزمون نسبت}}$ $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)!\,(2n+2)!}{(3n+3)!}}{\frac{n!\,(2n)!}{(3n)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)\cancel{n!}(2n+2)(2n+1)\cancel{2n!}}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)\cancel{3n!}}}{\frac{\cancel{n!}\ \cancel{2n!}}{\cancel{3n!}}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\text{صورت Max}}{\text{مخرج Max}}=\frac{(n)(2n)(2n)}{(3n)(3n)(3n)}=\frac{4}{27}<1$ $\boxed{\text{همگرا}}$

مثال ۲) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$ $\xrightarrow{\text{آزمون نسبت}}$ $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)n!}{(n+1)^n\cdot(n+1)}}{\frac{n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}=\frac{\text{صورت Max}}{\text{مخرج Max}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{n^n}=1$! (بی نتیجه) $\xrightarrow{\text{آزمون ریشه}}$ $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n/e}{n}=\frac{1}{e}<1$ $\boxed{\text{همگرا}}$

$\boxed{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}=\frac{n}{e}}$ ارزی

مثال ۳) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\sqrt{n}-1}{n^2+2\sqrt{n}}$ $\xrightarrow{\text{آزمون مقایسه}}$ $\sum\frac{1}{n^2}$ مقایسه با $\frac{1}{n^2}>\frac{4\sqrt{n}-1}{n^2+2\sqrt{n}}$ ← بزرگه همگراست ← کوچیکه همگراست

سری $\frac{1}{n^P}$ (P)

همگرا ← $P>1$

روش سریع :)

مثال ۴) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Ln\,n}{n^2}$ $\xrightarrow{\text{آزمون انتگرال}}$ $=\int_{x=1}^{\infty}\frac{Ln\,x}{x^2}dx$ $\begin{cases}Ln\,x=u\\ \frac{1}{x}dx=du\end{cases}$ $=\int_0^{\infty}\frac{u}{(e^u)^2}e^u\,du=\int_0^{\infty}ue^{-u}\,du$

ساده تر هم می توان کرد: $dx=x\,du \mapsto dx=e^u du$ ، $e^u=x$

$=-ue^{-u}-e^{-u}\Big|_0^{\infty}$

$=(0-0)-(-0-1)=1$ عدد ← $\boxed{\text{همگراست}}$

مثال ۵) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(Ln\,n)^3}$ $\xrightarrow{\text{هم آزمون انتگرال}}$ $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x(Ln\,x)^3}$

$\begin{cases}Ln\,x=u\\ \frac{1}{x}dx=du\end{cases}$ $=\int_0^{\infty}\frac{du}{u^3}=\int_0^{\infty}u^{-3}du=\frac{u^{-2}}{-2}=\frac{-1}{2u^2}\Big|_0^{\infty}=(0)-(-\infty)=\boxed{\infty}$ واگرا

$\underbrace{\frac{du}{u^3}}_{\text{ناسره نوع دو}}$

واگرا ← $P>1$

مثال ۶) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$ $\xrightarrow{\text{آزمون انتگرال}}$ $\int_1^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ $\begin{cases}x=u^2\\ dx=2u\,du\end{cases}$ $=\int_1^{\infty}\frac{e^{-u}}{\cancel{u}}2\cancel{u}\,du$

$=2\int_1^{\infty}e^{-u}du=-2e^{-u}\Big|_1^{\infty}=-2(\cancel{e^{-\infty}}-e^{-1})=\frac{2}{e}$ عدد ← $\boxed{\text{همگرا}}$

ابراهیم شاه ابراهیمی
مدرس تخصصی ریاضی۱و۲
معادلات دیفرانسیل
@EShahebrahimi

بازه همگرایی

① آزمون نسبت $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$

② یافتن بازه برای x

③ چک کردن همگرایی و واگرایی اعداد ابتدا و انتهای بازه

مثال) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n3^n}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1 \rightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^n}{(n+1)3^{n+1}}}{\frac{x^{n-1}}{n3^n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{\cancel{x^n}}{(n+1)\cancel{3^n}\,3}}{\frac{\cancel{x^n}\cdot x^{-1}}{n\cancel{3^n}}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{3(n+1)}|x| = \frac{1}{3}|x|$$

$\frac{\text{Max صورت}}{\text{Max مخرج}} = \frac{n}{3n} = \frac{1}{3}$

$$\xrightarrow{\text{شرط همگرایی}} \frac{1}{3}|x|<1 \rightarrow |x|<3 \rightarrow -3<x<3$$

$\boxed{x=-3}$ $\xrightarrow{\text{بررسی}} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^{n-1}}{n3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n\cdot(-3)^{-1}}{n3^n} = -\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n} \rightarrow$ آزمون متناوب

$a_n=\frac{1}{n} \left\langle \begin{array}{l}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0\\ \frac{1}{n} \text{ نزولی}\end{array}\right.$ $\rightarrow$ همگرا است. (پس $x=-3$ ok است)

$\boxed{x=3}$ $\xrightarrow{\text{بررسی}} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{n3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cancel{3^n}\cdot 3^{-1}}{n\cancel{3^n}} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \rightarrow$ سری $\frac{1}{n^p}$ در $p=1$ واگرا است $\rightarrow$ پس $x=3$ قبول نیست

$\boxed{R=\frac{b-a}{2}}$

بنابراین بازه همگرایی $-3 \le x < 3$ و شعاع همگرایی $R=3$ است.

مثال) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n}\cdot x^{2n}}{2n}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{\cancel{(-1)^{n+1}}\, 2^{2n+2}\cdot x^{2n+2}}{2n+2}}{\frac{\cancel{(-1)^n}\cdot 2^{2n}\cdot x^{2n}}{2n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{\cancel{2^{2n}}\cdot 2^{2}\cdot \cancel{x^{2n}}\cdot x^2}{2n+2}}{\frac{\cancel{2^{2n}}\cdot \cancel{x^{2n}}}{2n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{8n}{2n+2}|x^2| = 4|x^2|$$

$(-1)^n$ داخل قدر مطلق $+$ می‌شود

$$\xrightarrow{\text{شرط همگرایی}} 4|x^2|<1 \rightarrow x^2<\frac{1}{4} \rightarrow -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$$

$\boxed{x=-\frac{1}{2}}$ $\xrightarrow{\text{بررسی}} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot\cancel{2^{2n}}\cdot\cancel{(-\frac{1}{2})^{2n}}}{2n}$ $\quad \frac{(-1)^{2n}}{\cancel{2^{2n}}}$ $= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{3n}}{2n} \rightarrow$ آزمون متناوب $\quad a_n=\frac{1}{n} \left\langle \begin{array}{l}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0\\ \frac{1}{n} \text{ نزولی}\end{array}\right.$

همگرا است $\rightarrow$ (ok $x=-\frac{1}{2}$)

$\boxed{x=\frac{1}{2}}$ $\xrightarrow{\text{بررسی}} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot\cancel{2^{2n}}\cdot\cancel{(\frac{1}{2})^{2n}}}{2n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n} \rightarrow$ مشابه قبلی $\rightarrow$ همگرا

بنابراین بازه همگرایی $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}$ و شعاع همگرایی $R=\frac{1}{2}$ است.