

حجم $\rightarrow V = \pi R^2 h = \pi \times r^2 \times \Delta = r \Delta \pi$
 مساحت جانبی $\rightarrow S_{\text{جانبی}} = 2\pi R h = 2\pi \times r \times \Delta = 2r \Delta \pi$

نکته ۱: طبق آنچه در سال‌های گذشته آموختیم حجم‌های منشوری (منشور و استوانه) با فرمول زیر قابل محاسبه هستند.

$$\text{ارتفاع} \rightarrow V = S \cdot h \leftarrow \text{حجم منشور یا استوانه}$$

مساحت قاعده
 نکته ۳: اگر شعاع قاعده یک استوانه R و ارتفاع آن h باشد،
 حجم استوانه را می‌توان با فرمول زیر نیز بیان کرد:

③ نکته ۳: مساحت جانی منشور و استوانه از رابطه زیر به دست می آید البته می توان بدون استفاده از این فرمول به راحتی محاسبه کرد.

می‌آید. البته می‌توان بدون استفاده از این فرمول و با محاسبه مساحت وجه‌های جانبی و جمع کردن آن‌ها نیز مساحت جانبی را حساب کرد.

ارتفاع $\rightarrow ph =$ مساحت جانبی منشور یا استوانه
 ↓
 محیط قاعده

نکته ۴: اگر شعاع قاعده یک استوانه R و ارتفاع آن h باشد، مساحت جانبی استوانه با فرمول زیر به دست می آید.

مثال: حجم و مساحت جانبی استوانهٔ زیر را حساب کنید.

A diagram of a cylinder. The top circular face has a radius labeled r . The vertical height of the cylinder is labeled h .

فصل اول

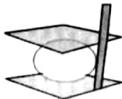
A diagram of a sphere with center O and radius R . The sphere is shaded to show its three-dimensional nature. A dashed line segment connects the center O to the right edge of the sphere, labeled R .

کره مجموعه نقاطی از فضا است که فاصله آنها از یک نقطه ثابت به نام مرکز به یک اندازه هستند. به این اندازه شعاع کره می‌گوییم.

۲- کارهای زیر را انجام دهید تا در انتهای فعالیت راه محاسبه حجم کره را پیدا کنیم.

• یک توپ پلاستیکی به شکل کره تهیه کنید.

• مانند شکل مقابل با قرار دادن دو سطح صاف موازی قطر کره را اندازه بگیرید.



• مانند شکل مقابل به کمک طلق، یک استوانه درست کنید به طوری که توپ کروی به طور کامل درون آن قرار گیرد و از اطراف، بالا و پایین بر آن مماس شود.

در این حالت می‌گوییم کره در استوانه محاط شده و استوانه نیز بر کره محیط شده است. اگر شعاع کره R باشد، ارتفاع استوانه و شعاع قاعده آن را برحسب R نشان دهید.

در کلاس هفتم یاد گرفتید

ارتفاع استوانه: $2R$

شعاع قاعده استوانه: R

حجم استوانه: $\pi R^2 h = \pi R^2 (2R) = 2\pi R^3$



• توپ را از استوانه خارج کنید و با دقت آن را بپیرید تا به دو نیم کره مساوی تبدیل شود. مانند شکل مقابل، یکی از نیم کره‌ها را در داخل استوانه بگذارید و نیم کره دیگر را از آب پر کنید و در استوانه خالی کنید. اگر این کار را با دقت انجام دهید و استوانه را خوب آب‌بندی کرده باشید که آب از آن خارج نشود، با ۲ نیم کره فضای باقیمانده پر از آب می‌شود.

الف) حجم استوانه، چند برابر حجم نیم کره است؟ ۳ برابر حجم نیم کره است.

ب) حجم استوانه، چند برابر حجم کره است؟ $\frac{1}{3}$ برابر حجم کره است.

ج) بنابراین حجم کره $\frac{2}{3}$ برابر حجم استوانه است.

د) با توجه به دستور محاسبه حجم استوانه، که در بالا ذکر شد، دستور محاسبه حجم کره به شعاع R را به دست آورید.

$$\text{حجم کره} = \frac{2}{3} \times (\text{حجم استوانه}) = \frac{2}{3} \times 2\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi R^3$$

۱۳۲

کار در کلاس

کره‌ای در استوانه‌ای به قطر قاعده و ارتفاع ۱۰ سانتی‌متر محاط شده است.

الف) حجم کره را به دست آورید.

$$\left. \begin{array}{l} \text{حجم کره} = \frac{4}{3}\pi R^3 \\ \text{شعاع کره} = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow V = \frac{4}{3}\pi \times 5^3 = \frac{500}{3}\pi$$

ب) حجم استوانه را به دست آورید.

$$\left. \begin{array}{l} \text{حجم استوانه} = \pi R^2 h \\ \text{ارتفاع} = 10 \\ \text{شعاع قاعده} = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow V = \pi \times 5^2 \times 10 = 250\pi$$

ج) حجم فضای بین کره و استوانه را به دست آورید.

$$\text{حجم فضای بین کره و استوانه} = \text{حجم استوانه} - \text{حجم کره} = 250\pi - \frac{500}{3}\pi = \frac{750\pi - 500\pi}{3} = \frac{250}{3}\pi$$

۲- حجم نیم کره‌ای به شعاع ۱۰ سانتی متر را به دست آورید.

$$\text{حجم نیم کره} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times \pi \times 10^3 = \frac{2000}{3} \pi$$

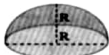
۱۳۳

فعالیت

۱- مانند شکل مقابل، نیم کره‌ای را که از نصف کردن توپ پلاستیکی به دست آوردید، روی یک صفحه کاغذ قرار دهید و دو بار روی کاغذ، دایره رسم کنید طوری که نیم کره بتواند روی این دایره‌ها قرار گیرد و آن را بپوشاند. این دو دایره کاغذی را هر طور که دوست دارید برش بزنید و کاغذهای بریده شده را روی سطح نیم کره بچسبانید. مراقب باشید تا حد امکان، کاغذها روی هم قرار نگیرند و سطح نیم کره نیز دیده نشود!



آیا توانستید تمام سطح (رویه) نیم کره را با این دو دایره بپوشانید؟ بله، به طور تقریبی، توانستیم روی نیم کره را بپوشانیم. در مورد مشکلات این کار و تقریبی بودن آن و راه‌های افزایش دقت این کار با یکدیگر گفتگو کنید. از آنجا که سطح رویه کره مسطح نیست، پوشاندن آن با یک سطح مسطح مثل کاغذ دشوار است و اگر کاغذ برش نخورد، نمی‌توان با تقریب خوبی سطح رویه نیم کره را پوشانید. اگر تعداد برش‌ها را زیاد کنیم می‌توانیم دقت کار را افزایش دهیم. ۲- ثابت می‌شود که مساحت رویه یک نیم کره با شعاع R ، دو برابر مساحت دایره‌ای است که نیم کره روی آن ایستاده است (قاعده نیم کره).



الف) پس مساحت رویه نیم کره برابر است با: $2\pi R^2$

ب) در نتیجه مساحت کره به شعاع R برابر است با: $4\pi R^2$

۱۳۴

کار در کلاس

۱- مساحت یک کلاه (عرق چین) به شکل رویه نیم کره به شعاع ۱۰ سانتی متر را پیدا کنید.

$$\text{مساحت رویه نیم کره} = 2\pi R^2 = 2 \times \pi \times 10^2 = 200\pi$$

۲- می‌خواهیم یک نیم کره چوبی نوپر به شعاع ۱۰ سانتی متر را رنگ کنیم. مساحت کل قسمت رنگ شده را پیدا کنید.

$$2\pi R^2 + \pi R^2 = \text{مساحت رویه نیم کره} + \text{مساحت قاعده} = \text{مساحت کل نیم کره}$$

$$= 2\pi \times 10^2 + \pi \times 10^2 = 3\pi \times 10^2 = 3\pi \times 100 = 300\pi$$

بین محاسبه مساحت کل نیم کره چوبی نوپر و مساحت رویه یک عرق چین چه تفاوتی هست؟ در محاسبه مساحت کل نیم کره چوبی می‌بایست مساحت قاعده نیم کره را نیز در نظر بگیریم در حالی که عرق چین سطح این قاعده را ندارد.

۱۳۵

تمرین

۱- قطر تقریبی کره زمین حدود ۱۲۸۰۰ کیلومتر است.

الف) قطر و شعاع کره زمین را برحسب کیلومتر با نماد علمی بنویسید.

$$\text{قطر کره زمین} = 12800 \times 10^3 \text{ km}$$

$$\text{شعاع کره زمین} = \frac{12800}{2} \times 10^3 = 6400 \times 10^3 = 6.4 \times 10^6 \text{ km}$$

ب) قطر و شعاع کره زمین را برحسب متر، با نماد علمی بنویسید.

می‌دانیم هر کیلومتر برابر است با ۱۰۰۰ متر بنابراین داریم:

$$\text{قطر کره زمین} = 12800 \times 10^3 \times 1000 = 12800 \times 10^6 = 1.28 \times 10^7 \text{ m}$$

$$\text{شعاع کره زمین} = 6400 \times 10^3 \times 1000 = 6400 \times 10^6 = 6.4 \times 10^6 \text{ m}$$

ج) مساحت تقریبی رویه (سطح) کره زمین را بر حسب کیلومتر مربع و متر مربع با نماد علمی بنویسید.

$$= 4\pi R^2 = 4\pi \times (6/4 \times 10^6)^2 =$$

$$= 4 \times 3/14 \times 40/96 \times 10^{12} = 5/144 \times 10^{14}$$

می‌دانیم هر ۱۰۰۰۰۰۰ متر مربع برابر است با یک کیلومتر مربع بنابراین:

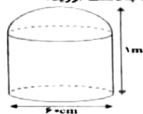
$$\text{کیلومتر مربع} = \frac{5/144 \times 10^{14}}{1000000} = \frac{5/144 \times 10^{14}}{10^6} = 5/144 \times 10^8$$

د) مساحت کشور جمهوری اسلامی ایران حدود ۱,۶۴۸,۰۰۰ کیلومتر مربع است. مساحت ایران چه کسری از مساحت کره زمین است؟ این نسبت را با درصد نشان دهید.

$$\frac{\text{مساحت کره زمین}}{\text{مساحت ایران}} = \frac{5/144 \times 10^8}{1648000} = \frac{5144 \times 10^2}{1648} = 312$$

بنابراین ایران تقریباً $\frac{1}{312}$ کره زمین مساحت دارد. که $0/32$ درصد مساحت کره زمین است.

۱- یک کپسول گاز از قرار گرفتن یک نیم کره روی یک استوانه به صورت مقابل درست شده است. اگر قطر دایره فاعده کپسول ۶ سانتی متر و ارتفاع آن یک متر باشد. حجم کپسول را بر حسب متر مکعب به دست آورید.



حجم نیم کره + حجم استوانه = حجم کپسول

$= \pi m^3$ شعاع نیم کره = شعاع فاعده استوانه

$= \pi m$ ارتفاع کپسول

$$\text{حجم کپسول} = (\pi \times (0/3)^2 \times 0/7) + \frac{\pi}{2} \times \pi \times (0/3)^2$$

$$\text{متر مکعب} = 0/062\pi + 0/018\pi = 0/081\pi$$

اگر بخواهیم سطح کل این کپسول را رنگ کنیم. چند کیلوگرم رنگ لازم است به شرط اینکه هر متر مربع به ۱۰۰ گرم رنگ احتیاج داشته باشد.

$$= 2\pi R h + 2\pi R^2 + \pi R^2 = 2\pi R h + 3\pi R^2$$

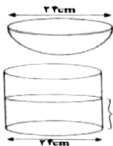
$$= 2\pi \times 0/3 \times 0/7 + 3\pi \times (0/3)^2 = 0/42\pi + 0/27\pi = 0/69\pi$$

$$= 0/69 \times 3/14 = 2/17$$

مقدار رنگ $2/17 \times 100 = 217$ گرم

۲- پیمانه‌ای به شکل نیم کره و به قطر دهانه ۲۴ سانتی متر را از آب و پرو آب آن را در لیوانی استوانه‌ای شکل با همان قطر خالی می‌کنیم؛ آب در لیوان تا چه ارتفاعی بالا می‌آید؟

$$\text{حجم آب درون لیوان} = \text{حجم آب درون پیمانه} \Rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} \times R^2 \times R = \pi R^2 \times x$$



$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} R = x$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \times 24 = 16 \text{ cm}$$

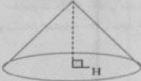
حجم هرم و مخروط

نکته در سب:

$$\left. \begin{array}{l} \text{مساحت قاعده} \rightarrow S = 3^2 = 9 \\ \text{ارتفاع} \rightarrow h = 10 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \times 9 \times 10 = 30 \text{ cm}^3$$

نکته ۹: مخروطی شکلی شبیه به هرم منتظم است که قاعده آن دایره‌ای شکل بوده و پای ارتفاع آن روی مرکز دایره قرار می‌گیرد.



نکته ۱۰: حجم یک مخروط همانند حجم یک هرم محاسبه می‌شود. اگر شعاع قاعده مخروط R و ارتفاع مخروط h باشد داریم:

$$V = \frac{1}{3}Sh \Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

مثال: حجم استوانه‌ای به شعاع قاعده ۳ و ارتفاع ۶ چند برابر حجم مخروطی به شعاع قاعده ۳۰ و ارتفاع ۲ است؟
طبق داده‌های مسئله $R = 2$ و $h = 6$ و $R' = 3$ و $h' = 2$ که به ترتیب شعاع قاعده و ارتفاع استوانه و مخروط هستند.

$$\text{حجم استوانه} = \pi R^2 h = \pi \times 2^2 \times 6 = 24\pi$$

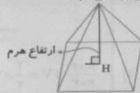
$$\text{حجم مخروط} = \frac{1}{3}\pi R'^2 h' = \frac{1}{3}\pi \times 3^2 \times 2 = 6\pi$$

$$\Rightarrow \frac{24\pi}{6\pi} = 4 \Rightarrow \text{حجم استوانه ۴ برابر حجم مخروط است.}$$

نکته ۱۱: هرم یک شکل فضایی است که وجه زیرین آن یک چند ضلعی است که قاعده نام دارد و بقیه وجه‌های آن مثلثی شکل هستند که از یک طرف به قاعده و از طرف دیگر به نقطه‌ای به نام رأس هرم محدود می‌شوند.
فاصله رأس هرم تا قاعده را ارتفاع هرم می‌گویند.



نکته ۱۲: اگر قاعده هرم یک چند ضلعی منتظم باشد و وجه‌های جانبی هرم همنهشت باشند، هرم را منتظم می‌گویند. در این صورت اگر قاعده مرکز تقارن داشته باشد، پای ارتفاع هرم روی مرکز تقارن قرار می‌گیرد.



نکته ۱۳: حجم هر هرم که مساحت قاعده آن S و ارتفاع آن h شد برابر است با یک سوم مساحت قاعده ضرب در ارتفاع. یعنی:

$$V = \frac{1}{3}Sh$$

مثال: حجم هرمی با قاعده‌ی مربع به ضلع ۳ و ارتفاع ۱۰ را بیابید.

۱۳۵

سؤال متن

بی دیگر از حجم‌های هندسی، حجم هرمی است. به طور حتم نام اهرام مصر را شنیده‌اید. نمونه دیگری از شکل‌های هرمی را نام ببرید. کلاه جشن تولد، میوه درخت کاج، وزنه شاقول، میخ کفشی (توجه کنید که مخروط‌ها هم جز، حجم‌های هرمی هستند)
در هرم مقابل، نام رأس: O

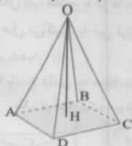


شکل وجه‌ها: مثلث
نام قاعده: ABCDE

تعداد وجه‌ها: ۶

شکل قاعده: پنج ضلعی

۱- اگر چند ضلعی قاعده، یک چند ضلعی منتظم باشد و وجه‌های جانبی با هم هم‌نهشت باشند، هرم را منتظم می‌گوییم.



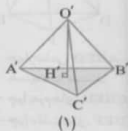
در این صورت اگر قاعده، مرکز تقارن داشته باشد، پای ارتفاع (نقطه‌ی

برخورد ارتفاع و قاعده) روی مرکز تقارن می‌افتد.

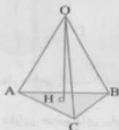
در هرم منتظم مقابل، نام رأس: O ارتفاع: OH شکل قاعده: مستطیل

شکل وجه‌های جانبی: مثلث متساوی‌الساقین تعداد وجه‌ها: ۵

۲- الف) با توجه به شکل‌ها و اطلاعات داده شده به نظر شما حجم کدام هرم بیشتر است؟ در شکل‌های (۱) و (۲) مثلث‌های قاعده هم‌نهشت هستند.



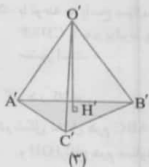
(۱)



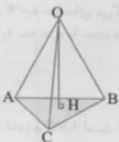
(۲)

$$O'H' < OH \Rightarrow V' < V$$

در شکل‌های (۳) و (۴) ارتفاع‌ها برابر است.



(۳)



(۴)

$$O'H' = OH \text{ و } S_{ABC} < S_{A'B'C'} \Rightarrow V' > V$$

ب) به نظر شما حجم هرم به چه مقادیری وابسته است؟ حجم هرم به مساحت قاعده و ارتفاع آن وابسته است.

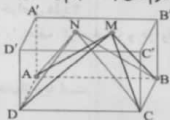
ج) برای محاسبه مساحت مثلث از چه مقادیری استفاده می‌کردید؟ برای محاسبه حجم هرم چه حدسی می‌زدید؟ از ارتفاع و قاعده مثلث استفاده می‌کردیم - حدس می‌زنیم که باید ارتفاع و قاعده هرم را در هم ضرب کنیم.

د) اگر دو هرم دارای قاعده‌های با مساحت مساوی و ارتفاع‌های مساوی باشند، درباره حجم‌های آنها چه می‌توانید بگویید؟ حجم آن‌ها برابر است.

کار در کلاس

در شکل مقابل، ABCD یک وجه یک مکعب مستطیل و M و N دو نقطه دلخواه روی وجه مقابل (A'B'C'D') است. چرا هرم‌های MABCD و NABCD دارای حجم‌های یکسان است؟ چون مساحت قاعده و ارتفاع‌های دو هرم با هم برابر است.

به این ترتیب چند هرم می‌توان ساخت که با هرم‌های بالا حجم یکسان داشته باشند؟ بی‌شمار هرم

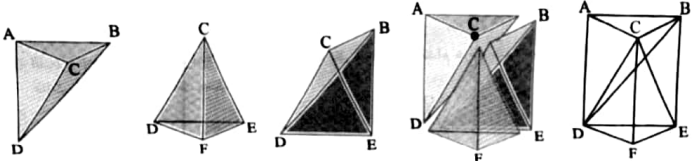


فعالیت

۱۲۷

در شکل زیر، منشور با دو قاعده $\triangle ABC$ و $\triangle DEF$ را ملاحظه می کنید. نقطه C را به نقطه های E و D و نقطه B را به نقطه D وصل می کنیم؛ به این ترتیب منشور را به سه هرم، مطابق شکل تجزیه می کنیم، آیا این سه هرم را در این منشور تشخیص می دهید؟ بله.

با پاسخ دادن به سؤالات زیر، نشان دهید که این سه هرم، حجم های برابر دارد و از آنجا نتیجه بگیرید که حجم هر یک از آنها، یک سوم حجم منشور است.



۱- چهارضلعی $ABED$ ، چه نوع چهارضلعی است؟ مستطیل است. چرا مثلث های ABD و BDE هم مساحتند؟ چون هم‌نهشت هستند.

۲- چرا هرم های $CBAD$ و $CBED$ دارای حجم های برابر هستند؟ چون دارای قاعده و ارتفاع برابر هستند.

۳- چرا مثلث های ABC و DEF هم مساحتند؟ چون قاعده های منشور هستند.

۴- چرا هرم های $CDEF$ و $CABC$ دارای حجم های برابر هستند؟ چون دارای قاعده و ارتفاع برابر هستند.

۵- با توجه به پاسخ سؤالات ۲ و ۴ چه نتیجه ای می گیریم؟ نتیجه می گیریم حجم هر سه هرم $CBAD$ و $CBED$ و $CDEF$ با هم برابرند و منشور به سه هرم با حجم های برابر تقسیم شده است. بنابراین حجم هر یک سوم حجم منشور است.

۱۲۸

کاردرکلاس

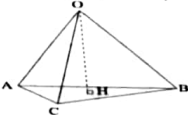
در شکل مقابل هرم $OABC$ دارای قاعده $\triangle ABC$ است که در آن $AC = 6\text{ cm}$ و $BC = 10\text{ cm}$ و زاویه $\angle ACB = 90^\circ$ و ارتفاع هرم مساوی 5 cm است. با کامل کردن عبارات زیر حجم هرم را به دست آورید.

مساحت مثلث قائم‌الزاویه ACB را می توان از ضرب اضلاع زاویه قائمه آن تقسیم به دو به دست آورد:

$$S_{ABC} = \frac{AC \times CB}{2} = \frac{6 \times 10}{2} = 30\text{ cm}^2$$

و از آنجا حجم هرم را به دست می آوریم:

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \times 30 \times 5 = 50\text{ cm}^3$$



۱۲۹

فعالیت

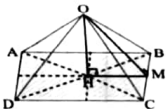
در شکل زیر، هرم منظم با قاعده مربع، رسم شده که وجه های جانبی آن همگی مثلث های متساوی الساقین و طول ساق های آنها 1 cm و وسط BC است.

الف) پاره خط OM در مثلث OBC چه خواصی دارد؟

OM ارتفاع مثلث OBC است و BC را نصف کرده است و در واقع وتر

مثلث قائم‌الزاویه OHM است.

ب) مثلث OBM چه نوع مثلثی است؟ قائم‌الزاویه است.



ج) اگر طول ضلع قاعده، 12 cm باشد به کمک قضیه فیثاغورس، در مثلث OBM طول OM را حساب کنید.

$$OM^2 + BM^2 = BO^2 \Rightarrow OM^2 + 6^2 = 10^2 \Rightarrow OM^2 = 100 - 36 = 64 \Rightarrow OM = 8$$

د) مثلث OMH چه نوع مثلثی است؟ طول MH چقدر است؟ قائم الزویه است. طول MH ، 6 سانتی متر است. ها به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث OMH ، طول OH را به دست آورید.

$$OM^2 = HM^2 + OH^2 \Rightarrow 8^2 = 6^2 + OH^2 \Rightarrow OH^2 = 64 - 36 = 28$$

$$\Rightarrow OH = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}\text{ cm}$$

$$\text{حجم هرم} = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \times 12^2 \times 2\sqrt{7} = 96\sqrt{7}\text{ cm}^3$$

و) حجم هرم $OABCD$ را به دست آورید.

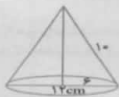
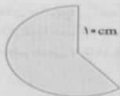
۲- هرم منتظمی را در نظر بگیرید که قاعده آن یک چند ضلعی منتظم باشد. مانند مربع، پنج ضلعی منتظم، شش ضلعی منتظم و حال تعداد ضلع های این چند ضلعی را بیشتر و بیشتر کنید، چند ضلعی فوق به چه شکلی نزدیک می شود؟ به دایره نزدیک تر می شود. هرم به چه شکلی نزدیک می شود؟ به مخروط نزدیک می شود.



۱۳۹

کاردر کلاس

ع) با قسمتی از دایره ای به شعاع 1 cm ، مخروطی به قطر قاعده 12 cm ساخته است. حجم این مخروط را به دست آورید.



$$\text{علی با قسمتی از دایره ای به شعاع } 1\text{ cm} \text{، مخروطی به قطر قاعده } 12\text{ cm} \text{ ساخته است. حجم این مخروط را به دست آورید.}$$

$$(ارتفاع مخروط) = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64$$

$$\text{ارتفاع مخروط} = \sqrt{64} = 8$$

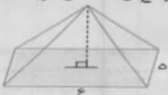
$$\text{حجم مخروط} = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \times \pi \times 6^2 \times 8 = 96\pi\text{ cm}^3$$

۱۳۹

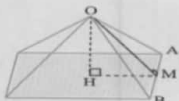
تمرین

۱- حجم هرمی را به دست آورید که قاعده آن مستطیلی به ابعاد 6 و 5 سانتی متر و ارتفاع آن 10 سانتی متر باشد.

$$\text{حجم هرم} = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \times 5 \times 6 \times 10 = 100\text{ cm}^3$$



۲- حجم هرمی با قاعده مربع را به دست آورید که ضلع قاعده آن 4 cm باشد و وجه های جانبی آن مثلث های متساوی الساقینی به ساق های 8 cm باشد.



$$OA^2 = AM^2 + OM^2 \Rightarrow 8^2 = 2^2 + OM^2$$

$$\Rightarrow OM^2 = 64 - 4 = 60$$

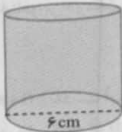
$$\Rightarrow OM = \sqrt{60} = 2\sqrt{15}$$

$$OM^2 = HM^2 + OH^2 \Rightarrow 60 = 2^2 + OH^2$$

$$OH^2 = 60 - 4 \Rightarrow OH^2 = 56 \Rightarrow OH = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$$

$$\text{حجم هرم} = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \times 4^2 \times 2\sqrt{14} = \frac{32}{3}\sqrt{14}$$

ظرفی به شکل مخروط با شعاع دهانه ۴cm و به ارتفاع ۱۲cm را از آب پر می کنیم و در لیوانی استوانه ای شکل شعاع قاعده آن ۶cm است، خالی می کنیم؛ آب تا چه ارتفاعی در لیوان بالا می آید؟



R_1 = شعاع قاعده مخروط

R_2 = شعاع قاعده استوانه

h = ارتفاع مخروط

x = ارتفاع استوانه

$$\text{حجم آب درون استوانه} = \text{حجم آب درون مخروط}$$

$$\frac{1}{3} \pi R_1^2 h = \pi R_2^2 x \Rightarrow \frac{1}{3} \times 4^2 \times 12 = 6^2 \times x \Rightarrow$$

$$64 = 36x \Rightarrow x = \frac{64}{36}$$

$$\Rightarrow x = \frac{16}{9}$$

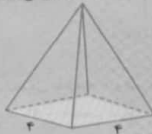
آزمایشی مستمر

۱- جای خالی را پر کنید. (۵/۰ نمره)

آن بیشتر باشد.

«اگر مساحت قاعده های دو هرم با هم برابر باشد حجم هرص بیشتر است که

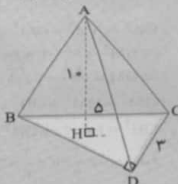
۲- حجم هرص با قاعده مربع را بیابید که ضلع قاعده آن ۴ و ارتفاع آن ۶ باشد. (۲)



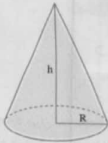
۳- اگر حجم یک مخروط برابر 24π باشد و ارتفاع آن برابر ۸ باشد شعاع قاعده مخروط را بیابید. (۲)

۴- اگر حجم یک استوانه و یک مخروط با ارتفاع های برابر، مساوی باشد، نسبت شعاع قاعده استوانه به شعاع قاعده مخروط را بیابید. (۲)

۵- حجم هرم مقابل را بیابید. (۲/۵) ($AH = 10, BC = 5, DC = 3$)



$$\left. \begin{aligned} V &= \frac{1}{3}Sh \\ S &= 4 \times 4 = 16 \\ h &= 6 \end{aligned} \right\} \Rightarrow V = \frac{1}{3} \times 16 \times 6 = 32 \quad (1)$$



(۵/۰)

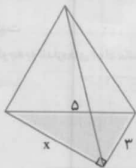
$$\left. \begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\pi R^2 h \\ V &= 24\pi \\ h &= 8 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 24\pi = \frac{1}{3} \times \pi \times R^2 \times 8 \quad (1)$$

$$\Rightarrow R^2 = 9 \Rightarrow R = 3 \text{ (۵/۰)}$$

۴ ارتفاع‌های مخروط و استوانه برابر است پس ارتفاع هر دو را برابر h در نظر می‌گیریم.

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= \text{حجم استوانه} \\ V_2 &= \text{حجم مخروط} \\ R_1 &= \text{شعاع قاعده استوانه} \\ R_2 &= \text{شعاع قاعده مخروط} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} V_1 &= V_2 \Rightarrow \pi R_1^2 h = \frac{1}{3}\pi R_2^2 h \quad (1) \\ \Rightarrow R_1^2 &= \frac{1}{3}R_2^2 \\ \Rightarrow \frac{R_1^2}{R_2^2} &= \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \sqrt{\frac{1}{3}} \quad (1) \end{aligned}$$

۵ چون قاعده یک مثلث قائم‌الزاویه است، مساحت قاعده را از ضرب اندازه‌های دو ضلع زاویه قائمه به دست می‌آوریم.



$$V = \frac{1}{3}Sh \text{ (۵/۰)}$$

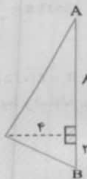
$$x^2 + 3^2 = 5^2 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4 \quad (1)$$

$$S = \frac{3 \times 4}{2} = 6 \Rightarrow V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \times 6 \times 10 = 20 \quad (1)$$



نکته ۱۵: از دوران یک نیم دایره حول قطرش یک کره ایجاد می شود.
 مثال: حجم حاصل از دوران شکل مقابل را حول ضلع AB به دست آورید.

اگر جسم مقابل را حول AB دوران دهیم دو مخروط به هم چسبیده با شعاع قاعده ۴ به دست می آید که ارتفاع یکی ۸ و ارتفاع دیگری ۲ است.



$$\left. \begin{aligned} \text{حجم مخروط بالا} &= \frac{1}{3} \times \pi \times 4^2 \times 8 = \frac{128}{3} \pi \\ \text{حجم مخروط پایینی} &= \frac{1}{3} \times \pi \times 4^2 \times 2 = \frac{32}{3} \pi \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{حجم کل} = \frac{128}{3} \pi + \frac{32}{3} \pi = \frac{160}{3} \pi$$

نکته ۱۱: برابری سطح کل دو شکل، برابری حجم آن دو شکل را نتیجه نمی دهد. همین طور از برابری حجم دو شکل نمی توان برابری سطح کل آن دو شکل را نتیجه گرفت.
 نکته ۱۲: از دوران یک مستطیل حول یکی از ضلع هایش یک استوانه به دست می آید.



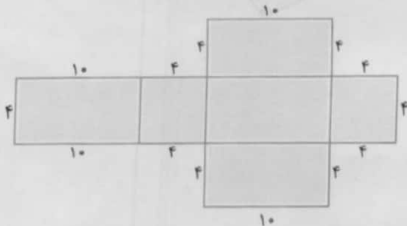
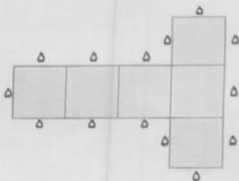
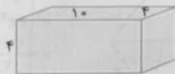
نکته ۱۳: از دوران یک مثلث قائم الزاویه حول یکی از ضلع های زاویه قائمه اش یک مخروط به دست می آید.



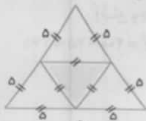
نکته ۱۴: از دوران یک مثلث قائم الزاویه حول وتر آن شکلی پدید می آید که مانند دو مخروط به هم چسبیده است.

شعاعیت

۱- با توجه به اندازه های ابعاد مکعب و مکعب مستطیل، اندازه ضلع ها را در گسترده هر کدام مشخص کنید.



۲- مساحت گسترده هر یک از هرم‌ها را با توجه به اندازه‌های روی هر هرم محاسبه کنید.

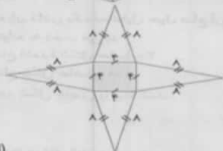


مساحت یک وجه $\times 4 =$ مساحت گسترده

$$(\text{ارتفاع وجه}) = 5^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 25 - \frac{25}{4} = \frac{75}{4}$$

$$\text{ارتفاع وجه} = \sqrt{\frac{75}{4}} = \frac{5}{2}\sqrt{3}$$

$$\text{مساحت گسترده} = 4 \times \frac{5 \times \frac{5}{2}\sqrt{3}}{2} = 4 \times \frac{25}{2} \sqrt{3} = 25\sqrt{3}$$



مساحت وجه $\times 6 +$ مساحت قاعده = مساحت گسترده

$$(\text{ارتفاع وجه})^2 = 8^2 - 4^2 = 64 - 16 = 48$$

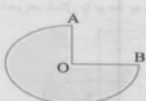
$$\text{ارتفاع وجه} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

$$\text{مساحت گسترده} = 36 + 6 \times \frac{4 \times 4\sqrt{3}}{2} = 36 + 48\sqrt{3}$$

(الف)



۳- دایره‌ای به شعاع ۱۰ سانتیمتر را برداشته‌ایم؛ با کمک آن یک سطح مخروطی شکل درست کرده‌ایم؛ طول کمان AB چقدر است؟



$$\text{طول کمان AB} = \frac{3}{4} (\text{محیط دایره}) = \frac{3}{4} \times 2\pi \times 10 = 15\pi$$

چه رابطه‌ای بین طول کمان AB و محیط دایره قاعده مخروط وجود دارد؟ شعاع قاعده مخروط را پیدا کنید.

$$\text{شعاع قاعده مخروط} = R = \frac{15}{2} \text{ cm} \Rightarrow 2\pi R = 15\pi \Rightarrow \text{محیط دایره قاعده مخروط} = 15\pi$$

۱۴۱

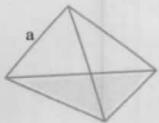
کار در کلاس

۱- مساحت کل هرم منتظم مقابل را به دست آورید که طول همه یال‌های آن a است.

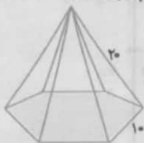
مساحت یک وجه $\times 4 =$ مساحت کل هرم

$$= 4 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{4} a \times a\right) \times \frac{1}{2}$$

$$= \sqrt{3} a^2 \text{ cm}^2$$



۲- با توجه به اندازه ضلع قاعده شش ضلعی منتظم و اندازه یال هرم، مساحت جانبی هرم را پیدا کنید.



$$(\text{ضلع وجه})^2 = (\text{نصف ضلع قاعده})^2 + (\text{ارتفاع وجه})^2$$

$$(\text{ارتفاع وجه})^2 + 5^2 = 20^2 \Rightarrow (\text{ارتفاع وجه})^2 = 400 - 25 = 375$$

$$\text{ارتفاع وجه} = \sqrt{375} = 5\sqrt{15}$$

$$\text{مساحت جانبی هرم} = 6 \times \text{مساحت یک وجه} = 6 \times \frac{5\sqrt{15} \times 10}{2} = 150\sqrt{15} \text{ cm}^2$$

۱۴۱

فعالیت

۱- با دوران دادن یک مستطیل حول ضلع آن چه حجمی به دست می‌آید؟

استوانه به دست می‌آید

شعاع قاعده شکل حاصل، ۳

ارتفاع شکل حاصل، ۱۰

حجم شکل حاصل را پیدا کنید.



$$\text{حجم استوانه} = \pi R^2 h = \pi \times 3^2 \times 10 = 90\pi \text{ cm}^3$$

۲- اگر مثلث قائم‌الزاویه را حول مشخص شده در شکل، دوران دهیم، چه شکلی به دست می‌آید؟ حجم آن را پیدا کنید. مخروط به دست می‌آید.

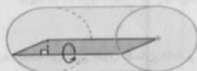
شعاع قاعده شکل حاصل، ۳

ارتفاع شکل حاصل، ۱۰



$$\text{حجم مخروط} = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times 10 = 30\pi$$

۳- در هر شکل با توجه به محور دوران، که در هر یک مشخص شده است، شکل حجم حاصل را توصیف کنید.



استوانه

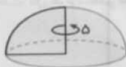


کره



کار در کلاس

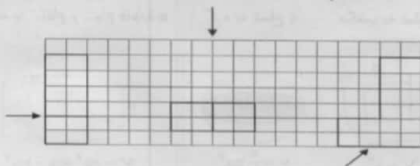
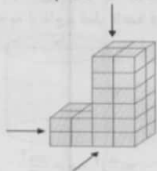
حجم حاصل از دوران یک ربع دایره به شعاع ۵cm را حول شعاع آن پیدا کنید.



$$\text{نیم کره} = \frac{(\frac{\pi}{2} R^2)}{2}$$

$$= \frac{\frac{\pi}{2} \times 5^2}{2} = \frac{\pi \times 125}{4} = \frac{125\pi}{4}$$

۱- با توجه به حجم مقابل در صفحه شطرنجی زیر سطح دیده شده از جهت‌های مشخص شده را رسم کنید.



۲- اگر هر کدام از هرم‌های منتظم زیر را از بالا نگاه کنیم، چه شکلی دیده می‌شود؟

(الف) هرم منتظم با قاعده شش ضلعی - شش ضلعی منتظم

(ب) هرم منتظم با قاعده مربع - مربع

(ج) هرم منتظم با قاعده مثلث - مثلث متساوی‌الاضلاع

۳- کره مقابل با یک صفحه بریده شده است. سطح بریده شده چه شکلی دارد؟ در چه صورت این شکل بیشترین مساحت را دارد؟



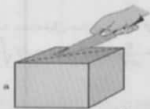
سطح بریده شده دایره است. در صورتی که صفحه از مرکز کره عبور کند سطح بریده شده بزرگترین دایره ممکن است.



۴- در شکل مقابل، چه کسری از حجم کره برداشته شده است؟

$\frac{1}{8}$ از حجم کره برداشته شده است.

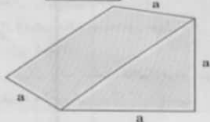
۱- یک اسفنج مکعب شکل به ضلع a را مانند شکل مقابل بریده‌ایم. سطح بریده شده به چه شکلی است؟ اندازه ضلع‌های آن را پیدا کنید.



سطح بریده شده به شکل یک مستطیل است. دو وجه جانبی مثلث‌های قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین هستند که طول ساق‌های آن همان ضلع مکعب است. یعنی a . ابعاد مستطیل دیده شده در سطح بریده شده به صورت زیر است:

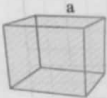
عرض = a

طول = قطر مکعب. که قطر مکعب $\sqrt{3}a$ است.



حجم و سطح کل شکل‌های زیر را پیدا و با هم مقایسه کنید.

استوانه به ارتفاع و قطر قاعده a استوانه به ارتفاع و شعاع قاعده a کره به شعاع a مکعب به ضلع a



$$V = a^3$$

$$S = 6a^2$$



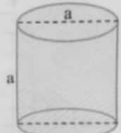
$$V = \frac{4}{3}\pi a^3$$

$$S = 4\pi a^2$$



$$V = \pi a^2 \times a = \pi a^3$$

$$S = 2\pi a^2 + 2\pi a^2 = 4\pi a^2$$



$$V = \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 \times a = \frac{\pi a^3}{4}$$

$$S = 2\pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2\pi \left(\frac{a}{2}\right) a = \frac{\pi a^2}{2}$$

در هر مورد، نسبت حجم به سطح $\left(\frac{V}{S}\right)$ را به دست آورید. در کدام شکل این نسبت بزرگ‌تر است؟

$$\text{مکعب: } \frac{a^3}{6a^2} = \frac{a}{6}$$

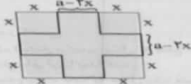
$$\text{کره: } \frac{\frac{4}{3}\pi a^3}{4\pi a^2} = \frac{a}{3}$$

$$\text{استوانه قطور: } \frac{\pi a^3}{4\pi a^2} = \frac{a}{4}$$

$$\text{استوانه باریک: } \frac{\frac{\pi a^3}{4}}{\frac{\pi a^2}{2}} = \frac{a}{2}$$

در کره نسبت حجم ایجاد شده به سطح به کار رفته بیشترین مقدار را دارد.

از یک مقوا به ضلع a گوشه‌های مربع شکل به ضلع x را بریده و با سطح باقی‌مانده یک جعبه مکعب مستطیل شکل درست کرده‌ایم. چه رابطه‌ای بین a و x باشد تا بتوان چهار کره را به شعاع x داخل این جعبه جای داد.



$$\text{حجم کره به شعاع } x = \frac{4}{3}\pi x^3$$

$$\text{حجم مکعب مستطیل ساخته شده} = (a - 2x)^2 x$$

باید حجم مکعب مستطیل ساخته شده از ۳ برابر حجم کره بیشتر باشد.

$$(a - 2x)^2 x > 3 \times \frac{4}{3}\pi x^3 \Rightarrow (a - 2x)^2 > \frac{4\pi}{1} x^2 \Rightarrow a - 2x > \sqrt{\frac{4\pi}{1}} x \Rightarrow a > (2 + \sqrt{4\pi}) x$$

آرژانتینایی هستم

۱- جای خالی را پر کنید. (۴ نمره)

الف) از دوران یک مستطیل حول یکی از ضلع‌های آن یک ... است.

ب) از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه حول یکی از ضلع‌های زاویه قائمه آن یک ... است.

۲- مساحت کل یک هرم منتظم با قاعده مثلث (چهار وجهی منتظم) به ضلع قاعده ۶ را بیابید. (۲)



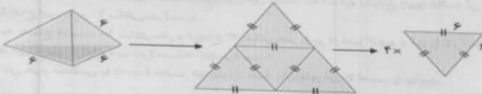
۳- حجم حاصل از دوران یک نیم دایره به شعاع ۶ را حول قطرش به دست آورید. (۲)

۴- اگر یک مکعب به ضلع ۴ را به طور قائم از روی قطر قاعده اش برش بزنیم سطح مقطع به دست آمده به چه شکلی است؟ مساحت آن را بیابید. (۲)

پاسخ ارزشیابی مستمر

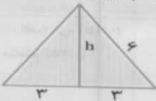
۱ الف) استوانه (۰/۵) - اندازه ضلع دیگر مستطیل (۰/۵) ب) مخروط (۰/۵) - اندازه ضلع دیگر زاویه قائمه (۰/۵)

۲



(۰/۵)

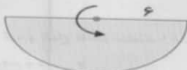
با توجه به شکل های رسم شده کافی است مساحت مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع ۶ را بیابیم.



$$h^2 = 6^2 - 3^2 = 36 - 9 = 27 \Rightarrow h = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \quad (۰/۵)$$

$$S = \frac{6 \times 3\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3} \Rightarrow \text{کل } S = 4 \times 9\sqrt{3} = 36\sqrt{3} \quad (۰/۵)$$

۳



$$V = \frac{2}{3} \pi \times r^3 \quad (۰/۵)$$

$$V = \frac{2}{3} \times \pi \times 6^3 = \frac{2}{3} \times \pi \times 216 = 288\pi \quad (۱/۵)$$

۳ سطح مقطع به دست آمده یک مستطیل است که طول آن قطر قاعده و عرض آن ضلع مکعب است. (۰/۵)



$$4^2 + 4^2 = x^2 \Rightarrow \text{اندازه قطر قاعده} \quad (۰/۵)$$

$$x^2 = 16 + 16 = 32 \Rightarrow x = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \quad (۰/۵)$$

$$\text{مساحت} = 4\sqrt{2} \times 4 = 16\sqrt{2} \quad (۰/۵)$$