لگاریتمها و نماییها۶

اهمیت توابع لگاریتمی و نمایی که در این فصل مطرح می‌شوند آنچنان است که به سختی می‌توان در آن مبالغه کرد. این توابع در ریاضیات محض و کار بسته ابزار لازمی بوده، و گهگاه در علوم فیزیک، زیست‌شناسی، و اجتماعی ظاهر می‌شوند. این توابع کلیدی را با تعریف **لگاریتم** (طبیعی) به‌صورت انتگرالی با حد انتگرالگیری بالایی متغیر آغاز می‌کنیم. پس از استنتاج خواص لگاریتم از این تعریف و بخصوص اثبات یک به یک بودن این تابع، **نمایی** را تابع معکوس لگاریتم تعریف می‌کنیم. نقطهٔ اوج مطالعهٔ ما در این توابع کلیدی در بخشهای ۶.۶ و ۷.۶ و زمانی است که نماییها و لگاریتمها برای حل مسائل عملی مختلفی در رابطه با رشد و تحلیل به کار گرفته می‌شوند. در دو بخش آخر چند تابع مهم را بررسی می‌کنیم که با نمایی و لگاریتم رابطهٔ نزدیک دارند و اینها عبارتند از **توابع هذلولوی** و **هذلولوی معکوس**.

۱.۶ لگاریتم طبیعی

فرض کنید از تمام توانهای صحیح نامنفی

$$x^0 = 1, x, x^2, x^3, \ldots \tag{۱}$$

و تمام توانهای صحیح منفی

$$x^{-1}, x^{-2}, x^{-3}, \ldots \tag{۲}$$

متغیر مستقل x مشتق گرفته باشیم. در این صورت، معلوم می‌شود که مشتقات توانهای (۱) عبارتند از

$$0, 1, 2x, 3x^2, \ldots, \tag{۱'}$$

ولی مشتقات توانهای (۲) عبارتند از

$$-x^{-2}, -2x^{-3}, -3x^{-4}, \ldots \tag{۲'}$$

با بررسی مشتقات (۱') و (۲') به نکتهٔ عجیبی دست می‌یابیم : **هر توان صحیح ظاهر می‌شود *الا* x^{-1} ، یعنی متقابل** x . اما مسلما" تابعی وجود دارد که مشتقش بر یک بازهٔ غیرشامل $x = 0$ مساوی x^{-1} است . همانطور که اینک نشان می‌دهیم ، این تابع وجود دارد ، و خواهیم دید که این تابع رابطهٔ نزدیکی با لگاریتم معمولی در ریاضیات دبیرستانی دارد!

تعریف لگاریتم به صورت انتگرال . حال ، باتوجه به این نکات ، تابع جدید $\ln x$ ، به نام **لگاریتم طبیعی** یا فقط **لگاریتم** ، را معرفی و به ازای هر x مثبت با فرمول

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$$

تعریف می‌کنیم ، که می‌توان آن را به صورت فشرده‌تر

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t} \tag{۳}$$

نوشت . این یک انتگرال معین است با حد بالایی انتگرالگیری **متغیر** . از تعریف ۳ وقضیهٔ ۵، صفحهٔ ۴۰۵ ، فورا" نتیجه‌می‌شود که $\ln x$ یک پاد مشتق تابع $1/x = x^{-1}$ بر بازهٔ $(0, \infty)$ است ، چیزی که در مثال ۱۰ ، صفحهٔ ۲۵۵ ، پیش‌بینی شد . لذا ، فرمول اساسی

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x} \qquad (x > 0) \tag{۴}$$

را داریم که به ازای هر x مثبت معتبر است . چون انتگرال معرف $\ln x$ به‌ازای $x = 1$ به

$$\int_1^1 \frac{dt}{t} = 0$$

تحویل می‌شود ، می‌بینیم که $\ln x$ پادمشتق $1/x$ است که با شرط

$$\ln 1 = 0 \tag{۵}$$

معین می‌شود . البته ، لگاریتم بر $(0, \infty)$ پیوسته است ، زیرا بر $(0, \infty)$ مشتقپذیر می‌باشد . همچنین ، بنابرآزمون یکنوایی(قضیهٔ ۷ ، صفحهٔ ۲۶۹) ، $\ln x$ بر $(0, \infty)$ صعودی‌است ، زیرا

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x} > 0 \qquad (0 < x < \infty).$$

پس نتیجه می‌شود که $\ln x$ بر $(0, \infty)$ یک به یک می‌باشد .

مثال ۱ . از $x \ln x$ مشتق بگیرید .

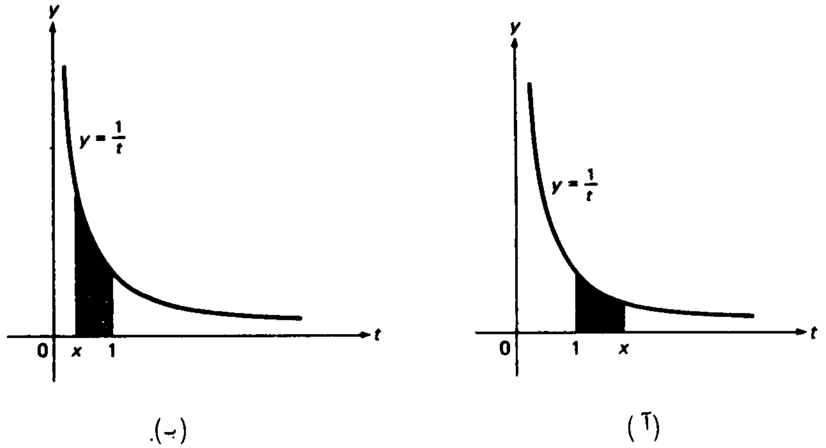
حل. بنابر قاعدهٔ حاصل‌ضرب و فرمول (۴)،

$$\frac{d}{dx}(x \ln x) = \frac{dx}{dx}\ln x + x\frac{d \ln x}{dx} = \ln x + x\left(\frac{1}{x}\right) = \ln x + 1.$$

برای تعبیر هندسی لگاریتم، حالات $x > 1$ و $0 < x < 1$ را جداگانه درنظرمی‌گیریم. هرگاه $x > 1$، آنگاه $\ln x$ مساحت ناحیهٔ سایه‌دار شکل ۱ (آ) است؛ یعنی، مساحت‌تحت منحنی $y = 1/t$ از $t = 1$ تا $t = x$ است. از آن‌سو، هرگاه $0 < x < 1$، آنگاه چون

$$\int_1^x \frac{dt}{t} = -\int_x^1 \frac{dt}{t},$$

$\ln x$ قرینهٔ مساحت ناحیهٔ سایه‌دار شکل ۱ (ب) است؛ یعنی، قرینهٔ مساحت تحت منحنی



شکل ۱

$y = 1/t$ از $t = x$ تا $t = 1$. لذا، $\ln x > 0$ اگر $x > 1$، حال‌آنکه $\ln x < 0$ اگر $0 < x < 1$. تابع $\ln x$ به ازای $x \leq 0$ تعریف نشده است، زیرا انتگرالده $1/t$ در (۱) بر هر بازهٔ شامل نقطهٔ $t = 0$ بی‌کران است (ر.ک. مسئلهٔ ۳۳، صفحهٔ ۳۸۱).

مثال ۲. تابع $\ln(x^2 + x + 1)$ به ازای هر x تعریف شده است، زیرا به ازای هر x،

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$$

اما تابع $\ln(2x^2 - x - 1)$ فقط به ازای $x > 1$ یا $x < -\frac{1}{2}$ تعریف شده است، زیرا به‌ازای

، $-\frac{1}{2} \le x \le 1$

$$2x^2 - x - 1 = (2x + 1)(x - 1) \le 0$$

برای مشتقگیری از این توابع ، فرمول (۴) و قاعدهٔ زنجیره‌ای را به کار می‌بریم :

$$\frac{d}{dx} \ln (x^2 + x + 1) = \frac{1}{x^2 + x + 1} \frac{d}{dx} (x^2 + x + 1) = \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1},$$

$$\frac{d}{dx} \ln (2x^2 - x - 1) = \frac{1}{2x^2 - x - 1} \frac{d}{dx} (2x^2 - x - 1) = \frac{4x - 1}{2x^2 - x - 1}.$$

فرمول (۴) برای مشتق لگاریتم را می‌توان تعمیم داده ، نتیجهٔ کلیتر زیررا به‌دست آورد :

$$\frac{d}{dx} \ln |x| = \frac{1}{x} \qquad (x \neq 0), \qquad (۴')$$

که به ازای هر x ناصفر معتبر است . در واقع ، اگر x مثبت باشد ، $|x| = x$ و (۴') به (۴) تحویل می‌شود ، حال آنکه اگر x منفی باشد ، $|x| = -x$ ؛ و لذا ،

$$\frac{d}{dx} \ln |x| = \frac{d}{dx} \ln (-x) = \frac{1}{-x} \frac{d}{dx} (-x) = -\frac{1}{x} (-1) = \frac{1}{x}.$$

از (۴') فوراً" نتیجه می‌شود که

$$\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C. \qquad (۶)$$

لازم است این فرمول انتگرالگیری مهم به خاطر سپرده شود .

لگاریتم حاصلضرب . حال یک خاصیت اساسی لگاریتم را ثابت می‌کنیم .

قضیهٔ ۱ (لگاریتم حاصلضرب) . *هرگاه a و b مثبت باشند ، آنگاه*

$$\ln ab = \ln a + \ln b. \qquad (۷)$$

برهان . با مشتقگیری از تابع $\ln ax$ معلوم می‌شود که

$$\frac{d}{dx} \ln ax = \frac{1}{ax} \frac{d}{dx} ax = \frac{a}{ax} = \frac{1}{x}.$$

لذا ، هر دو تابع $\ln ax$ و $\ln x$ دارای مشتق $1/x$ می‌باشند . به عبارت دیگر ، $\ln ax$ و $\ln x$

هر دو پاد مشتق $1/x$ بر بازهٔ $(0, \infty)$ می‌باشند . پس نتیجه می‌شود که

$$\ln ax = \ln x + C,$$

که در آن C ثابت می‌باشد . برای تعیین C قرار می‌دهیم $x = 1$ ، به کمک (۵) خواهیم داشت

$$\ln a = \ln 1 + C = C,$$

درنتیجه ، $C = \ln a$. بنابراین ،

$$\ln ax = \ln a + \ln x,$$

و با قرار دادن $x = b$ در این فرمول ، فرمول (۷) به دست خواهد آمد .

بنابر فرمول (۷) ، لگاریتم حاصل‌ضرب دو عامل مجموع لگاریتمهای تک تک عوامل است . به طور معادل ، با خواندن (۷) از راست به چپ ، ملاحظه می‌کنیم که مجموع دو لگاریتم خود یک لگاریتم است که شناسه‌اش حاصل‌ضرب شناسه‌های لگاریتمهای داده شده است . لگاریتم معمولی که در دبیرستان می‌خوانند واجد همین خاصیت است ؛ و در واقع ، همانطور که در صفحهٔ ۵۱۴ خواهیم دید ، با لگاریتم طبیعی فقط در یک عامل‌ثابت تفاوت دارد .

فرمول (۷) فوراً " به دو فرمول مهم دیگر منجر می‌شود . چون

$$\ln a + \ln \frac{1}{a} = \ln \left(a \cdot \frac{1}{a}\right) = \ln 1 = 0,$$

داریم

$$\ln \frac{1}{a} = -\ln a,$$

و در این صورت ، چون

$$\ln \frac{a}{b} = \ln \left(a \cdot \frac{1}{b}\right) = \ln a + \ln \frac{1}{b},$$

نیز خواهیم داشت

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b. \qquad (۸)$$

قضیهٔ زیر خاصیت اساسی دیگر لگاریتم را به ما می‌دهد .

قضیهٔ ۲ (لگاریتم توان گویا) . *هرگاه $x > 0$ ، آنگاه به ازای هر عدد گویای r ،*

$$\ln x^r = r \ln x \tag{۹}$$

برهان. روش اثبات مشابه قضیهٔ ۱ است. با مشتقگیری از تابع $\ln x^r$ ، که $x > 0$ و r گویا است، معلوم می‌شود که

$$\frac{d}{dx} \ln x^r = \frac{1}{x^r} \frac{d}{dx} x^r = \frac{1}{x^r} r x^{r-1} = \frac{r}{x},$$

که همان مشتق تابع $r \ln x$ است. بنابراین، $\ln x^r$ و $r \ln x$ هر دو پادمشتقهای r/x بربازه $(0, \infty)$ می‌باشند. از این نتیجه می‌شود که

$$\ln x^r = r \ln x + C, \tag{۹'}$$

که در آن C ثابت می‌باشد. با فرض $x = 1$ به دست می‌آوریم $\ln 1 = r \ln 1 + C$ ؛ در نتیجه، $C = 0$ و (۹') به (۹) تحویل خواهد شد.

در اثبات قضیهٔ ۲ از فرمول مشتقگیری $D_x x^r = r x^{r-1}$ استفاده شد، که در صفحات ۲۲۰ و ۲۳۴ به ازای r گویا اثبات شده است. در بخش ۵.۶ نشان‌داده‌ایم‌که این فرمول، و درنتیجهٔ قضیهٔ ۲، برای هر r حقیقی (نه لزوما" گویا) معتبر است.

مثال ۳. $\ln 72$ ، $\ln 6^{1/5}$ ، و $\ln \sqrt{\frac{2}{27}}$ را برحسب $\ln 2$ و $\ln 3$ بیان کنید.

حل. با استفادهٔ آزاد از فرمولهای (۷) تا (۹)، داریم

$$\ln 72 = \ln (2^3 \cdot 3^2) = \ln 2^3 + \ln 3^2 = 3 \ln 2 + 2 \ln 3,$$

$$\ln 6^{1/5} = \frac{1}{5} \ln 6 = \frac{1}{5} \ln (2 \cdot 3) = \frac{1}{5} (\ln 2 + \ln 3),$$

$$\ln \sqrt{\frac{2}{27}} = \ln \left(\frac{2}{3^3}\right)^{1/2} = \ln \frac{2^{1/2}}{3^{3/2}} = \ln 2^{1/2} - \ln 3^{3/2} = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{3}{2} \ln 3.$$

حال رفتار $\ln x$ وقتی $x \to \infty$ را بررسی می‌کنیم. به ازای هر عدد مثبت C ، مهم نیست چقدر بزرگ، فرض می‌کنیم n عدد صحیحی بزرگتر از $C/\ln 2$ باشد. برای بزرگتر کردن $\ln x$ از C کافی است $x > 2^n$ را اختیار کنیم. در واقع، چون $\ln x$ تابعی صعودی است، $x > 2^n$ ایجاب می‌کند که

$$\ln x > \ln 2^n = n \ln 2 > \frac{C}{\ln 2} (\ln 2) = C.$$

که در مرحلهٔ دوم از فرمول (۹) به ازای $x = 2$ و $r = n$ استفاده شده است (توجه‌کنید که $\ln 2 > 0$) . بنابراین ،

$$\lim_{x \to \infty} \ln x = \infty. \qquad (۱۰)$$

همچنین ،

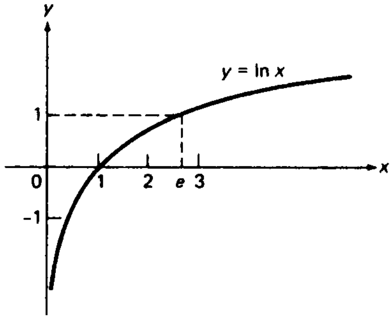
$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty, \qquad (۱۱)$$

زیرا ، به کمک جانشانی $x = 1/t$ ،

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = \lim_{t \to \infty} \ln \frac{1}{t} = -\lim_{t \to \infty} \ln t = -\infty,$$

بنابر (۱۰) و (۱۱) ، $\ln x$ مقادیر مثبت بدلخواه بزرگ و مقادیر منفی بدلخواه بزرگ می‌گیرد . این امر ، همراه با قضیهٔ مقدار میانی ، ایجاب می‌کند که $\ln x$ هر مقدار حقیقی‌را بگیرد . به عبارت دیگر ، برد $\ln x$ تمام خط حقیقی $(-\infty, \infty)$ می‌باشد .

شکل ۲ نمودار تابع $\ln x$ را نشان می‌دهد . از این شکل معلوم می‌شود که $\ln x$ بر



شکل ۲

$(0, \infty)$ صعودی است ، برد $(-\infty, \infty)$ را دارد ، و درشرط $\ln 1 = 0$ صدق می‌کند . همچنین ، می‌بینید که $\ln x$ بر $(0, \infty)$ به پایین مقعر است . این امر فورا" از آزمون تقعر (قضیهٔ ۱۰ ، صفحهٔ ۲۷۸) نتیجه می‌شود ، زیرا

$$\frac{d^2}{dx^2} \ln x = \frac{d}{dx} \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2} < 0 \qquad (0 < x < \infty).$$

به‌علاوه ، به خاطر (۱۱) ، $\ln x$ محور y را به عنوان مجانب دارد .

عدد e . فرض‌کنیم e چنان عددی باشد که ، مثل شکل ۲ ،

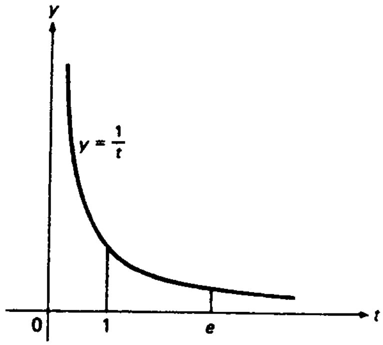
$$\ln e = 1,$$

یا معادلا "

$$\int_1^e \frac{dt}{t} = 1,$$

درنتیجه ، مساحت تحت‌منحنی $y = 1/t$ از $t = 1$ تا $t = e$ (مساحت سایه‌دار شکل۳) درست مساوی 1 است . از ساختن سه مستطیل R_1 ، R_2 ،و R_3 در شکل ۴ هر یک به مساحت $\frac{1}{2}$ معلوم می‌شود که

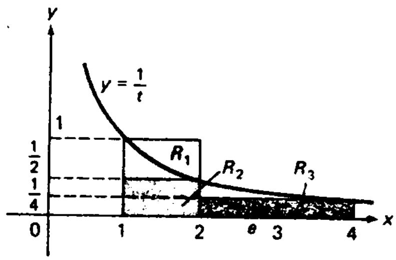
$\ln 2 <$ (R_1 مساحت) + (R_2 مساحت) $= 1 =$ (R_2 مساحت) + (R_3 مساحت) $< \ln 4.$



شکل ۳

بنابراین ، e عددی است بین 2 و 4 . این عدد ، به نام **پایهٔ لگاریتم طبیعی**، اهمیت زیادی در حساب دیفرانسیل و انتگرال و کاربردهایش دارد . خواهیم دید که e گنگ بوده و

$$e = 2.718281828459045\ldots$$



شکل ۴

(این امر که ارقام 1828 دو بار متوالی تکرار می‌شوند تصادفی است ولی در به‌خاطرآوردن

عدد e موجب تسهیل می‌شود.[۱] همانطور که در بخش ۵.۶ پس از معنی کردن a^x به‌ازای x گنگ خواهیم دید، عدد e از فرمول

$$e = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

نیز به دست می‌آید.

مثال ۴. تابع $\ln(\ln(\ln x))$ فقط وقتی تعریف شده است که $\ln(\ln x) > 0$، یعنی وقتی $\ln x > 1$ یا معادلاً "$x > e$"، و مشتق آن عبارت است از

$$\frac{d}{dx}\ln(\ln(\ln x)) = \frac{1}{\ln(\ln x)}\frac{d}{dx}\ln(\ln x)$$

$$= \frac{1}{\ln(\ln x)}\frac{1}{\ln x}\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x\ln x\cdot\ln(\ln x)}.$$

بنابر فرمولهای (۱۰) و (۱۱)، وقتی $x\to\infty$ یا $x\to 0^+$، لگاریتم (به‌صورت‌قدر مطلق) به بی‌نهایت نزدیک می‌شود، ولی وقتی $x\to\infty$، از x کندتر به بی‌نهایت میل می‌کند، و وقتی $x\to 0^+$ از $1/x$ کندتر به بی‌نهایت میل خواهد کرد. به طور دقیقتر،

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x} = 0, \tag{۱۲}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0. \tag{۱۳}$$

این دو فرمول به آسانی با قاعدهٔ هوپیتال[۲] ثابت می‌شوند. به‌طور مشروح،

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{D_x\ln x}{D_x x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0,$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{D_x\ln x}{D_x(1/x)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0.$$

باتوجه به

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\frac{1}{t} = -\lim_{t\to\infty}\frac{\ln t}{t} = 0,$$

---

۱. شش رقم بعدی 459045 نیز آسان به خاطر می‌آیند، زیرا یادآور زوایای یک مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین می‌باشند!

2. L'Hospital

پس از جانشانی $x = 1/t$ می‌توان (۱۳) را نیز از (۱۲) نتیجه گرفت.

مشتقگیری لگاریتمی. محاسبهٔ مشتق تابع $f(x)$ را اغلب می‌توان با تکنیک **مشتقگیری لگاریتمی** ساده کرد. دراین راه ابتدا از فرمول (۴') و قاعدهٔ زنجیره‌ای استفاده کرده مشتق لگاریتمی را حساب می‌کنیم:

$$\frac{d}{dx}\ln|f(x)| = \frac{1}{f(x)}\frac{d}{dx}f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}, \qquad (۱۴)$$

و سپس، با ضرب (۱۴) در $f(x)$، مشتق معمولی را به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = f(x)\frac{d}{dx}\ln|f(x)|.$$

توجه کنید که این تکنیک فقط در نقاطی قابل اعمال است که $f(x) \neq 0$، زیرا در غیراین صورت $\ln|f(x)|$ تعریف نشده است.

مثال ۵. با استفاده از مشتقگیری لگاریتمی، مشتق تابع

$$f(x) = \frac{(6x+1)^{7/3}\cos^9 x}{(x^2-4)^5}$$

را حساب کنید.

حل. چون

$$|f(x)| = \frac{|6x+1|^{7/3}|\cos x|^9}{|x^2-4|^5},$$

به کمک فرمولهای (۷) تا (۹) معلوم می‌شود که

$$\ln|f(x)| = \frac{7}{3}\ln|6x+1| + 9\ln|\cos x| - 5\ln|x^2-4|.$$

حال، با مشتقگیری از $\ln|f(x)|$، مشتق لگاریتمی به دست می‌آید:

$$\frac{d}{dx}\ln|f(x)| = \frac{7}{3(6x+1)}\frac{d}{dx}(6x+1) + \frac{9}{\cos x}\frac{d}{dx}\cos x - \frac{5}{x^2-4}\frac{d}{dx}(x^2-4)$$
$$= \frac{14}{6x+1} - \frac{9\sin x}{\cos x} - \frac{10x}{x^2-4}.$$

در این صورت، با ضرب در $f(x)$ مشتق مطلوب به دست می‌آید:

$$f'(x) = \frac{(6x+1)^{7/3}\cos^9 x}{(x^2-4)^5}\left(\frac{14}{6x+1} - 9\tan x - \frac{10x}{x^2-4}\right).$$

توضیح دهید چرا این فرمول به‌ازای $x = \pm 2, -\frac{1}{6}$ یا $x = (n + \frac{1}{2})\pi$ ، که در آن n عددی صحیح است ، برقرار نیست .

مسائل

۱ . آیا توابع $\ln x^2$ و $2 \ln x$ مساویند ؟

تمام x هایی را بیابید که تابع داده شده به ازای آنها تعریف شده است .

۲ . $\ln (x^2 - 9)$

۳ . $\ln (\sqrt{x-4} + \sqrt{6-x})$

۴ . $\ln (\sin \pi x)$

۵ . $\arcsin (\ln x)$

۶ . $\ln (\ln (1 - x^2))$

۷ . $\sqrt{\ln (x-2)}$

عبارات زیر را برحسب $\ln 2$ ، $\ln 3$ ، و $\ln 5$ بیان کنید .

۸ . $\ln \frac{125}{36}$

۹ . $\ln \sqrt[3]{\frac{24}{25}}$

۱۰ . $\ln (810)^{3/4}$

۱۱ . $\ln (0.002)$

۱۲ . $\ln \sqrt{0.005}$

۱۳ . $\ln (4.5 \times 10^4)$

۱۴ . ثابت کنید تابع $\ln (x + \sqrt{1 + x^2})$ فرد است .

۱۵ . متوسط تابع $1/x$ را روی $[a, b]$ درصورتی که a و b متحدالعلامه باشند بیابید .

از عبارات زیر مشتق بگیرید .

۱۶ . $\ln (6 - x^2)$

۱۷ . $\ln (x^3 - 2x + 5)$

۱۸ . $(\ln x)^2$

۱۹ . $x^2 \ln x$

۲۰ . $\frac{\ln x}{x}$

۲۱ . $\frac{\ln x}{x^2 + 1}$

۲۲ . $\ln \tan \frac{x}{2}$

۲۳ . $x[\sin (\ln x) - \cos (\ln x)]$

۲۴ . $\ln (\arcsin x)$

۲۵ . $\ln \frac{1+t}{1-t}$

۲۶ . $\ln \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}$

۲۷ . $\ln (t + \sqrt{1 + t^2})$

کمیات زیر را بیابید .

۲۸ . مشتق چهارم $x^2 \ln x$

۲۹ . مشتق پنجم $\frac{\ln x}{x}$

۳۰. از تمام خطوط مماس بر منحنی $y = \ln x$ فقط یکی از مبداء می‌گذرد. این خط را پیدا کنید.

۳۱. تحقیق کنید که

$$\int \ln x\, dx = x \ln x - x + C.$$

۳۲. نشان دهید که تابع $\ln x$ غیراز محور y مجانب ندارد.

مساحت A ی ناحیهٔ R زیر را بیابید.

۳۳. محدود به محور x، خط $x = e$، و منحنی $y = \ln x$

۳۴. تحت منحنی $y = 2/(x+1)$ از $x = 0$ تا $x = 3$

۳۵. بین منحنیهای $y = 2x - x^2$ و $y = 1/x$

۳۶. بین منحنیهای $y = 2/x$ و $y = 10/(x^2+4)$

در هر حالت، ناحیهٔ R را رسم کنید.

تمام اکسترممهای موضعی و نقاط عطف تابع داده‌شده را بیابید. تابع بر چه بازه‌ای صعودی است؟ نزولی است؟ به بالا مقعر است؟ به پایین مقعر است؟ تمام اکسترممهای مطلق و مجانبها را بیابید. تابع را رسم نمایید.

۳۷. $f(x) = x \ln x$

۳۸. $f(x) = (\ln x)^2$

۳۹. $f(x) = \ln(1 + x^2)$

۴۰. $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$

۴۱. با استفاده از قضیهٔ مقدار میانگین، نشان دهید که اگر $0 < a < b$،

$$\frac{b-a}{b} < \ln\frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}$$

۴۲. نشان دهید که به ازای هر $x > 0$، $x - \frac{1}{2}x^2 < \ln(1+x) < x$.

مشتق عبارات زیر را با استفاده از مشتقگیری لگاریتمی بیابید.

۴۳. $(2x^2 - 1)^{3/4}(x^3 + 1)^{4/3}$

۴۴. $\dfrac{(x+1)^2}{(x+2)^3(x+3)^4}$

۴۵. $\sqrt[3]{\dfrac{x(x^2+1)}{(x-1)^2}}$

۴۶. $\dfrac{\sqrt{4x+1}}{(x+2)^7(\ln x)^3}$

۴۷. $\dfrac{(1+\sin x)^5}{(1-\cos x)^6}$

۴۸. $\dfrac{(2-\cot x)^3}{(3+\sec x)^2}$

حدود زیر را با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال حساب کنید.

۴۹. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1}$

۵۰. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\ln \sin x}$

۵۱. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln \cos x}{x}$

۵۲. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln \sin 2x}{\ln \sin x}$

۵۳. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}\right)$

۵۴. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}\pi^+} \left[\cos x \ln\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)\right]$

۲.۶ چند انتگرال که به لگاریتمها منجر می‌شوند

همانطور که مثالهای زیر نشان می‌دهند، تابع لگاریتم توان ما را در محاسبهٔ انتگرالها به طور قابل توجهی بالا می‌برد.

مثال ۱. انتگرال $\displaystyle\int \frac{dx}{ax+b}$ $(a \neq 0)$ را حساب کنید.

حل. تابع $F(x) = \ln|x|$ یک پاد مشتق $1/x$ است. بنابراین، طبق قاعدهٔ (چهار)، صفحهٔ ۴۰۲،

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}F(ax+b) + C = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C.$$

لذا،

$$\int \frac{dx}{5x+7} = \frac{1}{5}\ln|5x+7| + C,$$

$$\int \frac{dx}{1-2x} = \frac{1}{-2}\ln|1-2x| + C = -\frac{1}{2}\ln|2x-1| + C,$$

و غیره.

مثال ۲. انتگرال $\displaystyle\int \frac{x+a}{x+b}\,dx$ را حساب کنید.

حل. با تقسیم $x+b$ بر $x+a$ معلوم می‌شود که

$$\frac{x+a}{x+b} = 1 + \frac{a-b}{x+b},$$

و لذا،

$$\int \frac{x+a}{x+b}\,dx = \int\left(1 + \frac{a-b}{x+b}\right)dx = x + (a-b)\ln|x+b| + C. \qquad (1)$$

مثال ۳. انتگرال $\int \frac{2x+3}{6x-1}\,dx$ را حساب کنید .

حل . چون

$$\int \frac{2x+3}{6x-1}\,dx = \int \frac{2(x+\frac{3}{2})}{6(x-\frac{1}{6})}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{x+\frac{3}{2}}{x-\frac{1}{6}}\,dx,$$

از فرمول (۱) به ازای $a=\frac{3}{2}, b=-\frac{1}{6}$ نتیجه می‌شود که

$$\int \frac{2x+3}{6x-1}\,dx = \frac{1}{3}\left[x+\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{6}\right)\ln\left|x-\frac{1}{6}\right|+k\right],$$

$$= \frac{1}{3}x+\frac{5}{9}\ln\left|x-\frac{1}{6}\right|+C,$$

که در آن k و $C=\frac{1}{3}k$ ثابتهای دلخواهی هستند . چون

$$\frac{5}{9}\ln\left|x-\frac{1}{6}\right| = \frac{5}{9}\ln\left|\frac{6x-1}{6}\right| = \frac{5}{9}\ln|6x-1|-\frac{5}{9}\ln 6,$$

می‌توان پس از ادغام $-\frac{5}{9}\ln 6$ در ثابت دلخواه انتگرالگیری C نیز نوشت

$$\int \frac{2x+3}{6x-1}\,dx = \frac{1}{3}x+\frac{5}{9}\ln|6x-1|+C.$$

انتگرالگیری از مشتق لگاریتمی . حال فرض‌کنیم $f(x)$ تابع مشتقپذیری باشد که مقدار صفر را نمی‌گیرد . در این صورت ، مثل صفحهٔ ۴۹۳ ، $f(x)$ دارای مشتق لگاریتمی

$$\frac{d}{dx}\ln|f(x)| = \frac{f'(x)}{f(x)} \qquad (۲)$$

است ، که در آن پریم یعنی مشتقگیری نسبت به x . پس نتیجه می‌شود که

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)|+C. \qquad (۳)$$

این فرمول ابزار مخصوصا" مفیدی در محاسبهٔ انتگرالهاست .

مثال ۴. انتگرال $\int \frac{2x-3}{x^2-3x+2}\,dx$ را حساب کنید .

حل . صورت انتگرالده مشتق مخرج است . لذا ، طبق (۳) ، بر هر بازه که شامل نقاط $x=1,2$ که صفرهای مخرج انتگرالده‌اند نباشد داریم

$$\int \frac{2x-3}{x^2-3x+2}\,dx = \ln|x^2-3x+2| + C$$

مثال ۵. انتگرال $\int \tan x\,dx$ را حساب کنید.

حل. چون

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{(\cos x)'}{\cos x},$$

به کمک (۳) معلوم می‌شود که

$$\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + C. \qquad (۴)$$

به بیان دیگر،

$$\tan x = \frac{\sec x \tan x}{\sec x} = \frac{(\sec x)'}{\sec x},$$

که ایجاب می‌کند که

$$\int \tan x\,dx = \ln|\sec x| + C. \qquad (۴')$$

فرمولهای (۴) و (۴') معادلند، زیرا

$$-\ln|\cos x| = \ln\left|\frac{1}{\cos x}\right| = \ln|\sec x|.$$

هر دو فرمول بر هر بازه‌ای که شامل صفرهای $\cos x$ نباشد، یعنی نقاط $x = (n+\frac{1}{2})\pi$ که در آنها n عدد صحیحی است، معتبرند.

فرض کنید در فرمول (۲) اختیار کنیم

$$f(x) = \frac{x+a}{x+b} \qquad (a \neq b)$$

در این صورت،

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{d}{dx}\ln|f(x)| = \frac{d}{dx}(\ln|x+a| - \ln|x+b|)$$
$$= \frac{1}{x+a} - \frac{1}{x+b} = \frac{b-a}{(x+a)(x+b)},$$

و (۳) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\int \frac{b-a}{(x+a)(x+b)}\,dx = \ln\left|\frac{x+a}{x+b}\right| + C \qquad (a \neq b),$$

یا معادلاً

$$\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{b-a}\ln\left|\frac{x+a}{x+b}\right| + C \qquad (a \neq b). \tag{۵}$$

با فرض $a \neq 0$ و قرار دادن $b = -a$، معلوم می‌شود که

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = -\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C \qquad (a \neq 0),$$

یا معادلاً

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C \qquad (a \neq 0). \tag{۶}$$

این با فرمول

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \qquad (a \neq 0),$$

که در صفحهٔ ۴۷۰ به‌دست‌آمد فرق دارد. در سه فرمول اخیر می‌توان $a > 0$ را نیز اختیار کرد.

مثال ۶. انتگرال $\int \frac{dx}{x^2+x-6}$ را محاسبه نمایید.

حل. چون

$$\frac{1}{x^2+x-6} = \frac{1}{(x-2)(x+3)},$$

از فرمول (۵) به ازای $b = 3$، $a = -2$ نتیجه می‌شود که

$$\int \frac{dx}{x^2+x-6} = \frac{1}{3-(-2)}\ln\left|\frac{x-2}{x+3}\right| + C = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{x-2}{x+3}\right| + C.$$

تحقیق کنید که با انتخاب $a = 3,\ b = -2$ نیز همین جواب به دست می‌آید.

مثال ۷. انتگرال $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x-6}$ را حساب کنید.

حل. بنابر قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال و مثال پیش،

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x-6} = \left[\frac{1}{5}\ln\left|\frac{x-2}{x+3}\right|\right]_0^1 = \frac{1}{5}\left(\ln\left|\frac{1-2}{1+3}\right| - \ln\left|\frac{0-2}{0+3}\right|\right)$$
$$= \frac{1}{5}\left(\ln\frac{1}{4} - \ln\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{5}\ln\frac{3}{8} \approx -0.196.$$

توجه کنید که اعتبار این محاسبات تابع آن است که بازهٔ انتگرالگیری شامل هیچ یک از نقاط $x = 2, -3$ که صفرهای انتگرالده‌اند نباشد.

مثال ۸. انتگرال $\int \frac{dx}{3x^2+5x-2}$ را حساب کنید.

حل. چون

$$\frac{1}{3x^2+5x-2} = \frac{1}{(3x-1)(x+2)} = \frac{1}{3(x-\frac{1}{3})(x+2)},$$

از فرمول (۵) به ازای $a = -\frac{1}{3}$، $b = 2$ نتیجه می‌شود که

$$\int \frac{dx}{3x^2+5x-2} = \frac{1}{3[2-(-\frac{1}{3})]}\ln\left|\frac{x-\frac{1}{3}}{x+2}\right| = \frac{1}{7}\ln\left|\frac{x-\frac{1}{3}}{x+2}\right| + C.$$

به عنوان تمرین، نشان دهید که این را می‌توان به شکل زیر نیز نوشت:

$$\int \frac{dx}{3x^2+5x-2} = \frac{1}{7}\ln\left|\frac{3x-1}{x+2}\right| + C$$

(ر.ک. استدلال آخر مثال ۳).

مثال ۹. انتگرال $\int \frac{dx}{4x^2-9}$ را حساب کنید.

حل. بنابر قاعدهٔ (چهار)، صفحهٔ ۴۰۲، و فرمول (۶) به ازای $a = 3$، داریم

$$\int \frac{dx}{4x^2-9} = \int \frac{dx}{(2x)^2-3^2} = \frac{1}{2(2)(3)}\ln\left|\frac{2x-3}{2x+3}\right| + C$$
$$= \frac{1}{12}\ln\left|\frac{2x-3}{2x+3}\right| + C.$$

انتگرالده در تمام مثالهای فوق جز یکی تابع گویای ساده‌ای است. در بخش ۶.۷ تکنیک محاسبهٔ انتگرال یک تابع گویای *دلخواه* ذکر خواهد شد.

مسائل

انتگرالهای زیر را حساب کنید .

۱. $\int \frac{dx}{15x+5}$

۲. $\int \frac{dx}{2x-9}$

۳. $\int \frac{ds}{11-7s}$

۴. $\int_1^7 \frac{dx}{20x+10}$

۵. $\int_2^4 \frac{dt}{8-5t}$

۶. $\int_{-2}^2 \frac{du}{12u+25}$

انتگرالهای زیر را با استفاده از فرمول (۱) حساب کنید .

۷. $\int \frac{x-2}{4x+3}\,dx$

۸. $\int \frac{2x+1}{2x-1}\,dx$

۹. $\int \frac{6t+1}{5-t}\,dt$

۱۰. $\int_0^3 \frac{1-3x}{2+4x}\,dx$

۱۱. $\int_{-2}^4 \frac{v}{v+5}\,dv$

۱۲. $\int_0^1 \frac{8w+4}{8-4w}\,dw$

انتگرالهای زیر را با استفاده از فرمول (۳) حساب کنید .

۱۳. $\int \frac{x^2}{x^3-1}\,dx$

۱۴. $\int \frac{x^3+x}{x^4+2x^2+3}\,dx$

۱۵. $\int \frac{dx}{x\ln x}$

۱۶. $\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$

۱۷. $\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{2+\sin x}\,dx$

۱۸. $\int_{e^2}^{e^4} \frac{dx}{x\ln x\cdot\ln(\ln x)}$

نشان دهید که

۱۹. $\int \cot x\,dx = \ln|\sin x| + C$

۲۰. $\int \sec x \csc x\,dx = \int \frac{dx}{\cos x \sin x} = \ln|\tan x| + C$

انتگرالهای زیر را با استفاده از فرمول (۵) یا (۶) حساب کنید .

۲۱. $\int \frac{dx}{x^2-4x-5}$

۲۲. $\int \frac{dx}{4x^2+4x-3}$

۲۳. $\int \frac{dx}{9x^2 - 25}$ ✓

۲۴. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 - 5x + 6}$ ✓

۲۵. $\int_{-3}^{0} \frac{dy}{y^2 + 3y - 4}$ ✓

۲۶. $\int_{-2}^{1} \frac{dz}{16 - z^2}$ ✓

۶.۳ تابع نمایی؛ نماییها در هر پایه

نمایی به عنوان معکوس لگاریتم. تابع لگاریتم $f(x) = \ln x$ ، که در بخش پیش‌تعریف شد، بر بازهٔ $(0, \infty)$ که به روی بازهٔ $(-\infty, \infty)$ نگاشته می‌شود صعودی و پیوسته است. لذا، f دارای تابع معکوس‌صعودی وپیوستهٔ f^{-1} بربازهٔ $(-\infty, \infty)$ است، و f^{-1} بازهٔ $(-\infty, \infty)$ را به روی بازهٔ $(0, \infty)$ می‌نگارد. تابع f^{-1} یکی از مهمترین توابع در ریاضیات‌است. این تابع را ***نمایی در پایهٔ*** e یا فقط ***نمایی*** نامیده و با

$$\exp x$$

نمایش می‌دهند.

تابع $\exp x$ به ازای هر x تعریف شده است، زیرا قلمروش برد $\ln x$ ، یعنی بازهٔ $(-\infty, \infty)$ ، می‌باشد. به‌علاوه، $\exp x$ به ازای هر x مثبت است، زیرا بردش‌قلمرو $\ln x$ یعنی بازهٔ $(0, \infty)$ ، می‌باشد. چون هر یک از توابع $\exp x$ و $\ln x$ معکوس دیگری است، اتحادهای زیر را داریم:

$$\exp(\ln x) = x \quad (x > 0), \qquad \ln(\exp x) = x \quad (x\ \text{هر}). \tag{۱}$$

بخصوص، از اتحاد اول و فرمولهای

$$\ln 1 = 0, \qquad \ln e = 1$$

نتیجه می‌شود که

$$\exp 0 = 1 \tag{۲}$$

و

$$\exp 1 = e. \tag{۳}$$

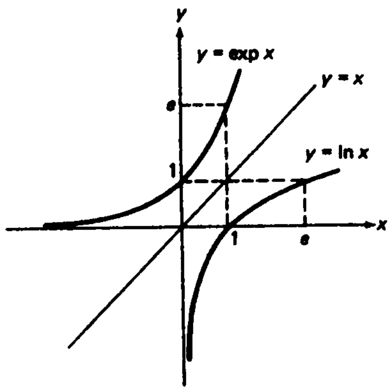
مثل هر تابع یک به یک و معکوسش، نمودار هر یک از توابع $\ln x$ و $\exp x$ منعکس دیگری نسبت به خط $y = x$ است (ر.ک. شکل ۵).

از شکل واضح است که $\exp x$ بر $(-\infty, \infty)$ مثبت و صعودی است، و در شرایط (۲) و (۳) صدق می‌کند. چون $\exp x$ بر $(-\infty, \infty)$ صعودی بوده و دارای برد $(0, \infty)$ است، فوراً دیده می‌شود که

$$\lim_{x \to \infty} \exp x = \infty, \tag{۴}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \exp x = 0, \tag{۵}$$

و این رفتار از شکل نیز واضح می‌باشد. پس از (۵) معلوم می‌شود که $\exp x$ محور x را به عنوان مجانب دارد.



شکل ۵

نمایی یک مجموع. حال خاصیت کلیدی نمایی را ثابت می‌کنیم که از فرمول لگاریتم حاصل ضرب "به ارث" رسیده است.

قضیهٔ ۳ (نمایی مجموع). فرمول

$$\exp(x + y) = (\exp x)(\exp y) \tag{۶}$$

به ازای x و y دلخواه برقرار است.

برهان. فرض کنیم $X = \exp x,\ Y = \exp y$؛ درنتیجه، $x = \ln X,\ y = \ln Y$. پس، طبق قضیهٔ ۱، صفحهٔ ۴۸۷،

$$x + y = \ln X + \ln Y = \ln XY,$$

و لذا،

$$\exp(x + y) = \exp(\ln(XY)) = XY = (\exp x)(\exp y).$$

بنابر رابطهٔ (۶)، نمایی مجموع دوجمله حاصل ضرب نماییهای تک‌تک جملات است. به بیان معادل، با خواندن (۶) از راست به چپ، می‌بینیم که حاصل‌ضرب دونمایی داده شده خود یک نمایی است که شناسه‌اش مجموع شناسه‌های نماییهای داده شده است.

فرض کنیم r عدد گویایی باشد . با انتخاب $x = e$ در فرمول (۹) ، صفحهٔ ۴۸۹ ، درمی‌یابیم که

$$\ln e^r = r \ln e = r,$$

و لذا ،

$$\exp r = e^r.$$

اما $\exp x$ به ازای x گنگ نیز تعریف شده است ، اگرچه هنوز به ازای چنین x به e^x معنی نداده‌ایم . حال با تعریف سادهٔ

$$e^x = \exp x \tag{۷}$$

به ازای هر x ، گویا و گنگ ، این کار را می‌کنیم . به‌علاوه ، به دلیلی که در مسئلهٔ ۴۱ ذکر شد ، اگر بخواهیم تابع e^x پیوسته باشد ، این تنها تعریف ممکن e^x است . لذا ، به‌توانهای گنگ e ، نظیر $e^{\sqrt{2}}$ یا e^{π} ، معنی واحدی بخشیده‌ایم . برای درک این منظور ، تعبیر

$$e^{\sqrt{2}} = (2.718281828459\ldots)^{1.414213562373\ldots}$$

را بدون کمکی از حساب دیفرانسیل و انتگرال درنظر می‌گیریم .

از حالا به بعد نماد e^x یعنی $\exp x$ ، ولی نماد اخیر نیز گهگاه مفید واقع می‌شود . اتحادهای (۱) برحسب e^x شکل فشردهٔ زیر را به خود می‌گیرند :

$$e^{\ln x} = x \quad (x > 0), \qquad \ln e^x = x \quad (\text{هر } x).$$

به همین نحو ، فرمول (۶) را می‌توان (از راست به چپ) به صورت

$$e^x e^y = e^{x+y} \tag{۸}$$

نوشت . اعتبار (۸) به ازای x و y پیش از تعریف (۷) معلوم بود ، ولی اکنون می‌بینیم‌که (۸) به ازای اعداد حقیقی دلخواه ،بخصوص اعداد گنگ ، برقرار است . با فرض $y = -x$ در (۸) به دست می‌آوریم

$$e^x e^{-x} = e^{x-x} = e^0 = 1,$$

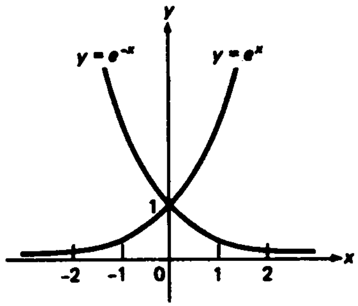
که فورا" ایجاب می‌کند که

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}. \tag{۹}$$

تابع e^{-x} به خودی خود مهم است . شکل ۶ نمودارهای e^x و e^{-x} را دریک دستگاه مختصات قائم‌نشان می‌دهد . توجه کنید که هر نمودار منعکس دیگری نسبت به محور y است .

فرمولهای (۴) و (۵) برحسب e^x به صورت زیر درمی‌آیند :

$$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty \tag{۴}$$



شکل ۶

و

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0. \qquad (۵)$$

توجه کنید که (۵') نتیجهٔ فوری (۴') است ، زیرا به کمک جانشانی $x=-t$ وفرمول (۹) ،

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{t\to\infty} e^{-t} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{e^t} = 0.$$

همچنین ، باید توجه داشت که

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x} = \lim_{t\to-\infty} e^t = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} e^{-x} = \lim_{t\to\infty} e^t = \infty,$$

و این از نمودار e^{-x} واضح خواهد بود .

مشتق و انتگرال e^x . برای مشتقگیری از تابع نمایی ، از قضیهٔ ۴ ، صفحهٔ ۴۶۰ ،باتوجه به اینکه شرایط قضیه برقرارنداستفاده می‌کنیم . با نوشتن $y=e^x$ و $x=\ln y$ ، داریم

$$\frac{d}{dx}e^x = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \frac{1}{\dfrac{d}{dy}\ln y} = \frac{1}{\dfrac{1}{y}} = y = e^x,$$

درنتیجه ،

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x. \qquad (۱۰)$$

همانطور که این فرمول اساسی نشان می‌دهد ، تابع e^x دارای این خاصیت جالب‌توجه‌است که مشتق خودش می‌باشد ؛ و لذا ، با هر تعداد مشتقگیری تغییر نمی‌کند . لذا ، به ازای هر

عدد صحیح مثبت n ،

$$\frac{d^n}{dx^n}e^x = e^x$$

پس از (۱۰) نتیجه می‌شود که

$$\int e^x\,dx = e^x + C. \qquad (۱۱)$$

همچنین ، می‌بینیم که

$$\frac{d^2}{dx^2}e^x = e^x > 0,$$

درنتیجه ، بنابر آزمون تقعر ، e^x بر $(-\infty, \infty)$ به بالا مقعر است .

مثال ۱ . از xe^x مشتق بگیرید .

حل . بنابر قاعدهٔ حاصلضرب ،

$$\frac{d}{dx}(xe^x) = \frac{dx}{dx}e^x + x\frac{de^x}{dx} = e^x + xe^x.$$

مثال۲ . از $\sqrt{1+e^x}$ مشتق بگیرید .

حل . بنابر قاعدهٔ زنجیره‌ای ،

$$\frac{d}{dx}\sqrt{1+e^x} = \frac{1}{2\sqrt{1+e^x}}\frac{d}{dx}(1+e^x) = \frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}}.$$

مثال۳ . انتگرال $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx$ را حساب کنید .

حل . با تقسیم صورت بر مخرج به دست می‌آوریم

$$\frac{e^{3x}+1}{e^x+1} = \frac{(e^x)^3+1}{e^x+1} = (e^x)^2 - e^x + 1 = e^{2x} - e^x + 1.$$

بنابراین ، به کمک (۱۱) داریم

$$\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx = \int (e^{2x} - e^x + 1)\,dx = \frac{1}{2}e^{2x} - e^x + x + C$$

نمایی در پایهٔ a . حال‌که به‌توانهای حقیقی دلخواه عدد e معنی‌بخشیده‌ایم، می‌خواهیم همین کار را برای هر عدد مثبت a انجام دهیم. آنچــه لازم است تابع پیوسته‌ای چون $\exp_a x$ است‌که وقتی x عددی گویا باشد مقدار a^x را بگیرد. انتخاب شایسته عبارت است از

$$\exp_a x = \exp(x \ln a) = e^{x \ln a}.$$

در واقع، چون به ازای r گویا

$$\ln a^r = r \ln a, \tag{۱۲}$$

بنابر قضیهٔ ۲، صفحهٔ ۴۸۸، به ازای $x = a$ معلوم می‌شود که طبق مطلوب

$$\exp_a r = \exp(r \ln a) = \exp(\ln a^r) = a^r,$$

و به‌علاوه $\exp_a x$ پیوسته‌است، زیرا تابع پیوستهٔ $\exp x$ از تابع پیوستهٔ $x \ln a$ می‌باشد. تابع $\exp_a x$ نمایی در پایهٔ a است، و اگر $a = e$ به e^x تحویل می‌شود. حال برای معنی بخشیدن به a^x به ازای x حقیقی دلخواه، بخصوص x گنگ، در تشابه کامل با (۷) تعریف می‌کنیم

$$a^x = \exp_a x = e^{x \ln a} \qquad (a > 0). \tag{۱۳}$$

تابع a^x، به صورت تعریف شده با (۱۳)، خواصش را از خواص نظیر e^x " به ارث می‌برد". مثلاً،

$$a^{-x} = e^{-x \ln a} = \frac{1}{e^{x \ln a}},$$

درنتیجه،

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}.$$

به‌علاوه،

$$a^x a^y = e^{x \ln a} e^{y \ln a} = e^{x \ln a + y \ln a} = e^{(x+y) \ln a},$$

و درنتیجه،

$$a^x a^y = a^{x+y}. \tag{۱۴}$$

با گرفتن لگاریتم از طرفین (۱۳)، معلوم می‌شود که

$$\ln a^x = \ln (e^{x \ln a}).$$

پس نتیجه می‌شود

$$\ln a^x = x \ln a,$$

که فرمول (۱۲) را از حالتی که x عدد گویای r است به حالت x حقیقی دلخــواه تعمیم

می‌دهیم .

خاصیت مهم دیگر a^x از فرمول

$$(a^x)^y = a^{xy} \qquad (۱۵)$$

به دست می‌آید که اعتبار آن به ازای x و y گویا از قبل معلوم است . برای اثبات (۱۵) به ازای x و y حقیقی ، ابتدا از (۱۳) با e^x و y به جای a و x نتیجه می‌شود

$$(e^x)^y = e^{y \ln e^x} = e^{yx} = e^{xy}, \qquad (۱۵')$$

که همان (۱۵) به ازای $a = e$ است . اما ، در این صورت ،

$$(a^x)^y = (e^{x \ln a})^y = e^{xy \ln a} = a^{xy},$$

که همان (۱۵) به ازای $a > 0$ کـلـی‌است . اعتبار فرمولهای (۱۴) و (۱۵) به ازای x و y حقیقی دلخواه شایستگی بیشتر تعریف (۱۳) را گواه خواهد بود . به‌علاوه ،

$$\frac{a^x}{a^y} = a^x a^{-y},$$

و لذا ،

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y},$$

ولی هرگاه b عدد مثبت دیگری باشد ، آنگاه

$$a^x b^x = e^{x \ln a} e^{x \ln b} = e^{x(\ln a + \ln b)} = e^{x \ln ab},$$

که ایجاب می‌کند که

$$a^x b^x = (ab)^x.$$

لذا ، به‌طور خلاصه ، همان *قوانین نماهای*

$$a^x a^y = a^{x+y}, \qquad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}, \qquad (a^x)^y = a^{xy}, \qquad (ab)^x = a^x b^x$$

مثل صفحه۱۸۶ ثابت‌شده‌اند ،ولی این بار نماهای x و y **حقیقی و دلخواه** می‌باشند؛ یعنی ، برای نماهای x و y گویا و گنگ .

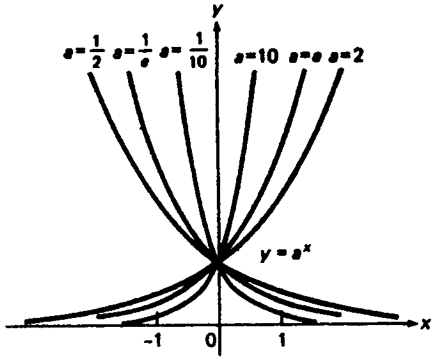
رفتار تابع a^x اساسا" به‌این وابسته‌است که عدد مثبت a از 1 بزرگتر یا کوچکترباشد (توجه کنید که اگر $a = 1$ ، $a^x \equiv 1$) . فرض کنیم $t = x \ln a$ ؛ درنتیجه ، (۱۳) شکل فشرده‌ٔ $a^x = e^t$ را به خود می‌گیرد . هرگاه $a > 1$ ، آنگاه $\ln a > 0$. بنابـراین ، t با x متحدالعلامه بوده ، و

$$\lim_{x\to\infty} a^x = \lim_{t\to\infty} e^t = \infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{t\to-\infty} e^t = 0 \qquad (a > 1), \qquad (۱۶)$$

زیرا $x \to \pm\infty$ ایجاب می‌کند که $t \to \pm\infty$. از آن سو، هرگاه $0 < a < 1$ ، آنگاه $\ln a < 0$ ؛ درنتیجه، t با x مختلف‌العلامه است، و به جای (۱۶) داریم

$$(۱۶') \qquad \lim_{x\to\infty} a^x = \lim_{t\to-\infty} e^t = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{t\to\infty} e^t = \infty \qquad (0 < a < 1),$$

زیرا اکنون $x \to \pm\infty$ ایجاب می‌کند که $t \to \mp\infty$. این تفاوت اساسی بین رفتار تابع a^x به ازای $a > 1$ و رفتارش به ازای $0 < a < 1$ در شکل ۷ نموده شده، که در آن نمودار a^x بـه ازای $a = 2, e, 10, 1/2, 1/e, 1/10$ در یک دستگاه مختصات قائم رسم شده است. توجه



شکل ۷

کنید که هر جفت منحنی $y = a^x$ و $y = (1/a)^x$ منعکس دیگری نسبت به محور y است. این نتیجهٔ فوری $(1/a)^x = a^{-x}$ است. توضیح‌دهید چرا منحنیهای $y = a^x$ همه ازنقطهٔ $(0, 1)$ می‌گذرند، ولی نقطهٔ مشترک دیگری ندارند.

مشتق و انتگرال a^x . مشتق تابع a^x به آسانی به دست می‌آید. در واقع، بنابر (۱۰) و قاعدهٔ زنجیره‌ای،

$$\frac{d}{dx} a^x = \frac{d}{dx} e^{x \ln a} = e^{x \ln a} \frac{d}{dx}(x \ln a),$$

و درنتیجه،

$$(۱۷) \qquad \frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a.$$

از (۱۷) فورا" نتیجه می‌شود که

$$(۱۸) \qquad \int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

مثال ۴. از $x\left(\frac{1}{3}\right)^x$ مشتق بگیرید.

حل. بنابر قاعدهٔ حاصل‌ضرب و (۱۷)،

$$\frac{d}{dx}\left[x\left(\frac{1}{3}\right)^x\right] = \left(\frac{1}{3}\right)^x + x\left(\frac{1}{3}\right)^x \ln\frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^x (1 - x\ln 3).$$

مثال ۵. از $2^{\sin x}$ مشتق بگیرید.

حل. بنابر (۱۷) و قاعدهٔ زنجیره‌ای،

$$\frac{d}{dx}2^{\sin x} = 2^{\sin x}\ln 2\,\frac{d}{dx}\sin x = 2^{\sin x}\cos x\ln 2.$$

مثال ۶. انتگرال $\int_{-1}^{1} 10^x\,dx$ را حساب کنید.

حل. بنابر فرمول (۱۸)،

$$\int_{-1}^{1} 10^x\,dx = \left.\frac{10^x}{\ln 10}\right|_{-1}^{1} = \frac{10^1 - 10^{-1}}{\ln 10} = \frac{9.9}{\ln 10} \approx 4.3.$$

مثال ۷. نشان دهید که $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \ln a$.

حل. این یک صورت مبهم $0/0$ است که می‌توان آن را با قاعدهٔ هوپیتال رفع کرد:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{D_x(a^x - 1)}{D_x x} = \lim_{x\to 0} a^x\ln a = \ln a.$$

مسائل

۱. تحقیق کنید که نمودار تابع ce^x $(c > 0)$ را می‌توان از انتقال افقی نمودار e^x به دست آورد.

از عبارات زیر مشتق بگیرید.

۲. e^{4x+5} ۳. e^{-6x} ۴. xe^{2x}

۵. x^2e^x ۶. $\frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ ۷. e^{x^2}

۸. $e^x \ln x$

۹. $e^{1/x}$

۱۰. $\dfrac{e^x}{x}$

۱۱. $e^{\sqrt{x}}$

۱۲. $\cos(e^x)$

۱۳. $e^{\tan x}$

۱۴. $\arcsin(e^{x/2})$

۱۵. $x\,10^x$

۱۶. 3^{-x}

۱۷. 5^{x^2}

۱۸. π^{x^2-x}

۱۹. $\exp_2(4^x)$

۲۰. $\ln|e^x - 1|$

۲۱. $\dfrac{10^x - 1}{5^x}$

۲۲. $\exp(e^x)$

۲۳. $\exp(\ln u - u)$

۲۴. $\ln(\sqrt{e^x})$

کمیات زیر را بیابید .

۲۵. مشتق سوم xe^{x^2}

۲۶. مشتق چهارم x^2e^{2x}

۲۷. مشتق پنجم $e^x \ln x$

راهنمایی . در مسائل ۲۶ و ۲۷ بهتر است از قاعدهٔ لایب‌نیتزاستفاده‌کنیم (مسئلهٔ ۳۵ ، صفحهٔ ۳۶۶) .

۲۸. نشان دهید که تابع e^x غیر از محور x مجانب ندارد .

۲۹. مشتق $e^{x^2+2x}/(2^x \ln x)$ را با استفاده از مشتقگیری لگاریتمی بیابید .

۳۰. متوسط تابع e^x را روی بازهٔ $[\ln a, \ln b]$ ، که $0 < a < b$ ، پیدا کنید .

۳۱. تابع e^x دارای این خاصیت است که مشتق خود می‌باشد . نشان دهید که‌هرتابع دیگر $y = f(x)$ با این خاصیت به شکل ce^x است ، که در آن c ثابت می‌باشد .

۳۲. تحقیق کنید که

$$\int xe^x\,dx = xe^x - e^x + C.$$

مساحت A ی ناحیهٔ R زیر را بیابید .

۳۳. محدود به خط $x = 1$ و منحنیهای $y = e^x$ و $y = e^{-x}$

۳۴. محدود به خطوط $x = 1$ و $x = 2$ و منحنیهای $y = \ln x$ و $y = e^{x/2}$

۳۵. بین منحنیهای $y = xe^{1-x}$ و $y = 4x^2 - 3x$

۳۶. محدود به خط $x = 1$ و منحنیهای $y = 2^x$ و $y = 4^x$

در هر حالت ، ناحیهٔ R را رسم نمایید .

تمام اکسترممهای موضعی و نقاط عطف تابع داده شده را بیابید . تابع بر چه بازه‌هایی صعودی است ؟ نزولی‌است ؟ به‌بالا مقعر است ؟به پایین مقعر است ؟ تمام اکسترممهای مطلق و مجانبها را بیابید ، و تابع را رسم کنید .

۳۷. $f(x) = e^{-x^2/2}$

۳۸. $f(x) = 2^x + 2^{-x}$

۳۹. $f(x) = 4xe^{-2x}$

۴۰. $f(x) = \exp(-e^{-x})$

۴۱. فرض کنید h تابع پیوسته‌ای باشد که بـر $(-\infty, \infty)$ تعریف شده است، و به‌ازای‌هر x گویا، $h(x) = 0$. نشان‌دهید که به‌ازای‌هر x گنگ نیز $h(x) = 0$؛ درنتیجـه $h(x) \equiv 0$. با استفاده از این، نشان دهید که یک تابع پیوستهٔ تعریف شده بـر $(-\infty, \infty)$ منحصراً با مقادیرش به ازای x گویا معین می‌شود.

راهنمایی. باتوجه به $h = f - g$، نشان دهید که هر دو تابع پیوستهٔ f و g کـه به ازای تمام x های گویا منطبق باشند باهم مساوی خواهند بود.

۴۲. معادلهٔ $2^x - 2x = 0$ را حل کنید.

۴۳. از تمام خطوط مماس بر منحنی $y = e^x$ فقط یکی از مبداء می‌گذرد. این خط را پیدا کنید.

بدون محاسبهٔ انتگرالها معین کنید کدام انتگرال بزرگتر است.

۴۴. $\int_0^1 e^x\,dx$ یا $\int_0^1 e^{x^2}\,dx$

۴۵. $\int_0^1 e^{-x}\,dx$ یا $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$

۴۶. $\int_{-2}^{-1} (\frac{1}{3})^x\,dx$ یا $\int_{-2}^{-1} 3^x dx$

۴۷. $\int_1^e \sqrt{\ln x}\sin x\,dx$ یا $\int_1^e \ln x \sin x\,dx$

۴۸. نشان دهید که

$$2e^{-1/4} < \int_0^2 e^{x^2-x}\,dx < 2e^2.$$

۴۹. تحقیق‌کنید‌که‌تابع $y = ae^{2x} + be^{3x}$ درمعادلهٔ‌دیفرانسیل‌مرتبهٔ‌دوم $y'' - 5y' + 6y = 0$ به ازای ثابتهای دلخواه a و b صدق می‌کند.

انتگرالهای زیر را حساب کنید

۵۰. $\int \frac{e^x}{e^x + 1}\,dx$

۵۱. $\int xa^x\,dx$

۵۲. $\int \frac{e^{4x} - 1}{e^x - 1}\,dx$

۵۳. $\int_0^1 (3^x + 3^{-x})\,dx$

۵۴. $\int_2^4 \frac{dx}{1 - e^{-x}}$

۵۵. $\int_{-1}^3 5^x\,dx$

۵۶. $\int_0^4 2^{-t}\, 3^t\, dt$

۵۷. $\int_0^1 4^u e^u\, du$

۵۸. $\int_{-1}^1 v\, 2^v\, dv$

حدود زیر را با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال حساب کنید .

۵۹. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x}$

۶۰. $\lim_{x\to 1} \frac{e^x - e}{x - 1}$

۶۱. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$

۶۲. $\lim_{x\to \infty} x(e^{1/x} - 1)$

۶۳. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$

۶۴. $\lim_{x\to 0} \frac{2^x - 1}{\sqrt{1 + x} - 1}$

۶۵. $\lim_{x\to 0} \frac{3^{\tan x} - 1}{\sin x}$

۶۶. $\lim_{x\to \pi/2} \frac{e^{\sin x} - e}{\cos x}$

۶۷. $\lim_{x\to 0} \frac{4^{\sin x} - 1}{8^{\tan x} - 1}$

۴.۶ لگاریتمها در هر پایه

در بخش پیش دیدیم کــه a^x ، یعنی نمایی در پایهٔ a (که $a > 0$) ، با فرمول

$$a^x = e^{x \ln a} \tag{۱}$$

داده می‌شود . معکوس تابع (۱) **لگاریتم در پایهٔ** a نام دارد و با $\log_a x$ نموده می‌شود. در اینجا a مثبت است ، ولی باید حالت $a = 1$ مستثنی شود ، زیرا تابع $1^x \equiv 1$ یک‌به‌یک نیست؛ و درنتیجه ، معکوس ندارد . چون تابع a^x دارای قلمرو $(-\infty, \infty)$ و برد $(0, \infty)$ است ، معکوسش ، یعنی تابــع $\log_a x$ ، دارای قلمرو $(0, \infty)$ و برد $(-\infty, \infty)$ می‌باشــد . لذا ، به ازای هر $x > 0$ داریم

$$a^{\log_a x} = x, \tag{۲}$$

یا معادلا "

$$e^{\log_a x \cdot \ln a} = x.$$

از فرمول اخیر نتیجه می‌شود که

$$\log_a x \cdot \ln a = \ln x,$$

و لذا ،

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}. \qquad (۳)$$

توجه کنید که اگر $a = e$ ، رابطهٔ (۳) به رابطهٔ

$$\log_e x = \frac{\ln x}{\ln e} = \ln x$$

تحویل می‌شود؛ یعنی، لگاریتم در پایهٔ e چیزی جز لگاریتم طبیعی نیست.

از رابطهٔ (۲) واضح است که $\log_a x$ توانی است که a باید بدان برسد تا x به‌دست آید. همچنین، فرمول همتای

$$\log_a a^x = x \qquad (۴)$$

را داریم که به‌ازای‌هر x معتبر است. البته فرمولهای (۲) و (۴) حالات خاصی‌ازفرمولهای کلی $f(f^{-1}(x)) \equiv x$ و $f^{-1}(f(x)) \equiv x$ هستند که هر تابع یک به یک f و معکوسش f^{-1} در آنها صدق می‌کنند.

خواص $\log_a x$ شبیه خواص $\ln x$ بوده، و نتیجهٔ فوری تعریف (۳) می‌باشند. مثلاً،

$$\log_a 1 = \frac{\ln 1}{\ln a} = 0, \qquad \log_a a = \frac{\ln a}{\ln a} = 1,$$

$$\log_a \frac{1}{x} = \frac{\ln (1/x)}{\ln a} = \frac{-\ln x}{\ln a} = -\log_a x,$$

$$\log_a xy = \frac{\ln xy}{\ln a} = \frac{\ln x + \ln y}{\ln a} = \log_a x + \log_a y,$$

و از این قبیل. فرمول

$$\log_a b^x = \frac{\ln b^x}{\ln a} = \frac{x \ln b}{\ln a} = x \log_a b \qquad (b > 0)$$

را نیز باید متذکر شد. به‌ازای $a = 10$ لگاریتم در پایهٔ 10 یا **لگاریتم معمولی** $\log_{10} x$ در ریاضیات دبیرستانی را به دست می‌آوریم که اغلب با $\log x$ بدون زیرنویس 10 نموده می‌شود. ارتباط بین لگاریتم معمولی و لگاریتم طبیعی از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10} \approx 0.43429 \ln x.$$

چون $\ln a > 0$ اگر $a > 1$ ، از فرمولهای (۱۰) و (۱۱)، صفحهٔ ۴۹۰ ، و تعریف $\log_a x$ معلوم می‌شود که

$$\lim_{x\to\infty} \log_a x = \infty, \qquad \lim_{x\to 0^+} \log_a x = -\infty \qquad (a > 1).$$

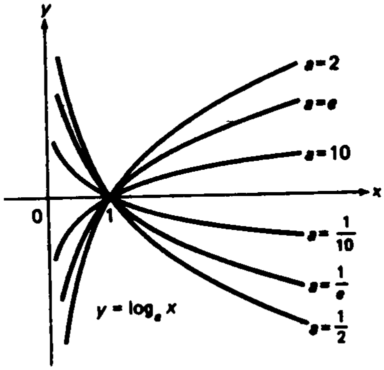
از آن سو، چون $\ln a < 0$ اگر $0 < a < 1$، داریم

$$\lim_{x\to\infty} \log_a x = -\infty, \qquad \lim_{x\to 0^+} \log_a x = \infty \qquad (0 < a < 1).$$

در شکل ۸ تفاوت اساسی بین رفتار تابع $\log_a x$ به‌ازای $a > 1$ و رفتار آن به‌ازای $0 < a < 1$ نموده شده است، که در این شکل $\log_a x$ به ازای $a = 2, e, 10, 1/2, 1/e, 1/10$ در یک دستگاه مختصات قائم رسم شده است. توجه کنید که هر یک از منحنیهای $y = \log_a x$ و $y = \log_{1/a} x$ منعکس دیگری نسبت به محور x است. این امر نتیجهٔ فوری آن است که

$$\log_{1/a} x = \frac{\ln x}{\ln (1/a)} = \frac{\ln x}{-\ln a} = -\log_a x.$$

توضیح دهید چرا منحنیهای $y = \log_a x$ همه از نقطهٔ $(1, 0)$ می‌گذرند ولی نقطهٔ مشترک دیگری ندارند.



شکل ۸

از فرمولهای (۱۲) و (۱۳)، صفحهٔ ۴۹۲، و تعریف $\log_a x$ معلوم می‌شود که هم به ازای $a > 1$ و هم به ازای $0 < a < 1$،

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log_a x}{x} = 0, \qquad \lim_{x\to 0^+} x \log_a x = 0.$$

هرگاه a و b دو عدد مثبت غیر از 1 باشند، آنگاه

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} = \frac{\ln b}{\ln a}\frac{\ln x}{\ln b},$$

درنتیجه،

$$\log_a x = \log_a b \cdot \log_b x.$$

بخصوص، با انتخاب $x = a$ معلـوم می‌شود که

$$1 = \log_a b \cdot \log_b a,$$

یا معادلا"

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}. \tag{۵}$$

این رابطه به ازای $b = e$ به صورت زیر درمی‌آید:

$$\log_a e = \frac{1}{\log_e a} = \frac{1}{\ln a}. \tag{۵'}$$

مثال ۱. $\log_2 64$ و $\log_{64} 2$ را بیابید.

حل. به کمک رابطهٔ (۴) داریم

$$\log_2 64 = \log_2 2^6 = 6.$$

پس از (۵) نتیجه می‌شود که

$$\log_{64} 2 = \frac{1}{\log_2 64} = \frac{1}{6}.$$

در واقع، چون $\log_a x$ توانی است که عدد a باید به آن برسد تا عدد x به دست آید، می‌توان $\log_2 64$ و $\log_{64} 2$ را فورا" باتوجه به $2^6 = 64, 64^{1/6} = 2$ ذهنی حساب کرد.

مشتق تابع $\log_a x$ به آسانی به دست می‌آید. در واقع،

$$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{d}{dx}\frac{\ln x}{\ln a} = \frac{1}{x \ln a},$$

یا معادلا"، به کمک (۵')،

$$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{1}{x}\log_a e, \tag{۶}$$

مثال ۲. از $\log_3 (\sin x)$ مشتق بگیرید.

حل. از رابطهٔ (۶) و قاعدهٔ زنجیره‌ای داریم

$$\frac{d}{dx}\log_3 (\sin x) = \frac{1}{\sin x}\log_3 e \frac{d}{dx}\sin x = \frac{\cos x}{\sin x}\log_3 e = \cot x \log_3 e.$$

مثال ۳. از $\log_x a$ مشتق بگیرید.

حل. این بار متغیر مستقل x پایهٔ لگاریتم است. بنابر (۳) و قاعدهٔ زنجیره‌ای،

$$\frac{d}{dx}\log_x a = \frac{d}{dx}\frac{\ln a}{\ln x} = -\frac{\ln a}{(\ln x)^2}\frac{d}{dx}\ln x = -\frac{\ln a}{x(\ln x)^2}.$$

مثال ۴. نشان دهید که

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e. \tag{۷}$$

حل. این یک صورت مبهم $0/0$ است که آن را با قاعدهٔ هوپیتال رفع ابهام می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{D_x\log_a(1+x)}{D_x x} = \lim_{x\to 0}\frac{\log_a e}{1+x} = \log_a e.$$

اگر $a = e$، فرمول (۷) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \log_e e = 1. \tag{۸}$$

به بیان دیگر، چون

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\ln 1}{x},$$

معلوم می‌شود که حد (۸) در واقع مشتق $\ln x$ در نقطهٔ $x = 1$ است؛ درنتیجه،

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{d\ln x}{dx}\bigg|_{x=1} = \frac{1}{x}\bigg|_{x=1} = 1.$$

به عنوان تمرین، فرمول (۷) را به همین نحو ثابت کنید.

مسائل

عبارات زیر را ساده کنید.

۱. $\log_2 1024$

۲. $\log_{10}(0.001)$

۳. $\log_3 \frac{1}{81}$

۴. $\log_{81} 3$

۵. $\log_{1/2}\sqrt{2}$

۶. $\log_4(0.0625)$

۷. $\log_2 3\cdot\log_3 4$

۸. $\log_5(2.5\times 10^4)$

۹. $\log_{0.1}(0.2)$

۱۰. $\log_3(\log_3 27)$

۱۱. $\log_\pi \pi x^2 \quad (x \neq 0)$

۱۲. $\log_x \pi x^2 \quad (x > 0)$

۱۳. $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{3}$

۱۴. $\log_{\sqrt{e}}(\ln e^e)$

۱۵. $\log_2(\log_2(\log_2 16))$

۱۶. $\log_2(\log_4(\log_8 64))$

۱۷. $\log_2(\log_3(\log_4 64))$

۱۸. $\log_2(3^{\ln 4})$

۱۹. نشان دهید هرگاه $1 < a < b$ یا $0 < a < b < 1$ ، آنگاه $\log_a x > \log_b x$ ، مشروط بر اینکه $x > 1$. آیا این به ازای $0 < x < 1$ نیز درست است؟

۲۰. نشان دهید هرگاه $\log_a y$ تابع خطی غیرثابتی از x باشد، آنگاه y با یک تابع نمایی از x متناسب می‌باشد.

نشان دهید که اگر ثابت تناسب مثبت باشد، عکس مطلب نیز درست است.

۲۱. اگر $\log_3 y = 1 - 2x$ ، y را به صورت تابعی از x بیان کنید. اگر $y = \frac{1}{8}(2^x)$ ، $\log_4 y$ را به صورت تابعی از x بیان نمایید.

تمام x هایی را بیابید که تابع داده شده به ازای آنها تعریف شده باشد.

۲۲. $\log_5(x+1) + \log_{0.5}(x+2)$

۲۳. $\sqrt{\log_a x}$

۲۴. $\arcsin(1-x) + \log_2(\log_2 x)$

۲۵. $\log_{10}(1 - \log_{10}(x^2 - 5x + 16))$

۲۶. $\log_2(\log_3(\log_4 x))$

۲۷. $\arcsin(\log_{10}(x/10))$

از عبارات زیر مشتق بگیرید.

۲۸. $\log_\pi |x|$

۲۹. $x \log_{10} x$

۳۰. $x^2 \log_3 x$

۳۱. $\log_4(2^{\ln x})$

۳۲. $\dfrac{x}{\log_2 x}$

۳۳. $5^{\log_7 x}$

۳۴. نشان دهید که مشتق $\log_a(\log_b x)$ از انتخاب b مستقل است.

انتگرالهای زیر را حساب کنید.

۳۵. $\int \log_2 x \, dx$

۳۶. $\int_1^{10} \log_{10} x \, dx$

حدود زیر را با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال حساب کنید.

۳۷. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\log_3(1+2x)}{\log_2(1+3x)}$

۳۸. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\log_\pi(1+\sin x)}{\tan x}$

۳۹. $\lim_{x\to 0} \frac{\log_{10}(1+x)}{10^x-1}$

۴۰. $\lim_{x\to 0} \frac{\log_2(x^2+1)}{x \sin x}$

۴۱. $\lim_{x\to e} \frac{\log_2(\ln x)}{x-e}$

۴۲. $\lim_{x\to 0^+} \frac{\log_4(\tan x)}{\log_5(\sin x)}$

۴۳. گوییم عدد a *از حیث اندازه* k مرتبه از عدد b بزرگتر است اگر $a \approx 10^k b$ ، وگوییم b از حیث اندازه k مرتبه از a کوچکتر است . این زبان بخصوص در فیزیک و زیست شناسی مفید است . اگر a از حیث اندازه k مرتبه از b بزرگتر باشد ، رابطهٔ بین $\log_{10} a$ و $\log_{10} b$ چیست ؟

۴۴. چگونه سرعت نور (186,000 میل بر ثانیه ≈)از حیث اندازه با سرعت صوت (1150 فوت برثانیه ≈) مقایسه می‌شود ؟

۴۵. چگونه وزن یک موش(1 oz≈)از حیث اندازه با وزن یک مرد مقایسه می‌شود ؟

۴۶. pH یک محلول آبکی با فرمول $\mathrm{pH} = -\log_{10}[H^+]$ تعریف می‌شود ، که در آن $[H^+]$ غلظت یونهای هیدروژن است که با مل بـرلیتر سنجیده می‌شود . pH آب خالص 7 است ، محلولهای اسیدی pH کمتر از 7 دارند ، و محلولهای قلیایی pH بیشتر از 7 خواهند داشت .کاغذ لیتموس ، که رنگ‌طبیعی آن صورتی‌است ، در محلولهای‌اسیدی قرمز ودرمحلولهای‌قلیایی‌آبی می‌شود .رنگ‌کاغذلیتموس‌درمحلولی‌که $[H^+] = 4\times10^{-9}$ قرمز می‌شود یا آبی ؟ در محلولی که $[H^+] = 0.00002$ چطور ؟

۴۷. شدت I یک موج صوتی میزان انتقال انرژی صوتی از سطح واحد عمود بر انتشار موج است . ضعیفترین صدای قابل شنیدن توسط گوش ما *آستانهٔ شنوایی* است که شدتی حدود 10^{-16} watt/cm² دارد ، حال آنکه قویترین صدای قابل تحمل توسط‌گـوش ما *آستانهٔ درد* بوده و شدتی حدود 10^{-4} watt/cm² خواهد داشت . لذا ، گوش‌درمورد صداهایی واکنش دارد که شدتشان بتواند به اندازهٔ عامل 10^{12} (یک تریلیون) فرق کند . احساس *بلند بودن* ،که با L نموده می‌شود ، ظاهرا" با لگاریتم شدت I متناسب است ، و معمولا" با فرمول زیر تعریف می‌شود :

$$L = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0},$$

که در آن I_0 شدت ضعیفترین صدای قابل شنیدن است . L تعریف‌شده‌بهاین‌صورت‌با دسیبل سنجیده و با علامت اختصاری dB نموده می‌شود . 1-dB تغییر در بلند بودن صدا تقریبا" کمترین تغییری است که گوش انسان متوجه می‌شود . نشان دهید که اگر I در 10 ضرب شود ، L درست 10 dB افزایش می‌یابد . چه درصد افزایش در I بـه

افزایش 1-dB در L منجر می‌شود؟

۴۸. نشان دهید که، با تقریبی عالی، افزایش 3-dB در بلند بودن یک صوت نظیر دو برابر شدن شدت آن می‌باشد.

۴۹. بلند بودن صدایی که 50,000 بار شدیدتر از ضعیفترین صدای قابل شنیدن است چند دسیبل می‌باشد؟ صدایی که 200 بار از صدای قابل تحمل شدیدتر است چطور؟

۵۰. شدت صدای خش خش برگها را با بلندی حدودا " 10 dB ، و نیز یک خیابان شلوغ پر ترافیک با بلندی حدودا " 70 dB را تخمین بزنید.

۵۱. در زمانهای قدیم ستارگان قابل رؤیت با چشم غیرمسلح به شش گروه تقسیم می شدند. به ستارگان اندازهٔ از 1 تا 6 نسبت می‌دادند که به نورانی‌ترین آنها اندازهٔ 1 و به کم نورترین آنها اندازهٔ 6 منتسب می‌کردند. امروزه این رده‌بندی تا حدود زیادی گسترش یافته، و از فرمول

$$m_2 - m_1 = 2.5 \log_{10} \frac{I_1}{I_2} \qquad (\text{یک})$$

برای ارتباط اندازه‌های m_1, m_2 با شدتهای I_1, I_2 دو ستارهٔ S_1, S_2 استفاده می‌شود. یک ستاره با اندازهٔ 1 چند بار از یک ستاره با اندازهٔ 6 نورانی‌تر است؟ ضعیفترین ستارگانی که می‌توان از آنها با تلسکوپ 200 اینچی رصدخانهٔ مونت پالومار در کالیفرنیا عکس گرفت دارای اندازه‌ای حدود 23.5 اند. این تلسکوپ چند برابر چشم غیرمسلح حساستر است؟

۵۲. نشان دهید که، با تقریبی عالی، کاهش 1 واحد از اندازهٔ یک ستاره نظیر به 2.5 برابر افزایش در شدت نور آن است.

۵۳. شعرای یمانی، نورانی‌ترین ستاره در آسمان، دارای اندازهٔ 1.4– ، و ستارهٔ سهیل دومین ستارهٔ روشن پس از آن، دارای اندازهٔ 0.7– است. شعرای یمانی چند برابر (برحسب شدت) سهیل روشنتر است؟

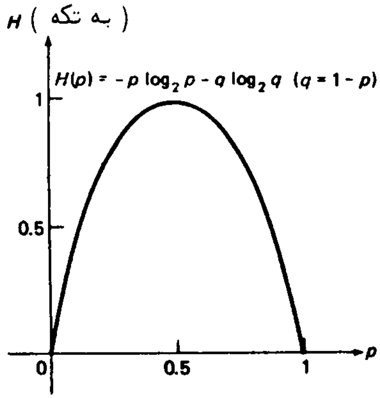
۵۴. سکه‌ای را چند بار پرتاب می‌کنیم. فرض کنید احتمال آنکه شیر بیاید p باشد، که p به خاطر احتمال بودن در بازهٔ $[0, 1]$ قرار دارد. در این صورت، احتمال خط آمدن $q = 1 - p$ است، و q نیز در $[0, 1]$ قرار دارد. اگر سکه سالم باشد، شیر و خط متساوی‌الممکن‌اند؛ یعنی، $p = q = \frac{1}{2}$. پس از قبل نمی‌دانیم حاصل پرتاب یک سکه چیست؛ درنتیجه، یک عدد دورقمی یا تکه لازم است تا نتیجه را به ما بگوید (مثلا " 1 برای شیرها و 0 برای خطها). هرگاه سکه کاملا " معیوب باشد مثلا " $p = 1$ ، لذا حاصل هر پرتاب شیر باشد، آنگاه از قبل نتیجهٔ پرتاب را می‌دانیم. لذا، اگر

$p=\frac{1}{2}$ ، 1 تکه اطلاعات برای رفع ابهام در باب نتیجهٔ یک پرتاب لازم است، در حالی که اگر $p=1$ (یا $q=1$) ، به هیچ اطلاعی در این باب نیاز نداریم. به قول کلود شانون[1]، پایه‌گذار **نظریهٔ *اطلاعات*** ، درحالت p دلخواه ، **عدم قطعیت** یا **آنتروپی** پرتاب یک سکه باید مساوی

$$H(p) = -p\log_2 p - q\log_2 q = -p\log_2 p-(1-p)\log_2(1-p) \qquad (\text{دو})$$

تکه تعریف شود ، و این **مقدار *اطلاعات*** نقل شده توسط یک پیام است که نتیجهٔ پرتاب را به ما می‌دهد . طبق قرارداد ، $0\log_2 0=0$ ، که $H(p)$ را بر $[0,1]$ پیوسته می‌سازد .

نشان دهید که تابع آنتروپی $H(p)$ بر $[0,1]$ نامنفی است ، ماکزیمم 1 خود را در $p=\frac{1}{2}$ و مینیمم 0 خود را در $p=0$ یا $p=1$ می‌گیرد . نشان دهید که $H(p)$ بر $[0,1]$ به پایین مقعر است و نسبت به خط $p=\frac{1}{2}$ متقارن می‌باشد . نمودار $H(p)$ در شکل ۹ نموده شده است ، و تمام این ویژگیها را نشان می‌دهد .



شکل ۹

۵۵ . فرض کنید در پرتاب یک سکهٔ معیوب احتمال آمدن شیر دو برابر خط باشد . چقدر اطلاعات به شما داده شده است ؟

۵۶ . در نظریهٔ اطلاعات نشان داده شده که در یک پیام که حاصل یک آزمایش تصادفی با N نتیجهٔ متساوی‌الاحتمال را بازگو می‌کند $\log_2 N$ تکه اطلاعات وجوددارند . فرض

---

1. Claude Shannon

کنید به شما روز تولد یک شخص کاملا " بیگانه گفته شده باشد . چقدر اطلاعات به شما داده شده است؟ (از سالهای کبیسه صرف‌نظر کنید .)

۵.۶ تابع توانی کلی؛ مطالب دیگر در باب صور مبهم

ما از قبل معنی x^a به ازای a ی گویا را می‌دانیم . در واقع ، هرگاه $a = m/n$ که درآن m و $n > 0$ صحیح‌اند ، آنگاه x^a یعنی

$$x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m}. \tag{۱}$$

حال می‌خواهیم به x^a درحالتی که a گنگ است معنی بدهیم . تعریف مناسب عبارت است از

$$x^a = e^{a \ln x} \qquad (x > 0), \tag{۲}$$

که در آن باید x را مثبت فرض کرد؛ درنتیجه ، $\ln x$ تعریف نشده است .

فرمول (۲) ازدیدگاه‌جبری‌چیزی‌جزفرمول (۱۳) ،صفحهٔ ۵۰۷ ، نیست که در آن نقشهای a و x باهم عوض شده‌اند ، ولی رفتار x^a، به عنوان تابعی از x ، کلا " با رفتار a^x فرق دارد .

تابع (۲) ، به نام *تابع توانی کلی* ، بر $(0, \infty)$ پیوسته بوده و ، وقتی a عدد گویای m/n باشد ، مقدار $\sqrt[n]{x^m}$ را می‌گیرد . برای مشاهدهٔ این امر ، $a = m/n$ را در (۲) گذارده به دست می‌آوریم

$$x^{m/n} = e^{(m/n) \ln x} = e^{mn^{-1} \ln x}.$$

پس نتیجه می‌شود که

$$(x^{m/n})^n = (e^{mn^{-1} \ln x})^n = e^{mn^{-1} n \ln x} = e^{m \ln x} = (e^{\ln x})^m,$$

و لذا ،

$$(x^{m/n})^n = x^m,$$

که با فرمول (۱) معادل می‌باشد . اما اگر a گنگ باشد ، نمی‌توان a را به صورت نسبت دو عدد صحیح مانند m/n نمایش داد؛ و درنتیجه ، فرمول (۲) تنها راه تعریف x^a می‌باشد.

تبصره. فرض‌کنیم $a = m/n$ عدد گویای تحویل ناپذیری بوده و $n > 0$ فرد باشد .دراین صورت ، فرمول (۱) از فرمول(۲)، که به ازای n های مثبت باآن یکی است ،فراترمی‌رود ،زیرا $x^{m/n}$ را به ازای x منفی و $x = 0$ (در این حالت $0^{m/n} = 0$) اگر $m > 0$ نیز تعریف می‌کند . در واقع ، هرگاه n فرد باشد ، آنگاه $x^{m/n}$ همان جفتی m را دارد؛ یعنی ، $x^{m/n}$ یک تابع زوج است اگر m زوج باشد و یک تابع فرد است اگر m فرد باشد . اما فرمول (۱)

$x^{m/n}$ را به ازای x منفی و n زوج تعریف نمی‌کند ، زیرا در این صورت m فرد است (به یاد آورید که m/n تحویل ناپذیر است) ؛ و درنتیجه ، اگر x منفی باشد ، x^m نیز منفی بوده یعنی $\sqrt[n]{x^m}$ ریشه‌ٔ زوج گرفتن از عددی منفی که غیرممکن می‌باشد .

لذا ، به توانهای گنگ x مانند $x^{\sqrt{2}}$ و x^e معنی بخشیده‌ایم . از (۲) نتیجه می‌شود که

$$x^{-a} = e^{-a \ln x} = \frac{1}{e^{a \ln x}},$$

و لذا ،

$$x^{-a} = \frac{1}{x^a}. \qquad (۳)$$

به‌علاوه ، هرگاه a و b اعداد حقیقی دلخواهی باشند ، آنگاه

$$(x^a)^b = (e^{a \ln x})^b = e^{ab \ln x},$$

یعنی ،

$$(x^a)^b = x^{ab}. \qquad (۴)$$

به همین نحو ،

$$x^a x^b = e^{a \ln x} e^{b \ln x} = e^{a \ln x + b \ln x} = e^{(a+b) \ln x},$$

درنتیجه ،

$$x^a x^b = x^{a+b}. \qquad (۵)$$

همچنین، بنابر (۳) ،

$$\frac{x^a}{x^b} = x^a x^{-b},$$

و لذا ، به کمک (۵) داریم

$$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}. \qquad (۶)$$

فرمولهای (۴) تا (۶) چیزی جز صورتهایی از قوانین نماها در صفحه‌ٔ ۵۰۷ نیستند .

رفتار x^a به علامت نمای a بستگی اساسی دارد (حالت $a = 0$ استثنایی‌است ، زیرا $x^0 \equiv 1$) . فرض کنیم $t = a \ln x$ ؛ درنتیجه ، (۲) شکل فشرده‌ٔ $x^a = e^t$ را به خود می‌گیرد . هرگاه $a > 0$ ، آنگاه t با $\ln x$ هم‌علامت بوده ، و

$$\lim_{x \to 0^+} x^a = \lim_{t \to -\infty} e^t = 0, \qquad \lim_{x \to \infty} x^a = \lim_{t \to \infty} e^t = \infty \qquad (a > 0), \qquad (۷)$$

زیرا $x \to 0^+$ ایجاب می‌کند که $t \to -\infty$، حال آنکه $x \to \infty$ ایجاب می‌کند که $t \to \infty$.
از اولین فرمول واضح است که هرگاه **تعریف کنیم**

$$0^a = 0 \qquad (a > 0),$$

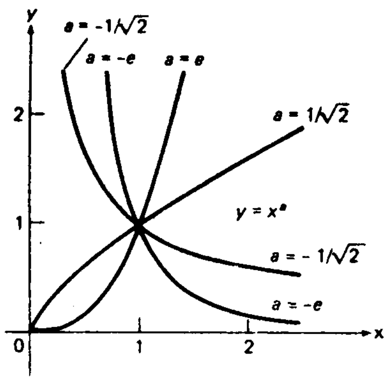
آنگاه تابع x^a، که ابتدا فقط بر بازهٔ باز $(0, \infty)$ تعریف شده است، بر بازهٔ بستهٔ $[0, \infty)$ پیوسته می‌باشد. بنابراین، به ازای a ی مثبت، تعریف تعمیم یافتهٔ زیر را می‌پذیریم:

$$x^a = \begin{cases} e^{a \ln x} & \text{اگر } x > 0 \\ 0 & \text{اگر } x = 0 \end{cases} \quad (a > 0).$$

از آن سو، هرگاه $a < 0$، آنگاه $t = a \ln x$ با $\ln x$ مختلف‌العلامه است، و

$$\lim_{x \to 0^+} x^a = \lim_{t \to \infty} e^t = \infty, \qquad \lim_{x \to \infty} x^a = \lim_{t \to -\infty} e^t = 0 \qquad (a < 0), \tag{۷'}$$

زیرا در اینجا $x \to 0^+$ ایجاب می‌کند که $t \to \infty$، حال آنکه $x \to \infty$ ایجاب می‌کند که $t \to -\infty$. این تفاوت اساسی رفتار تابع x^a به ازای $a > 0$ و رفتار به ازای $a < 0$ در شکل ۱۰ نموده شده است، که در آن x^a به‌ازای $a = \pm 1/\sqrt{2}, \pm e$ رسم شده است. ما برای a مقادیر گنگ اختیار کرده‌ایم که برای آنها استفاده از $x^a = e^{a \ln x}$ لازم است. این امر که تمام منحنیهای $y = x^a$ از نقطهٔ $(1, 1)$ می‌گذرند و نقطهٔ مشترک دیگری ندارند را چطور به حساب می‌آورید؟



شکل ۱۰

برای مشتقگیری از تابع x^a، از تعریف و قاعدهٔ زنجیره‌ای استفاده می‌کنیم. این نتیجه می‌دهد که اگر $x > 0$،

$$\frac{d}{dx} x^a = \frac{d}{dx} e^{a \ln x} = e^{a \ln x} \frac{d}{dx}(a \ln x) = x^a \frac{a}{x} = a \frac{x^a}{x}$$

که ، پس از استفاده از (۶) به ازای $b = 1$ ، به صورت ساده‌ٔزیر درمی‌آید :

$$\frac{d}{dx} x^a = ax^{a-1}, \tag{۸}$$

ما از فرمول (۸) در حالت a ی گویا استفاده کرده‌ایم ، و حال می‌بینیم به ازای a ی گنگ نیز درست است . مثلاً ،

$$\frac{d}{dx} x^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1},$$

$$\frac{d}{dx} x^e = ex^{e-1},$$

و غیره . از (۸) فوراً نتیجه می‌شود که به ازای مقادیر گویا و گنگ x ،

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \qquad (a \neq -1)$$

مثلاً ،

$$\int x^\pi\,dx = \frac{x^{\pi+1}}{\pi+1} + C.$$

حالت $a = -1$ زحمتی ندارد ، زیرا

$$\int x^{-1}\,dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

پس می‌توان از هر توان **حقیقی** x مشتق و انتگرال گرفت .

مثال ۱ . از x^x مشتق بگیرید .

حل . داریم

$$\frac{d}{dx} x^x = \frac{d}{dx} e^{x\ln x} = e^{x\ln x}\frac{d}{dx}(x\ln x) = x^x(\ln x + 1).$$

به‌طور معادل ، با مشتقگیری لگاریتمی داریم

$$\frac{d}{dx} x^x = x^x\frac{d}{dx}\ln x^x = x^x\frac{d}{dx}(x\ln x) = x^x(\ln x + 1).$$

مثال ۲ . نشان دهید که به ازای a ی دلخواه

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^a-1}{x-1}=a \qquad (۹)$$

حل. این یک صورت مبهم $0/0$ است که می‌توان آن را با قاعدهٔ هوپیتال و فرمول (۸) رفع ابهام کرد:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^a-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{D_x(x^a-1)}{D_x(x-1)}=\lim_{x\to 1}ax^{a-1}=a.$$

قبلاً " در صفحهٔ ۴۹۲ نشان دادیم که

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=0, \qquad \lim_{x\to 0^+}x\ln x=0.$$

دو مثال بعدی نشان می‌دهد که این فرمولها در صورت تعویض x با هر توان مثبتی از x برقرار می‌مانند.

مثال ۳. نشان دهید که به ازای هر $a>0$،

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^a}=0 \qquad (۱۰)$$

حل. این یک صورت مبهم ∞/∞ است که می‌توان آن را با قاعدهٔ هوپیتال و استفاده از (۸) و فرمول دوم (۷) رفع ابهام کرد:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^a}=\lim_{x\to\infty}\frac{D_x\ln x}{D_x x^a}=\lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{ax^{a-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{ax^a}=0.$$

بنابر (10)، وقتی $x\to\infty$، $\ln x$ از هر توان مثبتی از x، **ولو کوچک**، کندتر رشد می‌کند. به عنوان مثال،

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^{0.001}}=0.$$

مثال ۴. نشان دهید که به ازای هر $a>0$،

$$\lim_{x\to 0^+}x^a\ln x=0$$

حل. این بار صورت مبهم $0\cdot\infty$ داریم که آن را به کمک مثال قبل و جانشانی $x=1/t$ رفع ابهام می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 0^+} x^a \ln x = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{1}{t}\right)^a \ln\frac{1}{t} = -\lim_{t\to\infty} \frac{\ln t}{t^a} = 0.$$

صور مبهم 0^0 ، ∞^0 ، و 1^∞ . در صفحهٔ ۲۹۷ گفتیم که 0^0 ، ∞^0 ، و 1^∞ صور مبهمی می‌باشند . حال در وضعی هستیم که این ابهامات را بررسی نماییم . فرض کنیم F و G توابع پیوسته‌ای باشند که F مثبت نیز بوده و حد عبارت $[F(x)]^{G(x)}$ را وقتی $x\to a$ در نظر می‌گیریم . (طبق معمول ، در صور مبهم فقط برای راحتی می‌نویسیم $x\to a$ ، وموارد دیگر عبارتند از $x\to a^+$ ، $x\to a^-$ ، $x\to\infty$ ، و $x\to-\infty$.) در این صورت ،

$$\lim_{x\to a} [F(x)]^{G(x)} = \lim_{x\to a} e^{G(x)\ln F(x)} = e^L, \tag{۱۱}$$

که در آن

$$L = \lim_{x\to a} [G(x) \ln F(x)], \tag{۱۲}$$

مشروط بر اینکه حد L موجود و متناهی باشد . این نتیجهٔ فوری قضیهٔ ۱۱ ، صفحه۱۴۱، به ازای $f(x) = G(x)\ln F(x)$ و $g(x) = e^x$ می‌باشد . (به آسانی معلوم می‌شود که حد (۱۱) در صورت $L=\infty$ مساوی ∞ و در صورت $L=-\infty$ مساوی 0 است .) اما (۱۲) ، و در نتیجه (۱۱) ، درصورتی که یکی از $\ln F(x)$ یا $G(x)$ به صفر و دیگری به بی‌نهایت نزدیک شود ، مبهم است . این می‌تواند به سه طریق رخ دهد ؛ یعنی ،

(یک) $F(x)\to 0^+$ ، یا معادلاً " $\ln F(x)\to-\infty$ ، و $G(x)\to 0$ ؛

(دو) $F(x)\to\infty$ ، یا معادلاً " $\ln F(x)\to\infty$ ، و $G(x)\to 0$ ؛

(سه) $F(x)\to 1$ ، یا معادلاً " $\ln F(x)\to 0$ ، و $G(x)\to\infty$ ،

که به ترتیب نظیر بــه صورمبهم 0^0 ، ∞^0 ، و 1^∞ می‌باشند . لذا ، محاسبهٔ این صور به رفع ابهام از $0\cdot\infty$ تحویل می‌شود .

مثال ۵ . $\lim_{x\to 0^+} x^x$ را حساب کنید .

حل . برای رفع ابهام از صورت 0^0 ملاحظه می‌کنیم که

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^L,$$

که در آن

$$L = \lim_{x \to 0^+} x \ln x.$$

اما از قبل می‌دانیم‌که $L = 0$ ؛ و درنتیجه ،

$$\lim_{x \to 0^+} x^x = e^0 = 1.$$

مثال ۶ . $\lim_{x \to \infty} x^{1/x}$ را حساب کنید .

حل . این بار صورت مبهم ∞^0 را داریم . باتوجه به اینکه

$$\lim_{x \to \infty} x^{1/x} = \lim_{x \to \infty} e^{(1/x) \ln x} = e^L,$$

که در آن

$$L = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x},$$

فورا" خواهیم داشت

$$\lim_{x \to \infty} x^{1/x} = e^0 = 1,$$

زیرا همانطور که از قبل می‌دانیم $L = 0$.

مثال ۷ . $\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x}$ را حساب کنید .

حل . حال صورت مبهم 1^∞ را داریم . چون

$$(1 + x)^{1/x} = e^{(1/x) \ln (1 + x)},$$

می‌بینیم که

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e^L,$$

که در آن

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{\ln (1 + x)}{x}.$$

اما ، بنابر مثال ۴ ، صفحه‌ ۵۱۷ ، $L = 1$ ؛ و درنتیجه ،

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e^1 = e. \qquad (۱۳)$$

مثال ۸. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ را حساب کنید.

حل. این مجددا " یک صورت مبهم 1^∞ است ؛ و در واقع، صورت دیگری است از حد مطرح شده در مثال قبل. با جانشانی $t = 1/x$ معلوم می‌شود که

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t\to 0^+}(1+t)^{1/t},$$

و لذا، به کمک (۱۳)،

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e, \tag{۱۴}$$

اگر مقادیر x را به اعداد صحیح مثبت محدود کنیم، فرمول مهم زیر به دست می‌آید:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e, \tag{۱۴'}$$

که e را به صورت حد یک " دنبالهٔ نامتناهی " بیان می‌کند. در مثال ۱۱، صفحه ۷۹۲، در معنی این فرمول بیشتر سخن خواهیم گفت.

مثال ۹. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x$ را درصورتی حساب کنید که a عدد دلخواهی باشد.

حل. برای رفع ابهام از این صورت 1^∞، جانشانی $t = a/x$ را انجام داده به دست می‌آوریم

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = \lim_{t\to 0^+}(1+t)^{a/t} = \lim_{t\to 0^+} e^{(a/t)\ln(1+t)} = e^L,$$

که در آن

$$L = \lim_{t\to 0^+} a\frac{\ln(1+t)}{t} = a\cdot 1 = a.$$

پس نتیجه می‌شود که

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a. \tag{۱۵}$$

به ازای $a = 1$، این رابطه به فرمول (۱۴) تحویل می‌شود.

تبصره. فرمول (۱۳) در صورت تعویض $x\to\infty$ با $x\to-\infty$ برقرار می‌ماند. در واقع،

با جانشانی $x=-t$ خواهیم داشت

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x=\lim_{t\to\infty}\left(1-\frac{a}{t}\right)^{-t}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\left(1-\frac{a}{t}\right)^t}$$

$$=\frac{1}{\lim\limits_{t\to\infty}\left(1-\frac{a}{t}\right)^t}=\frac{1}{e^{-a}},$$

و درنتیجه،

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x=e^a. \qquad (۱۵')$$

سود مرکب. همانطور که اینک نشان می‌دهیم، فرمول (۱۵) کاربرد مالی مهمی دارد. فرض کنیم پول با نرخ سود سالانهٔ r، یا معادلاً "$100r$ درصد، n بار در سال مرکب شود. فرض کنیم A_i پول موجود در بانک در آخر دورهٔ سوددهی i م بوده، و هیچ پولی بعداز پس‌انداز اولیه برداشت نشده باشد. در این صورت،

$$A_{i+1}=A_i+A_i\frac{r}{n}=A_i\left(1+\frac{r}{n}\right), \qquad (۱۶)$$

زیرا سود روی مقدار موجود و با نرخ r، یعنی نرخ اسمی، تقسیم بر n، یعنی تعداد ترکیب سود در سال، محاسبه می‌شود. البته مقدار اولیهٔ A_0 سرمایهٔ P است. پول موجود در بانک پس از t سال پول موجود پس از nt دورهٔ سوددهی است. برای محاسبهٔ این پول، که آن را با A نشان می‌دهیم، از فرمول (۱۶) مکرر استفاده کرده، به دست می‌آوریم

$$A=A_{nt}=A_{nt-1}\left(1+\frac{r}{n}\right)=A_{nt-2}\left(1+\frac{r}{n}\right)\left(1+\frac{r}{n}\right)=A_{nt-2}\left(1+\frac{r}{n}\right)^2$$
$$=\cdots=A_1\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt-1}=A_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}.$$

بنابراین،

$$A=P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}, \qquad (۱۷)$$

زیرا $A_0=P$.

حال فرض کنیم سود به *طور پیوسته* مرکب شود؛ یعنی، تعداد دفعاتی که سود مرکب در سال حساب می‌شود بزرگتر و بزرگتر شود؛ درنتیجه، زمان بین محاسبهٔ سود مرکب کمتر

و کمتر گردد . در این صورت ، مقدار موجودی پس از t سال عبارت است از

$$A = P \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt},$$

یا معادلا" ، پس از قرار دادن $x = nt$ ،

$$A = P \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{rt}{x}\right)^{x}.$$

اما حد سمت راست چیزی جز حد (۱۵) به ازای $a = rt$ نیست . بنابراین ،

$$A = Pe^{rt}. \tag{۱۸}$$

با این می‌توان عدد e را به زبان مالی تعبیر کردا فرض کنیم $1 با سود 100% و به طور پیوسته مرکب سپرده بگذاریم . در این صورت ، $P = \$1$ ، $r = 1$ ، و موجودی پس از 1 سال درست e دلار می‌شود ؛ یعنی ، با نزدیکترین سنت ، $2.72 .

مثال ۱۰ . فرض کنیم $P = \$1000$ ، $r = 0.06$ (6%) ، و $t = 1$ سال . مقادیر A ی داده شده با فرمول (۱۷) را به‌ازای مقادیر مختلف n (تعداد ترکیبها در سال) با مقدار A ی داده شده با فرمول (۱۸) برای ترکیب پیوسته مقایسه نمایید .

حل . نتایج در جدول زیر برای سال ، شش ماه ، چهار ماه ، ماهانه ، روزانه ، وترکیب‌پیوسته (آخری با ∞ نموده شده است) ذکر شده‌اند :

n	1	2	4	12	365	∞
A	$1060.00	$1060.90	$1061.36	$1061.68	$1061.83	$1061.84

واضح است که تمایز بین ترکیب روزانه (که بعضی از بانکها انجام می‌دهند) و ترکیب پیوسته اهمیت پولی چندانی ندارد .

مثال ۱۱ . چقدر پول را اکنون به سپرده بگذاریم تا 4 سال بعد $10,000 پس‌انداز داشته باشیم مشروط براینکه نرخ سالانهٔ سود 5% و به طور پیوسته مرکب شود ؟

حل . با حل معادلهٔ (۱۸) نسبت به P ، معلوم می‌شود که

$$P = \frac{A}{e^{rt}} = Ae^{-rt}. \tag{۱۸'}$$

با قرار دادن $A = \$10{,}000$ ، $r = 0.05$ ، و $t = 4$ در این فرمول ، با نزدیکترین سنت‌به

دست می‌آوریم

$$P = \$10{,}000e^{-0.2} = \$8187.31$$

به زبان مالی، P *مقدار فعلی* (یا *مقدار تخفیف یافته*ٔ) **$10,000** در **4** سال با نرخ به‌طور پیوسته مرکب شده‌ٔ **5%** نامیده می‌شود .

مسائل

از عبارات زیر مشتق بگیرید .

۱. $x^a \ln x$ ۲. $x^a e^x$ ۳. $x^a a^x$

۴. $x^\pi 5^x$ ۵. $x^{1/x}$ ۶. $x^{\sqrt{x}}$

۷. $(\ln x)^x$ ۸. $x^{\ln x}$ ۹. $x^{\tan x}$

۱۰. $(\ln x)^{\ln x}$ ۱۱. $(\sin x)^{\cos x}$ ۱۲. x^{x^2}

۱۳. e^{x^x} ۱۴. x^{e^x} ۱۵. x^{4^x}

۱۶. x^{x^x}

۱۷. تحقیق کنید که

$$\int x^{a-1} \ln x \, dx = \frac{x^a \ln x}{a} - \frac{x^a}{a^2} + C \qquad (a \neq 0).$$

انتگرالهای زیر را حساب کنید .

۱۸. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$ ۱۹. $\int \sqrt{x} \ln x \, dx$

۲۰. نشان دهید هرگاه $\log_a y$ یک تابع خطی غیرثابت از $\log_a x$ باشد، آنگاه y با یک تابع توانی از x متناسب است . نشان دهید که عکس مطلب درصورتی درست‌است‌که ثابت تناسب مثبت باشد .

۲۱. اگر $\log_2 y = \pi \log_2 x - 1$ ، y را به صورت تابعی از x بیان کنید . اگر $y = 9x^{\sqrt{2}}$ ، $\log_3 y$ را به صورت تابعی از $\log_3 x$ بیان نمایید .

۲۲. نشان دهید که معادله‌ٔ $x^a = a^x$ $(a > 0)$ جواب غیربدیهی دارد، یعنی جوابی غیراز $x = a$ دارد، اگر و فقط اگر $1 < a < e$ یا $a > e$. جواب به ازای $a = 2$ چیست؟

۲۳. فرض کنید a عدد حقیقی دلخواهی باشد . نشان دهید که

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^a} = \infty, \qquad \text{(یک)}$$

یا معادلاً "

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=0.$$

(لذا ، e^x از هر توان x ، ولو بزرگ ، سریعتر رشد می‌کند .)

۲۴ . نشان دهید که 0^∞ و ∞^∞ مبهم نیستند .

ابهام نظیر به حد داده شده را توصیف کنید . سپس حد را به کمک قاعدهٔ هوپیتال یا فرمول (۱۵) محاسبه نمایید .

۲۵ . $\lim_{x\to 1}\frac{x^e-1}{x^\pi-1}$

۲۶ . $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\sqrt{2}}-1}{x}$

۲۷ . $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^{101}}$

۲۸ . $\lim_{x\to 0^+} x^{\sqrt{x}}$

۲۹ . $\lim_{x\to 0^+}(\sin x)^x$

۳۰ . $\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)^a}{x}\quad (a>0)$

۳۱ . $\lim_{x\to 0^-}(2^{\cot x})^x$

۳۲ . $\lim_{x\to 0^+} x^{x\ln x}$

۳۳ . $\lim_{x\to 0}(1+\pi x)^{1/x}$

۳۴ . $\lim_{x\to -\infty}\left(1-\frac{e}{x}\right)^x$

۳۵ . $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$

۳۶ . $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\ln x}{x}\right)^x$

۳۷ . $\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{x-1}\right)^{\ln x}$

۳۸ . $\lim_{x\to 0}(e^x+x)^{1/x}$

۳۹ . $\lim_{x\to 1^-} x^{x/(1-x)}$

۴۰ . $\lim_{x\to 0^+}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^x$

۴۱ . $\lim_{x\to 0^+}(e^{1/x})^{\tan x}$

۴۲ . $\lim_{x\to 0^+}(\csc x)^x$

۴۳ . سپردهٔ اولیهٔ $1000 ظرف 5 سال اگر هر چهارماه با نرخ سودسالانهٔ 8% ترکیب شود ؛ اگر به‌طور پیوسته مرکب شود چقدر خواهد شد ؟

۴۴ . یک سپردهٔ اولیه با ترکیب پیوسته ظرف 10 سال دوبرابر می‌شود . نرخ سود سالانه چقدر است ؟

۴۵ . چقدر طول می‌کشد تا $15,000 با ترکیب‌پیوسته و نرخ سود سالانهٔ 7% تا $25,000 ؛ تا $35,000 رشد نماید ؟

۴۶. مقدار فعلی $60,000 در 5 سال با نرخ سود سالانهٔ 9% و ترکیب پیوستهچقدراست؟ با همان نرخ ولی ترکیب ماهانه چقدر است؟

۴۷. ارزش V نوشابه‌ای با زمان و طبق فرمول $V = V_0 e^{\sqrt{t}/5}$ (t بـه سال) افزایش می‌یابد. نوشابه همین طور که فروخته می‌شود صاحب آن پولش را در بانکی که نرخ سالانه‌اش r درصد و با ترکیب‌پیوسته‌است سپرده می‌گذارد. ظرف چند سال بایدنوشابه‌فروش رود تا سپرده ماکزیمم گردد؟

۴۸. اگر n تعداد ترکیبها در سال باشد،

$$r_E = \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n - 1 \qquad \text{(دو)}$$

نرخ سود (سالانهٔ) مؤثر، در مقابل نرخ سود (سالانهٔ) اسمی r، راتوجیه نمایید.

نرخ سود موثر نظیر به نرخ اسمی داده شده را بیابید:

۴۹. 8% با ترکیب شش ماهه

۵۰. 7.2% با ترکیب ماهانه

۵۱. 6.5% با ترکیب پیوسته

۵۲. اگر ترکیب چهارماهه؛ ماهانه؛ پیوسته باشد، چه نرخ سود اسمی نرخ مؤثر 8% را " سالانه " می‌سازد؟

۶.۶ معادلات دیفرانسیل جدایی‌پذیر؛ رشد و تحلیل نمایی

برای آماده شدن بیشتر جهت‌بررسی تابع نمایی و کاربردهای‌آن، کمی منحرف‌شده معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول به شکل

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \qquad (g(y) \neq 0) \qquad (1)$$

را بررسی می‌کنیم. در اینجا $f(x)$ و $g(y)$ دو تابع پیوستهٔ معلوم بوده، و $y = y(x)$ تابـع مجهولی است‌که مشتقپذیر فرض می‌شود. ویژگی اصلی معادلهٔ (۱) این است که $g(y)$ تابعی از متغیر *وابستهٔ* y می‌باشد. گوییم هرمعادله به‌شکل (۱) *متغیرهای از هم جدا* شده دارد، و معادله‌ای را که بتوان به این شکل درآورد *جدایی‌پذیر* می‌نامیم. مثلاً"، معـادلـهٔ $y' = y^3 \sin x$ جدایی پذیر است، و این را می‌توان فوراً" بـا اختیار $f(x) = \sin x$ و $g(y) = 1/y^3$ مشاهده کرد، ولی معادلهٔ $y' = \sin xy$ جدایی‌پذیر نمی‌باشد.

برای حل (۱) ابتدا طرفین معادله را در $g(y)$ ضرب می‌کنیم. از این نتیجه می‌شود که

$$g(y)\frac{dy}{dx} = f(x). \qquad (2)$$

سپس می‌بینیم که طرف چپ (۲) چیزی جز مشتق $G(y) = G(y(x))$ نسبت به x نیست ،که در آن $G(y)$ یک پادمشتق $g(y)$ می‌باشد . در واقع ، به کمک قاعدهٔ زنجیره‌ای داریم

$$\frac{dG(y)}{dx} = \frac{dG(y)}{dy}\frac{dy}{dx} = g(y)\frac{dy}{dx}.$$

لذا ، (۲) را می‌توان به شکل زیر نوشت :

$$\frac{dG(y)}{dx} = f(x). \tag{۳}$$

حال ، با انتگرالگیری از طرفین (۳) نسبت به x ، خواهیم داشت

$$G(y) = \int f(x)\,dx + C = F(x) + C, \tag{۴}$$

که در آن $F(x) = \int f(x)\,dx$ یک پادمشتق ثابت $f(x)$ بوده ، و C ثابت دلخواه انتگرالگیری است . توجه کنید که اگر $g(y) \equiv 1$ ، می‌توان $G(y) = y$ را اختیار کرد . در این صورت ، معادلهٔ دیفرانسیل (۱) به $y' = f(x)$ ، و معادلهٔ (۴) به فرمول (۶) ، صفحهٔ ۴۲۰ ، برای جواب عمومی $y' = f(x)$ تحویل می‌شود .

جداسازی متغیرها . به صورت دیگر ، با ضرب طرفین (۱) در $g(y)\,dx$ و تعبیر dy/dx به صورت خارج قسمت دیفرانسیلها ، معادلهٔ زیر به دست می‌آید :

$$g(y)\,dy = f(x)\,dx, \tag{۱'}$$

که در آن طرف چپ فقط شامل متغیر y و طرف راست فقط شامل متغیر x می‌باشد . بدین معنی است که **متغیرها** هم در (۱′) و هم در معادلهٔ دیفرانسیل اصلی (۱) *از هم جدا شده‌اند* ، و فرایندی که ما را از (۱) به (۱′) می‌برد ***جداسازی متغیرها*** نام دارد . حال اگر از طرفین (۱′) انتگرال بگیریم ، به دست می‌آوریم

$$\int g(y)\,dy = \int f(x)\,dx + C,$$

که چیزی جز نوشتن (۴) به صورتی دیگر نیست . در نگاه اول به نظر می‌رسد که در این استدلال از قاعدهٔ زنجیره‌ای دوری می‌شود ، ولی واقعاً این طور نیست ، زیرا $y = y(x)$ متغیر وابسته بوده و دیفرانسیل آن $dy = y'(x)\,dx$ می‌باشد .

توجه کنیدکه معادلهٔ (۴) به صورتی که هست تابع $y = y(x)$ را به *طور ضمنی* تعریف می‌کند ، ولی در بسیاری از حالات می‌توان به آسانی (۴) را نسبت به y و به صورت تابع صریحی از x حل کرد . در هر حالت ، معادلهٔ (۴) ، یا معادلهٔ حاصل از (۴) با حل

نسبت به y ، **جواب عمومی** معادلهٔ دیفرانسیل (۱) نامیده می‌شود . جواب عمومی شامل ثابت دلخواه انتگرالگیری C بوده ،و برای یافتن جواب خصوصی (۱) صادق درشرط اولیهٔ

$$y(x_0) = y_0 \tag{۵}$$

باید ثابت C را تعیین کنیم . با گذاردن $x = x_0, y = y_0$ در (۴) و حل معادلهٔ حاصل نسبت به C ، فوراً معلوم می‌شود که

$$C = G(y_0) - F(x_0).$$

این جواب خصوصی منحصر به فرد است . در واقع ، هرگاه y در معادلهٔ دیفرانسیل (۱) و شرط اولیهٔ (۵) صدق کند ، آنگاه ، همانطور که با جانشانی C در (۴) دیدیم، $G(y) = F(x) + G(y_0) - F(x_0)$. اما ،طبق فرض، $dG(y)/dy = g(y)$؛ درنتیجه ، $G(y)$ یکنوا و لذا یک به یک است . پس فقط یک جواب از (۱) وجود دارد که در (۵) صدق می‌کندو آن عبارت است از $y = G^{-1}(F(x) + G(y_0) - F(x_0))$ ، کـه درآن G^{-1} تابع معکوسGمی‌باشد.

مثال ۱ . جواب خصوصی معادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{dy}{dx} = 2xy \tag{۶}$$

صادق در شرط اولیهٔ

$$y(0) = 3 \tag{۶'}$$

را بیابید .

حل. با این فرض که y هیچگاه صفر نیست ،طرفین (۶) را در dx/y ضرب می‌کنیم .ازاین معادلهٔ

$$\frac{dy}{y} = 2x\,dx$$

نتیجه می‌شود ، که در آن متغیرها از هم جدا شده‌اند . سپس با انتگرالگیری بـه دست می‌آوریم

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2x\,dx + k,$$

درنتیجه ،

$$\ln|y| = x^2 + k.$$

در اینجا ثابت دلخواه انتگرالگیری‌را با k نشان می‌دهیم و C را برای کارهای بعدی‌ذخیره

می‌کنیم . با گرفتن نمایی از طرفین معادلهٔ اخیر ، معلوم می‌شود که

$$|y| = e^{x^2+k} = e^k e^{x^2} = Ce^{x^2}, \tag{۷}$$

که در اینجا $C = e^k$ ثابت مثبت دلخواه است (چرا؟) . تابع $y = y(x)$ پیوسته است (زیرا مشتقپذیر است) و هرگز صفر نیست . بنابراین ، y به‌ازای جمیع x هامتحدالعلامه است ، که اگر باید (۶۰) برقرار باشد ، مثبت می‌باشد . لذا ، $|y| = y$ و (۷) به صورت

$$y = Ce^{x^2}$$

در می‌آید . باگذاردن $x = 0$ و $y = 3$ در این فرمول فوراً " خواهیم داشت $C = 3$. ازاینرو جواب خصوصی مطلوب معادلهٔ (۶) خواهد بود $y = 3e^{x^2}$.

تبصره . فرمول $y = Ce^{x^2}$ درصورتی جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل (۶) است که شرط مثبت بودن C را لغو کرده و اجازه دهیم C هر مقدار ، مثبت ، منفی ، یا صفر ، به خود بگیرد . در واقع ، چون e^{-x^2} ناصفر بوده و

$$\frac{d}{dx}(ye^{-x^2}) = \left(\frac{dy}{dx} - 2xy\right)e^{-x^2},$$

رابطهٔ (۶) برقرار است اگر و فقط اگر مشتق ye^{-x^2} صفر باشد ؛ یعنی ، اگر و فقط اگر $ye^{-x^2} = C$ ، یا معادلاً " $y = Ce^{x^2}$ که در آن C یک ثابت دلخواه است .

رشد و تحلیل نمایی . حال آماده‌ایم مسائل رشد و تحلیل نمایی را حل کنیم . فرض کنیم بستگی یک متغیر ، مثلاً " y ، به متغیر دیگر ، مثلاً " t (نوعاً " زمان) ، با فرمول

$$y = y_0 e^{rt} \tag{۸}$$

داده شده‌باشد ،که در آن $y_0 > 0$ و r ثابت باشند . دراین صورت ، میزان تغییر $y = y(t)$ نسبت به زمان t عبارت است از مشتق

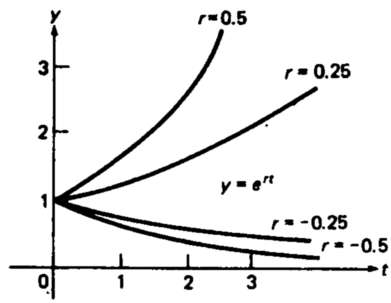
$$\frac{dy}{dt} = y_0 r e^{rt}.$$

لذا ، y در معادلهٔ دیفرانسیل‌سادهٔ

$$\frac{dy}{dt} = ry \tag{۹}$$

صدق می‌کند ؛ یعنی ، *میزان تغییر متغیر y با مقدار y متناسب می‌باشد* . اگر r مثبت‌باشد ، تابع (۸) یک‌تابع صعودی از t است ،زیرا دراین‌صورت به‌ازای هر t ، $dy/dt = y_0 r e^{rt} > 0$

و گوییم y به‌طور نمایی با t رشد می‌کند ، یا y یک تابع به‌طور نمایی صعودی از t است. از آن سو ، اگر r منفی باشد ، رابطهٔ (۸) یک تابع نزولی از t است ، زیرا در این صورت به ازای هر t ، $dy/dt = y_0 re^{rt} < 0$ ، و گوییم y به طور نمایی با t به تحلیل می‌رود (یا افت می‌کند) یا y یک تابع به طور نمایی نزولی از t است . در شکل ۱۱ این تفاوت اساسی بین رفتار توابع به‌طور نمایی صعودی و به‌طور نمایی نزولی نموده شده است ، که در آن



شکل۱۱.

نمودار تابع e^{rt} به ازای $r = \pm 0.25, \pm 0.5$ بر بازهٔ $0 \le t < \infty$ در یک دستگاه مختصات قائم رسم شده است . اگر $r = 0$ چه رخ می‌دهد ؟

با قرار دادن $t = 0$ در " قانون نمایی " (۸) معلوم می‌شود که

$$y(0) = y_0 \qquad (y_0 > 0). \tag{۹'}$$

لذا ، ثابت y_0 چیزی جز مقدار اولیهٔ y ، یعنی مقدار y در $t = 0$ ، نیست و می‌بینیم که (۸) جواب خصوصی معادلهٔ دیفرانسیل (۹) است که در شرط اولیهٔ (۹') صدق می‌کند . این را می‌توان مستقیماً " با جداسازی متغیرها نیز نشان داد . (این کار را با استفاده از همان دلایل مثال ۱ ولی با (۹) به جای (۶) و $\int r\,dt = rt$ به جای $\int 2x\,dx = x^2$ به عنوان تمرین انجام دهید .)

از (۹) نتیجه می‌شود که

$$r = \frac{1}{y}\frac{dy}{dt}, \tag{۱۰}$$

یا معادلاً "

$$r = \frac{d}{dt}\ln y, \tag{۱۰'}$$

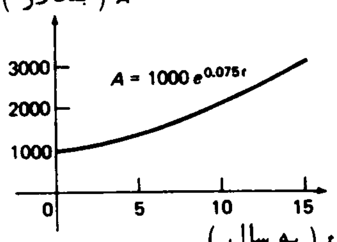
یعنی ، r مشتق لگاریتمی y می‌باشد . لذا ، r میزان تغییر y نبوده ، بلکه میزان تغییر y

بخش بر مقدار " جاری " y می‌باشد . به عبارت دیگر ، r به جای آنکه میزان رشد "مطلق" dy/dt باشــد ، میزان رشد نسبی یا کسری (۱۰) می‌باشد . علی‌رغم این تمایز مهم ، در مسائلی که ابهام ایجاد نشود ، r را اغلب **میزان رشد** (یا فقط میزان) می‌نامند .

مثال ۲ . همانطور که در صفحهٔ ۵۳۰ دیدیم ، هرگاه سپردهٔ اولیهٔ P دلار به نــرخ ســود سالانهٔ r به طور پیوسته مرکب شود ، آنگاه پول موجود پس از t سال در بانک مساوی است با

$$A = Pe^{rt} \tag{۱۱}$$

دلار . لذا ، A به طور نمایی با زمان رشد می‌کند ، و میزان رشد (نسبی) چیزی جز نرخ سود r نیست . در شکل ۱۲ نمودار (۱۳) در طی سالهای بسیار به ازای سپردهٔ اولیهٔ $1000 و نرخ سود 7.5% رسم شده است .



شکل ۱۲

رشد جمعیت . نظریهٔ رشد نمایی کاربردهای مهمی در مبحث زیست‌شناسی جمعیتی دارد . فرض‌کنیم $N = N(t)$ اندازهٔ جمعیتی از ارگانیسمهای زنده (باکتریها ، حشرات مردم ، و غیره) در لحظهٔ t باشد . اگرچه N را تابع پیوسته‌ای می‌گیریم ، ولی مقادیر N فقط می‌توانند اعداد صحیح باشند . چون N نوعا " بسیار بزرگ است ، خطای حاصل از این تقریب قابل چشم‌پوشی است . فرض‌کنیم جمعیت به میزان رشد نسبی r به‌طور نمایی رشدنماید . در این صورت ،

$$N = N(t) = N_0e^{rt}, \tag{۱۲}$$

که در آن N_0 اندازهٔ جمعیت در لحظهٔ $t = 0$ است . البته ، تابع N چیزی جز جواب خصوصی معادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{dN}{dt} = rN \tag{۱۳}$$

صادق در شرط اولیهٔ

$$N(0) = N_0 \tag{۱۳'}$$

نیست .

معادلهٔ دیفرانسیل (۱۳) می‌گوید که میزان تغییر اندازهٔ جمعیت در هر لحظه با اندازهٔ جمعیت در آن لحظه متناسب است . این دست کم در شرایط عادی و برای دوره‌های محدودی از زمان موجه است . در واقع ، از یک سو داریم

$$\frac{dN}{dt} = B - D, \tag{۱۴}$$

که در آن B و D به ترتیب میزانهای تولد و مرگ (مطلق) می‌باشند . از آن سو ، هر دوی B و D اغلب با اندازهٔ جمعیت متناسب‌اند (تعداد زایشگاهها و قبرستانها در شهرهای بزرگ بیشتر از شهرهای کوچک می‌باشد) ، و در این صورت $B - D$ نیز با N متناسب است . از مقایسهٔ (۱۳) و (۱۴) معلوم می‌شود که

$$r = \frac{B - D}{N}.$$

به عبارت دیگر ، میزان نسبی رشد جمعیت مساوی مازاد سرانهٔ میزان تولد بر میـزان مرگ است .

زمان مضاعف سازی . یک جمعیت که دارای رشد نمایی به میزان r است اندازه‌اش در هر دوره از زمان به طول

$$T = \frac{\ln 2}{r} \tag{۱۵}$$

دوبرابر می‌شود $(\ln 2 \approx 0.6931)$ ، و به این دلیل T را **زمان مضاعف‌سازی** جمعیت می‌نامیم. در واقع ، از (۱۲) نتیجه می‌شود که

$$N(t + T) = N_0e^{r(t+T)} = N_0e^{rt}e^{rT} = e^{rT}N(t).$$

لذا ، به ازای هر $t \geq 0$ ، $N(t + T) = 2N(t)$ اگر و فقط اگر

$$e^{rT} = 2,$$

که با (۱۵) معادل است .

در مسائل میزانهای رشد سالانه ، r معمولاً به صورت درصد در سال بیان می‌شود . در این صورت ، فرمول (۱۵) به تقریب

$$T = \frac{100 \ln 2}{r} \approx \frac{69}{r} \text{ سال} \tag{۱۵'}$$

برای زمان مضاعف‌سازی میل می‌کند . مثلا " ، اگر میزان رشد سالانه ثابت و برابر 3% باشد ، جمعیت یک کشور حدودا " $69/3 = 23$ سال دوبرابر می‌شود ، پول موجود در بانک با نرخ سود سالانهٔ 7.5% و به‌طور پیوسته مرکب حدودا " $69/7.5 = 9.2$ سال دوبرابر می شود (ر.ک. شکل ۱۲) ، و از این قبیل .

مثال ۳ . یک نوع باکتری که زیاد روی آن مطالعه شده و معمولا " در جهاز هاضمهٔ انسان زندگی می‌کند یک ارگانیسم تک سلولی است به نام *اشریچیاکولی*[1] (مختصرا " *ای کولی*) . تحت شرایط ایده‌آل ، یک سلول ای‌کولی به جرم تقریبا " 5×10^{-13} گرم ، حدود 20 دقیقه پس از " تولد " تحت *انشقاق دویی* ، یعنی تقسیم به دو سلول ، به طور غیرجنسی تکثیر می‌شود . چقدر طول می‌کشد تا یکی از این باکتریها کشتی به جرم 3 گرم تولید کند مشروط براینکه تکثیر با همین میزان ادامه یابد .

حل . در اینجا طبیعی است به جای تعداد سلولها در کشت از جرم کشت صحبت کنیم . پس از t دقیقه رشد ، جرم کشت به گرم عبارت است از

$$m = m(t) = m_0 e^{rt},$$

که در آن m_0 جرم اولیهٔ آن است ،که مساوی 5×10^{-13} g است ، و r میزان رشد می‌باشد . فرض کنیم t_1 زمان لازم برای رسیدن وزن کشت به 3 g باشد . در این صورت ،

$$m_0 e^{rt_1} = 3,$$

یا معادلا "

$$t_1 = \frac{1}{r} \ln \frac{3}{m_0}.$$

به‌علاوه ، چون $T = 20$ min ، فرمول (۱۵) ایجاب می‌کند که

$$r = \frac{\ln 2}{20}.$$

بنابراین ،

$$t_1 = \frac{20}{\ln 2} \ln \frac{3}{m_0} = \frac{20}{\ln 2} \ln \frac{3}{5 \times 10^{-13}} = \frac{20}{\ln 2} \ln (6 \times 10^{12})$$

$$= 20 \frac{\ln 6 + 12 \ln 10}{\ln 2} \approx 849 \text{ min} = 14.15 \text{ hr}.$$

1. *Escherichia coli*

تحلیل رادیواکتیو. حال به مسائل *تحلیل* نمایی می‌پردازیم ، که تحلیل رادیواکتیو نمونهٔ بارز آن است . فرض‌کنیم $m = m(t)$ جرم یک مادهٔ رادیواکتیو ، مانند رادیم ، درلحظهٔ t باشد . در این صورت ، وقتی ماده به خاطر ناپایداری هستهٔ اتمهای سازای آن‌تجزیه‌شود ، میزان از بین رفتن جرم آن در هر لحظه با جرم باقیماندهٔ ماده متناسب است . لـذا ، m در معادلهٔ دیفرانسیل زیر صدق می‌کند :

$$\frac{dm}{dt} = rm,$$

که در آن r ثابت‌است .چون r منفی است (جرم ناپدید می‌شود) ، می‌نویسیم $r = -k$ که در آن k عدد مثبتی‌است به‌نام *ثابت تحلیل*. بنابراین ، برای یافتن تابـع $m = m(t)$ باید معادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{dm}{dt} = -km,$$

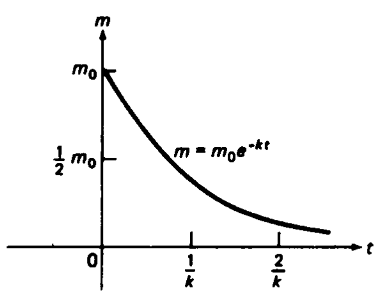
را با شرط‌اولیهٔ

$$m(0) = m_0$$

حل کنیم ، که در آن m_0 جرم ماده در لحظهٔ $t = 0$ اســت .با جداسازی متغیرها (یا صرفا" با امتحان) معلوم می‌شود که

$$m = m(t) = m_0 e^{-kt} \tag{۱۶}$$

جواب این مسئلهٔ مقدار اولیه است . لذا ، جرم مادهٔ رادیواکتیو به‌طور نمایی و به میزانی که با ثابت k تعیین‌می‌شود به تحلیل می‌رود (هرقدر k بزرگتر باشد ،تحلیل‌سریعتراست) . در شکل ۱۳ تابع (۱۶) رسم شده است ، که در آن t با واحدهای $1/k$ سنجیده می‌شود .



شکل ۱۳

نیمه عمر. یک مادهٔ رادیواکتیو ، با ثابت تحلیل k ، نصف جرم خود را در هر دوره از

زمان به طول

$$T = \frac{\ln 2}{k} \tag{۱۷}$$

از دست می‌دهد ، و به این دلیل T (که اغلب به صورت $T_{1/2}$ نوشته می‌شود) نیمه عمر ماده نام دارد . در واقع ، از (۱۶) نتیجه می شود که

$$m(t+T) = m_0 e^{-k(t+T)} = m_0 e^{-kt} e^{-kT} = e^{-kT} m(t).$$

لذا ، به ازای هر $t \geq 0$ ، $m(t+T) = \frac{1}{2} m(t)$ اگر و فقط اگر

$$e^{-kT} = \frac{1}{2},$$

که با (۱۷) معادل است . به تشابه کامل بین فرمول (۱۷) برای نیمه عمر و فرمول (۱۵) برای زمان مضاعف سازی توجه نمایید .

مثال ۴ . چقدر طول می‌کشد تا 99% از نمونه‌ای از استرونتیوم 90 ناپدید شود ؟نیمه عمر استرونتیوم 90 ، که ماده‌ء رادیواکتیو خطرناکی است ، 28.1 سال می‌باشد .

حل . ناپدید شدن 99% از نمونه یعنی جرم اولیهء m_0 به $\frac{1}{100} m_0$ تحلیل رفته است . بنابراین ، اگر t_1 زمان لازم برای تحلیل 99% از نمونه باشد ، داریم

$$m_0 e^{-kt_1} = \frac{1}{100} m_0,$$

یا معادلا "

$$t_1 = \frac{\ln 100}{k}.$$

اما ، طبق فرمول (۱۷) ،

$$k = \frac{\ln 2}{28.1},$$

و درنتیجه ،

$$t_1 = 28.1 \frac{\ln 100}{\ln 2} \approx 186.7 \text{ سال}$$

مسائل

مسئلهء مقدار اولیهء داده شده را با جداسازی متغیرها حل کنید .

۱. $x\dfrac{dy}{dx}+y=0,\ y(2)=1$

۲. $x\dfrac{dy}{dx}=y^2+1,\ y(-1)=1$

۳. $2xy\dfrac{dy}{dx}+y^2+1=0,\ y(1)=2$

۴. $x^3\dfrac{dy}{dx}=2y,\ y(\sqrt{\log_2 e})=3$

۵. $(x^2+x)\dfrac{dy}{dx}=2y+1,\ y(1)=0$

۶. $(e^x+1)y\dfrac{dy}{dx}=e^x,\ y(0)=1$

۷. $(x^2+1)\dfrac{dy}{dx}+y^2+1=0,\ y(3)=2$

۸. $x\dfrac{dy}{dx}+y\ln y=0,\ y(1)=e$

۹. یک منحنی از نقطهٔ $(0, 2)$ گذشته و دارای این خاصیت است که شیب آن در هر نقطه P سه برابر عرض P است. این منحنی چیست؟

۱۰. یک منحنی دارای این خاصیت است که قائم به آن در هر نقطه از نقطهٔ ثابت A می‌گذرد. نشان دهید که منحنی دایره‌ای به مرکز A (یا قوسی از این دایره) است.

۱۱. فرض کنید شعاع R یک‌بالون به‌میزان 2.5% بردقیقه به‌طور نمایی‌افزایش‌یابد. مساحت سطح S بالون چه رفتاری دارد؟

۱۲. یک جمعیت که رشد نمایی دارد اندازه‌اش در 50 سال دوبرابر می‌شود. میزان رشد سالانهٔ آن چقدر است؟

۱۳. نشان دهید هرگاه T زمان‌مضاعف‌سازی‌یک‌جمعیت‌با‌رشد‌نمایی‌و اندازهٔ N باشد، آنگاه $N=N_0 2^{t/T}$ که در آن N_0 اندازهٔ اولیهٔ جمعیت است.

۱۴. یک جمعیت با رشد نمایی ظرف 5 سال 20% افزایش‌می‌یابد. زمان‌مضاعف‌سازی‌چقدر است؟

۱۵. جمعیت جهان که در سال 1980، 4.5 بیلیون بوده به میزانی حدود 1.8% در سال به‌طور نمایی رشد می‌کند. اگر رشد با همین میزان ادامه یابد، جمعیت جهان را در

سال 2010 تخمین بزنید .

۱۶ . فرض کنید مصرف کل به میزان $r\%$ در سال به‌طور نمایی رشد داشته باشد ، در حالی که جمعیت به میزان $s\%$ در سال به‌طور نمایی رشد می‌کند . مصرف سرانه چه رفتاری دارد ؟

۱۷ . تعداد باکتریهای یک کشت در هر 15 دقیقه دوبرابر می‌شود . چقدر طول می‌کشد تا 500 باکتری یک میلیون شود ؟

۱۸ . تعداد باکتریهای یک کشت در لحظهٔ t مساوی است با $N = 1500(2^{2.5t})$ ، که در آن t به ساعت است . زمان بین انشقاقهای متوالی باکتریها چقدر است ؟

۱۹ . یک کشت شامل دو نوع باکتری است ، نوع A و نوع B . باکتریهای نوع A (باانشقاق دویی) در هر ساعت تکثیر می‌شوند ، حال آنکه باکتریهای نوع B هر 2 ساعت تکثیر می‌گردند . پس از 2 ساعت کشت شامل 3.5 برابر تعداد اولیهٔ باکتریهاست . ترکیب اولیهٔ کشت را بیابید . کشت پس از 4 ساعت چه رشدی یافته است ؟

۲۰ . قدرت خرید دلار را پس از ده سال تورم به میزان 8% در سال بیابید . با 12% در سال چقدر است ؟ (تورم را نمایی بگیرید .)

۲۱ . بهای نان در سال 1936 دانه‌ای 10¢ و در 1986 دانه‌ای $1.35 بوده است . میزان تورم سالانه را در این دورهٔ 50 سال تخمین بزنید .

۲۲ . چقدر طول می‌کشد تا یک نمونه از پلوتونیم 239 ، 90% رادیواکتیو خود را از دست بدهد ؟ (نیمه عمر پلوتونیم 239 تولیدشده در راکتورهای هسته‌ای از نوع "تکثیرکن" 24,360 سال است .)

۲۳ . یکدهم یک مادهٔ رادیواکتیو طی 20 سال ناپدید می‌شود . نیمه عمر ماده چقدر است؟

۲۴ . اگر 30% یک مادهٔ رادیواکتیو ظرف 10 روز ناپدید شود ، چقدر طول می‌کشد تا 60% آن ناپدید گردد ؟

۲۵ . فرض کنید $C = C(t)$ غلظت یک داروی خوردنی در خون باشد . همین طور که بدن اثر دارو را از بین می‌برد ، C به میزانی متناسب با مقدار آن در هر لحظه کاهش می‌یابد ؛ یعنی ،

$$\frac{dC}{dt} = -kC \qquad (k > 0),$$

که در آن عدد k به **ثابت حذف** دارو معروف است . اگر غلظت اولیه C_0 باشد ، غلظت آن در لحظهٔ t چقدر است ؟ اگر حذف نیمی از دارو 36 ساعت طول بکشد ، چقدر طول می‌کشد تا بدن 95% دارو را حذف نماید ؟

۲۶ . داروهای رادیواکتیو اغلب به عنوان " ردیاب " در تشخیصهای طبی به‌کار می‌روند . فرض کنید به بیماری یک خوراک ردیاب رادیواکتیو با نیمه‌عمر 8 روز داده باشیم ، و نصف دارو طی 2 روز توسط متابولیسم بدن حذف شود (متابولیسم مستلزم فرایندهای بیوشیمی بوده و ربطی به رادیواکتیو که در رابطه با فرایندهای هسته‌ای است ندارد). چقدر طول می‌کشد تا رادیواکتیو بدن بیمار تا 1% مقدار اولیه افت کند ؟ این‌کار در صورت عدم حذف توسط متابولیسم چقدر طول خواهد کشید ؟

۲۷ . مقدار متوسط رادیم پوستهٔ زمین تقریباً 1 اتم در 10^{12} است . آیا این فرض‌که رادیم فعلی از رادیم بیشتری در گذشته به جا مانده معقول است ؟ جواب خود را توضیح دهید . (نیمه‌عمر رادیم 1620 سال است .)

کربن 14 رادیواکتیو (*رادیوکربن*) با نیمه‌عمر 5730 سال به‌وسیلهٔ عمل اشعهٔ کیهانی روی ازت در طبقات بالای جو مرتب تولید می‌شود . رادیوکربن ، در ترکیب با دی اکسید کربن ، با طبقات پایین جو مخلوط شده و ابتدا توسط گیاهان در طول فتوسنتز و سپس توسط جانورانی که گیاهان را می‌خورند جذب می‌شود . گیاهان و جانوران تا وقتی زنده‌اند رادیوکربن تازه دریافت می‌کنند ، ولی وقتی مردند فرایند متوقف شده و رادیوکربن موجود در نسوج آنها به کندی تجزیه شده و طی 5730 به نصف مقدار اصلی می‌رسد . این امر ما را به روشی به نام *تاریخ‌گذاری رادیوکربن* می‌رساند که در باستان‌شناسی برای تخمین سن اشیاء عتیقه بسیار مهم است . مثلاً ، سن یک نقره از دوران مومیایی را می‌توان از مقایسهٔ مقدار رادیواکتیو نقره با رادیواکتیو موجود در یک قطعه چوب تازه‌ازهمان‌نوع‌واندازه مقایسه کرد . با همین روش بود که سن طومارهای دریای مرده حدود 2000 سال تخمین زده شد .

۲۸ . فرض کنید یک شمارشگر گایگر[1] از یک نمونهٔ کربن‌دار به سن مجهول α در یک‌دوره‌از زمان m تحلیل را نشان دهد ، و در همین دوره از زمان در یک نمونهٔ فعلی مشابه n تحلیل را نشان دهد $(n > m)$. نشان دهید که

$$\alpha = \text{سال } \frac{5730}{\ln 2}\ln\frac{n}{m} \qquad \text{(یک)}$$

۲۹ . مغز یک درخت عظیم کاج حدوداً 75% رادیواکتیو چوب خارجی جوانتر را دارد . سن درخت را تخمین بزنید .

۳۰ . ذغال چوب و استخوان جانوران به‌دست‌آمده از یک خرابهٔ ماقبل تاریخ دارای 55%

---

1. Geiger

رادیواکتیو نمونه‌های معاصر مشابه است . سن خرابه را تخمین بزنید .

فرض کنیم در تحلیل هر اتم مادهٔ رادیواکتیو A با ثابت تحلیل a یک اتم از مادهٔ رادیو اکتیو جدید B با ثابت تحلیـــل $b\ (\neq a)$ تولید می‌شود . همچنین ، $m_A = m_A(t)$ جرم مادهٔ A و $m_B = m_B(t)$ جرم مادهٔ B در لحظهٔ t باشد . در این صورت ، چون از بین رفتن A به ایجاد B منجر می‌شود ، این فرایند تحلیل با دو معادلهٔ دیفرانسیل زیر توصیف می‌شود :

$$\frac{dm_A}{dt} = -am_A,$$

$$\frac{dm_B}{dt} = am_A - bm_B.$$

۳۱ . معـــادلـــــهٔ اول را تـــحت شرط اولیهٔ $m_A(0) = m_0$ نسبت به m_A حل کنید ،که m_0 جرم اولیهٔ مادهٔ A است ، و m_A را از معادلهٔ دوم حذف نمایید . سپس معادلهٔ دیفرانسیل حاصل نسبت‌به m_B را در e^{bt} ضرب و آن را تحت شرط اولیـــهٔ $m_B(0) = 0$ حل کنید (هیچ B ای در آغاز وجود ندارد) .

۳۲ . نشان دهید که بزرگترین مقدار m_B مساوی $m_0(b/a)^{b/(a-b)}$ است که در لحظهٔ

$$t = \frac{1}{a-b} \ln \frac{a}{b}$$

گرفته می‌شود .

۳۳ . اگر نیمه‌عمر A مساوی 100 سال و نیمه‌عمر B مساوی 150 سال‌بوده و نمونه‌ای‌که‌ابتدا تمام A بوده اینک شامل A و B به میزان مساوی باشد ، نمونه چند سال سن دارد ؟ بزرگترین مقدار m_B چقدر است و چه وقت رخ می‌دهد ؟

۳۴ . نشان‌دهید هرگاه‌نیمه‌عمر A از نیمه‌عمر B کمترباشد ،آنگاه‌وقتی $t \to \infty$ ، $m_B/m_A \to \infty$ ؛ درنتیجه ، نمونه‌ای که ابتدا تمام A است بالاخره تقریباً " تمام B می‌شود . اگر نیمه عمر A بیشتر از نیمه‌عمر B باشد ، چه رخ می‌دهد ؟

۷.۶ چند کاربرد دیگر نماییها

رشد لژیستیک (اختیاری) . در بخش اخیر دیدیم که معادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{dN}{dt} = rN \qquad (1)$$

$(r > 0)$ تحت شرط اولیهٔ

$$N(0) = N_0 \qquad (1')$$

منجر به رشد جمعیت طبق قانون نمایی

$$N = N(t) = N_0 e^{rt} \tag{۲}$$

می‌شود . فرمول (۲) به " انفجار جمعیت " منجر می‌شود ،که در آن جمعیت در زمان بسیار کوتاهی به هر سطحی که بخواهیم می‌رسد . مثلا " ، میزان رشد سالانهٔ 3% جمعیت یک‌کشور پس‌از 4 زمان مضاعف‌سازی ، یعنی 92 سال= (23)4، 16 برابر می‌شود . البته ، رشد جمعیت به‌خاطر کمبود غذا ، شیوع بیماریهای واگیردار ، عدم باروری به جهت جمعیت بیش از حــد ، جنگ برای منابع بتدریج کاهش یافته ، و غیره ، باید کند شود . خواهیم دید که این اثرات " جمعیت بیش‌از حد " را می‌توان در بسیاری از حالات با معرفی جملهٔ اضافی $-sN^2$ در طرف راست معادلهٔ (۱) به طرز جالبی توصیف کرد ، که در آن s (مانند r) ثابت مثبتی می‌باشد . (برای توضیح نحوهٔ پیدایش این جمله ، ر.ک. مسئلهٔ ۸.) در این صورت ، معادلهٔ دیفرانسیل حاکم بر رشد به‌جای (۱) خواهد بود

$$\frac{dN}{dt} = rN - sN^2, \tag{۳}$$

و تحت همان شرط اولیهٔ (۱') می‌باشد .

برای حل معادلهٔ دیفرانسیل (۳) ، متغیرها را جدا کرده و انتگرال می‌گیریم . این نتیجه می‌دهد که

$$\int \frac{dN}{rN - sN^2} = \int dt + c = t + c, \tag{۴}$$

که در آن c ثابت انتگرالگیری است . محاسبهٔ انتگرال سمت چپ آسان است . با فرض

$$N_1 = \frac{r}{s}, \tag{۵}$$

داریم

$$\int \frac{dN}{rN - sN^2} = -\frac{1}{s}\int \frac{dN}{N^2 - \frac{r}{s}N} = -\frac{1}{s}\int \frac{dN}{N(N - N_1)}.$$

پس فرمول (۵) ، صفحهٔ ۴۹۹ ، قابل اعمال است (به ازای $a = 0, b = -N_1$)، و به‌رابطهٔ زیر منجر می‌شود :

$$\int \frac{dN}{rN - sN^2} = \frac{1}{sN_1}\ln\left|\frac{N}{N - N_1}\right| = \frac{1}{r}\ln\left|\frac{N}{N - N_1}\right|.$$

لذا ، (۴) به صورت زیر درمی‌آید :

$$\ln\left|\frac{N}{N-N_1}\right| = rt + k,$$

که در آن $k = rc$ ، یا

$$\left|\frac{N}{N-N_1}\right| = Ce^{rt},$$

که در آن $C = e^k$. با اعمال شرط اولیهٔ $N(0) = N_0$ ، به دست می‌آوریم

$$C = \left|\frac{N_0}{N_0-N_1}\right|,$$

درنتیجه ،

$$\left|\frac{N}{N-N_1}\right| = \left|\frac{N_0}{N_0-N_1}\right|e^{rt}.$$

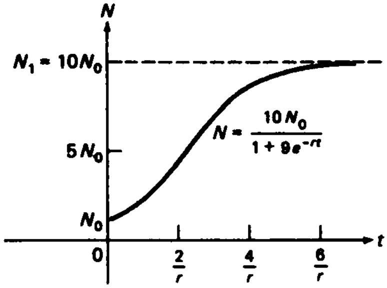
حال می‌توان علایم قدرمطلق را حذف کرد ، زیرا N و N_0 هر دو مثبت بوده و $N - N_1$ و $N_0 - N_1 = N(0) - N_1$ متحدالعلامه می‌باشند (در محاسبهٔ انتگرال تلویحاً " فرض شده بود که به ازای هر $t \geq 0$ ، $N - N_1 \neq 0$). با این کار و حل نسبت به N ، پس از چند عمل سرراست معلوم می‌شود که

$$N = \frac{N_1e^{rt}}{e^{rt} + \left(\frac{N_1}{N_0} - 1\right)},$$

یا معادلاً "

$$N = \frac{N_1}{1 + \left(\frac{N_1}{N_0} - 1\right)e^{-rt}}. \qquad (۶)$$

با فرض $N_1 > N_0$ (حالات دیگر در مسائل ۹ و ۱۰ بحث شده‌اند) ، می‌بینیم که مخرج تابع $N = N(t)$ تعریف شده با (۶) مشتق منفی دارد ؛ و درنتیجه ، یک تابع نزولی است . پس نتیجه می‌شود که N یک تابع صعودی می‌باشد . با رسم این تابع ، منحنی S‌ـ شکل آمده در شکل ۱۴ را در حالت $N_1 = 10N_0$ به دست می‌آوریم . اکنون رشد جمعیت محدود شده است ، زیرا وقتی $t \to \infty$ ، نمایی e^{-rt} به صفر نزدیک می‌شود ؛ درنتیجه، (۶) به *اندازهٔ* حدی یا ***پایدار*** **جمعیت** N_1 نزدیک می‌شود که از فرمول (۵) به دست می‌آید.



شکل ۱۴

توجه کنید که N_1 از اندازهٔ اولیهٔ جمعیت N_0 مستقل است. در واقع، N_1 اندازهٔ جمعیتی است که در آن طرف راست معادلهٔ دیفرانسیل (۳) مساوی صفر است؛ یعنی، در آن میزان مرگ با میزان تولد یکی است. اعتبار **قانون رشد لژیستیک** (۶) با آزمایشات بسیار نه فقط با جمعیتهای بشری، بلکه با جمعیتهای آزمایشی از قارچها، تک یاخته‌ها، و مگسها، تأیید شده است. همچنین، از این قانون برای توصیف رشد ارگانیسمهای چندسلولی استفاده شده است.

مثال ۱. یک جمعیت از قانون رشد لژیستیک (۶)، با $N_1 > 2N_0$، تبعیت می‌کند. چه وقت میزان رشد جمعیت ماکزیمم است؟

حل. میزان رشد جمعیت مشتق dN/dt است که با معادلهٔ دیفرانسیل (۳) داده می‌شود. به خاطر (۵) می‌توان (۳) را به شکل

$$\frac{dN}{dt} = s(NN_1 - N^2) = sP(N) \qquad (۳')$$

نوشت، که برحسب چندجمله‌ای درجهٔ دوم

$$P(N) = NN_1 - N^2$$

می‌باشد. چون $s > 0$، میزان رشد dN/dt وقتی ماکزیمم است که $P(N)$ ماکزیمم باشد. با مشتقگیری از $P(N)$ نسبت به N، معلوم می‌شود که

$$P'(N) = \frac{d}{dN}(NN_1 - N^2) = N_1 - 2N.$$

بنابراین، $P'(N)$ مثبت است اگر $N_0 \le N < \frac{1}{2}N_1$، صفر است اگر $N = \frac{1}{2}N_1$، و منفی

است اگر $\frac{1}{2}N_1 < N < N_1$ (N هرگز به مقدار N_1 نمی‌رسد) . از آزمون مشتق‌اول معلوم می‌شود که $P(N)$ در $N = \frac{1}{2}N_1$ ماکزیمم موضعی (و مطلق) اکیدی مساوی

$$P\left(\frac{1}{2}N_1\right) = \frac{1}{2}N_1^2 - \frac{1}{4}N_1^2 = \frac{1}{4}N_1^2$$

دارد . امـا $dN/dt = sP(N)$ ؛ و درنتیجه ، dN/dt به عنوان تابعی از N نیز در $N = \frac{1}{2}N_1$ ماکزیممی مساوی

$$\left.\frac{dN}{dt}\right|_{N=\frac{1}{2}N_1} = sP\left(\frac{1}{2}N_1\right) = \frac{1}{4}sN_1^2 = \frac{1}{4}rN_1$$

دارد . این ماکزیمم در لحظهٔ t_1 که $N = \frac{1}{2}N_1$ به دست می‌آید ، همچنین ، بنابر آزمون یکنوایی ، $P(N)$ بر $[N_0, \frac{1}{2}N_1]$ صعودی و بر $[\frac{1}{2}N_1, N_1)$ نزولی است ؛ و درنتیجه ، همین امر در مـورد dN/dt ، به عنوان تابعی از N ، درست است .

برای یافتن زمان t_1 که در آن $N = \frac{1}{2}N_1$ ، ملاحظه می‌کنیم که در لحظهٔ t_1 مخـرج فرمول (۶) برای N مساوی 2 است . بنابراین ،

$$1 + \left(\frac{N_1}{N_0} - 1\right)e^{-rt_1} = 2,$$

یا معادلاً

$$e^{rt_1} = \frac{N_1}{N_0} - 1. \qquad (۷)$$

با حل نسبت به t_1 به دست می‌آوریم

$$t_1 = \frac{1}{r}\ln\left(\frac{N_1}{N_0} - 1\right). \qquad (۸)$$

به ازای تابع لژیستیک شکل ۱۴ ، نظیر به حالت $N_1 = 10N_0$ ، در می‌یابیم که

$$t_1 = \frac{\ln 9}{r} \approx \frac{2.2}{r}.$$

در این لحظه $N = 5N_0$ و dN/dt مقدار ماکزیمم خود را دارد ، که مساوی $2.5rN_0$ است .

از رابطهٔ (۷) معلوم می‌شود که (۶) را می‌توان به شکل دیگر نوشت:

$$N = \frac{N_1}{1 + e^{-r(t-t_1)}}. \qquad (۶')$$

تابع $N = N(t)$ دارای نقطهٔ عطف در $t = t_1$ اسـت (مشروط براینکه $N_1 > 2N_0$) . در

واقع ،همانطورکه‌مثال ۱ نشان‌داده ، dN/dt ،به‌عنوان تابع N ، بر $[N_0, \frac{1}{2}N_1]$صعودی‌و بر $[\frac{1}{2}N_1, N_1)$ نزولی‌است .اما N یک تابع صعودی از t بر $[0, \infty)$ بوده ، و $N(t_1) = \frac{1}{2}N_1$ پس نتیجه می‌شود کـه dN/dt ، به عنوان تابعی از t ، بر $[0, t_1]$ صعودی و بر $[t_1, \infty)$ نزولی است . بنابراین ،همانطور که شکل ۱۴ در حـالت $N_1 = 10N_0$ نشان می‌دهد ، N بر $[0, t_1]$ به بالا و بر $[t_1, \infty)$ به پایین مقعر بوده و در $t = t_1$ نقطهٔ عطف دارد .

مثال ۲ . مثال ۳ ، صفحهٔ ۵۴۱ ، را از دیدگاه واقعی‌تری بررسی کرده ، فرض می‌کنیـم رشد کشت باکتریها به جای نمایی لژیستیک بوده و جرم حدی 3 گرم باشد . چقدر طول می‌کشد تا جرم کشت کسر q $(0 < q < 1)$ از جرم حدی خود را دارا شود ؟

حل . فرض کنیم $m = m(t)$ جرم کشت پس t دقیقه از رشد لژیستیک باشد . در این‌صورت بنابر مشابهٔ فرمول (۶) برای جرم ،

$$m = m(t) = \frac{m_1}{1 + \left(\frac{m_1}{m_0} - 1\right) e^{-rt}},$$

که در آن $m_0 = 5 \times 10^{-13}$ g جـرم یک سلول ای‌کولی بوده و $m_1 = 3$ g جرم‌حدی‌است. هنوز داریم

$$r = \frac{\ln 2}{20},$$

زیرا این میزان رشد نسبی در غیاب هر نوع اثر جمعیت بیش از حد است $(s = 0)$. فرض کنیم T_q زمانی باشد که کشت جرم qm_1 را دارد . در این صورت ،

$$m(T_q) = \frac{m_1}{1 + \left(\frac{m_1}{m_0} - 1\right) e^{-rT_q}} = qm_1,$$

درنتیجه ،

$$\frac{1}{1 + \frac{m_1}{m_0} e^{-rT_q}} = q.$$

در اینجا $(m_1/m_0) - 1$ را با m_1/m_0 عوض کرده‌ایم بی‌آنکه حتی آن را یک تقریب بنامیم ، زیرا m_1/m_0 بی‌اندازه بزرگ اسـت (6×10^{12}) . پس نتیجه می‌شود که

$$\frac{m_1}{m_0}e^{-rT_q} = \frac{1}{q} - 1,$$

که ایجاب می‌کند که

$$T_q = \frac{1}{r}\ln\left(\frac{m_1}{m_0}\frac{q}{1-q}\right) = \frac{1}{r}\ln\frac{m_1}{m_0} + \frac{1}{r}\ln\frac{q}{1-q}. \tag{۹}$$

اولین جملهٔ سمت راست زمان t_1 است که یک کشت با رشد نمایی لازم دارد تا به جرم m_1 برسد، که در صفحهٔ ۵۴۱ معلوم شد که تقریباً 849 min است. یک کشت بارشدلژیستیک هرگز نمی‌تواند کاملاً به جرم m_1 برسد. در واقع، درلحظهٔ t_1، جرم این کشت صرفاً مساوی است با $\frac{1}{2}m_1 = 1.5$ g، و این را می‌توان با فرض $q = \frac{1}{2}$ در (9)، که $T_{1/2} = t_1$ را نتیجه می‌دهد، مشاهده کرد. مقادیر نوعی T_q که از(۹) حساب می‌شوند در جدول زیر آمده‌اند. توجه کنید که چگونه به ازای q ی کوچک، جرم کشت تقریباً در هر 20 دقیقه‌دو

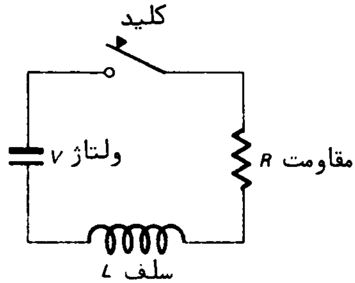
q	T_q	q	T_q
0.0005	629.7	0.25	817.3
0.0010	649.7	0.50	849.0
0.0025	676.2	0.75	880.7
0.005	696.2	0.90	912.4
0.010	716.4	0.95	933.9
0.025	743.3	0.99	981.5
0.05	764.0	0.999	1048.2
0.10	785.6	0.9999	1114.7

برابر می‌شود، حال آنکه به ازای q های بزرگ، جرم کشت در 20 دقیقه تغییر مختصری خواهد داشت.

چند کاربرد فیزیکی نماییها. توابع نمایی در مسائل فیزیکی بسیاری غیر از رادیواکتیویته ظاهر می‌شوند. بخصوص، در مطالعهٔ مدارهای الکتریکی نقش مهمی دارند.

مثال ۳. بازده شدن کلید، منبعی (مثلاً، یک باطری) ولتاژ ثابت V را در مدار الکتریکی شکل ۱۵ تولید می‌کند، که مرکب است از یک مقاومت به میزان R اهم که به یک سلف با ضریب القای L هانری به طور سری وصل شده است. شدت جریان $i = i(t)$ مدار را بیابید. (با این واحدها، i به آمپر می‌باشد.)

حل. بنابر نظریهٔ مدارهای الکتریکی، ولتاژ دو سر مقاومت مساوی است با Ri (قانون اهم)



شکل ۱۵

و ولتاژ دوسر سلف $L\,di/dt$ است. به‌علاوه، مجموع این دو ولتاژ باید مساوی V باشد. بنابراین، شدت جریان در معادلهٔ دیفرانسیل

$$Ri + L\frac{di}{dt} = V, \tag{۱۰}$$

یا معادلاً

$$\frac{di}{dt} = \frac{R}{L}\left(\frac{V}{R} - i\right), \tag{۱۱}$$

تحت شرط اولیهٔ

$$i(0) = 0 \tag{۱۱'}$$

صدق می‌کند (قبل از زده شدن کلید در لحظهٔ $t = 0$ جریانی در مدار وجود ندارد). با جداسازی متغیرها در (۱۱) و انتگرالگیری، به دست می‌آوریم

$$\int \frac{di}{(V/R) - i} = \int \frac{R}{L}\,dt + c,$$

که در آن c ثابت انتگرالگیری است. پس نتیجه می‌شود که

$$-\ln\left|\frac{V}{R} - i\right| = \frac{R}{L}t + c.$$

چون $(V/R) - i > 0$ (چرا؟)، می‌توان علامت قدرمطلق را حذف کرده به دست آورد

$$\ln\left(\frac{V}{R} - i\right) = -\frac{R}{L}t - c.$$

بنابراین،

$$\frac{V}{R} - i = ke^{-Rt/L},$$

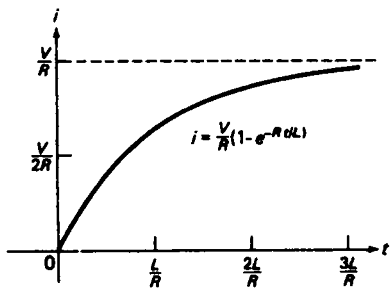
که در آن $k = e^{-c}$؛ یعنی،

$$i = \frac{V}{R} - ke^{-Rt/L}.$$

با اعمال شرط اولیهٔ (۱۱') فوراً" به دست می‌آید $k = V/R$. لذا، مآلاً "خواهیم داشت

$$i = \frac{V}{R}(1 - e^{-Rt/L}).$$

در شکل ۱۶ رفتار i به صورت تابعی از t نموده شده است. توجه کنید که i تفاضل



شکل ۱۶

بین دو جمله است، شدت جریان ثابت *حالت پایدار*

$$i_0 = \frac{V}{R},$$

که جواب (۱۰) در غیاب سلف است، و شدت جریان *گذرای* تحلیل به‌طور نمایی

$$i_{tr} = \frac{V}{R}\, e^{-Rt/L},$$

که به سرعت مستهلک می‌شود. در واقع، در زمان $T = L/R$، به نام *ثابت زمانی* مدار، تا 37% مقدار اولیه‌اش $\approx 100/e$ افت می‌کند. i در تمام مقاصد عملی درمدتی تقریباً" مساوی $5T$ به مقدار حالت پایدار می‌رسد (توجه کنید که $1 - e^{-5} \approx 0.993$).

مثال زیر طرز ظاهر شدن نماییها در مسائل مکانیک را توضیح می‌دهد.

مثال ۴: گلوله‌ای با سرعت اولیهٔ v_0 در محیطی شلیک شده است که با نیرویی متناسب با مجذور سرعت از حرکت آن جلوگیری می‌کند. سرعت v گلوله را پس از آنکه مسافت s را در محیط پیمود پیدا کنید.

حل . فرض‌کنیم m جرم گلوله باشد . بنابرقانون دوم حرکت نیوتن ،

$$m\frac{dv}{dt}=F,$$

که در آن F نیروی مقاومت محیط در برابر گلوله است . چون F با v^2 متناسب است و در جهت مخالف سرعت v عمل می‌کند ، خواهیم داشت $F=-bv^2$ ، که در آن b یک ثابت مثبت می‌باشد . بنابراین ،

$$m\frac{dv}{dt}=-bv^2,$$

درنتیجه ،

$$\frac{dv}{dt}=-\frac{b}{m}v^2=-kv^2,$$

که در آن $k=b/m>0$. بـرای بیان v به عنوان تابعی از s ، یعنی فاصلهٔ نفوذ گلوله در محیط ، از قاعدهٔ زنجیره‌ای به همان صورت صفحهٔ ۴۲۹ استفاده کرده ، می‌نویسیم

$$\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt}=v\frac{dv}{ds}.$$

پس از دو معادلهٔ اخیر نتیجه می‌شود که

$$v\frac{dv}{ds}=-kv^2,$$

یا معادلا "

$$\frac{dv}{ds}=-kv. \qquad (۱۲)$$

شرط اولیهٔ مناسب عبارت است از

$$v|_{s=0}=v_0, \qquad (۱۲')$$

زیرا گلوله باسرعت v_0 وارد محیط می‌شود . جواب (۱۲) صادق در (۱۲') مساوی است با

$$v=v_0e^{-ks},$$

که با امتحان یا جداسازی متغیرها به دست آمده است . لذا ، سرعت گلوله به‌طور نمایی با فاصلهٔ نفوذ s افت می‌کند . به تشابه کامل ریاضی موجود بین این مسئله و مسئلهٔ فیزیکی تحلیل رادیواکتیو توجه نمایید .

مسائل

یک جمعیت از حشرات به‌طور لژیستیک و با اندازهٔ اولیهٔ 100 و اندازهٔ حدی 10,100 رشد می‌کند. فرض کنید جمعیت پس از 20 روز رشد به اندازهٔ 5050 برسد.

۱. اندازهٔ جمعیت پس از 25 روز چقدر است؟

۲. اندازهٔ جمعیت پس از 30 روز چقدر است؟

۳. چقدر طول می‌کشد تا جمعیت به اندازهٔ 10,000 برسد؟

۴. زمان مضاعف سازی جمعیت در مراحل اولیهٔ رشد چقدر است؟

یک کشت باکتری به‌طور لژیستیک با جرم اولیهٔ 10^{-6} g و جرم حدی m_1 رشد می‌کند. کشت در 10 ساعت به جرم $\frac{1}{2}m_1$ و در 12 ساعت به جرم $\frac{15}{16}m_1$ می‌رسد.

۵. جرم حدی m_1 چقدر است؟

۶. چه وقت کشت به 99% جرم حدی خود می‌رسد؟

۷. چقدر طول می‌کشد تا یک باکتری انشقاق دوبی خود را انجام دهد؟

۸. فرض کنید در یک جمعیت N نفرهٔ درحال رشد، هر فرد با ریختن مواد زاید متابولیک یا مواد آلوده‌ساز دیگر در محیط آن را زهرآگین سازد. نشان دهید که اثر ترکیبی این زهر ممکن است میزان رشد dN/dt را به اندازه‌ای متناسب با N^2، یعنی مجذور اندازهٔ جمعیت، کاهش دهد.

راهنمایی. تعویض r با $r - sN$ در معادلهٔ (۱) را توجیه کنید.

۹. فرض کنید اندازهٔ اولیهٔ N_0 یک جمعیت تحت تسلط معادلهٔ دیفرانسیل (۳) از $N_1 = r/s$ ***تجاوز نماید***. نشان دهید که اندازهٔ جمعیت تابعی ***نزولی*** است که وقتی $t \to \infty$، به مقدار حدی N_1 نزدیک می‌شود. در اینجا N_1 ***ظرفیت قابل حمل*** محیط نام دارد.

۱۰. تابع لژیستیک (۶) را به ازای چهار مقدار $N_0 = \frac{1}{4}N_1, \frac{1}{2}N_1, N_1, 2N_1$ در یک دستگاه مختصات رسم کنید. چهار منحنی حاصل چه تفاوتی باهم دارند؟

۱۱. معادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{dN}{dt} = sN^2 - rN, \qquad \text{(یک)}$$

که با معادلهٔ (۳) در علامت طرف راست فرق دارد، به عنوان مدلی برای مطالعهٔ رشد جمعیت نمونه‌های به خطر افتاده به کار می‌رود. دلیلش این است که میزان تولد با تعداد برخوردهای بین نر و ماده‌ها در نمونه‌ها متناسب است، که این خود در صورتی که برخوردها تصادفی بوده و اندازه‌های جمعیت نر و ماده مساوی باشند با N^2

متناسب است. این با جملهٔ sN^2 حساب می‌شود، و جملهٔ $-rN$ نظیر ثابت سرانهٔ میزان مرگ (در غیاب اثرات جمعیت بیش از حد) می‌باشد. نشان دهید که جمعیت با اندازهٔ N تحت تسلط (یک)، اگر اندازهٔ اولیه‌اش N_0 کوچکتر از *اندازهٔ* **جمعیت بحرانی** $N_1 = r/s$ باشد، محکوم به فناست. اگر $N_0 > N_1$ چه رخ می‌دهد؟

۱۲. معادلهٔ (یک) را برای حالت $N_0 = \frac{1}{2}N_1$ حل کرده، و جواب را رسم نمایید.

۱۳. مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$\frac{dN}{dt} = rN - s, \qquad N(0) = N_0 \tag{دو}$$

$(r > 0, s > 0)$ را حل کنید، که در رابطه با رشد نمایی جمعیت با میزان **مهاجرت** ثابت s است. چه شرطی بر s به " انفجار جمعیت " منجر می‌شود؟ جمعیت را در اندازهٔ ثابت نگه می‌دارد؟ به " نابودی جمعیت " منجر می‌شود؟

۱۴. جذب نور توسط آب دریا با قانون نمایی $I = I_0e^{-kx}$ توصیف می‌شود، که در آن I_0 شدت نور در سطح دریابوده و $I = I(x)$ شدت آن در عمق x است. I جواب چه مسئلهٔ مقدار اولیه است؟ ضریب k، به نام **ضریب جذب**، را درصورتی بیابید که شدت نور در عمق 5 متر یکهزارم شدت نور در سطح دریا باشد. در چه عمقی شدت نور یکصد هزارم شدت نور در سطح دریاست؟

۱۵. بنابر **قانون تبرید نیوتن**، یک جسم در دمای T به میزانی متناسب با تفاضل بین T و دمای T_1 هوای اطراف سرد می‌شود؛ یعنی،

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_1) \qquad (k > 0).$$

جواب این معادلهٔ دیفرانسیل صادق در شرط اولیهٔ $T = T_0$ در لحظهٔ $t = 0$ را بیابید.

۱۶. فرض کنید دمای هوا 20° (سلسیوس[1]) بوده، و یک جسم گرم شده ظرف 10 دقیقه از 140° به 80° سرد شده است. چه مدت بعد جسم به 35° می‌رسد؟

۱۷. یک دماسنج از اطاقی که دمای 72° (فارنهایت[2]) دارد به خارج برده شده است. یک دقیقه بعد دماسنج 56° را نشان می‌دهد، و پس از یک دقیقه دیگر 44° را نشان می‌دهد. خارج اطاق چقدر سرد است؟ دماسنج 5 دقیقه بعد چه درجه‌ای را نشان می‌دهد.

---

1. Celsius

2. Fahrenheit

۱۸ . بشکه‌ای از آب نمک ابتدا شامل 50 lb نمک حل شده در 240 گالن آب است . بـرای تمیز کردن بشکه آب به میزان 6 گالن بر دقیقه وارد آن شده و محلول باهمان میزان خارج می‌شود و ضمن این محتویات بشکه را مدام هم می‌زنیم تا محلول یکنواخت داشته باشیم . چقدر طول می‌کشد تا نمک بشکه به 1 oz برسد؟

۱۹ . حرکت یک کشتی در اثر مقاومت آب که با نیرویی متناسب با سرعت کشتی از حرکت ممانعت می‌کند کند می‌شود .فرض کنید سـرعت اولیـهٔ کشتی (در $t = 0$) 12 ft/sec بوده ، و سرعتش در $t = 10$ sec مساوی 8 ft/sec باشد . چه وقت سرعت کشتی به 1 ft/sec افت می‌کند؟ .

۲۰ . گلوله‌ای باسرعت v_0 ft/sec یک تخته به ضخامت h فوت را سوراخ کرده و از آن با سرعت v_1 ft/sec خارج می‌شود . فرض کنید تخته در مقابل گلوله با نیرویی متناسب‌با مجذور سرعت گلوله مقاومت کند . نشان دهید که

$$T = \frac{h(v_0 - v_1)}{v_0 v_1 \ln (v_0/v_1)}$$

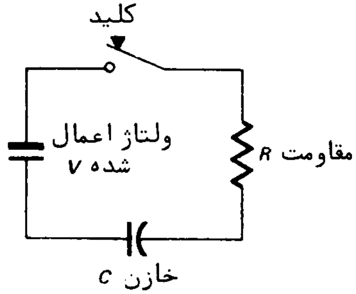
ثانیه طول می‌کشد تا گلوله‌تخته را طی‌کند . T را درصورتی بیابید که $v_0 = 600$ ft/sec ، $v_1 = 200$ ft/sec ، و $h = 6$ in .

۲۱ . حجم ، و درنتیجه جرم ، یک گلولهٔ نفتالین به میزانی متناسب با مساحت سـطح‌آن کاهش می‌یابد . فرض‌کنید یک گلولهٔ نفتالین 8 گرمی در روز اول 1 گرم جرم‌خود را از دست می‌دهد . چند روز طول می‌کشد تا گلوله نصف جرم خود را از دست بدهد؟ به جرم 1 گرم برسد؟ آیا گلوله هرگز ناپدید می‌شـود؟ آیـا ایـن مسئله مستلـزم نماییهاست؟

۲۲ . یک باطری 12 ولتی‌ناگهان به یک مقاومت 20 اهمی و یک سلف 5 هانریی به‌طور سری وصل می‌شود . چقدر طول می‌کشد تا شدت جریان به 99% مقدار حالت پایدار خود برسد؟ آیا جواب با کهنه‌شدن باطری و از دست دادن ولتاژ خود تغییر می‌کند؟

۲۳ . با زدن کلید ولتاژ ثابت V در مدار الکتریکی شکل ۱۷ برقرار می‌شود ، که‌مرکب است از یک مقاومت به میزان R اهم که به طور سری به یک خازن به ظرفیت C فاراد وصل شده است . بار $q = q(t)$ روی خازن و شدت جریان $i = i(t)$ مدار را بیابید . (با این واحدها q به کولن و i به آمپر است .) با این مطلب شروع کنید کـه ولتـاژ دوسر خازن q/C است .

۲۴ . یک خازن 5 میکروفاراد را با وصل یک مقاومت 2 مگ اوهم به دوسر آن خالی می‌کنیم چقدر طول می‌کشد تا به 10% مقدار اولیه‌اش افت نماید؟ آیا جواب به بار اولیهٔ



شکل ۱۷

خازن بستگی دارد؟ (10^{-6} فاراد = 1 میکروفاراد ، 10^6 اهم = 1 مگاوهم .)

۲۵ . فرض کنید هر عضو جمعیتی متعلق به یکی از دو ردهٔ A و B بوده ، و اعضای ردهٔ A بتوانند اعضای ردهٔ B را " بیمار سازند " . مثلا " ، A ممکن است مرکب از افرادی باشد که بیماری خاصی دارند و B مرکب از افرادی باشد که این بیماری را ندارند ، یا A ممکن است مرکب از افرادی باشد که شایعه‌ای را شنیده‌اند و B مرکب از افرادی باشد که این شایعه را نشنیده‌اند . فرض کنید N_A اندازهٔ ردهٔ A ، N_B اندازهٔ ردهٔ B ، و N اندازهٔ کل جمعیت باشد؛ درنتیجه ، $N_A + N_B = N$. پس N_A در اثر تماس بین‌اعضای دورده افزایش می‌یابد ،و می‌توان انتظار داشت که میزان تغییر N_A با تعداد این تماسها متناسب است ، که این خود با حاصل‌ضرب $N_AN_B = N_A(N - N_A)$ متناسب می‌باشد .این‌امر ما را به‌معادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{dN_A}{dt} = kN_A(N - N_A)$$

می‌رساند ، که در آن k یک ثابت مثبت است ، یا معادلا "

$$\frac{dy}{dt} = ky(1 - y),$$

که در آن $y = N_A/N$ کسری از جمعیت کل است که به ردهٔ A تعلق دارد . این معادله را با شرط اولیهٔ $y = y_0 < 1$ در لحظهٔ $t = 0$ حل کرده ، و نشان دهید که بیماری یا شایعه مآلا " به تمام جمعیت گسترش خواهد یافت . زمان T لازم برای آنکه نیمی از جمعیت بیمار شوند و یا شایعه را بشنوند را با این فرض که $y_0 < \frac{1}{2}$ بیابید . نقص این مدل در رابطه با مثلا " شیوع بیماری چیست؟

۲۶ . مقدار خاکروبه یا آشغال L (مادهٔ اورگانیک مرده) در یک واحد فاعله از معادلهٔ

دیفرانسیل زیر تبعیت می‌کند:

$$\frac{dL}{dt} = I - kL,$$

که در آن I میزان ورودی‌به چینهٔ آشغال‌بوده و k میزان ثابت‌تجزیهٔ آشغال‌می‌باشد. نشان دهید که، حتی اگر تولید آشغال کم باشد، در صورت کوچک بودن k مقادیر زیادی آشغال جمع خواهد شد. (مثلا"، در جنگلهای کاج $k \approx 0.02$ ،که در آنها دماهای پایین از تجزیهٔ متابولیسم جلوگیری کرده و انباشتگی برگهای سوزنی کاج را اجازه می‌دهد.)

۸۰۶ توابع هذلولوی

کسینوس و سینوس هذلولوی. حال چند تابع مربوط به نمایی را درنظر می‌گیریم که‌شایستهٔ نام خاص و مطالعهٔ جداگانه‌اند، زیرا در مسائل مربوط به محاسبهٔ انتگرالهاوحل معادلات دیفرانسیل مکرر ظاهر می‌شوند.[1] دو تا از مهمترین این توابع عبارتنداز **کسینوس هذلولوی**

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \qquad (۱)$$

و **سینوس هذلولوی**

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \qquad (۲)$$

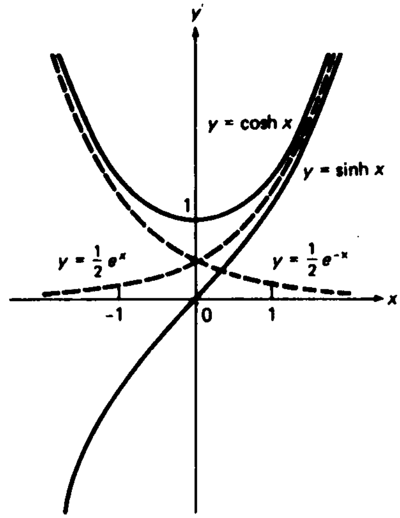
(علامت sinh معمولا" " سینه" تلفظ می‌شود). هر دوتابع e^x و e^{-x} بر $(-\infty, \infty)$ پیوسته و مشتقپذیر اند؛ و درنتیجه، توابع $\cosh x$ و $\sinh x$ نیز چنین‌اند. درشکل ۱۸ نمودار $\cosh x$ و $\sinh x$ همراه با نمودارهای $\frac{1}{2}e^x$ و $\frac{1}{2}e^{-x}$ برای مقایسه رسم شده‌اند. باافزودن و سپس کاستن مختصات y منحنیهای $y = \frac{1}{2}e^x$ و $y = \frac{1}{2}e^{-x}$ ، ملاحظه می‌کنیم‌که $\cosh x$ به ازای هر x مثبت‌است، حال آنکه $\sinh x$ به ازای $x > 0$ مثبت و به ازای $x < 0$ منفی است. به‌علاوه، با قرار دادن $x = 0$ در فرمولهای (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که

$$\cosh 0 = 1, \qquad \sinh 0 = 0.$$

همچنین، توجه کنید که $\cosh x$ زوج است، زیرا

---

۱. *مثلا"، ر.ک. مثال ۷، صفحهٔ ۱۱۱۳، که در آن با استفاده از این توابع شکل زنجیر آویزان از دو نقطهٔ آویزان به‌دست می‌آید.*



شکل ۱۸

$$\cosh(-x) = \frac{1}{2}(e^{-x} + e^{x}) = \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x}) = \cosh x,$$

حال آنکه $\sinh x$ فرد است ، زیرا

$$\sinh(-x) = \frac{1}{2}(e^{-x} - e^{x}) = -\frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x}) = -\sinh x.$$

مشتقات $\cosh x$ و $\sinh x$ به آسانی به دست می‌آیند . در واقع ،

$$\frac{d}{dx}\cosh x = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(e^{x} + e^{-x}) = \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x}),$$

یعنی ،

$$\frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x, \tag{۳}$$

حال آنکه

$$\frac{d}{dx}\sinh x = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(e^{x} - e^{-x}) = \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x}),$$

یعنی ،

$$\frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x. \tag{۴}$$

از (۳) و (۴) نتیجه می‌شود که

$$\int \sinh x\, dx = \cosh x + C \qquad (۳')$$

و

$$\int \cosh x\, dx = \sinh x + C. \qquad (۴')$$

چون $D_x \cosh x = \sinh x$ به ازای $x > 0$ مثبت، به ازای $x = 0$ صفر، و به ازای $x < 0$ منفی است، از آزمون یکنوایی معلوم می‌شود که $\cosh x$ بر $[0, \infty)$ صعودی و بر $(-\infty, 0]$ نزولی است. از اینرو، تابع $\cosh x$ ماکزیمم ندارد، و مینیمم مطلق خود، که مساوی 1 است، را در $x = 0$ می‌گیرد. به همین نحو، چون به ازای هر x، $D_x \sinh x = \cosh x > 0$، $\sinh x$ بر تمام‌بازهٔ $(-\infty, \infty)$ صعودی و بدون‌اکسترمم می‌باشد. این‌خواص $\cosh x$ و $\sinh x$ از شکل ۱۸ واضح‌اند، که شکل همچنین نشان می‌دهد که

$$\lim_{x \to \pm\infty} \cosh x = \infty,$$

حال آنکه

$$\lim_{x \to \infty} \sinh x = \infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} \sinh x = -\infty.$$

لذا، برد $\cosh x$ مساوی $[1, \infty)$ است، حال‌آنکه برد $\sinh x$ مساوی $(-\infty, \infty)$ می‌باشد. لازم است برقراری این فرمولهای حدی با نتیجه‌گیری مستقیم آنها از تعاریف (۱) و (۲) تحقیق شود.

مثال ۱. از $\sinh(\cosh x)$ مشتق بگیرید.

حل. با استفاده از (۳) و (۴)، و به کمک قاعدهٔ زنجیره‌ای، داریم

$$\frac{d}{dx} \sinh(\cosh x) = \cosh(\cosh x) \frac{d}{dx} \cosh x = \cosh(\cosh x) \sinh x,$$

مثال ۲. $\int_0^{\ln 2} \cosh x\, dx$ را محاسبه کنید.

حل. با استفاده از (۴')، معلوم می‌شود که

$$\int_0^{\ln 2} \cosh x\,dx = \sinh(\ln 2) - \sinh 0 = \sinh(\ln 2)$$
$$= \frac{1}{2}(e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}) = \frac{1}{2}\left(2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}.$$

مثال ۳. تقعر $\cosh x$ و $\sinh x$ را بررسی کنید .

حل. چون به ازای هر x ،

$$\frac{d^2}{dx^2}\cosh x = \frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x > 0$$

از آزمون تقعر نتیجه می‌شود که $\cosh x$ بر $(-\infty, \infty)$ به بالا مقعر است . به همین نحو ، چون

$$\frac{d^2}{dx^2}\sinh x = \frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x$$

به ازای $x > 0$ مثبت ،به ازای $x = 0$ صفر ، و به ازای $x < 0$ منفی است ، پس $\sinh x$ بر $[0, \infty)$ به بالا مقعر و بر $(-\infty, 0]$ به پایین مقعر است ، و یک نقطهٔ عطف در $x = 0$ دارد (ر.ک. شکل ۱۸) .

اتحادهای هذلولوی. توابع هذلولوی در چند فرمول صدق می‌کنند که با فرمولهای برقرار به وسیلهٔ توابع مثلثاتی تشابه نزدیکی دارند . مهمترین آنها عبارتنداز

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \tag{۵}$$

و

$$\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y, \tag{۶}$$
$$\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y. \tag{۷}$$

این فرمولها را می‌توان با مراجعه به تعاریف (۱) و (۲) به آسانی ثابت کرد . مثلاً ،

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2 - \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2$$
$$= \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}) = \frac{1}{4}(4) = 1,$$

که فرمول (۵) را ثابت می‌کند . به همین نحو ،

$$\sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$
$$= \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})(e^y + e^{-y}) + \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})(e^y - e^{-y})$$
$$= \frac{1}{4}(e^{x+y} - e^{-x+y} + e^{x-y} - e^{-x-y} + e^{x+y} + e^{-x+y} - e^{x-y} - e^{-x-y})$$
$$= \frac{1}{2}(e^{x+y} - e^{-x-y}) = \sinh(x+y),$$

که (۶) را ثابت می‌کند. برهان (۷) به همین سرراستی است، و آن را به عنوان تمرین می‌گذاریم.

اگر در (۶) و (۷) y را با $y-$ عوض کرده، و از زوج بودن کسینوس هذلولوی و فرد بودن سینوس هذلولوی استفاده کنیم، درمی‌یابیم که

$$\sinh(x-y) = \sinh x \cosh y - \cosh x \sinh y, \tag{۶'}$$

$$\cosh(x-y) = \cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y. \tag{۷'}$$

همچنین، از تعویض y با x در (۶) و (۷) فرمولهای زیر به دست می‌آیند:

$$\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x, \qquad \cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x. \tag{۸}$$

تشابه بین (۶) و فرمول مثلثاتی نظیر

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

کامل است؛ برای تغییر این فرمول به (۶) کافی است sin را به sinh و cos را بــه cosh تغییر دهیم. از آن سو، برای به دست آوردن (۵) و (۷) از فرمولهای مثلثاتی نظیر

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \tag{۹}$$

و

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$$

باید علایم جملات شامل حاصل‌ضربهای سینوسها را تغییر داده و نیز sin و cos را با sinh و cosh عـــوض نماییم. تغییرات مشابه فرمولهای زاویهٔ مضاعف مثلثاتی

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x, \qquad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

را به مشابه‌های هذلولوی (۸) تبدیل می‌کنند.

توابع هذلولوی از جنبه‌ای دیگر نیز شبیه توابع مثلثاتی‌اند. از فرمول (۹) معلـــوم می‌شود که نقطهٔ $P = (\cos\theta, \sin\theta)$ بر دایرهٔ یکهٔ

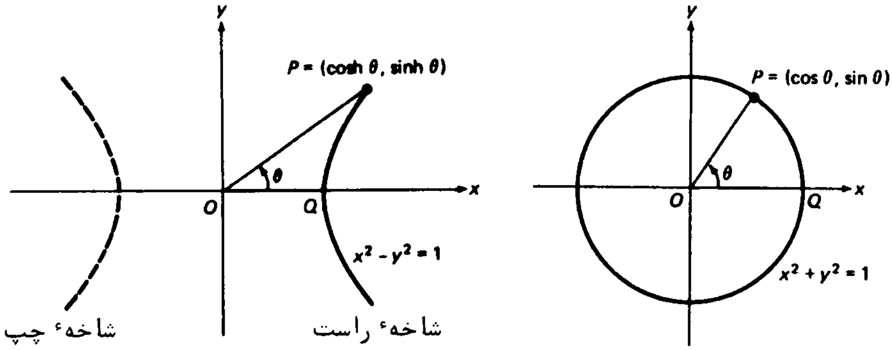
$$x^2 + y^2 = 1$$

قرار دارد[ر.ک. شکل ۱۹ (آ)]؛ ودر واقع، θ زاویهٔ بین‌شعاع OP و محور x مثبت‌است.

هرگاه θ به‌رادیان‌بوده‌و $0 \le \theta \le 2\pi$ ، آنگاه θ دو برابر مساحت قطاع مستدیر POQ است که به شعاع OP ، محور x ،و دایره‌ٔ یکه محدود است (ر.ک. فرمول (۸) ، صفحهٔ ۹۰) . به همین نحو ، از فرمول (۵) معلوم می‌شود که نقطهٔ $P = (\cosh\theta, \sinh\theta)$ بر منحنی

$$x^2 - y^2 = 1$$

قرار دارد . این منحنی ، که هذلولی یکه نام دارد ، دارای دو قسمت مجزا یا شاخه‌می‌باشد [ر.ک. شکل ۱۹ (ب)] ، ولی به‌خاطر شرط $\cosh\theta > 0$ می‌توان به شاخهٔ راست محدود



(ب) (آ)

شکل ۱۹

شد . حال طبیعی است که θ را در این حالت تعبیر هندسی کنیم ، و با کمال تعجب معلوم می‌شود (ر.ک. مسئلهٔ ۳۷، صفحهٔ ۶۳۷) که θ درست دوبرابر مساحت سایه‌دار " قطاع هذلولوی" POQ است که به پاره‌خط OP ، محور x ، و هذلولی‌یکه محدود شده است. این توضیح می‌دهد که چرا $\sinh x$ ، $\cosh x$ ، و غیره را توابع هذلولوی می‌نامیم (و ضمنا" چرا $\sin x$ ، $\cos x$ ، و غیره گاهی به جای توابع مثلثاتی **توابع مستدیر** نامیده می‌شوند) .

تبصره. البته ، تا اینجا فقط تشابه بین توابع مثلثاتی و توابع هذلولوی ذکر شده است. مثلا" ، $\cosh x$ و $\sinh x$ ، برخلاف $\cos x$ و $\sin x$ ، نه کراندارند نه متناوب.

حال به معرفی چهار تابع دیگر هذلولوی می‌پردازیم ؛ یعنی ، **تانژانت هذلولوی**

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$

کتانژانت هذلولوی

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{1}{\tanh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}},$$

سکانت هذلولوی

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}},$$

و کسکانت هذلولوی

$$\operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}.$$

به تشابه بین این تعاریف و تعاریف نظیر برای توابع مثلثاتی توجه نمایید .

تانژانت هذلولوی . توابع $\sinh x$ و $\cosh x$ هر دو بر $(-\infty, \infty)$ پیوسته و مشتقپذیرند، و $\cosh x$ هرگز صفر نیست . لذا ، $\tanh x$ ، یعنی خارج‌قسمت $\sinh x$ و $\cosh x$ ، نیزبر $(-\infty, \infty)$ پیوسته و مشتقپذیر است . همچنین، قبلا" گفتیم که $\sinh x$ به ازای $x > 0$ مثبت ، به ازای $x = 0$ صفر، و به ازای $x < 0$ منفی است؛ و لذا ، همین امربرای $\tanh x$ درست‌است ،زیرا $\cosh x$ همواره‌مثبت‌می‌باشد. مشتق $\tanh x$ را می‌توان با استفاده از قاعدهٔ خارج‌قسمت به‌آسانی محاسبه نمود . در واقع ، به‌کمک (۳) ، (۴) ، و (۵) ، داریم

$$\frac{d}{dx}\tanh x = \frac{d}{dx}\frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{\dfrac{d \sinh x}{dx}\cosh x - \sinh x \dfrac{d \cosh x}{dx}}{\cosh^2 x}$$

$$= \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x},$$

درنتیجه ،

$$\frac{d}{dx}\tanh x = \operatorname{sech}^2 x. \tag{۱۰}$$

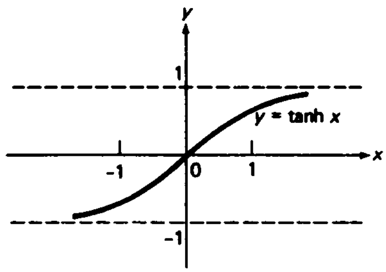
چون $\operatorname{sech}^2 x$ به ازای هر x مثبت است ، از رابطهٔ (۱۰) معلوم می‌شود که $\tanh x$ بر $(-\infty, \infty)$ صعودی است ، و بخصوص اکسترمم ندارد . به‌علاوه ،

$$\tanh(-x) = \frac{\sinh(-x)}{\cosh(-x)} = \frac{-\sinh x}{\cosh x} = -\tanh x,$$

$$\lim_{x\to\infty} \tanh x = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1,$$

$$\lim_{x\to-\infty} \tanh x = \lim_{t\to\infty} \tanh(-t) = -\lim_{t\to\infty} \tanh t = -1$$

(وقتی $x \to \infty$ ، $e^{-2x} \to 0$) . بنابراین ، $\tanh x$ یک تابع فرد با برد $(-1, 1)$ است که خطوط $y = \pm 1$ مجانبهای افقی آن می‌باشند . نمودار $\tanh x$ در شکل ۲۰ نموده و این ویژگیها مجسم شده است .



شکل ۲۰

مثال ۴. $\int \tanh x\, dx$ را حساب کنید .

حل . باتوجه به اینکه

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{(\cosh x)'}{\cosh x},$$

فرمول (۳) ، صفحهٔ ۴۹۷ ، را به کار برده و به دست می‌آوریم

$$\int \tanh x\, dx = \ln \cosh x + C.$$

مثال ۵. $\int_0^{1/2} \operatorname{sech}^2 x\, dx$ را حساب کنید .

حل . از رابطهٔ (۱۰) معلوم می‌شود که $\tanh x$ یک پادمشتق $\operatorname{sech}^2 x$ است . بنابراین ،

$$\int_0^{1/2} \operatorname{sech}^2 x\, dx = \tanh\frac{1}{2} - \tanh 0 = \tanh\frac{1}{2}$$
$$= \frac{e^{1/2} - e^{-1/2}}{e^{1/2} + e^{-1/2}} = \frac{e-1}{e+1} \approx 0.46.$$

فرمولهای مشتق توابع هذلولوی عبارتنداز

$$\frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x,$$

$$\frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x,$$

$$\frac{d}{dx}\tanh x = \operatorname{sech}^2 x,$$

$$\frac{d}{dx}\coth x = -\operatorname{csch}^2 x,$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sech} x = -\operatorname{sech} x \tanh x,$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{csch} x = -\operatorname{csch} x \coth x.$$

(تشابهات و تفاوتهای بین این فرمولها و فرمولهای نظیر برای مشتق توابع مثلثاتی را توصیف نمایید.) سه فرمول اول قبلا" ثابت شده‌اند، و برای اثبات سه فرمول دیگر، از قاعدهٔ مشتقگیری از متقابل یک تابع چند بار استفاده می‌کنیم:

$$\frac{d}{dx}\coth x = \frac{d}{dx}\frac{1}{\tanh x} = -\frac{1}{\tanh^2 x}\frac{d}{dx}\tanh x = -\frac{1}{\tanh^2 x}\operatorname{sech}^2 x$$

$$= -\frac{\cosh^2 x}{\sinh^2 x}\frac{1}{\cosh^2 x} = -\frac{1}{\sinh^2 x} = -\operatorname{csch}^2 x,$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sech} x = \frac{d}{dx}\frac{1}{\cosh x} = -\frac{1}{\cosh^2 x}\frac{d}{dx}\cosh x = -\frac{1}{\cosh^2 x}\sinh x$$

$$= -\frac{1}{\cosh x}\frac{\sinh x}{\cosh x} = -\operatorname{sech} x \tanh x,$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{csch} x = \frac{d}{dx}\frac{1}{\sinh x} = -\frac{1}{\sinh^2 x}\frac{d}{dx}\sinh x = -\frac{1}{\sinh^2 x}\cosh x$$

$$= -\frac{1}{\sinh x}\frac{\cosh x}{\sinh x} = -\operatorname{csch} x \coth x.$$

مثال ۶. تقعر $\tanh x$ را مورد بررسی قرار دهید.

حل. مشتق دوم

$$\frac{d^2}{dx^2}\tanh x = \frac{d}{dx}\operatorname{sech}^2 x = 2\operatorname{sech} x\frac{d}{dx}\operatorname{sech} x = -2\operatorname{sech}^2 x \tanh x$$

بـه ازای $x > 0$ مثبت، به ازای $x = 0$ صفر، و به ازای $x < 0$ منفـی است. لـذا، طبق آزمون تقعر، $\tanh x$ بر $(-\infty, 0]$ به بالا مقعر و بر $[0, \infty)$ به پایین مقعـر است، و در $x = 0$ نقطهٔ عطف دارد (ر.ک. شکل ۲۰).

توابع $\coth x$، $\operatorname{sech} x$، و $\operatorname{csch} x$ در مقایسه با $\sinh x$، $\cosh x$، و $\tanh x$ از اهمیت کمتری برخوردارند. لذا، بررسی این توابع به مسائل ۳۰ تا ۳۲ محول شده است.

مسائل

عبارات زیر را بدون استفاده از توابع هذلولوی بیان کنید.

۱. $\cosh x + \sinh x$ ✓ ۲. $\cosh x - \sinh x$ ✓

۳. $\cosh(\ln x)$ ✓ ۴. $\tanh(\ln 2x)$ ✓

۵. $\sinh(\frac{1}{2}\ln x)$ ✓ ۶. $\cosh^2(\ln x) + \sinh^2(\ln x)$ ✓

نشان دهید که

۷. $\cosh^2 x = \dfrac{\cosh 2x + 1}{2}$ ✓ ۸. $\sinh^2 x = \dfrac{\cosh 2x - 1}{2}$ ✓

۹. $1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$ ✓

۱۰. $1 - \coth^2 x = -\operatorname{csch}^2 x$ ✓

۱۱. $\tanh(x + y) = \dfrac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$ ✓

مقادیر پنج تابع دیگر هذلولوی را در نقطهٔ c درصورتی بیابید که

۱۲. $\cosh c = 2$ ۱۳. $\sinh c = -1$ ۱۴. $\tanh c = \frac{1}{2}$

از عبارات زیر مشتق بگیرید.

۱۵. $\sinh^2 x + \cosh^2 x$ ✓ ۱۶. $\cosh^3 x$ ✓

۱۷. $\sqrt{\cosh 2x}$ ✓ ۱۸. $\tanh x^2$ ✓

۱۹. $\ln(\operatorname{sech} x)$ ۲۰. $\coth(\tan x)$ ✓

۲۱. $\operatorname{csch}\sqrt{x}$ ✓ ۲۲. $\sinh e^x$ ✓

۲۳. $\tanh(\ln x)$ ✓ ۲۴. $\log_2(\cosh x)$ ✓

۲۵. $e^{\coth x}$ ✓ ۲۶. $3^{\sinh x}$ ✓

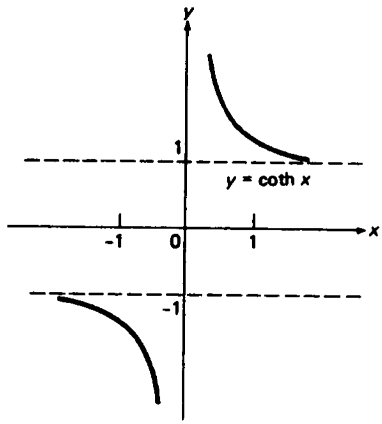
۲۷. یک معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم ساده بیابید که تابع $y = a \sinh cx + b \cosh cx$،

به ازای ثابتهای دلخواه a ، b ،و c ، در آن صدق کند . همین کار را بـرای تابع $y = a\sin cx + b\cos cx$ انجام دهید .

۲۸ . مساحت A تحت منحنی $y = \cosh x$ از $x = \ln 3$ تا $x = \ln 4$ را بیابید .

۲۹ . آیا توابع $\cosh x$ یا $\sinh x$ مجانب دارند؟ جواب خود را توضیح دهید .

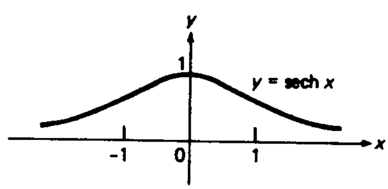
۳۰ . نشان‌دهید که کتانژانت‌هذلولوی $\coth x$ ،که در شکل ۲۱ رسم شده است ، بـر $(0, \infty)$



شکل ۲۱

مثبت ، نزولی ، و به بالا مقعر است ، و بر $(-\infty, 0)$ منفی ، نزولی ، و به پایین مقعر است . نشان دهیدکه $\coth x$ یک تابع فرد است با مجانبهای افقی $y = \pm 1$ ومجانب قائم محور y . آیا $\coth x$ اکسترمم یا نقطهٔ عطف دارد؟

۳۱ . نشان دهید که سکانت هذلولوی $\operatorname{sech} x$ ، کـه در شکل ۲۲ نموده شده است ،یک‌تابع

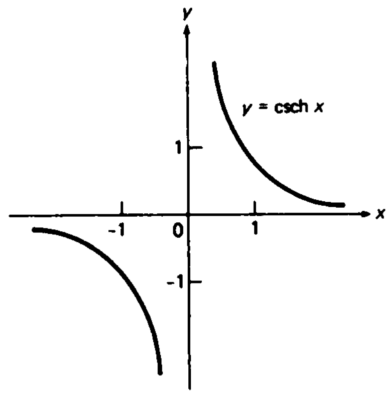


شکل ۲۲

زوج مثبت است که محور x مجانب افقی آن می‌باشد . نشان دهید که $\operatorname{sech} x$ بر $(-\infty, 0]$ صعودی و بـر $[0, \infty)$ نزولی است ، و ماکزیمم مطلقی مسـاوی 1 در $x = 0$ داشته و مینیمم ندارد .تقعر $\operatorname{sech} x$ را بررسی‌کنید .نقاط عطف $\operatorname{sech} x$ چه‌هستند؟

۳۲ . نشان دهید که کسکانت هذلولوی $\operatorname{csch} x$ ، کـه در شکل ۲۳ نمـوده شـده است،بر

$(0, \infty)$ مثبت، نزولی، و به بالا مقعر است، و بر $(-\infty, 0)$ منفی، نزولی، و به پایین مقعر است. نشان‌دهید که $\operatorname{csch} x$ یک‌تابع فرد است که محور x مجانب افقی و محور y مجانب قائم آن است. آیا $\operatorname{csch} x$ اکسترمم یا نقطهٔ عطف دارد؟



شکل ۲۳

انتگرالهای زیر را حساب کنید.

۳۳. $\int \cosh^2 x\, dx$

۳۴. $\int \sinh^2 x\, dx$

۳۵. $\int \coth x\, dx$

۳۶. $\int \frac{dx}{\sinh x \cosh x}$

۳۷. $\int \operatorname{sech}(\ln x)\, dx$

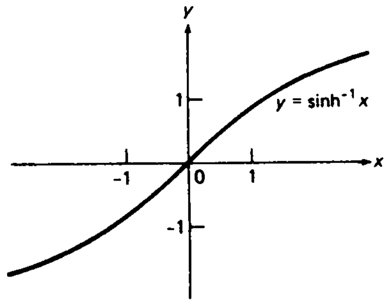
۳۸. $\int \frac{\sinh x}{3\cosh x + 2}\, dx$

۹.۶ توابع هذلولوی معکوس

حال دو تابع از شش تابع هذلولوی معکوس را بررسی می‌کنیم که بیش از همه با آنها مواجه می‌شویم و این دو عبارتند از سینوس هذلولوی معکوس و تانژانت هذلولوی معکوس. چهار تابع هذلولوی معکوس دیگر در مسائل ۱۱ و ۱۳ تا ۱۵ مطرح خواهند شد.

سینوس هذلولوی معکوس. برای تعریف سینوس هذلولوی معکوس، از روندی استفاده می‌کنیم که قبلاً" در حالت توابع مثلثاتی معکوس به کار بردیم (ر.ک. بخش ۳.۵). فرض کنیم $x = \sinh y$. تابع پیوستهٔ $\sinh y$ بر بازهٔ $(-\infty, \infty)$ صعودی و درنتیجه یک به یک است، و این بازه را به‌روی خودش $(-\infty, \infty)$ می‌نگارد. بنابراین، $x = \sinh y$ دارای‌تابع

معکوس $y = \sinh^{-1} x$ است ، به نام **سینوس هذلولوی معکوس** ، که بر $(-\infty, \infty)$ پیوسته و صعودی می‌باشد . نمودار این تابع ،که در شکل ۲۴ نموده شده ، را می‌توان از انعکاس نمودار $\sinh x$ نسبت به خط $y = x$ به دست آورد .



شکل ۲۴

برای مشتقگیری از سینوس هذلولوی معکوس ، می‌نویسیم $y = \sinh^{-1} x$ ، $x = \sinh y$ ، و قضیهٔ ۴ ، صفحهٔ ۴۶۰ ، را به کار برده به دست می‌آوریم

$$\frac{d}{dx}\sinh^{-1} x = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cosh y}.$$

ولی ، طبق فرمول (۵) ، صفحهٔ ۵۶۴ ،

$$\cosh y = \pm\sqrt{\sinh^2 y + 1} = \pm\sqrt{x^2 + 1},$$

که در آن باید علامت به‌علاوه اختیار شود زیرا $\cosh y$ مثبت است . بنابراین ،

$$\frac{d}{dx}\sinh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}. \qquad (۱)$$

حال فوراً" از (۱) نتیجه می‌شود که

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \sinh^{-1} x + C. \qquad (۲)$$

به‌علاوه ، با استفاده از قاعدهٔ زنجیره‌ای برای مشتقگیری از $\sinh^{-1}(x/a)$ ، که $a > 0$ ، داریم

$$\frac{d}{dx}\sinh^{-1}\frac{x}{a} = \frac{1/a}{\sqrt{(x/a)^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}.$$

پس نتیجه می‌شود که

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \sinh^{-1}\frac{x}{a} + C, \tag{۲'}$$

که تعمیمی از رابطهٔ (۲) می‌باشد .

مثال ۱ . $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+4}}$ را حساب کنید .

حل . بنابر فرمول (۲') به ازای $a = \frac{2}{3}$ ،

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+4}} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\frac{4}{9}}} = \frac{1}{3}\sinh^{-1}\frac{3x}{2} + C.$$

بین سینوس هذلولوی معکوس و لگاریتم رابطهٔ ساده‌ای وجود دارد . فرض کنیم $x = \sinh y$. در این صورت ، چون

$$e^y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} + \frac{e^y + e^{-y}}{2} = \sinh y + \cosh y$$
$$= \sinh y + \sqrt{\sinh^2 y + 1} = x + \sqrt{x^2+1},$$

پس نتیجه می‌شود که

$$y = \sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}). \tag{۳}$$

بنابراین ، اگر $a > 0$ ،

$$\sinh^{-1}\frac{x}{a} = \ln\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a} = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) - \ln a, \tag{۳'}$$

و حال می‌توان (۲') را، پس از جذب $-\ln a$ در ثابت انتگرالگیری C ، به شکل مفیدتری نوشت :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C. \tag{۴}$$

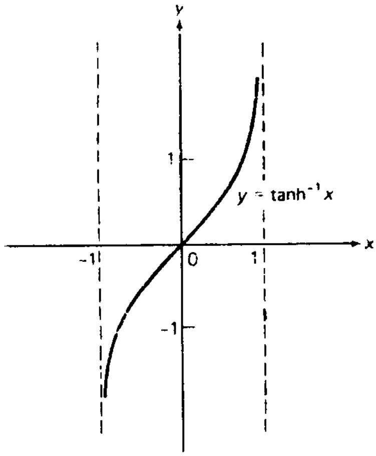
لازم است اعتبار (۴) را با مشتقگیری از عبارت سمت راست تحقیق نمایید .

مثال ۲ . $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$ را حساب کنید .

حل . بنابر فرمول (۴) به ازای $a = \sqrt{2}$ ،

$$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}} = \left[\ln(x+\sqrt{x^2+2})\right]_0^3 = \ln(3+\sqrt{11}) - \ln\sqrt{2}$$
$$= \ln\frac{3+\sqrt{11}}{\sqrt{2}} \approx 1.5$$

تانژانت هذلولوی‌معکوس. برای‌تعریف‌تانژانت هذلولوی‌معکوس، فرض کنیم $x = \tanh y$. تابع پیوستهٔ $\tanh y$ بر بازهٔ $(-\infty, \infty)$ صعودی و درنتیجه یک به یک است، که آن را به روی بازهٔ $(-1, 1)$ می‌نگارد. لذا، $x = \tanh y$ دارای‌تابع معکوس $y = \tanh^{-1} x$، به نام *تانژانت هذلولوی‌معکوس*، است‌که بر $(-1, 1)$ پیوسته و صعودی است. نمودار این تابع، که در شکل۲۵ نموده‌شده، را می‌توان از انعکاس‌نمودار $\tanh x$ نسبت به‌خط $y = x$ به دست آورد.



شکل ۲۵

مثل حالت $\sinh^{-1} x$، رابطهٔ ساده‌ای بین تابع $\tanh^{-1} x$ و لگاریتم‌وجوددارد. با نوشتن $x = \tanh y$، داریم

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}.$$

بنابراین،

$$(e^y + e^{-y})x = e^y - e^{-y},$$

یا معادلاً

$$(e^{2y} + 1)x = e^{2y} - 1.$$

این یک معادلهٔ خطی نسبت به e^{2y} با جواب

$$e^{2y} = \frac{1+x}{1-x}$$

است . پس نتیجه می‌شود که

$$y = \tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \qquad (-1 < x < 1). \tag{۵}$$

بخصوص،

$$\frac{d}{dx} \tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \ln \frac{1+x}{1-x} = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} [\ln(1+x) - \ln(1-x)]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1+x)(1-x)},$$

و درنتیجه،

$$\frac{d}{dx} \tanh^{-1} x = \frac{1}{1-x^2} \qquad (-1 < x < 1). \tag{۶}$$

مثال ۳. از $\tanh^{-1} (\sin x)$ مشتق بگیرید .

حل. با استفاده از (۶) معلوم می‌شود که

$$\frac{d}{dx} \tanh^{-1} (\sin x) = \frac{1}{1 - \sin^2 x} \frac{d}{dx} \sin x = \frac{\cos x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} = \sec x.$$

مثال ۴. $\int_0^{\pi/6} \sec x \, dx$ را حساب کنید .

حل. بنابر مثال قبل، $\tanh^{-1} (\sin x)$ یک پادمشتق $\sec x$ است . بنابراین، به‌کمک (۵) داریم

$$\int_0^{\pi/6} \sec x \, dx = \tanh^{-1}\left(\sin \frac{\pi}{6}\right) - \tanh^{-1} (\sin 0)$$

$$= \tanh^{-1} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln 3 \approx 0.55$$

مسائل

از عبارات زیر مشتق بگیرید .

۱. $x \sinh^{-1} x$

۲. $\sin(\sinh^{-1} x)$

۳. $\sinh^{-1}(\cos x)$

۴. $x^2 \tanh^{-1} x$

۵. $\tanh^{-1}(\ln x)$

۶. $\sinh^{-1}(\tanh^{-1} x)$

۷. فرمول (۱) را به کمک فرمول (۳) تحقیق کنید .

۸. فرمول (۶) را به کمک قضیهٔ ۴ ، صفحهٔ ۴۶۰ ، تحقیق کنید .

۹. کوچکترین مقداری که تابع $\sinh x + 2\cosh x$ می‌گیرد چیست ؟

۱۰. آیا تابع $2\sinh x + \cosh x$ دارای کوچکترین مقدار است ؟

۱۱. معکوس تابع $x = \cosh y$ $(0 \le y < \infty)$ ، که **کسینوس هذلولوی معکوس** نام دارد ، با $y = \cosh^{-1} x$ نموده شده و نمودارش در شکل ۲۶ رسم شده است . نشان دهید که

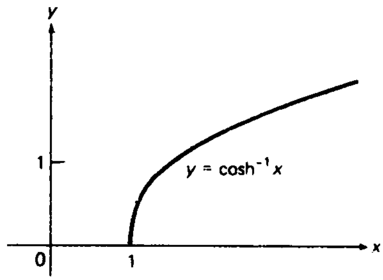
$$\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \qquad (x \ge 1),$$

$$\frac{d}{dx}\cosh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \qquad (x > 1),$$

و

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \cosh^{-1}\frac{x}{a} + C$$

$$= \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) + C \qquad (x > a > 0). \qquad \text{(یک)}$$



شکل ۲۶

۱۲. نشان دهید که

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{a}\tanh^{-1}\frac{x}{a} + C$$

$$= \frac{1}{2a}\ln\frac{a + x}{a - x} + C \qquad (|x| < a), \qquad \text{(دو)}$$

که صورت دیگری است از فرمول (۶) ، صفحهٔ ۴۹۹ .

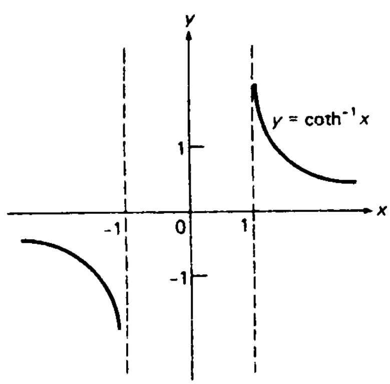
۱۳ . معکوس تابع $x = \coth y$ **کتانژانت هذلولوی معکوس** نام دارد و بـا $y = \coth^{-1} x$ نموده می‌شود ، و دارای نمودار به شکل ۲۷ می‌باشد . نشان دهید که

$$\coth^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1} = \tanh^{-1}\frac{1}{x} \qquad (|x| > 1),$$

$$\frac{d}{dx}\coth^{-1} x = \frac{1}{1-x^2} \qquad (|x| > 1),$$

و

$$\int\frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{a}\coth^{-1}\frac{x}{a} + C = \frac{1}{2a}\ln\frac{x+a}{x-a} + C \qquad (|x| > a > 0), \tag{سه}$$



شکل ۲۷

که در آن (سه) صورت دیگری است از فرمول (۶) ، صفحهٔ ۴۹۹ .

۱۴ . معکوس‌تابع $x = \operatorname{sech} y$ $(0 \le y < \infty)$ **سکانت هذلـولـوی معکوس** نـام دارد و با $y = \operatorname{sech}^{-1} x$ نموده می‌شود و نمودارش به شکل ۲۸ می‌باشد . نشان دهید که

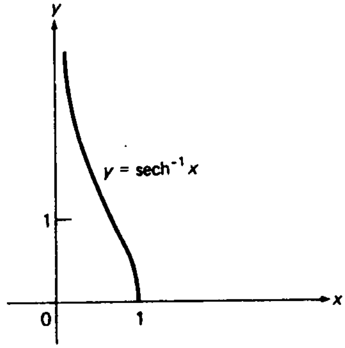
$$\operatorname{sech}^{-1} x = \ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} = \cosh^{-1}\frac{1}{x} \qquad (0 < x \le 1),$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sech}^{-1} x = \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} \qquad (0 < x < 1),$$

و

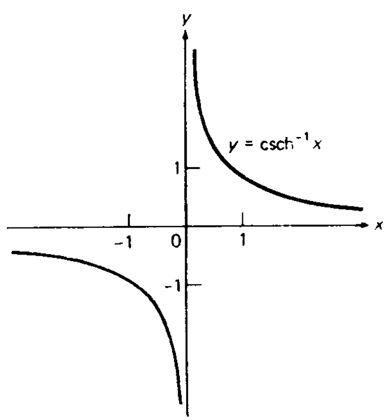
$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{1}{a}\,\mathrm{sech}^{-1}\frac{|x|}{a} + C$$

(چهار)
$$= -\frac{1}{a}\ln\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{|x|} + C \qquad (0 < |x| < a).$$



شکل ۲۸

۱۵ . معکوس تابع $y = \mathrm{csch}\, x$ کسکانت هذلولوی معکوس نامیده و با $y = \mathrm{csch}^{-1} x$ نموده می‌شود و نمودارش در شکل ۲۹ رسم شده است . نشان دهید که



شکل ۲۹

$$\mathrm{csch}^{-1} x = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1 + x^2}}{|x|}\right) = \sinh^{-1}\frac{1}{x} \qquad (x \neq 0).$$

$$\frac{d}{dx}\,\mathrm{csch}^{-1} x = -\frac{1}{|x|\sqrt{1 + x^2}} \qquad (x \neq 0).$$

و

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}} = -\frac{1}{a}\operatorname{csch}^{-1}\frac{|x|}{a} + C$$

$$= -\frac{1}{a}\ln\frac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{|x|} + C \qquad (a>0, x\neq 0). \qquad \text{(پنج)}$$

از عبارات زیر مشتق بگیرید .

۱۶. $\dfrac{\cosh^{-1} x}{x}$ ✓ ۱۷. $\cosh^{-1}(\cos x)$ ✓ ۱۸. $\ln(\coth^{-1} x)$ ✓

۱۹. $\coth^{-1}\sqrt{x}$ ✓ ۲۰. $\operatorname{sech}^{-1}(e^{-x})$ ✓ ۲۱. $\operatorname{csch}^{-1}(\ln x)$ ✓

انتگرالهای زیر را حساب کنید .

۲۲. $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$ ✓ ۲۳. $\displaystyle\int_{\sinh 1}^{\sinh 2} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ ✓

۲۴. $\displaystyle\int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{x^2-3}}$ ✓ ۲۵. $\displaystyle\int_{2/3}^1 \frac{dx}{\sqrt{9x^2-1}}$ ✓

۲۶. $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{9-x^2}$ ✓ ۲۷. $\displaystyle\int_4^6 \frac{dx}{9-x^2}$ ✓

۲۸. $\displaystyle\int_{1/4}^{1/2} \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$ ✓ ۲۹. $\displaystyle\int_2^4 \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$ ✓

۳۰. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{4+x^2}}$ ✓

۳۱. سه تا از شش تابع هذلولوی معکوس نقطهٔ عطف دارند .اینها کدامها هستند ،ونقاط عطف آنها کجاست ؟

اصطلاحات و مباحث کلیدی

تعریف لگاریتم طبیعی به عنوان انتگرال

لگاریتم حاصلضرب و توان

تعریف عدد e

مشتقگیری لگاریتمی ، انتگرالگیری از مشتق لگاریتمی

تعریف نمایی به عنوان معکوس لگاریتم

نمایی یک مجموع
قوانین نماییها برای نماهای حقیقی دلخواه
نماییها و لگاریتمها در پایهٔ a
تابع توانی کلی x^a
صور مبهم 0^0 ، ∞^0 ، و 1^∞
ریاضیات سود مرکب ، ترکیب پیوسته
معادلات دیفرانسیل جدایی‌پذیر ، جداسازی متغیرها
رشد و تحلیل نمایی
رشد جمعیت ، تحلیل رادیواکتیو
زمان مضاعف‌سازی ، نیمه‌عمر
رشد لژیستیک
توابع هذلولوی و مشتقات آنها
توابع هذلولوی معکوس

فرمولهای مشتقگیری در رابطه با لگاریتمها و نماییها

تابع	مشتق	
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$(x > 0)$
$\ln \lvert x \rvert$	$\frac{1}{x}$	$(x \neq 0)$
$\ln \lvert f(x) \rvert$	$\frac{f'(x)}{f(x)}$	
$\log_a x$	$\frac{1}{x} \log_a x$	$(a > 0)$
e^x	e^x	
a^x	$a^x \ln a$	$(a > 0)$
x^a	ax^{a-1}	$(x > 0)$
$\cosh x$	$\sinh x$	
$\sinh x$	$\cosh x$	

فرمولهای کلیدی دیگر

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t} \quad (x>0), \quad \ln 1 = 0, \quad \ln e = 1$$

$$e^{\ln x} = x \quad (x>0), \quad \ln e^x = x \quad (\text{all } x)$$

$$\ln xy = \ln x + \ln y, \quad e^x e^y = e^{x+y}$$

$$\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty, \ \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty, \ \lim_{x\to 0^+} x \ln x = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty, \quad \lim_{x\to -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a, \quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$a^x = e^{x\ln a} \quad (a>0), \quad \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \quad (a>0)$$

$$x^a = e^{a\ln x} \quad (x>0), \quad \ln x^a = a\ln x$$

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \quad \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

مسائل تکمیلی

معادلات زیر را نسبت به x حل کنید.

۱. $\ln x = \frac{1}{2}(\ln 4 + \ln 9)$

۲. $\ln x^3 - \ln x = \ln 32 - \ln 8$

۳. $\log_2 x = \log_2 4 + \log_4 8 + \log_{16} 64$

۴. $\log_{100} x + \log_{0.1} x = 1$

۵. آیا تابع $\log_a \frac{1-x}{1+x}$ زوج است یا فرد؟

۶. بدون محاسبات عددی، نشان دهید که $\pi^e < e^\pi$ و $\sqrt{10}^\pi < \pi^{\sqrt{10}}$

راهنمایی. ابتدا نشان دهید که $(\ln x)/x$ بر $[e, \infty)$ نزولی است.

انتگرالهای زیر را حساب کنید.

۷. $\int_0^{\pi/4} \tan s\, ds$

۸. $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \cot t\, dt$

۹. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{du}{\sin u \cos u}$

۱۰. نشان دهید که

$$\sum_{n=10}^{29} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln 3.$$

از عبارات زیر مشتق بگیرید.

۱۱. $e^{\cosh x}$ ۱۲. $\pi^{\ln x}$ ۱۳. 2^{3^x}

۱۴. $\ln(\tanh^{-1} x)$ ۱۵. $x^{\sinh x}$ ۱۶. $[\ln(\ln x)]^x$

اکسترممهای موضعی تابع داده شده را بیابید.

۱۷. $f(x) = (x+1)^{10} e^{-x}$

۱۸. $(a^2 + b^2 \neq 0, c \neq 0)$ $f(x) = ae^{cx} + be^{-cx}$

۱۹. $f(x) = x^e 2^{-x}$

۲۰. نشان دهید که تابع $f(x) = e^x + cx^3$ به ازای $-e/6 \leq c \leq 0$ نقطهٔ عطف ندارد، به ازای $c > 0$ یک نقطهٔ عطف دارد، و به ازای $c < -e/6$ دو نقطهٔ عطف دارد.

آیا تابع داده شده نقطهٔ عطف دارد، و اگر دارد کجاست؟

۲۱. $f(x) = x^2 + \ln x$ ۲۲. $f(x) = x^4 + x^2 + e^x$

۲۳. $f(x) = x^x$ ۲۴. $f(x) = e^{\arctan x}$

۲۵. $f(x) = e^{x^{1/3}}$

حدود زیر را با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال حساب کنید.

۲۶. $\lim_{x \to e} \frac{\ln x - 1}{x - e}$ ۲۷. $\lim_{x \to \infty} \frac{\pi - 2\arctan x}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$

۲۸. $\lim_{x \to 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\tan x}}{x}$ ۲۹. $\lim_{x \to 0^+} \frac{x \ln x}{\sin x}$

۳۰. $\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}$ ۳۱. $\lim_{x \to \infty} x[\ln(x+\pi) - \ln x]$

۳۲. $\lim_{x \to -\infty} \left(1 - \frac{4}{x}\right)^{x-1}$ ۳۳. $\lim_{x \to (1/4)\pi} (\tan x)^{\tan 2x}$

مسئلهٔ مقدار اولیهٔ داده شده را با جداسازی متغیرها حل کنید.

۳۴. $\frac{dy}{dx} \cot x = y \ln y,\ y(0) = e$

۳۵. $\sqrt{x^2+1}\,\dfrac{dy}{dx} = y,\ y(0) = 1$

۳۶. $\sqrt{1-x^2}\,\dfrac{dy}{dx} = y^2 + 1,\ y(0) = 0$

۳۷. $\dfrac{dy}{dx} = e^{x+y},\ y(0) = 0$

۳۸. $(x + \sqrt{x})\dfrac{dy}{dx} + y = 0,\ y(1) = (\frac{1}{4})$

۳۹. $(1 - x^2)\dfrac{dy}{dx} + y = 0,\ y(\frac{5}{3}) = 2$

۴۰. ابتدا جانشانی $z = 2x - y - 1$ را انجام داده و سپس، با جداسازی متغیرها، مسئلهٔ مقدار اولیهٔ $dy/dx = 2x - y - 1,\ y(0) = 1$ را حل کنید.

۴۱. یک منحنی دارای این خاصیت است که شیبش در هر نقطهٔ P، n برابر شیب خط واصل بین مبداء و P است. این منحنی چیست؟

۴۲. چقدر طول می‌کشد تا پول با نرخ سود سالانهٔ 10% و به طور پیوسته مرکب سه برابر شود؟

۴۳. کمترین پولی که می‌توان با نرخ سود سالانهٔ 9% و به‌طور پیوسته مرکب سرمایه‌گذاری کرد به‌طوری که بتوان مدام (یعنی، برای همیشه) سالانهٔ \$10,000 برداشت کرد چقدر است؟

۴۴. \$50,000 را با نرخ سالانهٔ 6% که در ماه مرکب می‌شود به بانک سپرده‌ایم. چه‌وقت این پول از \$75,000 بیشتر می‌شود؟

۴۵. سپردهٔ اولیهٔ به‌طور پیوسته مرکب \$1250 طی 5 سال به \$2000 بالغ می‌شود. نرخ سود سالانه چقدر است؟

۴۶. مقدار فعلی \$25,000 که 6 سال با نرخ سود سالانهٔ 7.5% و به طور پیوسته مرکب در پس‌انداز بوده چقدر است؟ با همان نرخ ولی ترکیب ماهانه چقدر است؟

۴۷. شخصی هر 3 ماه \$125 در بانک می‌گذارد که نرخ سود سالانه‌اش 8% و هر سه‌ماه‌مرکب می‌شود. مقدار سپرده را درست پیش از بیست یکمین بار سپردن یعنی پس‌از 5 سال پیدا کنید.

۴۸. جمعیت یک شهر طی 15 سال از 125,000 تا 180,000 افزایش می‌یابد. میزان رشد سالانهٔ جمعیت چقدر است؟

۴۹ . یک کشت باکتری با رشد نمایی ظرف 4 ساعت از 2×10^5 سلول به 8×10^7 سلول می‌رسد . زمان بین انشقاقهای دوبی متوالی (تقسیم سلولی) را بیابید .

۵۰ . در یک کشت 1024 سلولی بارشدنمایی‌وزمان مضاعف‌سازی 1 ساعت دگرگونی‌رخ‌می‌دهد . سلولهای‌شورشی دارای‌زمان مضاعف‌سازی 30 دقیقه‌اند . چه‌وقت‌جمعیت‌سلولهای‌شورشی مساوی جمعیت سلولهای اولیه است؟ چه وقت به ازای هر سلول از نوع اولیه 16 سلول شورشی وجود دارد؟

۵۱ . آزمایش نشان می‌دهد که وقتی باکتریها در یک‌محیط کشت رشد می‌کنند ، میزان **بازده غذایی** ، یعنی میزان تغییر غلظت C غذا در باکتریها ، با $C_1 - C$ متناسب است ، که در آن C_1 غلظت نهایی غذا است (معلوم شده که C_1 خیلی از غلظت در خود محیط بزرگتر است) . بنابراین ،

$$\frac{dC}{dt} = k(C_1 - C).$$

این معادلهٔ دیفرانسیل را با شرط اولیهٔ $C = 0$ در لحظهٔ $t = 0$ حل کنید .

۵۲ . یک کشت باکتری به‌طور لژیستیک و با اندازهٔ اولیهٔ $N_0 = 4000$ و اندازهٔ حدی N_1 رشد می‌کند . کشت در 12 ساعت به $\frac{1}{2}N_1$ و در 15 ساعت به $\frac{9}{10}N_1$ می‌رسد . اندازهٔ حدی N_1 چقدر است؟

۵۳ . رشد تومورهای جامد دقیقا " با معادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{dm}{dt} = rm \ln \frac{m_1}{m} \qquad \text{(یک)}$$

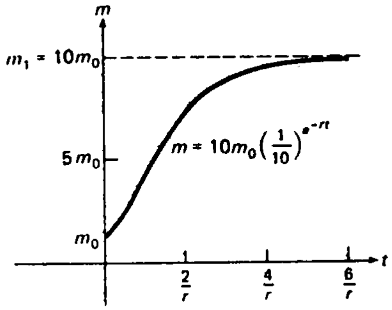
توصیف می‌شود ، که در آن r و m_1 ثابتهای مثبتی بوده ، و $m = m(t)$ جرم تومور در لحظهٔ t است . نشان دهید جواب (یک) که در شرط اولیهٔ $m(0) = m_0\ (m_0 < m_1)$ صدق می‌کند از تابع

$$m = m_1 \exp\left(e^{-rt} \ln \frac{m_0}{m_1}\right) = m_1 \left(\frac{m_0}{m_1}\right)^{e^{-rt}} \qquad \text{(دو)}$$

به نام **قانون رشد گومپرتز**[1] ، به دست می‌آید . تحقیق کنید که (دو) یک‌تابع صعودی از t بوده و وقتی $t \to \infty$ ، $m \to m_1$ ؛ درنتیجه ، m_1 جرم حدی تومور می‌باشد . شکل ۳۰ قانون گومپرتز (دو) را درحالت $m_1 = 10m_0$ نشان می‌دهد . توجه کنید که منحنی به شکل S بوده و با منحنی لژیستیک شکل ۱۴ ، صفحهٔ ۵۵۰ ، شباهت نزدیکی دارد.

---

1. Gompertz



شکل ۳۰

۵۴. نشان دهید که اگر $m_1 > em_0$ ، قانون گومپرتز (دو) یک نقطهٔ عطف در $t = t_1$ دارد، که در آن t_1 زمانی است که m در آن مساوی m_1/e می‌باشد.

۵۵. برای توضیح اینکه قانون گومپرتز چگونه در کار می‌آید، مسئلهٔ رشد نمایی ناشی از معادلهٔ دیفرانسیل $dm/dt = km$ و شرط اولیهٔ $m(0) = m_0$ را حل می‌کنیم، که در آن میزان رشد نسبی k، به جای ثابت بودن، یک تابع به طور نمایی نزولی k_0e^{-rt} است. نشان دهید که جواب این مسئله عبارت است از

$$m = m_0 \exp\left[\frac{k_0}{r}(1 - e^{-rt})\right], \qquad (\text{دُو})$$

که در آن وقتی $t \to \infty$ ، $m \to m_0e^{k_0/r}$. نشان دهید که اگر $m_1 = m_0e^{k_0/r}$ ، (دو) و (دُو) یکی هستند.

۵۶. یکچهارم مادهٔ رادیواکتیو طی 15 سال ناپدید می‌شود. نیمه‌عمر ماده چقدر است؟

۵۷. اورانیوم طبیعی از دو ایزوتوپ رادیواکتیو تشکیل شده است، یکی اورانیوم 238 با نیمه عمر تقریبی 4.5×10^9 سال و دیگری اورانیوم 235 با نیمه‌عمر تقریبی 7×10^8 سال. در نمونه‌های فعلی، اورانیوم 238 تقریباً 137.8 برابر از اورانیوم 235 بیشتر است. با این فرض که در زمان خلق اورانیوم، احتمالاً درنتیجهٔ انفجار ستارهٔ سوپرنوا، دو ایزوتوپ به یک مقدار موجود بوده‌اند، سن اورانیوم چقدر است؟

۵۸. یک نوترون در هستهٔ اتم پایدار است، ولی پس از آزاد شدن با نیمه‌عمر 12.8 دقیقه به یک پروتون، یک الکترون، و یک آنتی نوترینو تجزیه می‌شود. فرض کنید شعاعی از نوترونها با سرعت 25 km/sec به فضا فرستاده شود. شعاع در زمان تحلیل یکدهم نوترونها چه مسافتی را طی خواهد کرد؟

۵۹. فرض کنید N تعداد نوترونهای آزاد در یک کرهٔ جامد از اورانیوم 235 به شعاع R

باشد . در این صورت ، N در معادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{dN}{dt} = aN - \frac{bN}{R}, \qquad (\text{سه})$$

با ثابتهای $a \approx 2 \times 10^8/\text{sec}$ و $b \approx 17 \times 10^8 \text{ cm/sec}$ صدق می‌کند . جملهٔ aN "تکثیر" نوترونهاکه‌ناشی‌ازانشقاق‌هسته‌است‌راتوصیف‌می‌کند (اکثرهسته‌های‌اورانیوم که با نوترون برخورد می‌کنند تجزیه‌شده‌وهریک‌دو یا سه‌نوترون "جدید "آزاد می‌سازند)، حال آنکه‌جمله $-bN/R$ نوترونهایی را که از سطح کره فرار می‌کنند توصیف می‌نماید(نسبت سطح به حجم کره با $1/R$ متناسب است) . نشان دهید وقتی شعاع R به مقدار معینی چون R_{cr} ، به نام **شعاع بحرانی**، برسد یا معادلا" وقتی جرم کره به مقدار معینی مانند m_{cr} ، به‌نام **جرم بحرانی** برسد ، N افزایش زیادی خواهدداشت . R_{cr} و m_{cr} را درصورتی بیابید که چگالی اورانیوم ۲۳۵ مساوی 18.7 g/cm^3 باشد . این یک‌مدل ساده شده " واکنش زنجیره‌ای " است که در بمب اتم رخ می‌دهد .

۶۰. یک واکنش شیمیایی درنظر بگیرید که درآن یک مولکول مادهٔ A با یک مولکول مادهٔ B ترکیب شده و یک مولکول از مادهٔ سوم C را تولید می‌کنند . فرض کنید a و b غلظتهای اولیهٔ A و B بوده ، و $y = y(t)$ غلظت C در لحظهٔ t باشد . در این‌صورت غلظتهای A و B در لحظهٔ t به ترتیب عبارتنداز $a - y$ و $b - y$ ، و میزان واکنش با حاصل‌ضرب این غلظتها متناسب است . این ما را به معادلهٔ زیر می‌رساند :

$$\frac{dy}{dt} = k(a-y)(b-y)$$

$(k > 0)$ ، که به **قانون میزان واکنش** معروف می‌باشد . به فرض آنکه $y(0) = 0$ ، y را به‌صورت‌تابعی‌از t بیابید .نشان‌دهیدکه‌اگر $a \neq b$ ،وقتی $t \to \infty$ ، $y \to \min\{a, b\}$. در حالت $a = b$ چه رخ می‌دهد ؟ فرض کنید T زمانی باشد که 99% واکنش کامل‌شده است . T را در حالت $a = b$ و در حالت $a = \frac{1}{2}b$ حساب کنید . کدام زمان بیشتر است و چرا ؟

۶۱. جسمی به جرم m که ابتدا در حالت سکون است در محیطی سقوط می‌کند که‌بانیرویی متناسب با مجذور سرعتش $v = v(t)$ در برابر حرکت مقاومت دارد . لذا ، طبق قانون دوم نیوتن،

$$m\frac{dv}{dt} = mg - bv^2,$$

که در آن g شتاب ثقل بوده و b ثابت مثبتی می‌باشد . نشان دهید که جسم دارای

سرعت حدی یا *نهایی* v_1 است که به آن نزدیک می‌شود ولی هرگز از آن رد نمی‌شود. نشان دهید که v_1 با جذر جرم جسم متناسب است. موضع جسم را به صورت تابعی از زمان بیابید.

۶۲. سنگی به جرم m با سرعت اولیهٔ v_0 به بالا پرتاب می‌شود. فرض کنید حرکت سنگ با مقاومت هوا که با مجذور سرعت سنگ متناسب، با ثابت تناسب b، استروبروباشد. نشان دهید که سرعت (بی‌علامت) سنگ در بازگشت به موضع اولیه مساوی‌است با

$$v_1 = v_0 \sqrt{\frac{mg}{mg + bv_0^2}}.$$

۶۳. جسمی به جرم m که ابتدا در حال سکون است در محیطی سقوط می‌کند که با نیرویی متناسب با سرعت $v = v(t)$، به جای مجذور سرعت مثل مسئلهٔ ۶۱، در برابرحرکت مقاومت دارد. (این برای یک شئی به‌قدر کافی کوچک مانند قطرهٔ باران یا یک محیط به‌قدر کافی چسبنده مانند روغن سنگین رخ می‌دهد.) نشان دهیدکه، درست مثل قانون مجذور مقاومت، جسم دارای سرعت حدی یا *نهایی* v_1 است که به آن نزدیک می‌شود ولی هرگز از آن رد نمی‌شود. نشان دهید که v_1 با جرم جسم متناسب است. موضع s جسم را به صورت تابعی از زمان بیابید.

۶۴. با استفاده از قاعدهٔ لایب‌نیتز (مسئلهٔ ۳۵، صفحهٔ ۳۶۶)، مشتق صدم $x \sinh x$ را بیابید.

نشان دهید که

۶۵. $\cosh x - \cosh y = 2 \sinh \frac{x+y}{2} \sinh \frac{x-y}{2}$

۶۶. $\sinh x - \sinh y = 2 \cosh \frac{x+y}{2} \sinh \frac{x-y}{2}$

۶۷. $\sinh^2 x - \sinh^2 y = \sinh (x+y) \sinh (x-y)$

۶۸. $(\cosh x + \sinh x)^a = \cosh ax + \sinh ax$ (a دلخواه)

۶۹. $\sinh 3x = 3 \sinh x + 4 \sinh^3 x$

۷۰. $\cosh 4x = 8 \cosh^4 x - 8 \cosh^2 x + 1$

حدود زیر را با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال حساب کنید.

۷۱. $\lim_{x \to 0} \frac{\sinh x}{x}$

۷۲. $\lim_{x \to 0} \frac{\tanh x}{x}$

۷۳. $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cosh x}{x^2}$

۷۴. $\lim_{x \to 0} \frac{\tanh x - x}{x^3}$

۷۵. $\lim_{x \to 0} \frac{x - \sinh^{-1} x}{x^3}$

۷۶. $\lim_{x \to 0} \frac{\tanh^{-1} x}{\sinh^{-1} x}$

۷۷. $\lim_{x \to 0^+} x^{\sinh x}$

۷۸. $\lim_{x \to 0^+} (\tanh x)^{\tan x}$

۷۹. $\lim_{x \to 0} (1 + \sinh x)^{\operatorname{csch} x}$

فرض کنید تابع $y = f(x)$ به ازای هر x در قلمرو خود در معادله‌ای به شکل

$$P_0(x) + P_1(x)y + P_2(x)y^2 + \cdots + P_n(x)y^n = 0 \qquad \text{(چهار)}$$

صدق کند ، که در آن $P_0(x), P_1(x), P_2(x), \ldots, P_n(x) \not\equiv 0$ همه چندجمله‌ایهایی از x اند . در این صورت ، گوییم تابع f **جبری** است . نشان دهید که

۸۰. توابع گویا جبری‌اند .

۸۱. تابع $y = \sqrt[3]{x - 2\sqrt{x}}$ جبری است .

۸۲. معکوس یک تابع جبری یک به یک خود جبری است .

تذکار . تابعی که جبری نباشد **متعالی** نام دارد . می‌دانیم که توابع نمایی ، مثلثاتی ، و هذلولوی متعالی‌اند . از مسئلهٔ ۸۲ معلوم می‌شود که این امر برای توابع لگاریتمی ، توابع مثلثاتی معکوس ، و توابع هذلولوی معکوس نیز درست است .

انتگرالهای زیر را حساب کنید .

۸۳. $\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2 - 16}}$

۸۴. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1 - 4x^2}}$

۸۵. $\int \frac{dx}{x\sqrt{9 + 49x^2}}$

۸۶. **شناسهٔ هذلولوی** یا **گودرمانیان** تابعی است مانند $y = \operatorname{gd} x$ که با فرمول زیر تعریف می‌شود :

$$y = \operatorname{gd} x = \int_0^x \frac{dt}{\cosh t}.$$

نشان دهید که

$$\operatorname{gd} x = \arctan(\sinh x) = 2\arctan(e^x) - \frac{\pi}{2},$$

$$\sinh x = \tan(\operatorname{gd} x), \qquad \cosh x = \sec(\operatorname{gd} x),$$
$$\tanh x = \sin(\operatorname{gd} x).$$

همچنین، نشان دهید که $y = \mathrm{gd}\, x$ یک تابع یک به یک است با معکوس

$$x = \mathrm{gd}^{-1}\, y = \int_0^y \sec t\, dt.$$