اعداد مختلط

نمونه سوال همراه با پاسخ تشریحی

دکتر یوسف کوه‌مسکن

ریاضی ۱

AvaEducation16.blog.ir
AvaEducation16@gmail.com
@AvaEducation16
@AvaEducation16

توضیحات

- این فایل علاوه بر سایت AvaEducation16.blog.ir در کانال تلگرامی @AvaEducation16 نیز موجود و قابل دانلود می‌باشد.

- این فایل جهت گسترش آموزش رایگان ارائه شده است، اما به جهت رعایت حقوق معنوی درخواست می‌شود نام منبع ذکر گردد.

- در این دسته از فایل‌ها که با روجلدی صورتی آغاز می‌شوند، مطالب مربوط به دوره **متوسطه** و در آن دسته که با روجلدی آبی آغاز می‌شوند، مطالب مربوط به دوره **دانشگاه** ارائه خواهد شد.

- نکات موجود در متن با علامت نمایش داده شده‌اند.

- در بخش پاسخنامه سوالات از علائم زیر استفاده شده است:
  - **بسیار ساده** جهت آشنایی با نمونه‌های اولیه سوالات
  - **ساده** جهت تثبیت مطالب
  - **متوسط** جهت تمرین بیشتر مطالب
  - **سخت** جهت کسب مهارت کافی و آشنایی با روش‌های حل مسائل خاص

۱ مسئله

در این بخش چند مسئله به عنوان نمونه سوال امتحانی دانشگاه‌های معتبر یا کنکور ارشد مطرح می‌شود. پاسخ این سوالات در فصل دوم همین فایل ارائه شده است.

---

۱. معادله $z^4 + z^2 + 1 = 0$ را در اعداد مختلط حل کنید.

---

۲. اگر $z = \dfrac{-\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}}{-\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}}$، عدد صحیح n را طوری بیابید که z^n عددی حقیقی باشد.

---

۳. حالت قطبی عدد $z = (i+1)i$ را بدست آورید. مقدار n را طوری پیدا کنید که $z^n\sqrt{i}$ موهومی خالص باشد.

---

۴. معادله $z^4 + iz^3 - z^2 - iz + 1 = 0$ را در میدان اعداد مختلط $\mathbb{C}$ حل کنید.

---

۵. معادله $z^6 - 7z^3 - 8 = 0$ را در دستگاه اعداد مختلط حل کنید. اگر z_1، z_2، $\cdots$ z_6 ریشه‌های این معادله باشند، آنگاه مقادیر $\operatorname{Im}(z_1 z_2 \cdots z_6)$ و $\operatorname{Im}(z_1 + z_2 + \cdots + z_6)$ را بیابید.

---

۶. نشان دهید اگر $|z| = 1$ و $|w| = 1$ و $\bar{z}w \neq 1$، آنگاه

$$|\frac{z-w}{1-\bar{z}w}| = 1$$

---

۷. معادله $z^4 = \dfrac{1-\sqrt{3}i}{1+i}$ را حل کنید.

---

۸. الف- نشان دهید هرگاه α یک ریشه معادله $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$ باشد که در آن $a_i \in \mathbb{R}$، آنگاه $\bar{\alpha}$ نیز یک ریشه معادله است.

ب- هرگاه $z_1 = i$ یک ریشه معادله $z^4 + 2z^3 + 3z^2 + 2z + 2 = 0$ باشد، سایر ریشه‌ها را تعیین کنید.

---

۹. نقاطی از صفحه مختلط را تعیین کنید که به ازای $z \in \mathbb{C}$ معادله $|z+4| = 2|z-i|$ همواره برقرار باشد.

---

۱۰. نقاطی از صفحه مختلط را تعیین کنید که به ازای $z \in \mathbb{C}$ نابرابری‌های $|z-1-i| < 3$ و $0 < \operatorname{Arg}(z) < \frac{\pi}{4}$ همواره برقرار باشد.

---

۱۱. نقاطی از صفحه مختلط را تعیین کنید که به ازای $z \in \mathbb{C}$ معادله $\operatorname{Im}(\bar{z}+i) = 3$ برقرار باشد.

---

۱۲. نابرابری زیر را ثابت کنید.

$$\frac{|\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|}{\sqrt{2}} \leq |z|$$

---

۱۳. حاصل $\sin(4+3i)$ را بیابید.

---

۱۴. عدد مختلط $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{1401}$ را به صورت $a+ib$ نمایش دهید.

---

۱۵. نشان دهید معادله $|z| - z = i$ جواب ندارد.

---

۱۶. اگر $z = \dfrac{(2+3i)(4+5i)}{6+7i}$ باشد، حاصل $\mathrm{Re}(z)$ و $\mathrm{Im}(z)$ را بدست آورید.

۱۷. جواب‌های معادله زیر را به فرم قطبی نمایش دهید.

$$z^9 + z^6 + z^3 + 1 = 0$$

۱۸. فرض کنید z عددی مختلط باشد به طوری که $\dfrac{\pi}{2} < \mathrm{Arg}(z) < \dfrac{2\pi}{3}$. اگر $z^3 + \dfrac{1}{z^3} = \sqrt{3}$، مقدار $z^2 + \dfrac{1}{z^2}$ را محاسبه کنید.

۱۹. اتحاد مثلثاتی لاگرانژ را ثابت کنید.

$$1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta = \frac{1}{2} + \frac{\sin\frac{(2n+1)\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}}$$

۲۰. اگر A، B و C زوایای یک مثلث باشند، آنگاه مقدار عبارت زیر را بدست آورید. **(عمران-۱۳۹۰)**

$$(\sin A + i\cos A)^{1389}(\sin B + i\cos B)^{1389}(\sin C + i\cos C)^{1389}$$

۲۱. به ازای چه تعداد عدد طبیعی $n \leq 1001$ تساوی $\sin n\theta + i\cos n\theta = (\sin\theta + i\cos\theta)^n$ برقرار است؟ **(صنایع-۱۴۰۱)**

۲۲. فرض کنید قسمت حقیقی عبارت‌های $\sqrt{1+\sqrt{3}i}$ و $\sqrt{\sqrt{3}-i}$ به ترتیب a و b باشند. مقدار $a^2 - b^2$ را بدست آورید. **(مدیریت کسب و کار-۱۴۰۱)**

۲ حل مسئله

۱. با فرض $z^2 = u$ یک معادله درجه دوم باید حل شود.

$$u^2 + u + 1 = 0, \quad \Rightarrow \quad u = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

جواب اول و دوم:

$$z^2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$z = e^{i\frac{\pi}{3} + k\pi}, \quad k = 0, 1$$

جواب سوم و چهارم:

$$z^2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

$$z = e^{i\frac{2\pi}{3} + k\pi}, \quad k = 0, 1$$

در نتیجه چهار جواب مسئله به صورت زیر است:

$$\{e^{i\frac{\pi}{3}},\ e^{i\frac{4\pi}{3}}\ e^{i\frac{2\pi}{3}},\ e^{i\frac{5\pi}{3}}\}$$

---

۲. با ضرب صورت و مخرج در عدد -1 و با توجه به رابطه اویلر می‌توان عبارت z را ساده کرد.

$$z = \frac{-\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}}{-\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}} = \frac{\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}}$$

$$\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6} = e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

$$z = \frac{e^{-i\frac{\pi}{3}}}{e^{-i\frac{\pi}{6}}} = e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

$$\Rightarrow \quad z^n = e^{-i\frac{n\pi}{6}} = \cos\frac{n\pi}{6} - i\sin\frac{n\pi}{6}$$

برای آنکه عبارت فوق حقیقی باشد، باید جزء موهومی آن صفر شود:

$$\sin\frac{n\pi}{6}=0, \quad \Rightarrow \quad \frac{n\pi}{6}=k\pi, \quad \Rightarrow \quad n=6k,\ k\in\mathbb{Z}$$

---

۳. این عدد در ناحیه دوم است.

$$z=-1+i$$

$$r=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}, \quad \theta=\pi+\tan^{-1}\frac{1}{-1}=\frac{3\pi}{4}$$

حالت قطبی عدد z به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\Rightarrow \quad z=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

برای حل بخش دوم سوال باید مقدار $\sqrt{i}$ ساده شود.

$$i=e^{i(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}, \quad \Rightarrow \quad \sqrt{i}=e^{i(\frac{\pi}{4}+k\pi)}, \quad k=0,1$$

دو مقدار برای $\sqrt{i}$ وجود دارد.

$$\sqrt{i}=e^{i\frac{\pi}{4}},\ e^{i\frac{5\pi}{4}}$$

به ازای جواب اول $\sqrt{i}$، عدد $z^n\sqrt{i}$ به صورت زیر قابل نمایش است:

$$\begin{aligned} z^n\sqrt{i} &= (\sqrt{2})^n e^{i\frac{3\pi n}{4}} e^{i\frac{\pi}{4}} \\ &= 2^{\frac{n}{2}} e^{i(\frac{3\pi n}{4}+\frac{\pi}{4})} \\ &= 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos(\frac{3\pi n}{4}+\frac{\pi}{4})+i\sin(\frac{3\pi n}{4}+\frac{\pi}{4})\right) \end{aligned}$$

برای آنکه عدد فوق موهومی خالص باشد باید بخش حقیقی آن صفر شود:

$$\cos(\frac{3\pi n}{4}+\frac{\pi}{4})=0, \quad \Rightarrow \quad \frac{3\pi n}{4}+\frac{\pi}{4}=k\pi+\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \quad n=\frac{4k+1}{3}$$

باید مقادیری از k در رابطه فوق جایگزین شوند که n یک عدد طبیعی شود. مثلا باید $k=2,\ 5,\ 8,\ \cdots$ باشد در نتیجه $n=3,\ 7,\ 11,\ \cdots$ است.

به ازای جواب دوم $\sqrt{i}$، عدد $z^n\sqrt{i}$ به صورت زیر قابل نمایش است:

$$\begin{aligned} z^n\sqrt{i} &= (\sqrt{2})^n e^{i\frac{3\pi n}{4}} e^{i\frac{5\pi}{4}} \\ &= 2^{\frac{n}{2}} e^{i(\frac{3\pi n}{4}+\frac{5\pi}{4})} \\ &= 2^{\frac{n}{2}}\Big(\cos(\frac{3\pi n}{4}+\frac{5\pi}{4}) + i\sin(\frac{3\pi n}{4}+\frac{5\pi}{4})\Big) \end{aligned}$$

برای آنکه عدد فوق موهومی خالص باشد باید بخش حقیقی آن صفر شود:

$$\cos(\frac{3\pi n}{4}+\frac{5\pi}{4}) = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{3\pi n}{4}+\frac{5\pi}{4} = k\pi + \frac{\pi}{2}$$
$$\Rightarrow \quad n = \frac{4k-3}{3}$$

باید مقادیری از k در رابطه فوق جایگزین شوند که n یک عدد طبیعی شود. مثلا باید $k = 3,\ 6,\ 9,\ \cdots$ باشد در نتیجه $n = 3,\ 7,\ 11,\ \cdots$ است. پس در هر دو حالت مقادیر n مانند همدیگر است. به طور خلاصه می‌توان مقادیر n را به صورت زیر نمایش داد:

$$n \in \{3,\ 7,\ 11,\ 15,\ \cdots\}$$

---

۴. عبارت داده شده به صورت زیر نیز قابل نمایش است.

$$z^4 + iz^3 - z^2 - iz + 1 = z^4 + iz^3 + i^2z^2 + i^3z + i^4$$

اگر عبارت فوق در $z - i$ ضرب شود، رابطه ساده‌ای برای حل بدست می‌آید.

$$(z-i)(z^4 + iz^3 + i^2z^2 + i^3z + i^4) = z^5 - i^5 = 0$$

جواب این معادله به صورت زیر تعیین می‌گردد.

$$z^5 = i = e^{i\frac{\pi}{2}} = e^{i(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}$$

$$\Rightarrow \quad z = e^{i(\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5})},\ k = 0,1,2,3,4$$

نکته بسیار مهم: به دلیل آنکه این معادله در $z - i$ ضرب شده است، یک جواب ناخواسته که از همین عبارت است هم در پاسخ‌های معادله وجود دارد که باید حذف گردد. پاسخی که این عبارت خاص به تعداد جواب‌های معادله افزوده است $z = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ است. پس این جواب باید از جواب‌های

مسئله حذف گردد. در این مسئله به ازای $k = 1$ این اتفاق روی می‌دهد. پس جواب مسئله در اعداد مختلط به صورت زیر است:

$$\Rightarrow \quad z = e^{i(\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5})},\ k = 0, 2, 3, 4$$

$$\Rightarrow \quad z = e^{i\frac{\pi}{10}},\ e^{i\frac{9\pi}{10}},\ e^{i\frac{13\pi}{10}},\ e^{i\frac{17\pi}{10}}$$

سوال کلیدی: اصلا چطور فهمیدیم معادله باید در $z - i$ ضرب شود؟! به دو نکته زیر برای جواب این سوال توجه گردد.

$$\boxed{(a-b)(a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \cdots + ab^{n-1} + b^n) = a^{n+1} - b^{n+1}}$$

$$\boxed{(a+b)(a^n - a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 - \cdots - ab^{n-1} + b^n) = a^{n+1} + b^{n+1}}$$

به عنوان مثال می‌توان سوالات زیر را با روش ارائه شده فوق حل کرد. حل این سوالات به عنوان تمرین به دانشجویان واگذار می‌شود.

$$z^6 - z^5 + z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$$

$$iz^5 + z^4 - iz^3 - z^2 + iz + 1 = 0$$

---

۵. از اتحاد جمله مشترک استفاده می‌شود.

$$z^6 - 7z^3 - 8 = (z^3+1)(z^3-8) = 0$$

معادله اول به صورت زیر حل می‌شود:

$$z^3 = -1 = e^{i\pi} = e^{i(\pi+2k\pi)}, \quad \Rightarrow \quad z = e^{i\frac{(2k+1)\pi}{3}},\ k = 0, 1, 2$$

با جایگذاری‌های k سه جواب بدست می‌آید:

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$z_2 = e^{i\pi} = -1$$

$$z_3 = e^{i\frac{5\pi}{3}}$$

معادله دوم به صورت زیر حل می‌شود:

$$z^3 = 8 = 8e^{i0} = 8e^{i2k\pi}, \quad \Rightarrow \quad z = 2e^{i\frac{2k\pi}{3}},\ k = 0, 1, 2$$

با جایگذاری‌های k سه جواب بدست می‌آید:

$$z_4 = 2$$
$$z_5 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$$
$$z_6 = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

ضرب جواب‌ها به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} z_1z_2z_3z_4z_5z_6 &= (-e^{i\frac{\pi}{3}}e^{i\frac{5\pi}{3}})(8e^{i\frac{2\pi}{3}}e^{i\frac{4\pi}{3}}) \\ &= -8e^{i4\pi} \\ &= -8 \end{aligned}$$

قسمت موهومی عدد فوق صفر است.

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Im}(z_1z_2z_3z_4z_5z_6) = 0$$

جمع جواب‌ها به صورت زیر بدست می‌آید:

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 + z_6 = e^{i\frac{\pi}{3}} - 1 + e^{i\frac{5\pi}{3}} + 2 + 2e^{i\frac{2\pi}{3}} + 2e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

قسمت موهومی عدد فوق با رابطه زیر تعیین می‌شود. توجه شود که هر جمله نمایی شامل یک بخش حقیقی و یک بخش موهومی است. با کمک رابطه اویلر می‌توان بخش موهومی آن را جدا کرد.

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 + z_6) &= \sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{5\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{4\pi}{3} \\ &= \sin\frac{\pi}{3} + \sin(2\pi - \frac{\pi}{3}) + \sin\frac{2\pi}{3} + \sin(2\pi - \frac{2\pi}{3}) \\ &= \sin\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3} - \sin\frac{2\pi}{3} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Im}(z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 + z_6) = 0$$

۶. فرض شود $z = e^{i\alpha}$ و $w = e^{i\beta}$. با توجه به رابطه اویلر، اندازه هر دو عدد مختلط فوق واحد است.

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha, \quad \Rightarrow \quad |e^{i\alpha}| = \sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = 1$$

آنگاه

$$\begin{aligned} \frac{z-w}{1-\bar{z}w} &= \frac{e^{i\alpha}-e^{i\beta}}{1-e^{-i\alpha}e^{i\beta}} \\ &= \frac{e^{i\alpha}-e^{i\beta}}{1-e^{-i\alpha}e^{i\beta}} \times \frac{e^{i\alpha}}{e^{i\alpha}} \\ &= e^{i\alpha} \times \frac{e^{i\alpha}-e^{i\beta}}{e^{i\alpha}-e^{i\beta}} \\ &= e^{i\alpha} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad |\frac{z-w}{1-\bar{z}w}| = |e^{i\alpha}| = 1$$

---

۷. طرف دوم باید به صورت قطبی ظاهر شود. برای این کار می‌توان صورت و مخرج را قطبی کرد و در نهایت تقسیم مورد نظر را انجام داد.

عدد $1-\sqrt{3}i$ در ناحیه چهارم است:

$$r = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2, \quad \theta = \tan^{-1}\frac{-\sqrt{3}}{1} = -\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \quad 1-\sqrt{3}i = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

عدد $1+i$ در ناحیه اول است:

$$r = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}, \quad \theta = \tan^{-1}\frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \quad 1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$z^4 = \frac{2e^{-i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2}e^{-i\frac{7\pi}{12}} = \sqrt{2}e^{i(-\frac{7\pi}{12}+2k\pi)}$$

$$\Rightarrow \quad z = 2^{\frac{1}{8}}e^{i(-\frac{7\pi}{48}+\frac{k\pi}{2})}, \ k = 0,1,2,3$$

---

۸. الف- فرض شود $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0$. می‌دانیم α ریشه چندجمله‌ای p است، پس $p(\alpha) = 0$. باید اثبات شود $p(\bar{\alpha}) = 0$.

$$\begin{aligned} p(\bar{\alpha}) &= a_n \bar{\alpha}^n + a_{n-1}\bar{\alpha}^{n-1} + \cdots + a_1\bar{\alpha} + a_0 \\ &= a_n \overline{\alpha^n} + a_{n-1}\overline{\alpha^{n-1}} + \cdots + a_1\overline{\alpha} + a_0 \\ &= \overline{a_n}\,\overline{\alpha^n} + \overline{a_{n-1}}\,\overline{\alpha^{n-1}} + \cdots + \overline{a_1}\,\overline{\alpha} + \overline{a_0} \\ &= \overline{a_n\alpha^n} + \overline{a_{n-1}\alpha^{n-1}} + \cdots + \overline{a_1\alpha} + \overline{a_0} \\ &= \overline{a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\alpha + a_0} \\ &= \overline{p(\alpha)} \\ &= \bar{0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

ب- با توجه به قضیه فوق اگر $z = i$ جواب مسئله باشد، $\bar{z} = -i$ هم جواب مسئله است. در نتیجه دو ریشه این چندجمله‌ای تعیین می‌شود.

$$(z-i)(z+i) = z^2 + 1$$

اکنون باید چندجمله‌ای داده شده بر z^2+1 تقسیم شود و یک چندجمله‌ای درجه دوم پدید آید. با انجام تقسیم چندجمله‌ای‌ها رابطه زیر بدست می‌آید:

$$z^4 + 2z^3 + 3z^2 + 2z + 2 = (z^2+1)(z^2+2z+2) = 0$$

ریشه‌های z^2+2z+2 به صورت زیر تعیین می‌شوند:

$$z^2+2z+2 = (z+1)^2+1 = 0, \quad \Rightarrow \quad (z+1)^2 = -1, \quad \Rightarrow \quad z+1 = \pm i, \quad \Rightarrow \quad z = -1 \pm i$$

---

۹. در این نوع مسائل بهتر است $z = x + iy$ در نظر گرفته شود.

$$|z+4| = 2|z-i|, \quad \Rightarrow \quad |x+iy+4| = 2|x+iy-i|, \quad \Rightarrow \quad \sqrt{(x+4)^2+y^2} = 2\sqrt{x^2+(y-1)^2}$$

دو طرف به توان دوم می‌رسند:

$$(x+4)^2 + y^2 = 4\Big(x^2 + (y-1)^2\Big)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & 3x^2+3y^2-8x-8y-12=0 \\
& x^2+y^2-\frac{8}{3}x-\frac{8}{3}y-4=0 \\
& (x-\frac{4}{3})^2+(y-\frac{4}{3})^2-\frac{32}{9}-4=0 \\
& (x-\frac{4}{3})^2+(y-\frac{4}{3})^2=\frac{68}{9}
\end{aligned}$$

رابطه فوق نشان‌دهنده یک دایره به مرکز $(\frac{4}{3},\frac{4}{3})$ و شعاع $\frac{\sqrt{68}}{3}$ در صفحه مختلط است.

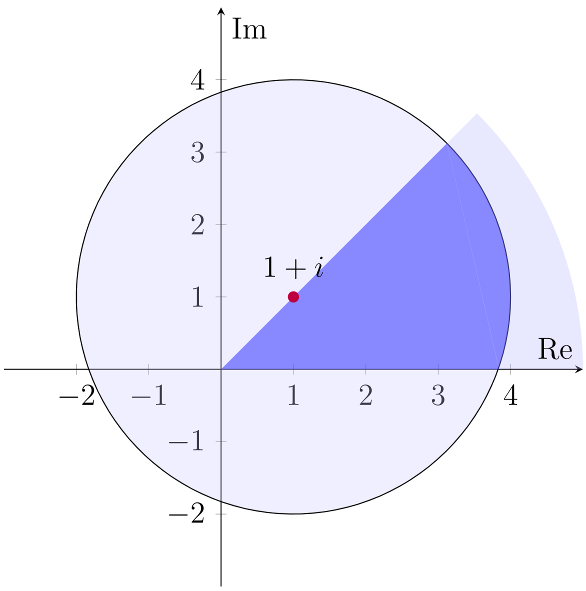
---

۱۰. برای نابرابری اول $z=x+iy$ فرض می‌شود. در این صورت این نابرابری نشان‌دهنده یک دایره به مرکز $(1,1)$ و شعاع 3 می‌باشد.

عبارت $\mathrm{Arg}(z)$ معادل زاویه عدد z است.

$$\theta=\mathrm{Arg}(z)=\tan^{-1}\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}$$

پس نابرابری دوم نقاطی از صفحه را نشان می‌دهد که زاویه آن بین صفر و 45 درجه باشد. اشتراک این ناحیه و دایره تعریف شده جواب مسئله می‌باشد که در شکل زیر با رنگ آبی تیره نمایش داده شده است.



۱۱. فرض می‌شود $z = x + iy$ باشد.

$$\mathrm{Im}(\bar{z} + i) = \mathrm{Im}(x - iy + i) = \mathrm{Im}\Big(x + i(1-y)\Big) = 1 - y$$

$$\Rightarrow \quad 1 - y = 3, \quad \Rightarrow \quad y = -2$$

این مکان هندسی یک خط به موازات محور افقی و با ارتفاع -2 است.

---

۱۲. فرض می‌شود $z = x + iy$ باشد.

$$\mathrm{Re}(z) = x, \quad \mathrm{Im}(z) = y, \quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

صورت مسئله به نابرابری زیر منتهی می‌شود:

$$\frac{|x| + |y|}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{x^2 + y^2}$$

از یک فرض صحیح می‌توان به رابطه فوق رسید:

$$\begin{aligned}
&(|x| - |y|)^2 \geq 0 \\
\Rightarrow \quad & x^2 + y^2 - 2|xy| \geq 0 \\
\Rightarrow \quad & x^2 + y^2 \geq 2|xy| \\
\Rightarrow \quad & 2(x^2 + y^2) \geq 2|xy| + x^2 + y^2 \\
\Rightarrow \quad & 2(x^2 + y^2) \geq (|x| + |y|)^2 \\
\Rightarrow \quad & x^2 + y^2 \geq \frac{(|x| + |y|)^2}{2} \\
\Rightarrow \quad & \sqrt{x^2 + y^2} \geq \frac{|x| + |y|}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

در خط آخر چون هر دو عبارت در واقع عبارت‌های مثبتی هستند که به توان دوم رسیده‌اند، رادیکال آن تعریف می‌شود و همان نابرابری مسئله ایجاد شد.

---

۱۳. از نکته زیر برای حل مسئله استفاده می‌شود.

$$\boxed{\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}$$

$$\begin{aligned}
\sin(4+3i) &= \frac{e^{i(4+3i)} - e^{-i(4+3i)}}{2i} \\
&= \frac{e^{4i-3} - e^{-4i+3}}{2i} \\
&= \frac{1}{2i}\Big(e^{-3}(\cos 4 + i\sin 4) - e^{3}(\cos 4 - i\sin 4)\Big) \\
&= \frac{1}{2i}\Big((e^{-3} - e^{3})\cos 4 + i(e^{-3} + e^{3})\sin 4\Big) \\
&= \frac{e^{-3} - e^{3}}{2i}\cos 4 + \frac{e^{-3} + e^{3}}{2}\sin 4 \\
&= \frac{e^{-3} + e^{3}}{2}\sin 4 + i\frac{e^{3} - e^{-3}}{2}\cos 4
\end{aligned}$$

---

۱۴. عدد کسری به صورت قطبی نمایش داده می‌شود.

$$1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \frac{1+i}{1-i} &= \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} \\
&= e^{i\frac{\pi}{2}} \\
&= i
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{1401} = i^{1401} = (i^4)^{375} i = i$$

$$a + bi = i, \quad \Rightarrow \quad a = 0,\ b = 1$$

---

۱۵. فرض می‌شود $z = x + iy$ باشد.

$$|z| - z = i, \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x^2 + y^2} - x - iy = i$$

برای آنکه بخش حقیقی و موهومی دو طرف برابر باشند دو شرط نیاز است؛

$$y = -1, \quad \sqrt{x^2 + y^2} - x = 0$$

معادله دوم با وجود $y=-1$ به صورت زیر قابل نمایش است.

$$\sqrt{x^2+1}-x=0, \quad \Rightarrow \quad x^2+1=x^2$$

رابطه فوق یک تناقض است، پس معادله مختلط داده شده، جواب ندارد.

---

۱۶. خیلی ساده است!!

$$z=\frac{(2+3i)(4+5i)}{6+7i}=\frac{-7+22i}{6+7i}$$

برای آنکه مخرج یک عدد حقیقی باشد باید صورت و مخرج در مزدوج مخرج ضرب شوند:

$$\begin{aligned} z &= \frac{-7+22i}{6+7i} \\ &= \frac{-7+22i}{6+7i}\times\frac{6-7i}{6-7i} \\ &= \frac{112+181i}{36+49} \\ &= \frac{112}{85}+i\frac{181}{85} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Re}(z)=\frac{112}{85}, \quad \mathrm{Im}(z)=\frac{181}{85}$$

واقعا ساده!!

---

۱۷. معادله در z^3-1 ضرب می‌شود. جواب معادله جدید بدست می‌آید و جواب معادله $z^3=1$ که به صورت کمکی در این معادله استفاده شده بود از جواب کلی حذف می‌شود.

$$(z^3-1)(z^9+z^6+z^3+1)=z^{12}-1=0$$

$$\Rightarrow \quad z^{12}=1=e^{i2k\pi}, \quad \Rightarrow \quad z=e^{i\frac{k\pi}{6}}, \ k=0,1,\cdots,11$$

جواب‌های $z^3=1$ باید بدست آیند و از جواب‌های مسئله حذف شوند.

$$\Rightarrow \quad z^3=1=e^{i2k\pi}, \quad \Rightarrow \quad z=e^{i\frac{2k\pi}{3}}, \ k=0,1,2$$

جواب‌های نهایی:

$$z=e^{i\frac{k\pi}{6}}, \ k\in\{1,2,3,5,6,7,9,10,11\}$$

---

۱۸. ابتدا معادله حل می‌شود:

$$z^3+\frac{1}{z^3}=\sqrt{3}, \quad \Rightarrow \quad z^6-\sqrt{3}z^3+1=0, \quad \Rightarrow \quad z^3=\frac{\sqrt{3}\pm i}{2}$$

رابطه فوق دو جواب داشت و فعلا هیچ کدام را حذف نمی‌کنیم. طرف دوم به صورت قطبی قابل نمایش است:

$$z^3=e^{\pm i\frac{\pi}{6}}=e^{i(\pm\frac{\pi}{6}+2k\pi)}$$

$$\Rightarrow \quad z=e^{i(\pm\frac{\pi}{18}+\frac{2k\pi}{3})},\ k=0,1,2$$

با توجه به شرط $\frac{\pi}{2}<\mathrm{Arg}(z)<\frac{2\pi}{3}$ فقط باشد علامت پشت $\frac{\pi}{18}$ منفی و مقدار $k=1$ قابل قبول است. پس فقط یک جواب وجود دارد:

$$z=e^{i(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{18})}$$

با جایگذاری در رابطه خواسته‌شده و ساده کردن می‌توان جواب مسئله را بدست آورد:

$$\begin{aligned}
z^2+\frac{1}{z^2}&=e^{i(\frac{4\pi}{3}-\frac{\pi}{9})}+e^{-i(\frac{4\pi}{3}-\frac{\pi}{9})}\\
&=2\cos(\frac{4\pi}{3}-\frac{\pi}{9})\\
&=2\cos\frac{11\pi}{9}\\
&=-2\cos\frac{2\pi}{9}
\end{aligned}$$

۱۹. در روند اثبات از تبدیل کسینوس یا سینوس به جملات نمایی استفاده می‌شود.

$$\begin{aligned}
1+\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos n\theta &= 1+\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}+\cdots+\frac{e^{in\theta}+e^{-in\theta}}{2}\\
&= 1+\frac{1}{2}(e^{i\theta}+\cdots+e^{in\theta})+\frac{1}{2}(e^{-i\theta}+\cdots+e^{-in\theta})\\
&= 1+\frac{e^{i\theta}}{2}\frac{1-e^{in\theta}}{1-e^{i\theta}}+\frac{e^{-i\theta}}{2}\frac{1-e^{-in\theta}}{1-e^{-i\theta}}\\
&= 1+\frac{e^{i\frac{\theta}{2}}}{2e^{-i\frac{\theta}{2}}}\frac{1-e^{in\theta}}{1-e^{i\theta}}+\frac{e^{-i\frac{\theta}{2}}}{2e^{i\frac{\theta}{2}}}\frac{1-e^{-in\theta}}{1-e^{-i\theta}}\\
&= 1+\frac{e^{i\frac{\theta}{2}}}{2}\frac{1-e^{in\theta}}{e^{-i\frac{\theta}{2}}-e^{i\frac{\theta}{2}}}+\frac{e^{-i\frac{\theta}{2}}}{2}\frac{1-e^{-in\theta}}{e^{i\frac{\theta}{2}}-e^{-i\frac{\theta}{2}}}\\
&= 1+\frac{e^{i\frac{\theta}{2}}}{4i}\frac{1-e^{in\theta}}{(-\sin\frac{\theta}{2})}+\frac{e^{-i\frac{\theta}{2}}}{4i}\frac{1-e^{-in\theta}}{\sin\frac{\theta}{2}}\\
&= 1+\frac{e^{i(2n+1)\frac{\theta}{2}}-e^{-i(2n+1)\frac{\theta}{2}}-e^{i\frac{\theta}{2}}+e^{-i\frac{\theta}{2}}}{4i\sin\frac{\theta}{2}}\\
&= 1+\frac{\sin\frac{(2n+1)\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}}\\
&= \frac{1}{2}+\frac{\sin\frac{(2n+1)\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}}
\end{aligned}$$

در رابطه فوق از مجموع n جمله تصاعد هندسی استفاده شد.

$$\boxed{1+z+z^2+\cdots+z^n=\frac{1-z^{n+1}}{1-z}}$$

۲۰. هر کدام از جمله‌ها به صورت نمایی نمایش داده می‌شوند.

$$\sin A+i\cos A=i(\cos A-i\sin A)=ie^{-iA}$$

$$\sin B+i\cos B=i(\cos B-i\sin B)=ie^{-iB}$$

$$\sin C+i\cos C=i(\cos C-i\sin C)=ie^{-iC}$$

$$\Rightarrow\quad (\sin A+i\cos A)^{1389}=i^{1389}e^{-i1389A}=ie^{-i1389A}$$

برای دو عبارت دیگر هم همین جمله تولید می‌شود:

$$\begin{aligned}(\sin A + i\cos A)^{1389}(\sin B + i\cos B)^{1389}(\sin C + i\cos C)^{1389} &= i^3 e^{-i1389(A+B+C)}\\ &= i^3 e^{-i1389\pi}\\ &= i^3 (e^{-i\pi})^{1389}\\ &= i^3(-1)^{1389}\\ &= -i^3\\ &= i\end{aligned}$$

---

۲۱. عبارت سمت راست:

$$\sin\theta + i\cos\theta = i(\cos\theta - i\sin\theta) = ie^{-i\theta}$$

$$\Rightarrow \qquad (\sin\theta + i\cos\theta)^n = i^n e^{-in\theta}$$

عبارت سمت چپ:

$$\sin n\theta + i\cos n\theta = ie^{-in\theta}$$

$$\Rightarrow \qquad i^n = i$$

اگر n به صورت $4k+1$ باشد، تساوی فوق برقرار است.

$$n = 4k+1 \leq 1001, \qquad \Rightarrow \qquad k \leq 250$$

مقادیر طبیعی n می‌تواند به ازای $k = 0, 1, 2, \cdots, 250$ حاصل شود. پس در مجموع 251 عدد وجود دارد.

$$n \in \{1, 5, 9, \cdots, 1001\}$$

---

۲۲. نوشتن عدد مختلط اول به صورت قطبی

$$1 + \sqrt{3}i = 2e^{i\frac{\pi}{3}}, \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{1+\sqrt{3}i} = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{6}+k\pi)}$$

$$a = \mathrm{Re}(\sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{6}+k\pi)}) = \sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{6}+k\pi) = \pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

نوشتن عدد مختلط دوم به صورت قطبی

$$\sqrt{3}-i = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}, \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\sqrt{3}-i} = \sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{12}+k\pi)}$$

$$b = \mathrm{Re}(\sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{12}+k\pi)}) = \pm\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad a^2-b^2 &= \frac{3}{2} - 2\cos^2\frac{\pi}{12} \\
&= \frac{3}{2} - 2\frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2} \\
&= \frac{3}{2} - (1+\cos\frac{\pi}{6}) \\
&= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

اگر زندگی متفاوتی را بخواهید، باید متفاوت از آنچه تاکنون بوده‌اید عمل کنید.