

مثلثات

معادله مثلثاتی

دکتر یوسف کوه‌مسکن

ریاضی ۱۲م



AvaEducation16.blog.ir



AvaEducation16@gmail.com



@AvaEducation16



@AvaEducation16

توضیحات

- این فایل علاوه بر سایت AvaEducation16.blog.ir در کانال تلگرامی [@AvaEducation16](https://t.me/AvaEducation16) نیز موجود و قابل دانلود می‌باشد.
- این فایل جهت گسترش آموزش رایگان ارائه شده است، اما به جهت رعایت حقوق معنوی درخواست می‌شود نام منبع ذکر گردد.
- در این دسته از فایل‌ها که با روجلدی صورتی [] آغاز می‌شوند، مطالب مربوط به دوره **متوسطه** و در آن دسته که با روجلدی آبی [] آغاز می‌شوند، مطالب مربوط به دوره **دانشگاه** ارائه خواهد شد.
- نکات موجود در متن با علامت 💡 نمایش داده شده‌اند.
- در بخش پاسخنامه سوالات از علائم زیر استفاده شده است:
 - بسیار ساده جهت آشنایی با نمونه‌های اولیه سوالات 🧐
 - ساده جهت تثبیت مطالب 🧐
 - متوسط جهت تمرین بیشتر مطالب 🧐
 - سخت جهت کسب مهارت کافی و آشنایی با روش‌های حل مسائل خاص 🧐

۱ مسئله

پاسخ معادله مثلثاتی زیر کدام است؟

$$\sin 5x + \sqrt{3} \cos 5x = 2 \cos 3x$$

$$\frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{3} \quad (۲) \qquad \frac{\pi}{48} + \frac{k\pi}{3} \quad (۱)$$

$$\frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{4} \quad (۴) \qquad \frac{\pi}{48} + \frac{k\pi}{4} \quad (۳)$$

۲ روش حل مسئله

 پاسخ: در معادلات مثلثاتی باید دو طرف معادله از یک نوع نسبت باشند تا مقادیر داخلی آنها که از آن با نام آرگومان یاد می‌شود با هم برابر باشند. البته نسبت‌های مثلثاتی π و 2π نیز باید برای معادلات شامل تانژانت (کتانژانت) و سینوس (کسینوس) در نظر گرفته شوند. به نکته زیر توجه شود.

 در یک معادله اگر رابطه زیر حاصل شد آنگاه:

$$\sin x = \sin(\alpha + \beta), \quad \Rightarrow \quad x = \alpha + \beta + 2k\pi$$

 در یک معادله اگر رابطه زیر حاصل شد آنگاه:

$$\tan x = \tan(\alpha + \beta), \quad \Rightarrow \quad x = \alpha + \beta + k\pi$$

در هر دو نکته فوق $k \in \mathbb{Z}$ می‌باشد.

قبل از حل مسئله، مثال زیر بررسی می‌شود

$$\sin 2x = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

از رابطه $\cos \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ خواهیم داشت:

$$\sin 2x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$$

چون عبارت مقابل دو سینوس با هم برابرند، این زوایا هم با تناوب $2k\pi$ با هم برابرند:

$$\Rightarrow \quad 2x = \frac{\pi}{6} - x + 2k\pi, \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$$

حال به مسئله مورد نظر بازمی‌گردیم. با تقسیم دو طرف بر 2 این معادله به صورت زیر قابل نمایش است:

$$\frac{1}{2} \sin 5x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 5x = \cos 3x$$

سمت چپ همان $\sin(5x + \frac{\pi}{3})$ است.

$$\sin(5x + \frac{\pi}{3}) = \cos 3x = \sin(\frac{\pi}{2} - 3x)$$

$$\Rightarrow 5x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} - 3x + 2k\pi$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{48} + \frac{k\pi}{4}$$

گزینه ۳ صحیح است.

۳ مسئله مشابه

معادله مثلثاتی زیر را حل کنید.

$$\cos x - \cos 4x = \sin x + \sin 4x$$

پاسخ: عبارت‌های دارای آرگومان مشابه به یک سمت انتقال داده می‌شوند. 🤔

$$\cos x - \sin x = \cos 4x + \sin 4x$$

با تقسیم دو طرف بر $\sqrt{2}$ عبارت زیر حاصل می‌شود.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cos x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 4x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 4x$$

$$\cos \frac{\pi}{4} \cos x - \sin \frac{\pi}{4} \sin x = \cos \frac{\pi}{4} \cos 4x + \sin \frac{\pi}{4} \sin 4x$$

$$\cos(\frac{\pi}{4} + x) = \cos(\frac{\pi}{4} - 4x)$$

$$\frac{\pi}{4} + x = \frac{\pi}{4} - 4x + 2k\pi, \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2k\pi}{5}$$

مشکلات ما را متوقف نمی‌کنند، بلکه
به ما آموزش می‌دهند.
برایان تریسی



 AvaEducation16.blog.ir

 [@AvaEducation16](https://www.instagram.com/AvaEducation16)

   [@AvaEducation16](https://www.facebook.com/AvaEducation16)

 AvaEducation16@gmail.com