پروژه‌ی درس هندسه‌ی محاسباتی

پوشش رأسی

نام دانش‌جو

۲۳ دی ۱۳۹۲

چکیده

بسیاری از مسائل بهینه‌سازی در ریاضیات، علوم کامپیوتر و مهندسی ان‌پی-سخت هستند و بنابراین با فرض $P \neq NP$ به دست آوردن جواب‌های بهینه برای این مسائل در زمان چندجمله‌ای غیرممکن است. الگوریتم‌های تقریبی این امکان را فراهم می‌آورند که جواب‌هایی نزدیک به جواب بهینه با ضریب تقریب قابل اثبات برای این دسته از مسائل به دست آورد. در این بخش ضمن ارائه‌ی تعاریف اولیه، مسئله‌ی پوشش رأسی را مورد بررسی قرار می‌دهیم و چند الگوریتم تقریبی برای آن ارائه می‌کنیم.

۱ مقدمه

بسیاری از مسائل بهینه‌سازی مهم و پایه‌ای ان‌پی-سخت هستند. بنابراین، با فرض $P \neq NP$ نمی‌توان الگوریتم‌هایی با زمان چندجمله‌ای برای این مسائل ارائه کرد. روش‌های متداول برای برخورد با این مسائل عبارت‌اند از:

- مسئله را فقط برای حالات خاص حل نمود.
- با استفاده از روش‌های جست‌وجوی تمام حالات، مسئله را در زمان غیرچندجمله‌ای حل نمود.
- در زمان چندجمله‌ای، تقریبی از جواب بهینه را به دست آورد.

در این درس تمرکز بر روی روش سوم یعنی استفاده از الگوریتم‌های تقریبی است. الگوریتم‌های تقریبی قادرند جوابی نزدیک به جواب بهینه را در زمان چندجمله‌ای پیدا کنند.

مسئله	ضریب تقریب
Euclidian TSP	$1+\varepsilon\ (\varepsilon>0)$
Vertex Cover	const c
Set Cover	$\log n$
Coloring	$n^{\delta}\ (\delta<1)$
TSP	∞

جدول ۱: نمونه‌هایی از ضرایب تقریب برای مسائل بهینه‌سازی

مسئله‌ی بهینه‌سازی (کمینه‌سازی یا بیشینه‌سازی) P را در نظر بگیرید. فرض کنید هر نمونه از مسئله‌ی P دارای یک مجموعه‌ی ناتهی از جواب‌های ممکن[1] است. به هر جواب ممکن، یک عدد مثبت به عنوان هزینه (یا وزن) آن نسبت داده شده است. مسئله‌ی P با شرایط فوق یک مسئله‌ی *ان‌پی-بهینه‌سازی* (NP-Optimization) است، اگر الگوریتم‌های چندجمله‌ای برای تعیین معتبر بودن نمونه‌های مسئله، تعیین ممکن بودن جواب‌ها، و نیز تعیین وزن هر جواب ممکن وجود داشته باشد.

به طور مثال، در مسئله‌ی فروشنده‌ی دوره‌گرد، هر نمونه‌ی معتبر از مسئله شامل یک گراف $G=(V,E)$ به علاوه‌ی تابع هزینه‌ی $w: E\to\mathbb{R}^{+}$ است. برای هر نمونه‌ی (G,w) از مسئله، مجموعه جواب‌های ممکن شامل تمام دورهای موجود د G است. برای هر جواب ممکن، هزینه‌ی جواب برابر با مجموع هزینه‌ی تمام یال‌های موجود در دور می‌باشد. به وضوع، تعیین معتبر بودن نمونه‌های مسئله، تعیین جواب‌های ممکن، و تعیین هزینه‌ی هر جواب در زمان چندجمله‌ای انجام‌پذیر است. بنابراین مسئله‌ی فروشنده‌ی دوره‌گرد، یک مسئله‌ی ان‌پی-بهینه‌سازی است. می‌توان نشان داد که اگر P یک مسئله‌ی ان‌پی-بهینه‌سازی باشد، آن‌گاه مقدار کمینه/بیشینه‌ی P به صورت غیرقطعی[2] در زمان چندجمله‌ای قابل محاسبه است.

به ازای هر نمونه‌ی I از یک مسئله‌ی ان‌پی-بهینه‌سازی P، هزینه‌ی جواب بهینه برای I را با $\mathrm{OPT}(I)$ نشان می‌دهیم. همچنین، هزینه‌ی جواب تولیدشده توسط الگوریتم تقریبی بر روی I را با $\mathrm{ALG}(I)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱ *یک الگوریتم تقریبی برای مسئله‌ی P دارای ضریب تقریب α است اگر برای هر نمونه‌ی I از P:*

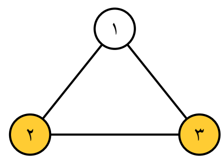
$$\max\left\{\frac{ALG(I)}{OPT(I)},\frac{OPT(I)}{ALG(I)}\right\}\leqslant\alpha.$$

یک الگوریتم تقریبی با ضریب تقریب α، یک *الگوریتمα-تقریبی* نامیده می‌شود. نمونه‌هایی از ضرایب تقریب متداول برای مسائل بهینه‌سازی در جدول ۱ آمده است.

۲ پوشش رأسی

به عنوان اولین مسئله از مجموعه مسائل بهینه‌سازی، در این بخش به بررسی مسئله‌ی پوشش رأسی می‌پرازیم. این مسئله به صورت زیر تعریف می‌شود.

[1] feasible
[2] non-deterministic



شکل ۱: گراف G و یک پوشش رأسی برای آن که با رأس‌های رنگی نشان داده شده‌اند.

مسئله‌ی ۱ (پوشش رأسی) *گراف $G = (V, E)$ و تابع هزینه‌ی $w : V \to \mathbb{R}^+$ داده شده است. زیرمجموعه‌ی $C \subseteq V$ با حداقل هزینه را بیابید طوری که به ازای هر یال $uv \in E$، حداقل یکی ازدو رأس u و v در مجموعه‌ی C باشد.*

مسئله‌ی پوشش رأسی در حالت غیروزن‌دار، یعنی وقتی همه‌ی رأس‌ها دارای وزن واحد هستند، مسئله‌ی *پوشش رأسی اندازه‌ای*[۳] نامیده می‌شود. شکل ۱ نمونه‌ای از یک پوشش رأسی را نشان می‌دهد.

در زیر یک الگوریتم حریصانه برای مسئله‌ی پوشش رأسی غیروزن‌دار ارائه شده است.

الگوریتم ۱ پوشش رأسی حریصانه

قرار بده $C = \emptyset$
تا وقتی E تهی نیست:
    یال دل‌خواه $uv \in E$ را انتخاب کن
    $C \leftarrow C \cup \{u, v\}$
    تمام یال‌های واقع بر u یا v را از E حذف کن
C را برگردان

به سادگی می‌توان مشاهده نمود که خروجی الگوریتم ۱ یک پوشش رأسی است. در ادامه نشان خواهیم داد که اندازه‌ی پوشش رأسی تولیدشده توسط الگوریتم حداکثر دو برابر اندازه‌ی پوشش رأسی کمینه است.

قضیه‌ی ۱ $\mathrm{OPT} \leqslant |C| \leqslant ۲\mathrm{OPT}$.

اثبات. از آن جایی که C یک پوشش رأسی است، نامساوی سمت چپ بدیهی است. فرض کنبد M مجموعه‌ی تمام یال‌هایی باشد که توسط الگوریتم انتخاب شده‌اند. از آن جایی که هیچ دو یالی در M دارای رأس مشترک نیستند، هر پوشش رأسی (از جمله پوشش رأسی بهینه) باید حداقل یک رأس از هر یال موجود در M را بپوشاند. بنابراین

$$|M| \leqslant \mathrm{OPT}.$$

از طرفی می‌دانیم $|C| = ۲|M|$. در نتیجه

$$|C| = ۲|M| \leqslant ۲\mathrm{OPT}.$$

□

بنا بر قضیه‌ی ۱، الگوریتم ۱ یک الگوریتم ۲-تقریبی است. مثال زیر نشان می‌دهد که ضریب تقریب ۲ برای این الگوریتم محکم است. گراف دو بخشی کامل $K_{n,n}$ را در نظر بگیرید. پوشش رأسی تولیدشده توسط الگوریتم حریصانه بر روی این گراف شامل تمامی $۲n$ رأس گراف خواهد بود، در صورتی که پوشش رأسی بهینه شامل نصف این تعداد، یعنی n رأس است.

[۳] Cardinality Vertex Cover

۳ ملاحظات

بهترین الگوریتم موجود برای پوشش رأسی دارای ضریب تقریب $۲-\Theta(\frac{1}{\sqrt{n}})$ است که توسط Karakostas در سال ۲۰۰۴ ارائه شده است [۱]. ثابت شده است که با فرض $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$، هیچ الگوریتم تقریبی برای این مسئله با ضریب تقریب بهتر از $۱/۳۶ \sim ۲۱ - ۱۰\sqrt{۵}$ وجود ندارد [۲]. با فرض قوی‌تر «حدس بازی‌های یکتا»[۴] کران پایین $۲ - \epsilon$ برای ضریب تقریب این مسئله قابل اثبات است [۳].

مراجع

[1] G. Karakostas. A better approximation ratio for the vertex cover problem. *ACM Transactions on Algorithms*, 5(4), 2009.

[2] I. Dinur, S. Safra. The importance of being biased. In *Proc. 34th ACM Sympos. Theory Comput.*, pages 33–42, 2002.

[3] S. Khot, O. Regev. Vertex cover might be hard to approximate to within $2-\varepsilon$. *Journal of Computer and System Sciences*, 74 (3): 335–349, 2007.

[۴] unique games conjecture