یکی از انتگرال هایی ک در کوانتوم مکانیک خیلی به آن بر می خوریم انتگرال های گاوسین هست ک در این چند سیاهی قصد دارم اون و اثباتش کنم

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx$$

انتگرال رو به توان دو می رسونیم :

$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx\right)^2$$

حالا این جوری می تونیم از مختصات قطبی استفاده کنیم : "*قبلش این کارها رو انجام می دیم*"

$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha y^2} dy\right)$$

$$I^2 = \iint_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha(x^2+y^2)} dxdy$$

حالا با کمک این متغییرها " متغییر های قطبی " مسئله رو می بریم تو دستگاه مختصات قطبی :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \quad and \quad dxdy = rdrd\theta$$

$$I^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\alpha r^2} rdrd\theta$$

انتگرال ها چون متغییر هاش بهم وابسته نیستن می تونیم جدا جدا حساب کنیم :

$$I^2=\left(\int_0^{\infty} re^{-\alpha r^2}dr\right)\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)$$

برای انتگرال اول می تونیم بنویسیم: " تغییر متغییر برای حل راحت انتگرال "

$$if \quad -\alpha r^2=u \quad \xrightarrow{\text{دیفرانسیل می گیریم}} \quad -\alpha 2rdr=du \quad \rightarrow \quad dr=\frac{du}{-2\alpha r}$$

فقط انتگرال رو نامعین حساب می کنیم ,خب حالا جای گزین و این داستان ها می کنیم

و بعدش تغییر متغییر رو اعمال می کنیم و بعدش حدود رو جای گزین می کنیم.

$$\int re^u\frac{du}{-2\alpha r} \quad \rightarrow \quad \frac{-1}{2\alpha}\int e^u du=\frac{-1}{2\alpha}\ e^u$$

$$\frac{-1}{2\alpha}\ e^u \quad \xrightarrow{if \quad -\alpha r^2=u} \frac{-1}{2\alpha}\left(e^{-\alpha r^2}\right)\Big|_0^{\infty}=\frac{-1}{2\alpha}\left(e^{-\infty}-e^0\right)=\frac{1}{2\alpha}$$

پس انتگرال های داخل پرانتز ها می شن :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^{\infty} re^{-\alpha r^2}dr=\frac{1}{2\alpha} \\ \displaystyle\int_0^{2\pi} d\theta=2\pi \end{cases}$$

حالا جای گزین می کنیم :

$$I^2=\frac{1}{2\alpha}\times 2\pi=\frac{\pi}{\alpha}$$

حالا انتگرال رو به توان دو رسونده بودیم و ازش جذر می گریم و بعد کلی داستان جواب انتگرال بالا می شه :

$$\boxed{I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}}$$

- تمرین : انتگرال های زیر رو سعی کنید حساب کنید ؟!

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha}{\beta}x^2} dx$$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\alpha x^2} dx$$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx$$

جواب تشریحی هفته ی بعد ....