توابع هذلولوی :

$$Ch\,x = \cosh x := \frac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}\right)$$

$$Sh\,x = \sinh x := \frac{1}{2}\left(e^{x}-e^{-x}\right)$$

مثال: مقدار $\sinh(0)$ و $\cosh(0)$ را بیابید.

حل:

$$\sinh(0) = \frac{1}{2}\left(e^{0}-e^{-0}\right) = \frac{1}{2}(1-1) = 0$$

$$\cosh(0) = \frac{1}{2}\left(e^{0}+e^{-0}\right) = \frac{1}{2}(1+1) = 1$$

مثال: حاصل عبارت زیر را به ساده‌ترین صورت بیان کنید.

$$\cosh^2(\ln x) + \sinh^2(\ln x) = ?$$

حل:

$$= \left[\frac{1}{2}\left(e^{\ln x} + \underbrace{e^{-\ln x}}_{e^{\ln x^{-1}}}\right)\right]^2 + \left[\frac{1}{2}\left(e^{\ln x} - \underbrace{e^{-\ln x}}_{e^{\ln x^{-1}}}\right)\right]^2$$

عمل دو تابع معکوس هم روی یکدیگر

$$= \frac{1}{4}\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(x-\frac{1}{x}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}\left(2x^2 + 2\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{2}\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)$$

فاکتور

تمرین: مقدار a را طوری بیابید که $\cosh a = 2$.

برخی خواص :

الف: $D_{\text{هردو}} = \mathbb{R}$, $R_{\sinh} = \mathbb{R}$, $R_{\cosh} = [1, \infty)$

ب: $(\sinh x)' = \cosh x$

$(\cosh x)' = \sinh x$

ج: $\sinh x$ تابعی فرد است , $\cosh x$ تابعی زوج است ولذا:

$\sinh(-x) = -\sinh x$ & $\cosh(-x) = \cosh x$

دلیل یک مورد:

$$\cosh(-x) = \frac{1}{2}\left(e^{-x} + e^{-(-x)}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{-x} + e^{x}\right) = \cosh x$$

د: نمودار آنها:

* $\sinh(0) = 0$ & $\cosh(0) = 1$
* $(\sinh x)' = \cosh x \gneq 0 \Rightarrow$ صعودی

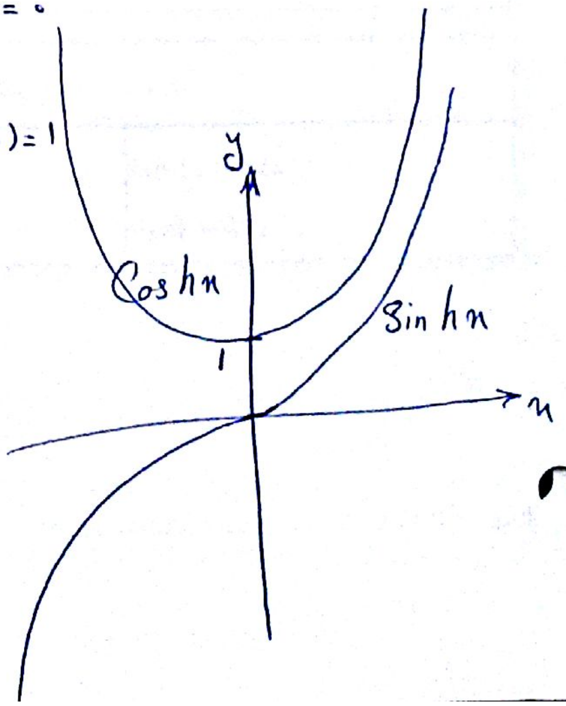
$(\cosh x)' = \sinh x = 0 \Rightarrow x = 0$ $\quad (e^{x} - e^{-x} = 0 \xrightarrow{\times e^{x}} e^{2x} - 1 = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0)$

$\Rightarrow$ تعیین علامت

x		0	
$\sinh x$	$-$	0	$+$
	$\searrow$	min	$\nearrow$

* $\lim_{x \to \pm\infty} \sinh x = \pm\infty$, $\lim_{x \to 0} \sinh x = \sinh(0) = 0$

$\lim_{x \to \pm\infty} \cosh x = +\infty$, $\lim_{x \to 0} \cosh x = \cosh(0) = 1$



* بررسی مشتق دوم و جهت تقعر به عهده دانشجو

برخی اتحادهای جالب هذلولوی :

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$$

$$\sinh(2x) = 2 \sinh x \cosh x$$

$$\cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$

سایر توابع هذلولوی :

$$\operatorname{tgh} x := \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$$

$$\operatorname{Cotgh} x := \frac{\cosh x}{\sinh x} \quad \& \quad \operatorname{sech} x := \frac{1}{\cosh x} \quad \& \quad \operatorname{Csch} x := \frac{1}{\sinh x}$$

مشتقات سایر توابع هذلولوی :

$$(\operatorname{tgh} x)' = \operatorname{sech}^2 x$$

$$(\operatorname{Cotgh} x)' = -\operatorname{csch}^2 x$$

$$(\operatorname{sech} x)' = -\operatorname{sech} x \operatorname{tgh} x$$

$$(\operatorname{csch} x)' = -\operatorname{csch} x \operatorname{Cotgh} x$$

مثال : حد زیر را محاسبه نمایید.

$$\lim_{x \to 0^+} x^{\sinh x}$$

حل :

$$\overset{0^0}{=} \lim_{x \to 0^+} e^{\sinh x \, Ln\, x} = e^{\lim\limits_{x \to 0^+} \sinh x \, Ln\, x}$$

$$\overset{0 \times \infty}{=} e^{\lim \frac{Ln\, x}{csch\, x}} \underset{H}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} e^{\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-csch\, x . Ctgh\, x}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x \to 0^+} - \frac{\sinh^2 x}{x \cosh x}} \underset{H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} e^{\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{-2\sinh x \cosh x}{\cosh x + x \sinh x}}$$

$$= e^0 = 1$$