

به نام خدا

نقشه برداری

ژئودتیک

دوره کارشناسی

مهندسی عمران - نقشه برداری

گرد آوری و ترجمه : بهزاد به نبیان

**مقدمه:**

به مجموعه روشهایی که برای تعیین و ارزیابی کمیت هایی که بطور مستقیم و یا غیر مستقیم برای بیان شکل هندسی و یا میدان جاذبه زمین بکار گرفته می شوند، روش ژئودتیک<sup>۱</sup> گفته میشود. هر پروژه ای باید براساس کیفیت خواسته شده از کمیت های مورد نظر (کمیت های مجهول) طرح ریزی گردد. این طرح ریزی شامل تعیین نوع و مقدار اطلاعات (یا مشاهدات) مورد نیاز برای جمع آوری و همچنین تعیین دقت آنها می باشد. اطلاعات جمع آوری شده مورد ارزیابی قرار می گیرند و دقت آنها کنترل می شود تا در محدوده دلخواه باشد بنابراین مشاهدات کم دقت حذف میشوند. پس از بررسی دقیق اولیه، این اطلاعات پردازش می شوند و مقادیر کمیت های مجهول بدست می آیند و در نهایت نتایج بدست آمده مورد ارزیابی قرار می گیرند. با در نظر گرفتن موارد فوق مراحل مختلف روش ژئودتیک به شرح ذیل دسته بندی می گردد:

۱. نخست کمیت هایی که مقادیر آنها باید تعیین شود (پارامترهای مجهول) مشخص می شوند بعد دقت دلخواه برای آنها در نظر گرفته می شود. البته برای اینکار روش خاصی موجود نیست باید بر اساس شناختی که از پروژه وجود دارد، انجام گیرد.
۲. بعلا اینکه نمیتوان پارامترهای مجهول را مستقیماً اندازه گیری کرد، لازم است روابط آنها را با کمیت هایی که مستقیماً مورد اندازه گیری هستند (مشاهدات) بدانیم. بنابراین مرحله دوم عبارت از فرموله کردن روابط فوق بصورت توابع ریاضی است. این توابع (روابط) را مدل ریاضی می نامیم که اساس تعیین پارامترهای مجهول است.
۳. قبل از انجام اندازه گیریهای لازم، باید دقت آنها مشخص شده باشد. واضح است که دقت اندازه گیریها (دقت مشاهدات) مبتنی بر دقت خواسته شده برای پارامترهای مجهول و همچنین روابط موجود در مدل ریاضی می باشد. روش برآورد دقت مشاهدات را بطوری که دقت خواسته شده برای پارامترهای مجهول از طریق مدل ریاضی مربوطه تعیین گردد را تحلیل اولیه<sup>۲</sup> می نامند. در تحلیل اولیه روش اندازه گیری نیز مشخص می شود.
۴. اندازه گیری های لازم انجام شده و صحت اندازه گیری مشاهدات (تا حد امکان) با استفاده از روشهای کنترل مقدماتی و آزمونهای پیش از سرشکنی تحقیق می شود سپس مشاهدات بدست آمده مورد آزمایش قرار می گیرند تا معلوم شود که دارای دقت تعیین شده در مرحله تحلیل اولیه هستند یا خیر؟ اگر مشاهدات دارای دقت لازم نباشند باید تکرار شوند.
۵. مشاهدات ارزیابی شده به مدل معرفی می شوند از طریق حل مدل ریاضی پارامترهای مجهول و دقت آنها تعیین می شوند (سرشکنی).
۶. در این مرحله کامل بودن مدل ریاضی مورد ارزیابی قرار می گیرد و همچنین بعد از محاسبات سرشکنی صحت مشاهدات مورد آزمایش قرار می گیرد (آزمون های پس از سرشکنی).
۷. مرحله آخر عبارت از ارزیابی پارامترهای محاسبه شده می باشد و دقت و صحت مقادیر بدست آمده برای کمیت های مجهول تعیین می گردد.

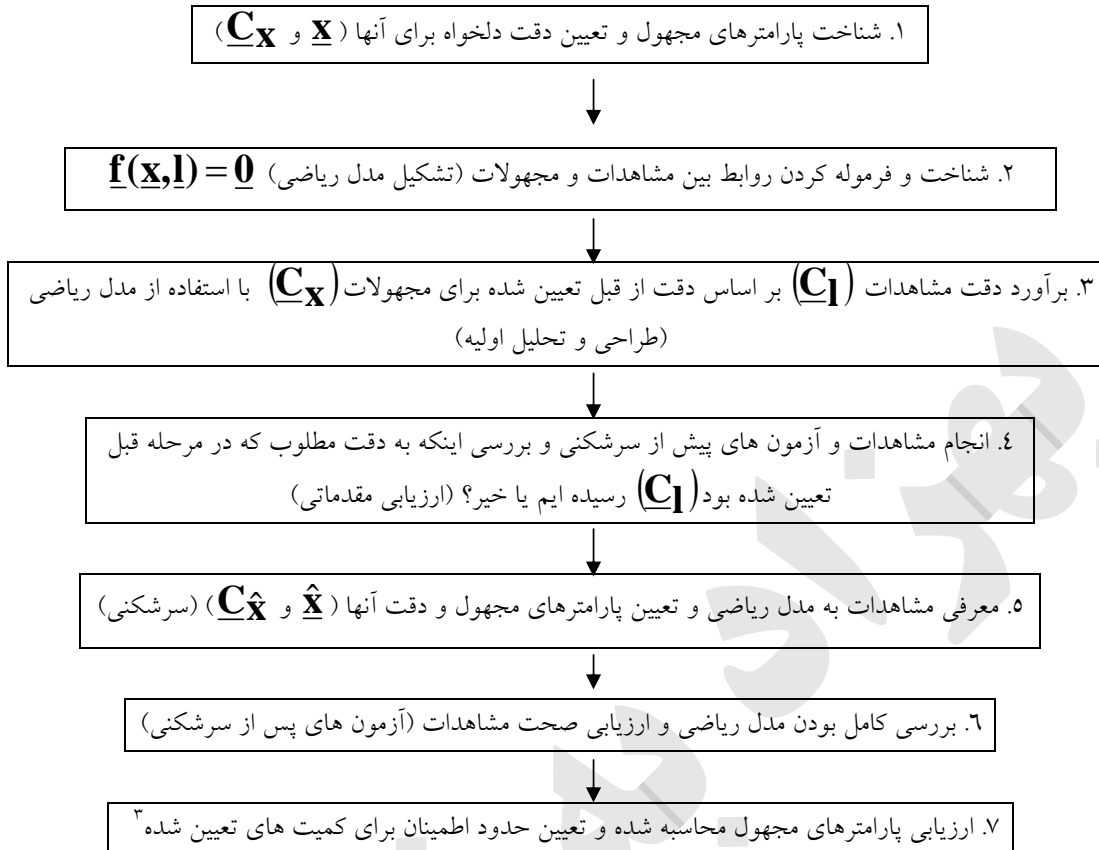
---

۱. geodetic methodology

۲. pre- analysis

این مراحل را می توان با استفاده از شکل ذیل بطور خلاصه نشان داد:

### مراحل یک روش ژئودتیک



در درس نقشه برداری ژئودتیک بیشترین تمرکز بر روی تجزیه و تحلیل خطاها پیش از سرشکنی و همچنین پس از سرشکنی می باشد و هدف ما بیشتر بر روی شناخت خطاها، شناخت عوامل بوجود آورنده خطاها و اتخاذ روشهای مطمئن برای کنترل و محدود نگه داشتن خطاها به منظور دستیابی به دقتها و اهداف از پیش تعیین شده می باشد. با در نظر گرفتن این موارد برنامه ریزی مطالب نقشه برداری ژئودتیک در هفت فصل انجام گردیده است. در فصل اول به بحث در مورد تحلیل خطاهای موجود در مشاهدات، پیش از سرشکنی می پردازیم و کمیت هایی را که در این ارتباط مورد اهمیت قرار دارند را بطور خلاصه بررسی می کنیم که مطالب این فصل عمدتاً به منظور یادآوری مطالبی از دروس تئوری خطاها و سرشکنی می باشد که به عنوان مباحث پایه در فصول بعدی این درس فرض شده اند. فصل دوم نیز به طور خلاصه به بحث در مورد قانون انتشار خطاها و تجزیه و تحلیل اولیه بر این مبنا اختصاص یافته است. در ادامه در فصول سوم، چهارم و پنجم به بررسی خطاها، دقت و همچنین تجزیه و تحلیل سیستم های اندازه گیری اهم مشاهدات مورد استفاده در نقشه برداری یعنی زاویه، طول و اختلاف ارتفاع می پردازیم. مباحثی که در این فصول مطرح می گردند با استفاده از دیدگاه فنی نقشه برداری و مطالعه برخی عوامل فیزیکی و دستگاهی به شناخت و بررسی خطاهائی می پردازند که معمولاً در اندازه گیریها با آنها سروکار داریم روشهای برخورد با این خطاها نیز از مطالب اصلی مطرح شده در این فصول می باشد. در فصل ۶ ابتدا مروری بر مسئله تحلیل شبکه های کنترل خواهیم داشت و سپس به بحث و بررسی پیرامون طراحی و شناخت معیارهای ارزیابی شبکه قبل و بعد از انجام مشاهدات و سرشکنی خواهیم پرداخت و سرانجام در فصل ۷ مسائل جدید در طراحی و تحلیل شبکه های کنترل تحت عنوان تحلیل استرین<sup>۴</sup> مطرح می گردد.

۳. post- analysis

۴. strain analysis

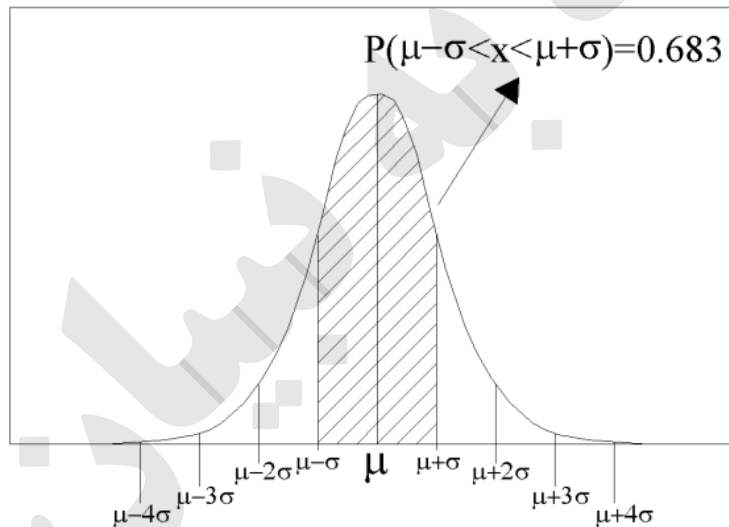
## فصل اول

## ۱. مفاهیمی از تئوری خطاها :

فرایند اندازه گیری<sup>۱</sup> از منابع خطای متعدد محیطی، انسانی و دستگاهی تاثیر می پذیرد. خطاها را از نظر نحوه حذف و یا کاهش آنها می توان به سه دسته کلی تقسیم کرد: خطاهای اتفاقی، خطاهای سیستماتیک و اشتباهات.

۱.۱. خطاهای اتفاقی<sup>۲</sup>

تکرار اندازه گیری یک کمیت فیزیکی (مثلا طول، زاویه، اختلاف ارتفاع و غیره) در هر مرتبه یک مقدار یکسان بدست نمی دهد و این به دلیل حضور خطاهای اتفاقی در اندازه گیریهاست. این خطاها اغلب مقدار کوچکی دارند و احتمال مثبت و منفی بودن آنها یکی است. خطاهای اتفاقی در طبیعت اندازه گیری پدیده هایی ذاتی هستند و هیچگاه نمی توان به طور کامل بر آنها غلبه نمود. از دیدگاه آماری، خطای اتفاقی خطای نمونه گیری از یک جامعه آماری با اعضای نامتناهیست. متغیرها (یا مشاهداتی) را که آمیخته به خطاهای اتفاقی هستند را متغیرهای تصادفی می نامیم. اگر کمیتی چندین بار و حتی المقدور تحت شرایط یکسان اندازه گیری بشود آنگاه آن اندازه گیری یک نمونه از متغیر تصادفی را تشکیل خواهد داد. اگر فرض کنیم که متغیر یک توزیع احتمال معینی داشته باشد نمونه نیز از همان توزیع پیروی خواهد کرد. تابع توزیع معینی که اینجا مورد استفاده قرار میگیرد، توزیع نرمال خواهد بود زیرا که مشاهدات نقشه برداری از این توزیع بیش از هر توزیع دیگری پیروی می کنند. تابع توزیع یک متغیر تصادفی نرمال، با دو پارامتر امید ریاضی  $\mu_x$  و واریانس  $\sigma_x^2$  بیان میشود. بررسیهای آماری نشان می دهد که حدود  $68.3\%$  از مشاهدات در فاصله  $\mu - \sigma$  و  $\mu + \sigma$  واقع می باشند به عبارت دیگر  $31.7\%$  از مشاهدات در خارج از این فاصله خواهند بود (شکل ۱-۱).



شکل ۱-۱. تابع چگالی احتمال نرمال

جدول ۱-۱ نشاندهنده توزیع مشاهدات در فواصل مختلف نسبت به امید ریاضی برای تابع احتمال نرمال می باشد.

حدود مقدار	$\mu \pm 4\sigma$	$\mu \pm 3.29\sigma$	$\mu \pm 3\sigma$	$\mu \pm 2.58\sigma$	$\mu \pm 2\sigma$	$\mu \pm 1.96\sigma$	$\mu \pm \sigma$	$\mu \pm 0.67\sigma$	احتمال (%)
	۹۹.۹۹۴	۹۹.۹	۹۹.۷۳	۹۹	۹۵.۴	۹۵	۶۸.۳	۵۰	

جدول ۱-۱. در صد احتمال حضور یک مشاهده درون فواصل مختلف از مرکز توزیع نرمال

۱. measurement process

۲. random (or accidental) errors

از آنجائی که در نقشه برداری برای تعیین یک مجهول چندین مشاهده صورت می گیرد به جای یک مشاهده، برداری از مشاهدات داریم که تابع توزیع آنها نرمال چند بعدی است. در تابع توزیع نرمال چند بعدی پارامترسومی بنام کووریانس ( $\sigma_{xy}$ ) نیز مطرح می گردد که معیاری برای سنجش وابستگی مشاهدات است (کووریانس دومشاهده مستقل مساوی صفر است). در عمل امکان دسترسی مستقیم به پارامترهای جامعه نرمال مشاهدات نقشه برداری ( $\mu, \sigma^2$ ) وجود ندارد زیرا که با نمونه گیریهای کوچک سروکار داریم. تنها کاری که میتوان انجام داد اینست که آنها را برآورد کنیم. دو برآورد کننده ناریب<sup>۳</sup> از ( $\mu, \sigma^2$ ) میانگین نمونه  $\bar{X}$  و وریانس نمونه  $S^2$  میباشد که توسط روابط ذیل تعریف می شوند:

$$\bar{x} = \left(\frac{1}{n}\right) \sum_{i=1}^n x_i, \quad s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1} \quad (1-1)$$

( $x_1, x_2, \dots, x_n$  عناصر نمونه هستند).

### ۲.۱. خطاهای سیستماتیک<sup>۴</sup>

مشخصه اصلی خطاهای سیستماتیک اثر یکسان آنها بر روی مشاهدات تکرار شونده است و در نتیجه تکرار مشاهدات نمیتواند به تشخیص وجود آنها کمکی کند. این خطاها از ضعف مدل ریاضی ناشی می شوند. مثالهای زیر نمونه هائی از خطاهای سیستماتیک هستند:

- در اندازه گیری طول با متر، خطای تصحیحات مختلف نظیر درجه حرارت، کشش، شنت<sup>۵</sup> و غیره
  - اثر انکسار جوی بر روی مشاهدات گوناگون (اعم از طول یا زاویه)
  - خطای مدرج کردن لمب تئودولیت
  - تفاوت فرکانس دستگاه طولیاب الکترونیکی با فرکانس اسمی آن
- راههائی که برای حذف یا کاهش خطاهای سیستماتیک وجود دارند، عبارتند از:
- الف- کالیبره نمودن دقیق دستگاهها
- ب- اتخاذ روشهای مشاهداتی خاص (مانند قرائت زاویه به صورت کوپل و مشاهده یک زاویه در ساعات و شرایط محیطی مختلف)
- ج- در صورت شناخته شده بودن خطای سیستماتیک با فرمول بندی ریاضی آن می توان مشاهدات را پیش از انجام سرشکنی تصحیح کرد و یا می توان با افزودن مجهولات اضافی در مدل ریاضی خطاهای سیستماتیک را در سرشکنی مدلسازی کرد. قابل ذکر است که خطاهای سیستماتیک بر روی امید ریاضی مشاهدات ( $\mu$ ) تاثیر گذاشته و بر وریانس (یا دقت) مشاهدات بی تاثیرند. در فصل بعد مدلسازی ریاضی خطای سیستماتیک را بررسی خواهیم نمود.

### ۳.۱. اشتباهات<sup>۶</sup>

اشتباهات معمولاً خطاهای بزرگی هستند که از ضعف ذاتی حواس انسان و یا بی دقتی ناشی می شوند. مثالهایی از اشتباهات عبارتند از: اشتباه نوشتن عدد قرائت شده از دستگاه طولیاب و یا زاویه یاب، ادامه دادن قرائت هنگامی که دستگاه کاملاً از تراز خارج شده و یا به آن ضربه خورده باشد و مواردی از این دست ...

۳. unbiased estimators

۴. systematic errors (or effects or components)

۵. correction for sag

۶. blunders, mistakes, gross errors

می توان از بروز اشتباهات بارز با انجام مشاهدات با حواس جمع جلوگیری کرد. راههای کاهش اشتباهات به شرح زیر می باشند:

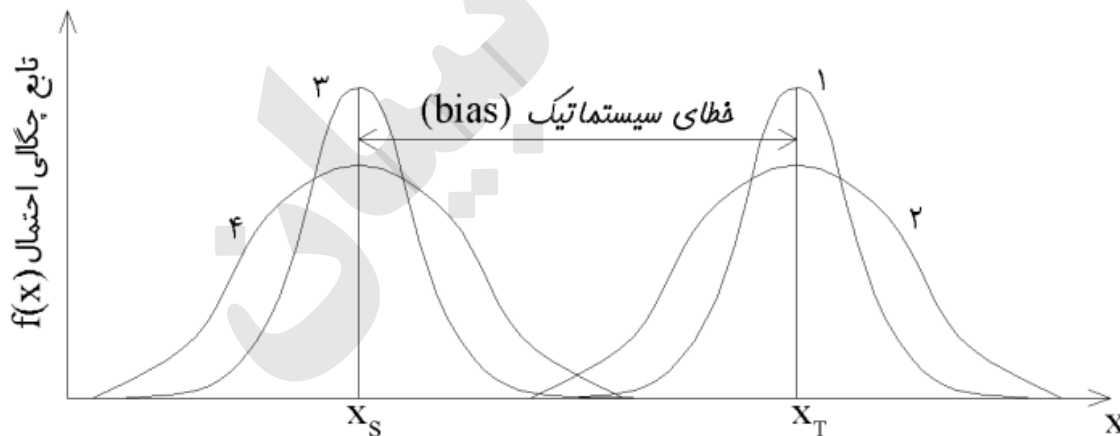
۱- بکار گیری روشهای مشاهداتی مناسب

۲- کنترل مشاهدات بصورت مستقل

به عنوان یک اصل روش انجام مشاهدات باید به گونه ای باشد که حتی الامکان از بروز اشتباه در مشاهدات جلوگیری شود. با این وجود هیچگاه چنین تضمینی وجود ندارد که مطلقا اشتباه در مشاهدات وجود نداشته باشد بنابراین یکی از بخشهای مهم سرشکنی به روش کمترین مربعات کشف و حذف اشتباهات باقیمانده در مشاهدات است.

۱. ۴. دقت<sup>۷</sup> و صحت<sup>۸</sup>

**دقت** به معنای نزدیکی مشاهدات تکرار شونده (یا کمیت های استخراج شده از مجموعه مشاهدات تکرار شونده) به میانگین نمونه است. دقت معیاری برای بیان قابلیت تکرار شونده مشاهدات است و بنابراین فقط خطاهای اتفاقی را نشان می دهد. اندازه دقت را با کمیت های مختلفی نشان می دهند از جمله جذر میانگین مربعی<sup>۹</sup> (RMS) که این همان انحراف معیار<sup>۱۰</sup> (جذر وریانس) نیز می باشد. برای کمیت هایی که مستقیما قابل اندازه گیری نیستند (پارامترهای مجهول) نیز دقت با معیار های مختلفی بیان می شود که راجع به آن در فصل آخر مفصلا بحث خواهد شد. **صحت** به معنای میزان نزدیکی یک مشاهده یا یک کمیت برآورد شده از مشاهدات به مقدار واقعی ولی ناشناخته آن می باشد، زیرا که مقدار واقعی ناشناخته است اما تنها با انجام فرآیند مشاهدات میتوان آنرا برآورد کرد. بنا بر این تعریف صحت یک کمیت نیز همچنین مجهول است تنها کاری که می توانیم انجام بدهیم اینست که صحت یک کمیت برآورد شده (مانند میانگین نمونه) را تخمین بزنیم. وجود خطاهای سیستماتیک و اتفاقی هر دو باعث کاهش صحت می شوند حال آنکه وجود خطای سیستماتیک بر روی دقت بی تاثیر است. رسیدن به تخمینی دقیق از صحت نیازمند تکرار مشاهدات با روشها و دستگاههای مختلف است که این البته به شرط حذف اشتباه می باشد. مثال (۱-۱) \_ شکل (۲-۱) چهار تابع چگالی احتمال که چهار مرحله کاملا متمایز مشاهدات را از یک کمیت یکسان ارائه میکنند، نشان می دهد:



شکل ۲-۱: مفهوم دقت و صحت در ارتباط با چهار وهله مشاهده از یک کمیت یکسان

۷. precision

۸. accuracy

۹. root mean square (r.m.s)

۱۰. standard deviation

منحنی های ۱ و ۲ نسبت به مقدار واقعی کمیت یعنی  $X_T$  متقارن هستند. علیرغم اینکه اشکال این دو منحنی کاملاً متفاوت هستند، هر دو اندازه گیریها صحت بالایی دارند زیرا که مقدار میانگین نمونه به مقدار واقعی بسیار نزدیک است. مشاهدات مرحله ۱ نزدیک به میانگین مجتمع شده اند ولی مشاهدات مرحله ۲ گستردگی بیشتری حول میانگین دارند. از نظر آماری، در مرحله ۱ مشاهداتی که انحراف بیشتری از مقدار میانگین دارند دارای فراوانی نسبی کوچکتری نسبت به مشاهدات مرحله ۲ هستند بدین جهت مشاهدات مرحله ۱ از مرحله ۲ دقیق تر میباشد. منحنی های ۳ و ۴ نسبت به میانگین نمونه خودشان یعنی  $X_S$  متقارن هستند ولی مشاهده می شود که مقدار  $X_S$  با  $X_T$  متفاوت است و نسبت به آن دارای انحراف زیادی می باشد. هر دو مجموعه مشاهدات ۳ و ۴ صحت پائینی دارند ولی دقت مرحله ۳ از مرحله ۴ بیشتر است. اختلاف  $X_T - X_S$  توسط یک خطای سیستماتیک بوجود آمده است و همانطور که مشاهده می شود افزایش دادن تعداد مشاهدات این اختلاف را کاهش نخواهد داد.

### ۱.۵. قابلیت اطمینان<sup>۱۱</sup>

قابلیت اطمینان، بیانگر توان روش اندازه گیری و محاسبه در مشخص ساختن و حذف اشتباهات احتمالی است. قابلیت اطمینان به قابل کنترل بودن مشاهدات اشاره دارد و آن عبارتست از قدرت تشخیص و ردیابی اشتباهات و برآورد نمودن اثراتی است که اشتباهات تشخیص داده نشده، ممکن است روی جواب داشته باشند. مشاهدات قابل اطمینان مشاهداتی هستند که احتمال وجود اشتباهات کشف نشده در آنها بسیار کم باشد. در باره نحوه برآورد نمودن این کمیت در فصل مربوط به طراحی بحث خواهیم نمود.

### ۱.۶. فاصله اطمینان<sup>۱۲</sup>

در بخش ۱.۱ به دو برآورد نقطه ای از پارامترهای جامعه آماری مشاهدات نقشه برداری  $(\mu, \sigma^2)$  اشاره کردیم که عبارت از میانگین و وریانس نمونه  $(\bar{X}, S^2)$  می باشند. اما بهترین برآورد نقطه ای هم گاهی ممکن است از پارامتر واقعی جامعه انحراف داشته باشد. همیشه این سوال مطرح است که چقدر این برآورد قابل اطمینان است؟ و همچنین اعتبار آن چقدر است؟ جواب مطلقاً برای این سوال ممکن نیست زیرا که نمونه گیری هیچگاه عین واقعیت جامعه را به ما نمی دهد و نمی تواند مطلقاً بیانگر توزیع احتمال واقعی جامعه و یا پارامترهای آن باشد تنها امکانی که وجود دارد اینست که احتمال وجود داشتن مقدار واقعی پارامترهای جامعه  $(\mu, \sigma^2)$  را در یک فاصله معین حول مقدار برآورد شده  $(\bar{X}, S^2)$  تعیین کنیم. اینجا در مقابل برآورد نقطه ای برآورد فاصله ای مطرح می گردد و آن عبارتست از تعیین دو ثابت  $C_1$  و  $C_2$  به طوریکه:

$$P(C_1 < \theta < C_2; \text{برای یک } t \text{ معلوم}) = 1 - \alpha \quad (2-1)$$

در فرمول فوق  $t$  یک برآوردگر<sup>۱۳</sup> از پارامترهای نامعلوم جامعه  $\theta$  می باشد (مثلاً  $t$  می تواند  $\bar{X}$  یا  $S^2$  باشد و  $\theta$  میتواند  $\mu$  یا  $\sigma^2$  باشد).  $\alpha$  سطح معنی دار<sup>۱۴</sup> بودن نامیده می شود و به  $1 - \alpha$  سطح اطمینان و یا ضریب اطمینان گفته می شود،  $C_1$  و  $C_2$  را حدود اطمینان می گویند.

۱۱. reliability

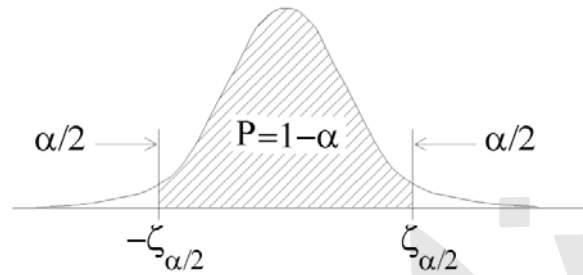
۱۲. confidence interval

۱۳. estimator

۱۴. significance level

## ۱.۶.۱. تعیین فاصله اطمینان برای میانگین

فرض اولیه ما این است که مشاهدات ما از توزیع نرمال پیروی می کنند. دو حالت وجود دارد یکی حالتی است که واریانس جامعه  $\sigma^2$  معلوم است و دیگر حالتی است که  $\sigma^2$  مجهول است و به جای آن از واریانس نمونه یعنی  $S^2$  استفاده میشود. در حالتی که  $\sigma^2$  معلوم است، تابع برآوردگر  $\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$  از توزیع نرمال استاندارد  $N(0,1)$  تبعیت میکند به عبارت دیگر  $\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ . از تابع توزیع نرمال مقدار  $\zeta_{\alpha/2}$  را به گونه ای انتخاب می کنیم که احتمال وجود متغییر تصادفی نرمال استاندارد در خارج از فاصله  $\alpha$  باشد (شکل ۳-۱).

شکل ۳-۱: فاصله اطمینان دو طرفه برای سطح معنی دار  $\alpha$ 

بنابر تعریف (رابطه ۲-۱) و با استفاده از خاصیت تقارن توزیع نرمال می توان نوشت:

$$P(-\zeta_{\alpha/2} < \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \zeta_{\alpha/2}) = 1 - \alpha \quad (3-1)$$

$$P(\bar{x} - \zeta_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + \zeta_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha \quad (4-1) \quad \text{و یا اینکه:}$$

برای  $\alpha = 0.05$  و  $\zeta_{\alpha/2} = 1.96$  می توانیم بنویسیم:

$$P(\bar{x} - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 0.95 \quad (5-1)$$

به فاصله اطمینان فوق، فاصله اطمینان ۹۵٪ گفته می شود. فاصله اطمینان ۹۹٪ را هم می توانیم به ازای  $\alpha = 0.01$  و  $\zeta_{\alpha/2} = 2.58$  تشکیل دهیم.

مثال (۲-۱) - فرض کنید فاصله ای ۱۲ بار اندازه گیری شده باشد با میانگین  $\bar{x} = 101.237$  m با فرض معلوم بودن واریانس توزیع نرمال  $\sigma^2 = 0.0025$  m<sup>2</sup>، فاصله اطمینان ۹۵٪ برای  $\mu$  بر اساس معادله فوق به شرح زیر است:

$$P(101.237 - 1.96 \sqrt{\frac{0.0025}{12}} < \mu < 101.237 + 1.96 \sqrt{\frac{0.0025}{12}}) = 0.95$$

$$P(101.2087 < \mu < 101.2653) = 0.95 \quad \text{و یا اینکه:}$$

و این بدان معناست که می توانیم بگوئیم به احتمال ۹۵٪ طول واقعی در فاصله ۲۰۹.۱۰۱ و ۲۶۵.۱۰۱ واقع شده است و البته این تنها به شرط عاری بودن مشاهدات از خطاهای سیستماتیک است. به همین صورت فاصله اطمینان ۹۹٪ برای کمیت مذکور عبارتست از:

$$P(101.1998 < \mu < 101.2742) = 0.99$$



در حالتی که وریانس جامعه مجهول است، تابع برآوردگر  $\frac{\bar{x} - \mu}{S/\sqrt{n}}$  از توزیع  $t$  استیودنت با  $n-1$  درجه آزادی تبعیت می کند به

عبارت دیگر  $\frac{\bar{x} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{\alpha/2, n-1}$  و مانند حالت قبل می توان نوشت :

$$P(\bar{x} - t_{\alpha/2, n-1} \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t_{\alpha/2, n-1} \frac{S}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha \quad (6-1)$$

به ازای  $\alpha = 0.05$  و  $n-1=11$  از جدول توزیع  $t$  مقدار  $t_{\alpha/2, 11} = 2.201$  بدست می آید. در مقایسه با حالت قبل فاصله اطمینان در اینجا عریض تر می شود. به عنوان یک اصل هرچه درجات آزادی افزایش می یابد (حجم نمونه بیشتر باشد) تفاوت بین مقادیر توزیع  $t$  و توزیع نرمال کاهش می یابد (بازه اطمینان کوچکتر می شود). برای مثال قبلی فاصله اطمینان ۹۵٪ به ازای  $S^2 = 0.0025m^2$  صورت زیر خواهد بود:

$$P(101.237 - 2.201\sqrt{\frac{0.0025}{12}} < \mu < 101.237 + 2.201\sqrt{\frac{0.0025}{12}}) = 0.95$$

$$P(101.2052 < \mu < 101.2688) = 0.95$$

#### ۱.۶.۲. تعیین فاصله اطمینان برای وریانس

فرض کنید یک نمونه تصادفی با وریانس  $S^2$  از یک جامعه نرمال با وریانس  $\sigma^2$  داشته باشیم، متغییر تصادفی  $\frac{mS^2}{\sigma^2}$  (وقتی که  $m$  تعداد درجات آزادی مورد استفاده برای محاسبه  $S^2$  است) دارای توزیع  $\chi^2$  با  $m$  درجه آزادی می باشد. برای سطح اطمینان  $1 - \alpha$  خواهیم داشت :

$$P(\chi_{1-\alpha/2, m}^2 < \frac{mS^2}{\sigma^2} < \chi_{\alpha/2, m}^2) = 1 - \alpha \quad (7-1)$$

$$P\left(\frac{mS^2}{\chi_{\alpha/2, m}^2} < \sigma^2 < \frac{mS^2}{\chi_{1-\alpha/2, m}^2}\right) = 1 - \alpha \quad (8-1)$$

مثال (۳-۱) در مثال (۲-۱) به ازای  $S^2 = 0.0025m^2$  و  $m=n-1=11$  و  $\alpha = 0.01$  خواهیم داشت :

$$P\left(\frac{(11)(0.0025)}{(26.76)} < \sigma^2 < \frac{(11)(0.0025)}{(2.60)}\right) = 0.99$$

$$P(0.0010 < \sigma^2 < 0.0106) = 0.99$$

برای فاصله اطمینان انحراف معیار می توانیم از جذر حدود بالا و پائین وریانس استفاده کنیم:

$$P(0.0321 < \sigma < 0.1028) = 0.99$$

#### ۱.۷. آزمون های آماری

نظریه تصمیم گیری<sup>۱۵</sup> (روشهای رسیدن از نمونه به جامعه) به دو دسته کلی تقسیم بندی می شود. یکی از آنها نظریه برآورد کردن (تئوری تخمین) می باشد و دیگری آزمون فرض ها<sup>۱۶</sup> است. در نظریه برآورد سعی میشود که پارامترهای مجهول جامعه با برآورد گره های نقطه ای مانند میانگین و وریانس تخمین زده شوند یا اینکه میتوان یک برآورد فاصله ای برای پارامترهای جامعه

۱۵. decision theorem

۱۶. hypothesis testing

در نظر گرفت. آزمون هائی را که در این قسمت بررسی می کنیم برای تشخیص وجود خطای سیستماتیک در یک مشاهده، مستقل از مشاهدات دیگر (فارغ از مدل ریاضی) و همچنین تعیین دقت یک دستگاه اندازه گیری کاربرد دارند. قبل از پرداختن به این آزمون ها چند تعریف آماری را مرور می کنیم:

-آماره<sup>۱۷</sup>: به یک متغیر تصادفی خاص اطلاق می شود که خود تابعی از یک یا چند متغیر تصادفی دیگر است و بستگی به هیچیک از پارامترهای مجهول جامعه ندارد.

-فرض آماری: فرض یا بیان یا حدس درباره توزیع جامعه یا پارامترهای جامعه را فرض آماری می نامیم. درست بودن فرض را باید از نتایج بدست آمده از نمونه گیری بررسی نمود. اگر بنا بر فرض پارامترهای جامعه  $(\theta_1, \theta_2)$  دارای مقادیر مشخصی نظیر  $(\theta_1^0, \theta_2^0)$  باشند، آنرا فرض صفر<sup>۱۸</sup> نامیده و با  $H_0$  نشان می دهند. در برابر هر فرض صفر ممکن است تعداد زیادی مفروضات دیگر باشد که آنها را فرض مقابل<sup>۱۹</sup> نامیده و با  $H_1$  نشان می دهند. سنجش صحت هر فرض آماری نیازمند برقراری آزمون<sup>۲۰</sup> می باشد، ماحصل آزمون آماری دو نتیجه است: قبول فرض  $H_0$  و یا رد  $H_0$ .

- خطاهای نوع اول و دوم: رد فرض  $H_0$  وقتی که  $H_0$  در واقع درست باشد را خطای نوع اول می نامند. احتمال ارتکاب خطای نوع اول را به  $\alpha$  نمایش می دهند و به آن سطح معنی دار بودن (یا سطح اعتبار) آزمون می گویند. با این مفهوم در بحث تعیین فاصله اطمینان هم برخورد کردیم که در آنجا، احتمال اینکه مقدار واقعی کمیت خارج از فاصله مذکور باشد را به همین شکل بیان نمودیم. در مقابل خطای نوع اول، خطای نوع دوم را داریم که به معنی قبول فرض  $H_0$  است هنگامی که  $H_1$  در واقع حقیقت نداشته باشد. احتمال ارتکاب خطای دوم را به  $\beta$  نمایش می دهیم و  $1 - \beta$  را توان آزمون<sup>۲۱</sup> می گویند. جدول (۱-۲) مفاهیم فوق را بطور خلاصه نشان می دهد.

تصمیم / واقعیت	قبول فرض $H_0$	رد فرض $H_0$
$H_0$ حقیقت دارد	تصمیم گیری صحیح $P=1-\alpha$	خطای نوع اول $P=\alpha$
$H_1$ حقیقت دارد $H_0$ حقیقت ندارد	خطای نوع دوم $P=\beta$	تصمیم گیری صحیح $P=1-\beta$

جدول شماره ۱-۲: آزمون فرض  $H_0$  و خطاهای نوع اول و دوم

طبیعی است که در مقابل هر فرض صفر می توان بینهایت فرض مقابل در نظر گرفت که در میان آنها قویترین آزمون، آزمونی است که احتمال خطای نوع دوم آن کمترین باشد و این فقط وقتی اتفاق می افتد که فرض مقابل در تضاد مطلق با فرض صفر باشد

۱۷. statistic

۱۸. null hypothesis

۱۹. alternative hypothesis

۲۰. testing

۲۱. power of test

بگونه ای که بتوان با رد فرض صفر، فرض مقابل را پذیرفت و یا با قبول فرض صفر، فرض مقابل را رد کرد. به عنوان مثال اگر فرض های  $H_0$  و  $H_1$  به صورتهای زیر باشند:

$$(1) \begin{cases} H_0 : \mu = 57.326 \\ H_1 : \mu < 57.326 \end{cases}$$

در این حالت رد فرض  $H_0$  به معنای پذیرش  $H_1$  نیست زیرا که ممکن است  $\mu > 57.326$  و در اینجا احتمال ارتکاب خطای نوع دوم زیاد است ولی در حالت ذیل :

$$(2) \begin{cases} H_0 : \mu = 57.326 \\ H_1 : \mu \neq 57.326 \end{cases}$$

رد  $H_0$  لزوماً به معنای تأیید  $H_1$  است و احتمال ارتکاب خطای نوع دوم به مراتب کمتر از حالت قبل است و بنابراین آزمون شماره (۲) قویتر است (توان آزمون بیشتر است).

### ۱.۷.۱. آزمون میانگین

آزمون میانگین (در صورت نرمال بودن تابع توزیع مشاهدات) صحت ادعا در مورد یک مقدار معین برای میانگین جامعه را بررسی می کند. فرض صفر در اینجا میانگین را مساوی یک مقدار از قبل معلوم فرض می کند و فرض مقابل به طور کلی یکی از سه حالت ذکر شده ذیل است :

$$(9-1) \begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$

مسئله دیگر معلوم بودن یا مجهول بودن وریانس جامعه است که باعث بوجود آمدن دو حالت می شود: آماره مورد استفاده وقتی که

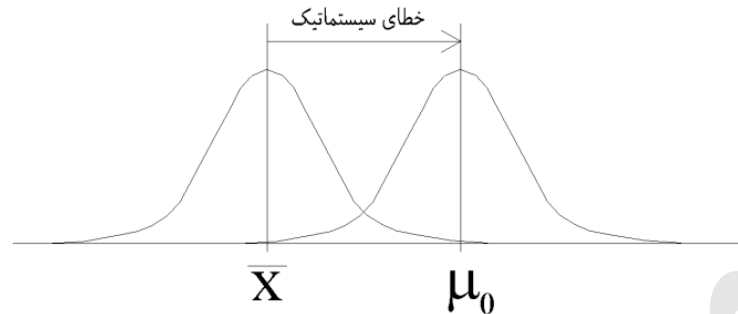
$$\sigma^2 \text{ معلوم است } \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \text{ و در حالتی که } \sigma^2 \text{ مجهول است، بصورت } \frac{\bar{x} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \text{ می باشد.}$$

که برای آماره های ذکر شده  $n$  تعداد مشاهدات نمونه است. برای حالتی که  $\sigma^2$  معلوم است فرض  $H_0$  در موارد زیر رد می شود (  $\zeta_{\alpha/2}$  و  $\zeta_{\alpha}$  مقادیر استخراج شده از جدول توزیع نرمال هستند):

$H_0 : \mu = \mu_0 \text{ vs } H_1 : \mu < \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0 \text{ vs } H_1 : \mu > \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0 \text{ vs } H_1 : \mu \neq \mu_0$
$H_0$ رد می شود اگر:	$H_0$ رد می شود اگر:	$H_0$ رد می شود اگر:
$\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -\zeta_{\alpha}$	$\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > \zeta_{\alpha}$	$\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -\zeta_{\alpha/2}$ و یا $\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > \zeta_{\alpha/2}$
احتمال خطای نوع اول:	احتمال خطای نوع اول:	سطح اطمینان :
$P\left(\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -\zeta_{\alpha}\right) = \alpha$	$P\left(\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > \zeta_{\alpha}\right) = \alpha$	$P(-\zeta_{\alpha/2} < \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < \zeta_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$

جدول ۱-۳: آزمون میانگین ( $\sigma^2$  معلوم)

در حالتی که  $\sigma^2$  نا معلوم است از  $S$  به جای  $\sigma$  استفاده شده و به جای توزیع نرمال از توزیع  $t$  استیودنت با  $n-1$  درجه آزادی استفاده میشود و بقیه موارد مانند جدول فوق رعایت می گردد. در نقشه برداری هدف از انجام آزمون میانگین بررسی دستگاههای اندازه گیری از نظر وجود خطاهای سیستماتیک می باشد. در صورت وجود خطای سیستماتیک  $\mu_0$  با  $\bar{x}$  اختلاف معنی داری خواهد داشت (شکل ۱-۴).



شکل ۱-۴: اختلاف بین میانگین نمونه و مقدار واقعی یک کمیت در صورت وجود خطای سیستماتیک معنی دار است.

در بخش یک، اشاره کردیم که  $\bar{x}$  برآوردگر خوبی برای  $\mu$  می باشد و در صورت نرمال بودن تابع توزیع مشاهدات این ادعا کاملاً صحیح است. هنگامی که خطای سیستماتیک وجود دارد، امید ریاضی جامعه آماری مشاهده انجام شده ( $\mu$ ) نسبت به واقعیت ( $\mu_0$ ) انحراف خواهد داشت پس برآورد کننده آن  $\bar{x}$  هم نسبت به  $\mu_0$  انحراف خواهد داشت. اگر این انحراف از یک سطح معنی دار معین ( $\alpha$ ) تجاوز کند فرض صفر رد می شود و وجود خطای سیستماتیک تأیید می گردد. فرض می کنیم در مورد کالیبره یا کالیبره نبودن یک دستگاه طولیاب یا زاویه یاب تردید داریم (می دانیم که در صورت کالیبره نبودن، خطای سیستماتیک در مشاهدات وارد می شود) برای اینکه در این مورد تحقیق کنیم دستگاه را بر روی یک باز  $32^\circ$  یا زاویه از قبل معلوم قرار داده و با رعایت کلیه موارد لازم، اندازه گیری های مکرری را به تعداد نسبتاً زیاد انجام می دهیم و آنگاه با برگزارد نمودن آزمون میانگین وجود خطای سیستماتیک در نمونه جمع آوری شده را بررسی می کنیم و در اینجا دو حالت بوجود می آید یکی اینکه از دقت دستگاه مطلع باشیم ( $\sigma^2$  معلوم) یا از آن اطلاع نداشته باشیم که در این حالت مجبور به استفاده از وریانس نمونه خواهیم شد. در صورتی که آزمون میانگین رد شود، دستگاه نیاز به بررسی و کالیبراسیون خواهد داشت.

مثال (۱-۴) - جدول (۱-۴) اندازه گیری های انجام شده توسط یک دستگاه طولیاب از یک باز با طول معلوم  $819.1227m$  را نشان می دهد. دقت ادعا شده از سوی کارخانه سازنده دستگاه برای این فاصله  $5.34mm$  میباشد. با فرض صحیح بودن دقت اسمی دستگاه، مطلوبست بررسی دستگاه از نظر وجود خطای سیستماتیک در سطوح اطمینان  $99\%$  و  $95\%$ .

۸۱۹.۱۲۴	۸۱۹.۱۲۸	۸۱۹.۱۲۶	۸۱۹.۱۲۶
۸۱۹.۱۲۶	۸۱۹.۱۲۱	۸۱۹.۱۲۴	۸۱۹.۱۲۲
۸۱۹.۱۳۱	۸۱۹.۱۱۸	۸۱۹.۱۲۳	۸۱۹.۱۲۳
۸۱۹.۱۲۰	۸۱۹.۱۲۰	۸۱۹.۱۲۷	۸۱۹.۱۲۴
۸۱۹.۱۲۹	۸۱۹.۱۳۰	۸۱۹.۱۳۱	۸۱۹.۱۲۹

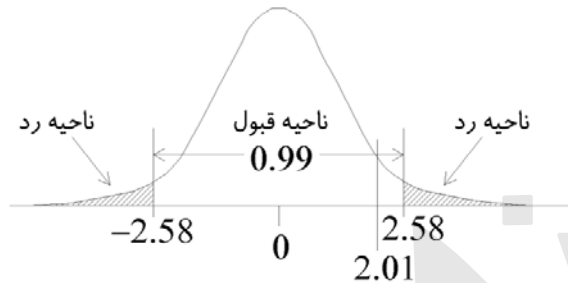
جدول (۱-۴): فواصل اندازه گیری شده برای بررسی صحت اندازه گیری با یک دستگاه طولیاب (واحد: متر)

ابتدا فرضهای صفر و مقابل را تشکیل می دهیم :

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 819.1227m \\ H_1 : \mu \neq 819.1227m \end{cases}, \alpha = 0.01 \quad (\text{برای سطح اطمینان } 99\%)$$

$$\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{0.0024}{0.00534 / \sqrt{20}} = 2.01 \quad \text{و} \quad \bar{x} = 819.1251$$

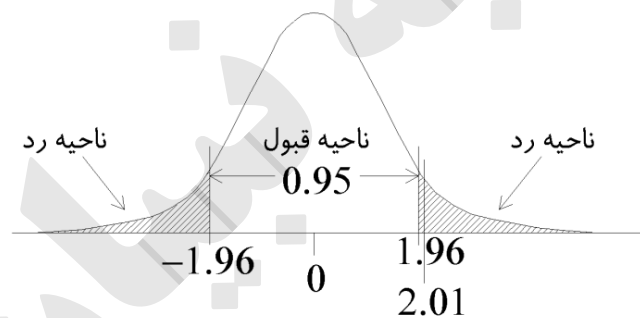
مقدار  $k_{\alpha/2}$  به ازای  $\alpha = 0.01$  از جدول توزیع نرمال  $2.58$  استخراج می شود و چون  $2.01 < 2.58 < 2.58$  (شکل ۵-۱) و بنابر جدول (۳-۱) فرض صفر در سطح اطمینان  $99\%$  پذیرفته می شود و خطای سیستماتیک وجود ندارد.



شکل (۵-۱) : آزمون میانگین در سطح اطمینان  $99\%$

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 819.1227m \\ H_1 : \mu \neq 819.1227m \end{cases}, \alpha = 0.05 \quad \text{برای سطح اطمینان } 95\% \text{ داریم:}$$

مقدار  $k_{\alpha/2}$  به ازای  $\alpha = 0.05$  از جدول توزیع نرمال  $1.96$  استخراج می شود و چون  $1.96 < 2.01 < 1.96$  (شکل ۶-۱) و بنابر جدول (۱-۱) فرض صفر در سطح اطمینان  $95\%$  رد می شود و وجود خطای سیستماتیک تأیید می گردد.



شکل (۶-۱) - آزمون میانگین در سطح اطمینان  $95\%$

در این مثال ملاحظه شد که برای دو مقدار مختلف  $\alpha$  ممکن است وجود یا عدم وجود خطای سیستماتیک مورد تردید قرار بگیرد و سوالی که مطرح می شود اینست که کدامیک را باید انتخاب کرد و معیار چیست؟ در اصطلاح  $\alpha$  (احتمال وقوع خطای نوع اول) را احتمال رد کردن یک عنصر مرغوب (مثلا یک دستگاه سالم) و  $\beta$  (احتمال وقوع خطای نوع دوم) را احتمال قبول کردن یک دستگاه غیر سالم می نامند. در یک آزمون خوب هم  $\alpha$  و هم  $\beta$  باید مینیمم باشند. اما عملا در هر مسئله ای که مورد مطالعه قرار می گیرد مینیمم کردن آنها میسر نیست و هر عملی که منجر به مینیمم کردن  $\alpha$  گردد معمولا منجر به افزایش  $\beta$  می شود. در اغلب تصمیم گیری ها قبول یک فرض غلط خیلی خطرناکتر از رد یک فرض صحیح است یعنی نتایج حاصل از خطای نوع دوم خیلی جدی تر از نتایج حاصل از خطای نوع اول است. برای مثال پذیرفتن دستگاهی که کالیبراسیون آن بهم خورده در مقابل نپذیرفتن دستگاهی که کالیبره می باشد زیرا که هزینه کالیبراسیون یک دستگاه معیوب ممکن است  $100$  هزار تومان باشد در حالیکه کارکردن با یک دستگاه

معیوب می تواند دهها میلیون تومان و یا بیشتر ضرر وارد کند. پس باید سعی شود که تا حد امکان از خطای نوع دوم پرهیز شود عملاً استفاده از سطح معنی دار  $\alpha = 0.05$  برای آزمون کالیبراسیون دستگاهها منطقی تر است.

## ۱.۷.۲. آزمون وریانس

آزمون وریانس در بررسی دقت یک دستگاه اندازه گیری بکار گرفته می شود و برای تحقیق در مورد اینکه آیا یک جامعه با توزیع نرمال دارای وریانس بخصوصی هست یا نه باید از این آزمون استفاده کرد. بر این اساس فرض صفر و فرضهای مقابل بدین

$$\left\{ \begin{array}{l} H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \end{array} \right. \quad (10-1) \quad \text{شرح می باشند:}$$

در اینجا نیز دو حالت بوجود می آید یکی وقتی که میانگین جامعه ( $\mu$ ) معلوم است که از آماره  $\frac{nS^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)^2$  استفاده

می شود<sup>۲۳</sup> و وقتی  $\mu$  مجهول است از آماره  $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma} \right)^2$  استفاده میشود.  $n$  تعداد مشاهدات نمونه است. جدول (۵-۱) کیفیت انجام آزمون را نشان می دهد:

وضعیت	$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ vs $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ vs $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$	$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ vs $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$
$\mu$ معلوم	$\frac{nS^2}{\sigma_0^2} < \chi_{1-\alpha/2, n}^2$ و یا $\frac{nS^2}{\sigma_0^2} > \chi_{\alpha/2, n}^2$	$\frac{nS^2}{\sigma_0^2} > \chi_{\alpha, n}^2$	$\frac{nS^2}{\sigma_0^2} < \chi_{1-\alpha, n}^2$
$\mu$ مجهول	$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < \chi_{1-\alpha/2, n-1}^2$ و یا $\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} > \chi_{\alpha/2, n-1}^2$	$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} > \chi_{\alpha, n-1}^2$	$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < \chi_{1-\alpha, n-1}^2$

جدول ۵-۱: آزمون وریانس

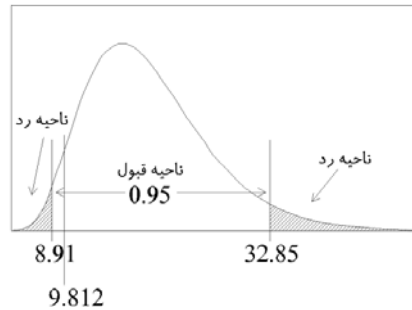
مثال (۵-۱) - مطلوبست بررسی دقت ادعا شده برای دستگاه طولیاب ذکر شده در مثال (۴-۱) در سطح معنی دار  $\alpha = 0.05$ .

۲۳. در این حالت وریانس نمونه از فرمول  $S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$  محاسبه می شود.

حل - چون در سطح معنی دار  $\alpha=0.05$  وجود خطای سیستماتیک برای دستگاه تائید گردید پس  $\mu \neq \mu_0$  و از میانگین جامعه نمی توانیم استفاده کنیم و به جای آن از میانگین نمونه  $\bar{x} = 819.1227m$  استفاده می شود:

$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = (5.34)^2 \text{ mm}^2 \\ H_1 : \sigma^2 \neq (5.34)^2 \text{ mm}^2 \end{cases}, \alpha = 0.05 \quad \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{(19)(14.7263)}{(5.34)^2} = 9.812$$

چون  $8.91 < 9.812 < 32.85$ ، فرض صفر پذیرفته می شود، دقت ادعا شده برای دستگاه صحیح است (شکل (۷-۱)).



شکل (۷-۱): آزمون وریانس

#### ۱. ۲. ۷. سایر آزمون ها

دو آزمونی که بررسی کردیم (میانگین و وریانس) از جمله آزمونهای پیش از سرشکنی هستند که به دلیل اهمیت آنها از جهت بررسی صحت و دقت دستگاههای اندازه گیری به تفصیل شرح داده شدند. سایر آزمونهای پیش از سرشکنی عبارتند از: آزمون خوبی برازش<sup>۲۴</sup> که برای بررسی نرمال بودن تابع توزیع مشاهدات بکار میرود و لازم است پیش از انجام آزمون های میانگین و وریانس بر روی مشاهدات انجام شود و از نرمال بودن توزیع مشاهدات اطمینان حاصل گردد. آزمون های صحت مشاهدات که با استفاده از آنها می توان به ردیابی و حذف مشاهدات اشتباه پیش از سرشکنی پرداخت. از آنجائی که وجود اشتباه و یا خطای سیستماتیک در مشاهدات باعث پرت شدن نتایج حاصل از سرشکنی می گردد، این آزمونها در تشخیص این اثرات در مشاهدات و حذف مشاهدات آلوده به این گونه از خطاها اثر بسیار مفیدی دارند<sup>۲۵</sup>.

۲۴ . goodness of fit

۲۵. برای جزئیات بیشتر به منابع درس سرشکنی و آزمون مراجعه کنید.

## مسائل فصل ۱

۱- با استفاده از یک دستگاه زاویه یاب زاویه بین دو ایستگاه A و B را با استقرار بر روی ایستگاه C اندازه گرفته ایم (جدول ۱-۶)، دقت وسیله اندازه گیری معلوم و مساوی ۵ ثانیه است. مطلوبست بررسی نرمال بودن تابع توزیع جامعه ای که نمونه ذیل از آن تهیه شده است در سطح اعتبار  $\alpha = 0.05$ .

25°15'20"	25°15'25"	25°15'16"	25°15'19"	25°15'18"
25°15'22"	25°15'24"	25°15'26"	25°15'23"	25°15'19"
25°15'17"	25°15'17"	25°15'22"	25°15'27"	25°15'20"
25°15'16"	25°15'14"	25°15'20"	25°15'22"	25°15'24"

جدول (۱-۶): مقادیر اندازه گیری های مکرر از یک زاویه برای بررسی نرمال بودن توزیع مشاهدات (واحد: درجه)

۲- فاصله بین دو ایستگاه S<sub>1</sub> و S<sub>2</sub> به تعداد ۱۵ مرتبه اندازه گیری شده است، با فرض نرمال بودن تابع توزیع مشاهدات و عدم اطلاع از دقت دستگاه اندازه گیری مطلوبست تعیین فاصله اطمینان برای میانگین در سطح اطمینان ۹۵٪.

4701.322	4701.280	4701.250	4701.302	4701.266
4701.286	4701.278	4701.284	4701.280	4701.284
4701.280	4701.285	4701.284	4701.287	4701.272

جدول (۱-۷): مقادیر اندازه گیری شده فاصله بین دو ایستگاه S<sub>1</sub> و S<sub>2</sub> (واحد: متر)

۳- فاصله اطمینان را برای انحراف معیار اندازه گیری انجام شده در مسئله ۲، در سطح معنی دار  $\alpha=0.01$  تعیین کنید. در صورتی که طول اندازه گیری شده از قبل معلوم و برابر 4071.279 متر باشد، فاصله اطمینان فوق را تعیین نمایید.

۴- مطلوبست انجام آزمون های میانگین و وریانس برای مشاهدات مسئله ۱، در صورتی که زاویه اندازه گیری شده از قبل معلوم و برابر "25°15'20.7" باشد.



## فصل دوم

## ۲. انتشار خطاها و تحلیل اولیه :

رابطه بین مشاهدات و مجهولات (مدل ریاضی) باعث می شود که خطای موجود در مشاهدات به مجهولات منتقل گردد. میزان، جهت و اندازه این خطاها به مدل ریاضی و همچنین نوع خطا بستگی دارد. در این فصل به بحث در مورد این مطلب می پردازیم. همچنین بررسی نحوه رسیدن به دقت از پیش تعیین شده برای کمیت های مجهول از مسائل اصلی این فصل میباشد.

۲.۱. قانون کووریانس<sup>۱</sup>

در فصل قبل با کمیت هائی سروکار داشتیم که مستقیماً قابل مشاهده بودند، ولی در عمل اغلب دنبال کمیت هائی هستیم که امکان مشاهده مستقیم آنها وجود ندارد. عبور از کمیت مشاهده شده به کمیت مجهول را که توأم با وریانس - کووریانس باشد، انتقال آماری می نامند. انتقال آماری با استفاده از مدل ریاضی انجام می پذیرد. بنابر تعریف در صورتی که بردار پارامترهای مجهول و بردار مشاهدات باشد، مدل ریاضی به این صورت تعریف می شود: (۲-۱)  $\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{l}})$  اگر مدل ریاضی صریح خطی باشد، می توان نوشت: (۲-۲)  $\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{B}}\underline{\mathbf{l}}$  که در آن ماتریس ضرایب مشاهدات است. قانون انتشار ماتریس وریانس - کووریانس یا اصطلاحاً قانون کووریانس که بیانگر انتقال آماری از  $\underline{\mathbf{l}}$  به  $\underline{\mathbf{x}}$  می باشد، به شکل ذیل بیان می شود (این قانون فقط برای خطاهای اتفاقی صدق می کند):

$$\underline{\mathbf{C}}_{\underline{\mathbf{x}}} = \underline{\mathbf{B}}\underline{\mathbf{C}}_{\underline{\mathbf{l}}}\underline{\mathbf{B}}^T \quad (۳-۲)$$

$\underline{\mathbf{C}}_{\underline{\mathbf{x}}}$  و  $\underline{\mathbf{C}}_{\underline{\mathbf{l}}}$  به ترتیب ماتریس های وریانس - کووریانس مجهولات و مشاهدات می باشند:

$$\underline{\mathbf{C}}_{\underline{\mathbf{l}}} = \begin{bmatrix} \sigma_{l_1}^2 & \sigma_{l_1 l_2} & \cdots & \sigma_{l_1 l_{n-1}} & \sigma_{l_1 l_n} \\ \sigma_{l_2 l_1} & \sigma_{l_2}^2 & \cdots & \sigma_{l_2 l_{n-1}} & \sigma_{l_2 l_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{l_{n-1} l_1} & \sigma_{l_{n-1} l_2} & \cdots & \sigma_{l_{n-1}}^2 & \sigma_{l_{n-1} l_n} \\ \sigma_{l_n l_1} & \sigma_{l_n l_2} & \cdots & \sigma_{l_n l_{n-1}} & \sigma_{l_n}^2 \end{bmatrix}_{n \times n} \quad (۴-۲)$$

و

$$\underline{\mathbf{C}}_{\underline{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} \sigma_{x_1}^2 & \sigma_{x_1 x_2} & \cdots & \sigma_{x_1 x_{u-1}} & \sigma_{x_1 x_u} \\ \sigma_{x_2 x_1} & \sigma_{x_2}^2 & \cdots & \sigma_{x_2 x_{u-1}} & \sigma_{x_2 x_u} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{x_{u-1} x_1} & \sigma_{x_{u-1} x_2} & \cdots & \sigma_{x_{u-1}}^2 & \sigma_{x_{u-1} x_u} \\ \sigma_{x_u x_1} & \sigma_{x_u x_2} & \cdots & \sigma_{x_u x_{u-1}} & \sigma_{x_u}^2 \end{bmatrix}_{u \times u} \quad (۵-۲)$$

۱. The covariance law

در صورتی که مدل غیر خطی باشد با بسط به سری تیلور آنرا خطی می کنیم:

$$\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{l}}) = \underline{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{l}}^0) + \left. \frac{\partial \underline{\mathbf{f}}}{\partial \underline{\mathbf{l}}} \right|_{\underline{\mathbf{l}}=\underline{\mathbf{l}}^0} (\underline{\mathbf{l}} - \underline{\mathbf{l}}^0) \quad (6-2)$$

با فرض اینکه  $\underline{\mathbf{B}} = \left. \frac{\partial \underline{\mathbf{f}}}{\partial \underline{\mathbf{l}}} \right|_{\underline{\mathbf{l}}=\underline{\mathbf{l}}^0}$  می توان نوشت:  $\underline{\delta \mathbf{x}} = \underline{\mathbf{B}} \underline{\delta \mathbf{l}}$  (7-2)

و بنابر قانون کواریانس، رابطه (3-2):  $\underline{\mathbf{C}}_{\delta \mathbf{x}} = \underline{\mathbf{B}} \underline{\mathbf{C}}_{\delta \mathbf{l}} \underline{\mathbf{B}}^T$  و چون  $\underline{\mathbf{C}}_{\delta \mathbf{x}} = \underline{\mathbf{C}}_{\mathbf{x}}$  و  $\underline{\mathbf{C}}_{\delta \mathbf{l}} = \underline{\mathbf{C}}_{\mathbf{l}}$  مجدداً به همان رابطه (3-2)، منجر خواهد شد.

## ۲.۲. قانون انتشار خطاهای مشاهدات مستقل

در صورتی که کواریانس بین مشاهدات صفر باشد ( $\sigma_{l_i l_j} = 0$ ) و به عبارت دیگر مشاهدات مستقل از یکدیگر باشند، آنگاه ماتریس وریانس - کواریانس مشاهدات قطری شده و با استفاده از قانون کواریانس، ماتریس وریانس - کواریانس مجهولات به فرم ذیل خواهد بود:

$$\underline{\mathbf{C}}_{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial x_1}{\partial l_i} \right)^2 \sigma_{l_i}^2 & \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial x_1}{\partial l_i} \right) \left( \frac{\partial x_2}{\partial l_i} \right) \sigma_{l_i}^2 & \dots & \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial x_1}{\partial l_i} \right) \left( \frac{\partial x_u}{\partial l_i} \right) \sigma_{l_i}^2 \\ \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial x_2}{\partial l_i} \right) \left( \frac{\partial x_1}{\partial l_i} \right) \sigma_{l_i}^2 & \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial x_2}{\partial l_i} \right)^2 \sigma_{l_i}^2 & \dots & \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial x_2}{\partial l_i} \right) \left( \frac{\partial x_u}{\partial l_i} \right) \sigma_{l_i}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial x_u}{\partial l_i} \right) \left( \frac{\partial x_1}{\partial l_i} \right) \sigma_{l_i}^2 & \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial x_u}{\partial l_i} \right) \left( \frac{\partial x_2}{\partial l_i} \right) \sigma_{l_i}^2 & \dots & \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial x_u}{\partial l_i} \right)^2 \sigma_{l_i}^2 \end{bmatrix} \quad (8-2)$$

از رابطه (8-2) می توان نتیجه گرفت (به ازای  $j$  و  $k$  دلخواه):

$$\sigma_{x_j x_k} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial x_j}{\partial l_i} \right) \left( \frac{\partial x_k}{\partial l_i} \right) \sigma_{l_i}^2 \quad \text{و} \quad \sigma_{x_j}^2 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial x_j}{\partial l_i} \right)^2 \sigma_{l_i}^2 \quad (9-2)$$

رابطه فوق اثبات می کند که علیرغم قطری شدن ماتریس کواریانس مشاهدات، کواریانس بین مجهولات از بین نمی رود و این خاصیت مهمی است که در روند تجزیه تحلیل خطاها باید بدان توجه نمود. در صورتی که بردار  $\underline{\mathbf{x}}$  فقط دارای یک مولفه باشد (

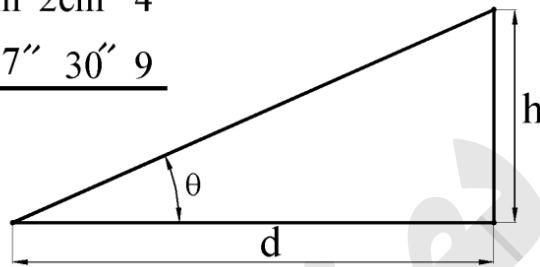
$\underline{\mathbf{x}} = [x]$ )، رابطه (9-2) به صورت زیر خواهد بود:

$$\sigma_x^2 = \left( \frac{\partial x}{\partial l_1} \right)^2 \sigma_{l_1}^2 + \left( \frac{\partial x}{\partial l_2} \right)^2 \sigma_{l_2}^2 + \dots + \left( \frac{\partial x}{\partial l_n} \right)^2 \sigma_{l_n}^2 \quad (10-2)$$

فرمول فوق معروف به قانون انتشار (یا پخش) خطاهای اتفاقی می باشد و حالت خاصی از قانون کووریانس است، این قانون موارد کاربرد زیادی در علوم نقشه برداری دارد.

مثال (۱-۲) به منظور تعیین ارتفاع  $h$  فاصله  $d$  و زاویه  $\theta$  را به شرح ذیل اندازه گیری کرده ایم (شکل ۱-۲)، مطلوبست  $\hat{h}$  و  $\sigma_{\hat{h}}$  (تعداد دفعات اندازه گیری است و اندازه گیری ها بصورت مستقل انجام شده است).

میانگین	$\sigma$	$n$
$d$ 56.78m	2cm	4
$\theta$ 9°12'07"	30"	9



شکل (۱-۲) - کمیت های اندازه گیری شده برای تعیین ارتفاع

حل - برآورد مقدار مجهول:  $\hat{h} = \bar{d} \tan(\bar{\theta}) = 56.78 \times \tan(9^\circ 12' 07'') = 9.1983m$

$$\sigma_{\hat{h}}^2 = \left(\frac{\partial h}{\partial d}\right)^2 \sigma_d^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial \theta}\right)^2 \sigma_{\theta}^2$$

$$\sigma_{\hat{d}} = \frac{\sigma_d}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{4}} = 1cm \quad \sigma_{\hat{\theta}} = \frac{\sigma_{\theta}}{\sqrt{n}} = \frac{30''}{3} = 10''$$

$$\sigma_{\hat{h}}^2 = (\tan(9^\circ 12' 07''))^2 (0.01)^2 + (56.78 \times \sec^2(9^\circ 12' 07''))^2 \left(\frac{10''}{206265}\right)^2$$

و بنابراین:  $\hat{h} = 9.1983 \pm 0.0033$  و  $\sigma_{\hat{h}} = 3.3mm$

مثال (۲-۲) - طول  $a$  و عرض  $b$  از یک زمین مستطیل شکل مسطح اندازه گیری شده است. در صورتی که دقت اندازه گیری طول و عرض زمین  $\sigma_a$  و  $\sigma_b$  باشد، مطلوبست دقت اندازه گیری قطر و مساحت زمین مورد نظر.

حل - قطر  $d = \sqrt{a^2 + b^2}$  و مساحت  $A = a \times b$

$$\underline{C}_1 = \begin{bmatrix} \sigma_a^2 & 0 \\ 0 & \sigma_b^2 \end{bmatrix} \text{ و } \underline{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial A}{\partial a} & \frac{\partial A}{\partial b} \\ \frac{\partial d}{\partial a} & \frac{\partial d}{\partial b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & a \\ \frac{a}{d} & \frac{b}{d} \end{bmatrix} \text{ و } \underline{x} = \begin{bmatrix} A \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ab \\ \sqrt{a^2 + b^2} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_d = \frac{\sqrt{a^2 \sigma_a^2 + b^2 \sigma_b^2}}{d} \text{ و } \sigma_A = \sqrt{b^2 \sigma_a^2 + a^2 \sigma_b^2} \text{ و } \underline{C}_x = \underline{B} \underline{C}_1 \underline{B}^T = \begin{bmatrix} b^2 \sigma_a^2 + a^2 \sigma_b^2 & \frac{ab}{d} (\sigma_a^2 + \sigma_b^2) \\ \frac{ab}{d} (\sigma_a^2 + \sigma_b^2) & \frac{a^2 \sigma_a^2 + b^2 \sigma_b^2}{d^2} \end{bmatrix}$$

مثال فوق نشان می دهد که با وجود مستقل بودن مشاهدات، مجهولات وابستگی<sup>۲</sup> دارند و بنابراین اگر مجهولات برآورد شده به عنوان مشاهده برای تعیین مجهولات دیگری بکار روند باید کووریانس آنها حتما لحاظ شود.

## ۳.۲. قانون انتشار خطاهای سیستماتیک

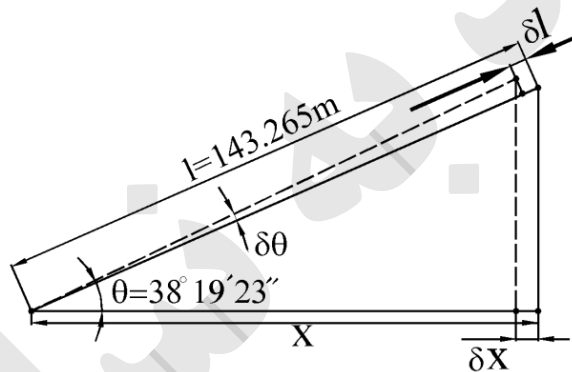
حتی با یک مدل ریاضی خوب طراحی شده، امکان حضور خطاهای سیستماتیک در مقدار تعیین شده برای کمیت های مورد اندازه گیری وجود دارد. اثر این خطا بر روی مقدار کمیت اندازه گیری شده مسئله ای است که باید بدان توجه شود. فرض کنید  $x$  تابعی از  $n$  مشاهده مستقل  $l_1, l_2, \dots, l_n$  باشد:

$$x = f(l_1, l_2, \dots, l_n) \quad (11-2)$$

اگر  $l_1, l_2, \dots, l_n$  اندازه گیری شوند و مقادیر اندازه گیری شده خطاهای سیستماتیک کوچکی به اندازه  $\delta l_1, \delta l_2, \dots, \delta l_n$  داشته باشند، مقدار  $x$  محاسبه شده از رابطه (۱۱-۲)، خطای  $\delta x$  به شرح ذیل خواهد داشت:

$$\delta x = \left( \frac{\partial f}{\partial l_1} \right) \delta l_1 + \left( \frac{\partial f}{\partial l_2} \right) \delta l_2 + \dots + \left( \frac{\partial f}{\partial l_n} \right) \delta l_n \quad (12-2)$$

مثال (۳-۲) در تبدیل یک طول مایل اندازه گیری شده به افق مقدار  $\delta\theta = +2'$  خطای سیستماتیک در زاویه شیب و مقدار  $\delta l = -13cm$  خطای سیستماتیک در طول مایل اندازه گیری شده وجود دارد (شکل (۲-۲)). مطلوبست اثر این خطاها بر روی طول افق در صورتی که  $\theta = 38^\circ 19' 23''$  و  $l = 143.265m$  باشد.



شکل (۲-۲) اثر خطای سیستماتیک در تبدیل طول به افق

حل -  $x = l \cos(\theta)$  و  $\delta x = \left( \frac{\partial x}{\partial l} \right) \delta l + \left( \frac{\partial x}{\partial \theta} \right) \delta \theta$  پس  $\delta x = \cos(\theta) \delta l - l \sin(\theta) \delta \theta$

$$\delta x = \cos(38^\circ 19' 23'') \times (-13) - (143.265 \times 100)(\sin(38^\circ 19' 23''))(2 \frac{\pi}{10800}) = -15.37cm$$

مثال (۳-۲) نشان می دهد که خطای سیستماتیک هم از نظر بزرگی و هم از نظر جهت بر روی کمیت اندازه گیری شده اثر می گذارد.

## ۴.۲. خطای کل

در صورتی که مشاهدات دارای هر دو نوع خطای سیستماتیک و اتفاقی باشند، برای کمیت مجهول خطای کل را بصورت زیر تعریف می کنند:

$$T_x = \sqrt{\delta x^2 + \sigma_x^2} \quad (13-2)$$

که در فرمول فوق  $\delta x$  خطای سیستماتیک و  $\sigma_x$  خطای اتفاقی می باشد.

مثال (۴-۲) فرض می کنیم بردار مشاهدات و ماتریس وریانس- کووریانس آن به شکل زیر داده شده باشد:

$$\underline{C}_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ و } \underline{l} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix}$$

و همچنین این مشاهدات دارای خطای سیستماتیک  $\delta l = (\delta l_1, \delta l_2, \delta l_3) = (-1.5, 2, 0.5)$  باشند. مطلوبست تعیین خطای کل در برآورد کمیت های  $x_1$  و  $x_2$  در صورتی که:

$$x_1 = l_1 - 3l_3$$

$$x_2 = 2l_1 + l_2$$

$$\underline{C}_x = \underline{B} \underline{C}_1 \underline{B}^T = \begin{bmatrix} 39 & 6 \\ 6 & 15 \end{bmatrix} \text{ و } \underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ حل- بر اساس قانون کووریانس:}$$

پس  $\sigma_{x_1} = \sqrt{39}$  و  $\sigma_{x_2} = \sqrt{15}$  و بنابر قانون انتشار خطاهای سیستماتیک:

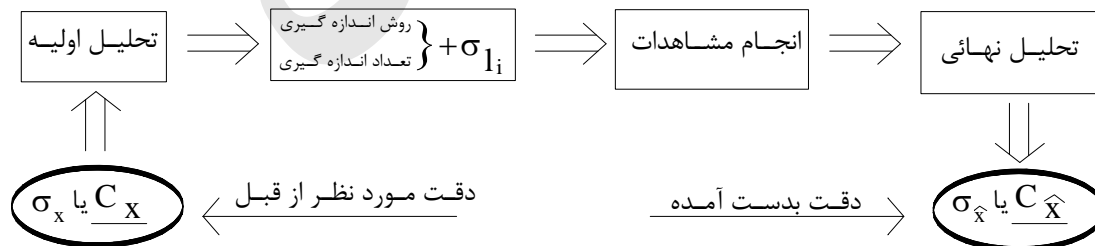
$$\delta x_1 = \left( \frac{\partial x_1}{\partial l_1} \right) \delta l_1 + \left( \frac{\partial x_1}{\partial l_2} \right) \delta l_2 + \left( \frac{\partial x_1}{\partial l_3} \right) \delta l_3 = \delta l_1 - 3\delta l_3 = -3$$

$$\delta x_2 = \left( \frac{\partial x_2}{\partial l_1} \right) \delta l_1 + \left( \frac{\partial x_2}{\partial l_2} \right) \delta l_2 + \left( \frac{\partial x_2}{\partial l_3} \right) \delta l_3 = 2\delta l_1 + \delta l_2 = -1$$

و بر اساس فرمول (۲-۱۳):  $T_{x_1} = \sqrt{39+9} = 6.93$  و  $T_{x_2} = \sqrt{15+1} = 4$

## ۲.۵. تحلیل اولیه

با استفاده از قانون پخش خطاها می توان میزان تاثیر هر مشاهده و دقت آن را در برآورد مجهول یا مجهولات تعیین نمود. بعد از مشخص کردن میزان تاثیر مشاهدات مختلف، میتوان دقت اندازه گیری آنها را چنان بالا برد که نتایج بدست آمده برای مجهولات دارای دقت دلخواه از پیش تعیین شده باشند، این عمل را تحلیل اولیه می نامند. تحلیل اولیه قبل از اینکه اندازه گیری واقعی شروع شود، انجام می گیرد. برای تحلیل اولیه مقادیر تقریبی از مشاهدات و مجهولات کافی است. عمل تحلیل اولیه منجر به تعیین مشخصات تکنیک های مختلف اندازه گیری می شود که طی آنها دقت های دلخواه برای مجهولات حاصل میشود (شکل ۲-۳).



شکل (۲-۳) - مفهوم تحلیل اولیه و عملکرد آن در رسیدن به دقت دلخواه

در تحلیل اولیه معمولاً فرض می‌کنیم که کلیه مشاهدات عاری از هرگونه خطای سیستماتیک می‌باشند و این به معنای آن است که وریانس و یا انحراف معیار مشاهدات را می‌توانیم به عنوان پارامترهای صحت مشاهدات فرض کنیم، زیرا که در غیاب خطای سیستماتیک دقت هم ارز با صحت خواهد بود.

مسائل دیگری که در تحلیل اولیه باید بدان توجه شود عبارتند از:

الف - در نظر گرفتن کلیه روشهای نقشه برداری ممکن برای رسیدن به دقت دلخواه (و بنابراین مدل ریاضی مربوط به آنها هم مطرح می‌گردد). برای مثال اگر بخواهیم ارتفاع نقطه ای را تعیین کنیم هم می‌توانیم از ترازیبی مثلثاتی استفاده کنیم و هم می‌توانیم از روش ترازیبی معمولی<sup>۳</sup> استفاده کنیم و بررسی کنیم که کدامیک ما را به دقت مورد نظر می‌رساند.

ب- استفاده از وسایل و دستگاههای موجود نقشه برداری و در نظر گرفتن پارامترهای هزینه، سادگی و دقت هر یک از این وسایل، همیشه باید توجه داشت که بالاترین دقت ممکن هدف نیست زیرا که افزایش دقت مساویست با افزایش هزینه، مهم اینست که بتوانیم با استفاده از امکانات موجود و در نظر گرفتن موازنه زمان و هزینه<sup>۴</sup> به دقت مطلوب دسترسی پیدا کنیم و دقت اولیه برای مجهولات، متناسب با نیاز پروژه باید تعریف گردد.

## ۶.۲. اصول تحلیل اولیه

حالت ساده ای را فرض کنید که فقط یک مجهول با مشاهدات مستقل داریم، تحلیل اولیه بر مبنای کاربرد قانون انتشار خطاها تعریف می‌شود:

$$\sigma_x^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial l_1}\right)^2 \frac{\sigma_{l_1}^2}{n_1} + \left(\frac{\partial x}{\partial l_2}\right)^2 \frac{\sigma_{l_2}^2}{n_2} + \dots + \left(\frac{\partial x}{\partial l_n}\right)^2 \frac{\sigma_{l_n}^2}{n_n}$$

$$\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial x}{\partial l_i}\right)^2 \frac{\sigma_{l_i}^2}{n_i} \quad (۱۴-۲) \quad \text{ویا}$$

در معادله فوق  $\sigma_x^2$  دقت نهائی مورد نیاز برای کمیت مجهول می‌باشد و  $\left(\frac{\partial x}{\partial l_i}\right)$  عبارتست از اثرمدل ریاضی  $\left(\frac{\sigma_{l_i}^2}{n_i}\right)$  عبارتست از

اثر دقت دستگاه و تعداد مشاهدات. موارد دیگری که باید بدانها توجه شود عبارتند از:

$\sigma_x$  ... معمولاً در این مرحله از قبل معلوم است (به عنوان دقت از پیش تعیین شده).

$\left(\frac{\partial x}{\partial l_i}\right)$  ... بستگی به مدل ریاضی خواهد داشت.

$\sigma_{l_i}$  ... دقت دستگاه مورد استفاده می‌باشد.

$n$  ... تعداد مشاهدات مورد استفاده برای تعیین کمیت مجهول است.

در بسیاری از موارد عملی  $\left(\frac{\partial x}{\partial l_i}\right)$  و  $\sigma_{l_i}$  با یکدیگر مرتبط هستند و تصمیم گیری برای تعیین آنها مشکل نیست زیرا که تعداد

انتخابهای محدودی داریم و مهمترین مسئله ای که باقی می‌ماند تعیین تعداد مشاهدات خواهد بود.

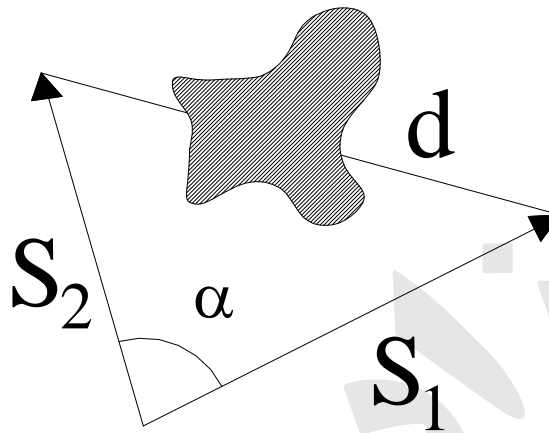
از آنجائی که فقط یک معادله و  $n$  مجهول داریم، نمی‌توانیم مستقیماً  $n_i$  را برآورد کنیم بلکه ناچار هستیم اطلاعات اضافی یا مفروضات اولیه ای را در نظر بگیریم.

مثال (۵-۲) - در شکل (۵-۲) به علت وجود مانع فاصله  $d$  را نمی توانیم مستقیماً اندازه گیری کنیم، برای تعیین این فاصله باید فواصل  $S_1$  و  $S_2$  و زاویه  $\alpha$  را اندازه گیری کنیم. اطلاعات ذیل برای ما معلوم است:

$$S_1 \approx 136m \quad \alpha \approx 50^\circ \quad \sigma_{S_2} = 1.5cm$$

$$S_2 \approx 115m \quad \sigma_{S_1} = 1.5cm \quad \sigma_\alpha = 10''$$

مطلوبست تعیین تعداد هر یک از مشاهدات در صورتیکه دقت تعیین  $d$  از  $0.5cm$  تجاوز نکند ( $\sigma_d \leq 0.5cm$ ).  
(توجه کنید که مقادیر تقریبی اندازه گیری ها می تواند برای مثال از یک نقشه بدست آمده باشد).



شکل (۵-۲) - فواصل و زاویه مورد نظر برای اندازه گیری و تعیین فاصله  $d$

حل - مدل ریاضی:

$$d = (s_1^2 + s_2^2 - 2s_1s_2 \cos(\alpha))^{1/2} = 107.77m$$

مدل توزیع خطاها:

$$\sigma_d^2 = \left(\frac{\partial d}{\partial s_1}\right)^2 \sigma_{s_1}^2 + \left(\frac{\partial d}{\partial s_2}\right)^2 \sigma_{s_2}^2 + \left(\frac{\partial d}{\partial \alpha}\right)^2 \sigma_\alpha^2$$

$$\frac{\partial d}{\partial s_1} = \frac{2s_1 - 2s_2 \cos(\alpha)}{2d} = 0.576$$

$$\frac{\partial d}{\partial s_2} = \frac{2s_2 - 2s_1 \cos(\alpha)}{2d} = 0.256$$

$$\frac{\partial d}{\partial \alpha} = \frac{2s_1s_2 \sin(\alpha)}{2d} = 111.17m = 11117cm$$

$$(0.5cm)^2 = (0.576)^2 \sigma_{s_1}^2 + (0.256)^2 \sigma_{s_2}^2 + (11117cm)^2 \frac{\sigma_\alpha^2}{(206265)^2}$$

$$0.25cm^2 = 0.332 \frac{\sigma_{s_1}^2}{n_{s_1}} + 0.065 \frac{\sigma_{s_2}^2}{n_{s_2}} + 0.003 \frac{\sigma_\alpha^2}{n_\alpha}$$

در رابطه فوق ۳ مجهول و یک معادله داریم بنابراین برای حل آن ناگزیر به در نظر گرفتن شروط اضافی خواهیم بود. روش اول - فرض می کنیم  $S_1$  و  $S_2$  و  $\alpha$  بر روی  $\sigma_d^2$  اثر یکسان داشته باشند:

$$\frac{0.25}{3} = 0.332 \frac{(1.5)^2}{n_{s_1}} \rightarrow n_{s_1} = 9$$

$$\frac{0.25}{3} = 0.065 \frac{(1.5)^2}{n_{s_2}} \rightarrow n_{s_2} = 2$$

$$\frac{0.25}{3} = 0.003 \frac{(10)^2}{n_{\alpha}} \rightarrow n_{\alpha} = 4$$

توجه کنید علیرغم اینکه  $\sigma_{s_1} = \sigma_{s_2}$  ولی  $n_{s_1} > n_{s_2}$  از این موضوع می توان نتیجه گرفت که توزیع یکسان خطا فرض مناسبی نبوده است.

روش دوم-

$$0.25 = 0.15 + 0.05 + 0.05$$

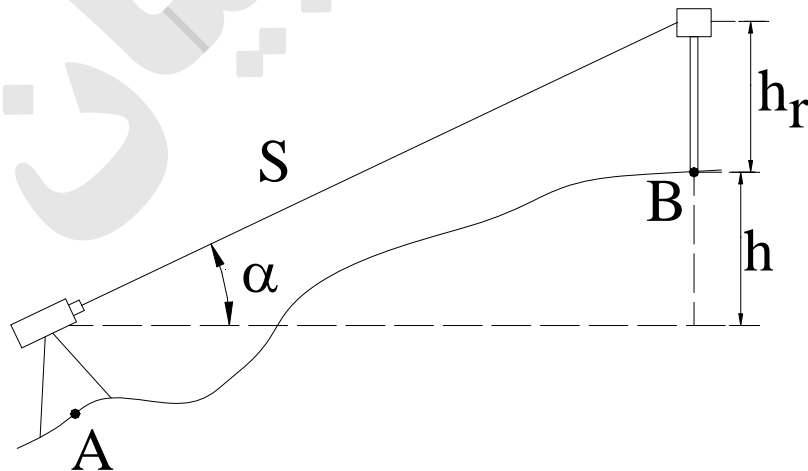
$$0.25 = 0.335 \frac{(1.5)^2}{n_{s_1}} + 0.065 \frac{(1.5)^2}{n_{s_2}} + 0.003 \frac{(10)^2}{n_{\alpha}}$$

$$n_{s_1} = 5 \quad n_{s_2} = 3 \quad n_{\alpha} = 6$$

در نظر گرفتن سهم بیشتر از خطا برای  $s_1$  سبب شد تا توزیع تعداد مشاهدات منطقی تر شود.

مثال (۶-۲) - مطابق شکل (۶-۲) در نظر است به روش ترازبایی مثلثاتی ارتفاع نقطه  $B$  محاسبه گردد. دقت مورد نیاز برای ارتفاع این نقطه  $0.01m$  می باشد، مطلوبست تعیین دقت اندازه گیری فاصله، زاویه قائم و ارتفاع رفلکتور در صورتی که مقادیر تقریبی آنها به شرح ذیل باشد (فرض بر این است که تعداد دفعات اندازه گیری هر مشاهده یک و یا حداکثر دو مرتبه باشد):

$$S \approx 400m \quad \alpha \approx 30^\circ$$



شکل (۶-۲) - ترازبایی مثلثاتی برای تعیین ارتفاع نقطه  $B$



حل -

$$h = S \sin(\alpha) - h_r$$

مدل ریاضی :

ابتدا خطا را بطور مساوی روی مشاهدات توزیع می کنیم و بر این مبنا  $\sigma_s, \sigma_\alpha, \sigma_{h_r}$  حساب می شوند :

$$\sigma_h^2 = \left(\frac{\partial h}{\partial S}\right)^2 \sigma_s^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial \alpha}\right)^2 \sigma_\alpha^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)^2 \sigma_t^2$$

(برای پرهیز از هرگونه اشتباه  $\sigma_{h_r}$  را با  $\sigma_t$  جایگزین کرده ایم).

$$\sigma_s = \frac{\sigma_h / \sqrt{3}}{\frac{\partial h}{\partial S}} = \frac{0.01 / \sqrt{3}}{\sin(30^\circ)} = 0.0115m$$

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_h / \sqrt{3}}{\frac{\partial h}{\partial \alpha}} = \frac{0.01 / \sqrt{3}}{S \cos(\alpha)} = \frac{0.01 / \sqrt{3}}{346.41} = \begin{cases} 1.67 \times 10^{-5} \text{ rad} \\ 1.67 \times 10^{-5} \times 206265'' \\ 3.4'' \end{cases}$$

$$\sigma_t = \frac{\sigma_h / \sqrt{3}}{\frac{\partial h}{\partial t}} = \frac{0.01 / \sqrt{3}}{(1)} = 0.0058m$$

معمولا دقت اندازه گیری زوایای قائم کم است ما اینجا فرض می کنیم که امکان مشاهده زاویه شیب با دقت بهتر از 5'' ممکن نباشد و با وجود این محدودیت دقت سایر کمیت ها را مجددا حساب می کنیم :

$$(0.01)^2 = (0.5)^2 \sigma_s^2 + (346.41)^2 \left(\frac{5''}{206265}\right)^2 + (-1)^2 \sigma_t^2$$

$$(0.0054m)^2 = (0.5)^2 \sigma_s^2 + \sigma_t^2$$

تقسیم مساوی خطا نتیجه می دهد :

$$\sigma_s = \frac{0.0054 / \sqrt{2}}{0.5} = 0.0076m(7.6mm) \rightarrow \text{انتخاب دستگاه طولیاب :}$$

$$\sigma_t = \frac{0.0054 / \sqrt{2}}{1} = 0.0038m(3.8mm)$$

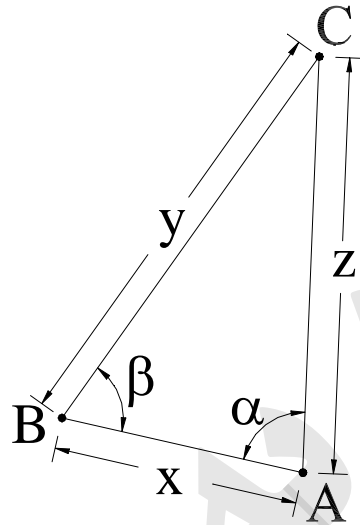
## مسائل فصل دوم:

۱- برای تعیین دو فاصله  $AC = z$  و  $BC = y$  از مثلث مسطحاتی شکل (۷-۲)، طول  $AB = x$  و دوزاویه  $\alpha$  و  $\beta$  اندازه گیری شده اند و مقادیر برآورد شده عبارتند از:

$$\bar{x} = 10.596 \text{ m} \quad \sigma_{\bar{x}} = 32 \text{ mm}, \quad \bar{\alpha} = 79^\circ 27' 29'' \quad \sigma_{\bar{\alpha}} = 10'', \quad \bar{\beta} = 67^\circ 21' 06'' \quad \sigma_{\bar{\beta}} = 7''$$

الف - مطلوبست برآورد  $y$  و  $z$  همراه با ماتریس وریانس-کووریانس آنها به میلی متر مربع.

ب- در صورتی که دقت های  $\sigma_y \leq 10 \text{ mm}$  و  $\sigma_z \leq 10 \text{ mm}$  برای طولهای مجهول مورد نظر باشد، دقت مورد نیاز برای وسایل اندازه گیری و تعداد دفعات اندازه گیری را تعیین نمایید.

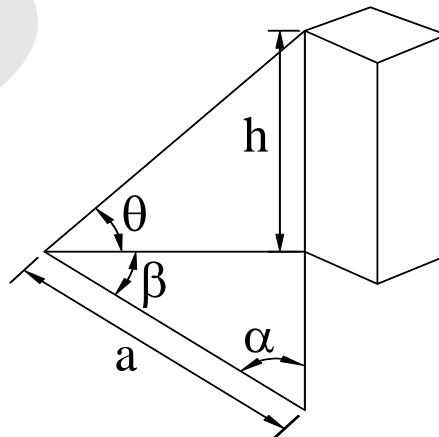


شکل ۷-۲\_ اندازه گیری برای تعیین دو طول مجهول

۲- برای تعیین ارتفاع یک برج ( $h$ ) روش نشان داده شده در شکل (۸-۲) پیشنهاد شده است. زوایای  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\theta$  طول  $a$  اندازه گیری شده اند، مقادیر تقریبی کمیت های اندازه گیری شده عبارتند از:

$$\alpha = 60^\circ \quad \beta = 30^\circ \quad \theta = 45^\circ \quad a = 100 \text{ m}$$

دقت اندازه گیری زوایای افقی  $\alpha$  و  $\beta$  با هم مساوی و برابر  $\sigma_{\bar{\alpha}} = \sigma_{\bar{\beta}} = 2''$  می باشد. با در نظر گرفتن اینکه خطاهای ناشی از طول  $a$  و زاویه  $\theta$  روی ارتفاع  $h$  با هم برابر فرض شوند، برای رسیدن به خطای  $\sigma_h \leq 2.5 \text{ cm}$ ، دقت مورد لزوم در اندازه گیری طول  $a$  و زاویه  $\theta$  را تعیین کنید.



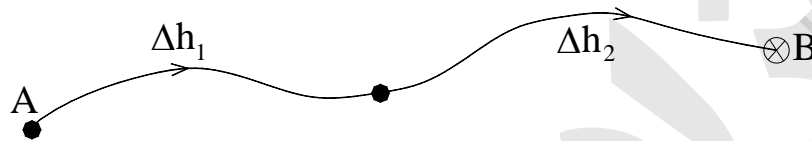
شکل ۸-۲\_ کمیت های مورد اندازه گیری برای تعیین ارتفاع برج

۳- در یک مثلث بندی مسطحاتی قرار است زوایای افقی با دو نوع مختلف تئودولیت I و II اندازه گیری شوند. از دقت اندازه گیری تئودولیت ها اطلاع نداشته ایم و برای امتحان تئودولیت ها، زاویه مبنایی را چندین بار بوسیله هرکدام از آنها اندازه گیری کرده ایم. انحراف معیار مشاهدات برای تئودولیت I برابر  $S_I = 1.5''$  و برای تئودولیت II برابر  $S_{II} = 2.5''$  بدست آمده است. اگر برای مجموع زوایای اندازه گیری شده برای هر یک از اجزای شبکه مثلث بندی حداکثر خطائی معادل  $1''$  مد نظر باشد، مطلوبست تعداد دفعات تکرار اندازه گیری هر زاویه در صورتی که:

الف - تئودولیت شماره I بکار برده شود.

ب- تئودولیت شماره II بکار برده شود.

۴- شکل ۲-۹ یک خط ترازیبی را نشان می دهد که از پنج مارک A با ارتفاع معلوم به نقطه B می رسد. اختلاف ارتفاع های  $\Delta h_1$  و  $\Delta h_2$  با دقت یکسان و مستقل از یکدیگر مشاهده می شوند. محاسبه کنید چند مرتبه باید  $\Delta h_1$  و  $\Delta h_2$  اندازه گیری شوند تا خطای تعیین ارتفاع B (نسبت به A) از  $3mm$  تجاوز نکند؟ فرض کنید انحراف معیار هر اندازه گیری  $5mm$  باشد.



شکل ۲-۹\_ خط ترازیبی

۵- دقت اندازه گیری یکدستگاه طولیاب الکترونیکی کالیبره شده معادل  $10mm + 7ppm$  است. در صورتی که برد موثر این دستگاه در حدود  $1800$  متر باشد، چند بار بایستی یک طول مبنای  $11/7$  کیلومتری را با این دستگاه اندازه گیری کنیم به گونه ای که دقت نسبی آن از  $3ppm$  تجاوز نکند؟

۵. ppm مخفف part per million می باشد و برای بیان دقت نسبی در اندازه گیری طول بکار می رود:  $\frac{\sigma_d}{d} = n \times 10^{-6}$  که در

این رابطه n عدد ppm است.

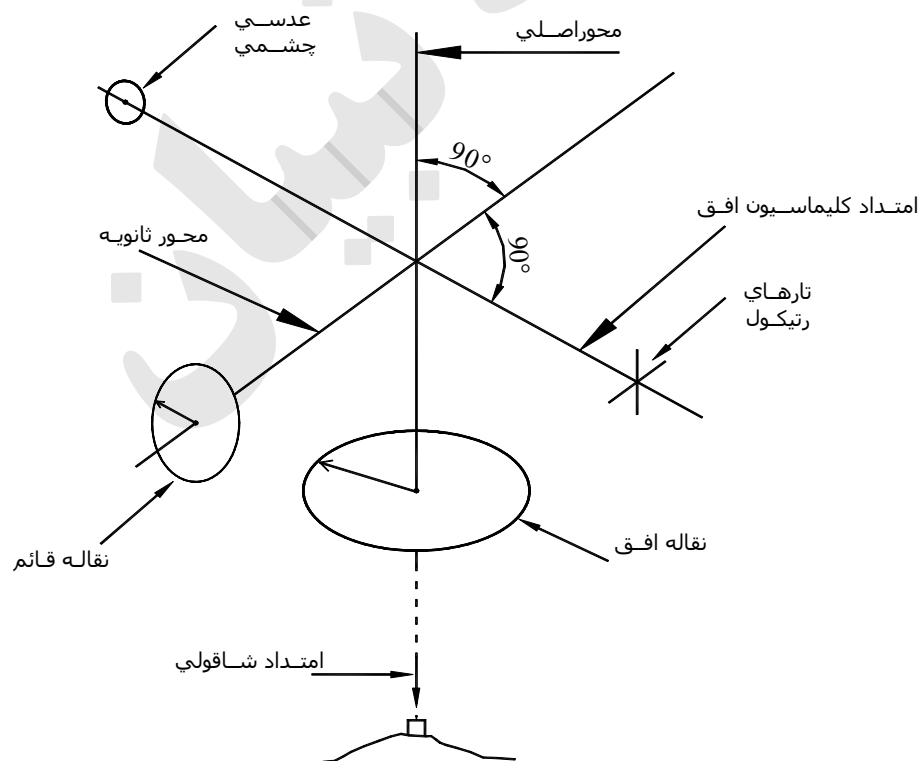
## فصل سوم

## ۳. سیستم های اندازه گیری زاویه

اندازه گیری زاویه در پروژه های نقشه برداری همواره اهمیت بسیار زیادی داشته و تا پیش از اختراع دستگاههای دقیق طولیاب الکترونیکی، اندازه گیری زوایا تنها راه و مهمترین روش برای تعیین موقعیت بر روی زمین بوده است. با توجه به نقش مهم زوایا در عملیات مختلف نقشه برداری بررسی و تحلیل خطاها و روش های مختلف اندازه گیری زاویه همیشه مورد نظر مهندسين نقشه برداری می باشد و بخصوص در پروژه های دقیق نقشه برداری که دقت اهمیت ویژه ای دارد باید توجه خاص بدان مبذول داشت. دستگاههای زاویه یاب را به دو گروه کلی می توان تقسیم کرد: دستگاههای اپتیکی و دستگاههای الکترونیکی، اصول اندازه گیری در هر دو این سیستمها یکسان است و فقط سیستم قرائت زاویه در آنها باهم فرق می کند: سیستم قرائت اپتیکی و سیستم قرائت الکترونیکی، البته در سالهای اخیر با پیشرفت های چشمگیری که در زمینه صنایع الکترونیک و رایانه به وقوع پیوسته بسیاری از فعالیت های مربوط به اندازه گیری به صورت خودکار انجام می شود و این به سهولت و سرعت کار کمک قابل توجهی کرده است ولی واقعیت اینست که سالهاست دقت وسایل اندازه گیری زاویه پیشرفت زیادی نداشته است و صرف رقومی شدن و مدرنیزه شدن سیستم های زاویه یاب الکترونیکی کمک چندانی به افزایش دقت کلی در اندازه گیری زاویه نکرده است. در ابتدای این فصل به بررسی ساختمان هندسی دستگاههای زاویه یاب می پردازیم و سپس به شرح در مورد نحوه تنظیم دستگاههای زاویه یاب، روشهای مشاهداتی خاص و مدل سازی ریاضی خطاهای اندازه گیری زاویه خواهیم پرداخت در ادامه به صورت مختصر در مورد سیستم های زاویه یاب الکترونیکی بحث می شود و در پایان روشهای اندازه گیری زاویه مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

## ۳.۱. ساختار هندسی زاویه یاب و دسته بندی خطاها

در یک دستگاه زاویه یاب همیشه سه محور اساسی وجود دارد که البته فرضی هستند و این سه محور بنیاد اندازه گیری زاویه را تشکیل می دهند (شکل ۳-۱). این محورها عبارتند از: محور اصلی، محور ثانویه و محور دیدگانی



شکل (۳-۱): رابطه هندسی بین محورهای اساسی زاویه یاب

**محور اصلی یا محور قائم**<sup>۱</sup> بر صفحه افق عمود است و از مرکز هندسی دستگاه عبور می کند و در هنگام تراز شدن دستگاه منطبق بر امتداد شاقولی خواهد بود. **محور ثانویه یا محور گردش تلسکوپ**<sup>۲</sup> در صفحه افق واقع است و بنابراین بر محور اصلی عمود است، این محور در حقیقت محوری است که لوله تلسکوپ حول آن می چرخد. **محور دیدگانی**<sup>۳</sup> امتدادی است که از محل تقاطع تارهای نشانه روی (رتیکول) و مرکز عدسی شیئی عبور می کند این محور همچنین از محل تقاطع محورهای اصلی و ثانویه عبور می کند و در صفحه ای قائم بر افق واقع می باشد که محور ثانویه بر آن صفحه عمود است. در یک حالت خاص که محور دیدگانی در صفحه افق قرار می گیرد و بر محور اصلی هم عمود می شود که به این حالت **امتداد کولیماسیون افق**<sup>۴</sup> گفته می شود. امتداد کولیماسیون افق در حقیقت فصل مشترک صفحه افق و صفحه قائمی است که محور دیدگانی را شامل می شود. دو نوع دوران برای محورها متصور است: **الف**- دوران محور دیدگانی حول محور ثانویه در صفحه قائم بر افق به منظور اندازه گیری زاویه قائم و نشانه روی ب- دوران محورهای دیدگانی و ثانویه در صفحه افق حول محور اصلی برای اندازه گیری زوایای افقی

با قرائت تصویر محور دیدگانی بر روی نقاله افقی (صفحه افق) زاویه افقی اندازه گیری می شود و با قرائت تصویر محور دیدگانی بر روی نقاله قائم (صفحه قائم بر افق و عمود بر محور گردش تلسکوپ) زاویه قائم اندازه گیری خواهد شد. بطور کلی خطاهای اندازه گیری زاویه را بر اساس ماهیت سیستماتیکی که دارند به سه دسته می توان تقسیم نمود:

**الف**- خطاهایی که با تنظیم و کالیبراسیون دستگاه قابل رفع یا کاهش هستند.

**ب**- خطاهایی که با انجام روشها و یا تکنیک های مشاهداتی خاص کاهش می یابند.

**ج**- خطاهایی که قابل مدلسازی ریاضی هستند و بایستی مقدار آنها محاسبه و به اندازه گیری اعمال گردد.

البته همانگونه که جلوتر نیز خواهیم دید بعضی از خطاهای گروه الف در گروه ب هم جای می گیرند و بعضی از خطاهای گروههای الف و ب در گروه ج هم می توانند حضور داشته باشند. یعنی این امکان وجود دارد که خطائی را که با تنظیم دستگاهی می توانیم مقدار آن را کاهش دهیم (البته به شرطی که اندازه آن خیلی بزرگ نباشد) با انجام روش مشاهداتی خاص حذف کرده و یا کاهش دهیم و همچنین برای بسیاری از خطاها می توان مدل ریاضی تهیه کرد و میزان اثر آنها را بر روی اندازه زوایای افق و قائم تخمین زد هر چند که این خطاها با روش های دیگری هم قابل کاهش باشند.

## ۲.۳. تنظیم و کالیبراسیون دستگاههای زاویه یاب

این امکان وجود ندارد که بتوانیم یک زاویه یاب را به گونه ای نگهداری کنیم که در همه شرایط روابط بین محورهای اساسی و سایر اجزای اصلی آن ثابت باقی بماند بلکه همواره این احتمال وجود دارد که روابط هندسی و فیزیکی بین اجزای مختلف دستگاه بهم بخورد و لازم است تا در دوره های زمانی معین دستگاه زاویه یاب بررسی و تنظیم گردد. خطاهایی که می توان با تنظیم و کالیبراسیون زاویه یاب مقدار آنها را به نحو قابل توجهی کاهش داد عبارتند از:

۱- خطای تراز افقی (عدم انطباق محور اصلی بر امتداد شاقولی)

۲- خطای کولیماسیون افق

۳- خطای ناشی از عدم تنظیم تارهای رتیکول

۴- خطای کولیماسیون قائم

۵- خطای فوکوسینگ و پارالاکس

۶- خطای شاقول اپتیکی

<sup>۱</sup> Vertical axis

<sup>۲</sup> Trunnion axis

<sup>۳</sup> Line of sight

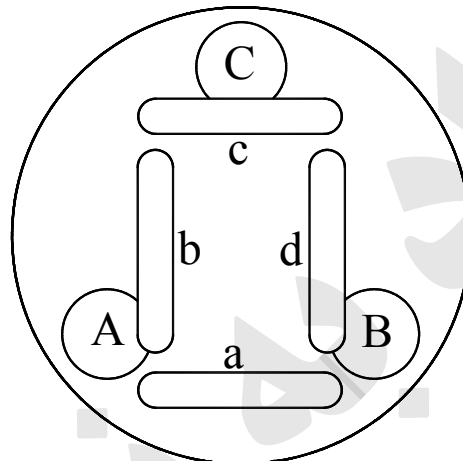
<sup>۴</sup> Line of horizontal collimation

برای حذف و یا کاهش دادن هر کدام از این خطاها روشهای مختلفی وجود دارد که در این بخش به توضیح مختصر آنها می پردازیم.

### ۳.۲.۱. تنظیم تراز افقی

در عموم دستگاههای زاویه یاب معمولاً دو نوع تراز وجود دارد یکی تراز کروی است که با استفاده از پیچ های سه پایه تنظیم می شود و برای تنظیم اولیه کاربرد دارد و دیگری تراز میله ای شکل افقی است که بر روی آلیداد قرار دارد و با استفاده از پیچهای پایه<sup>۵</sup> ترابراک<sup>۶</sup> تنظیم می شود و برای تراز دقیق دستگاه کاربرد دارد. تنظیم تراز افقی برای اطمینان از قائم بودن محور اصلی دستگاه بر صفحه افق صورت می گیرد بر این اساس صفحه شامل تراز میله ای افقی باید عمود بر محور اصلی باشد (بنابراین فقط با این تراز سروکار داریم). مراحل انجام کار به شرح ذیل است :

- ۱- استقرار دستگاه بر روی سه پایه و تراز نمودن تراز کروی با استفاده از پیچهای سه پایه
- ۲- قرار دادن آلیداد در راستائی که تراز میله ای موازی دو پیچ از سه پایه قرار گیرد، مثلاً پیچهای A و B (شکل ۳-۲) که در این حالت تراز میله ای در موقعیت a قرار خواهد گرفت و سپس حساب تراز میله ای را با چرخاندن پیچهای A و B در خلاف جهت یکدیگر به وسط می آوریم.

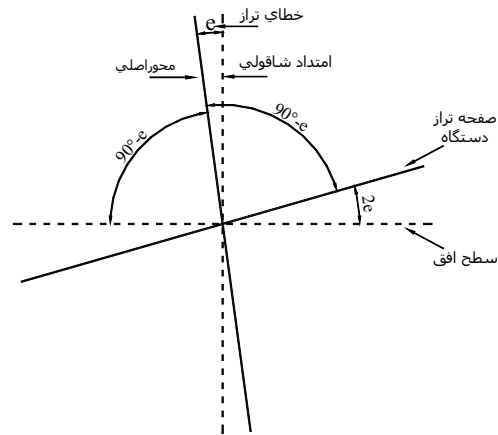


شکل ۳-۲: وضعیت های مختلف قرار گرفتن تراز میله ای برای تنظیم تراز دستگاه

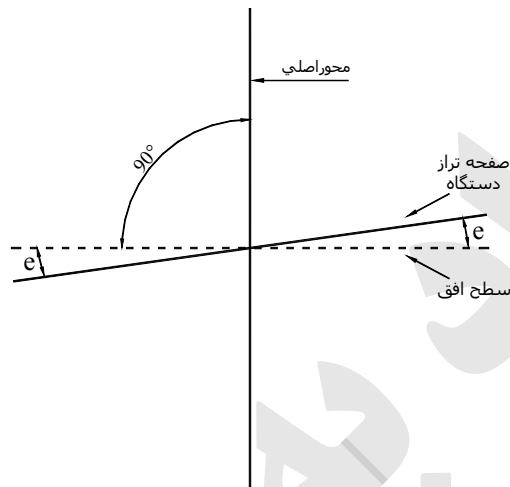
- ۳- آلیداد را به اندازه ۹۰ درجه می چرخانیم به طوری که در راستای پیچ سوم (C) قرار بگیرد و تراز میله ای در وضعیت b قرار می گیرد با استفاده از پیچ پایه C دستگاه را تراز می کنیم.
- ۴- آلیداد را ۱۸۰ درجه نسبت به حالت ۲ می چرخانیم تراز در وضعیت C قرار می گیرد اگر حساب در وسط قرار گرفت دستگاه تنظیم است و در غیر این صورت باید تنظیم شود (شکل ۳-۲ الف).
- ۵- هنگامی که تراز میله ای در وضعیت C قرار می گیرد (شکل ۳-۲) در شکل (۳-۳ الف) می توان دید که محور اصلی زاویه ای به اندازه e با امتداد قائم بر افق دارد و این در حالیکه صفحه تراز دستگاه نسبت به افق زاویه ای به اندازه e دارد. مقصود اصلی از این تنظیم آنست که از قائم بودن محور اصلی بر صفحه افق مطمئن شویم که این کار با آوردن حساب تراز به اندازه نصف به سمت وسط با استفاده از پیچهای پایه A و B انجام می پذیرد (شکل ۳-۳ ب).

<sup>۵</sup> Foot screws

<sup>۶</sup> Tribrach

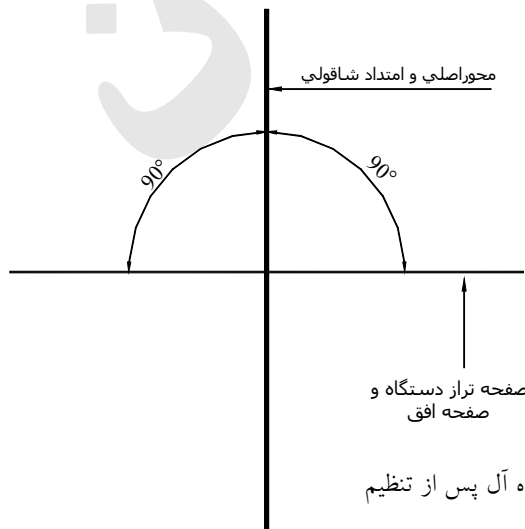


شکل (۳-۳ الف): خطای تراز و تاثیر آن بر انحراف محور اصلی از امتداد شاقولی



شکل (۳-۳ ب): حذف خطای شاقولی با استفاده از پیچهای پایه

- ۶- در این مرحله با استفاده از آچار مخصوص و چرخاندن پیچهای خارمانندی که در کنار پیچهای پایه A و B قرار دارد حباب را به وسط تراز می آوریم به این صورت خطای تراز در این راستا حذف می گردد (شکل ۳-۳ ج).
- ۷- با چرخاندن آلیداد به اندازه  $270^\circ$  درجه نسبت به وضعیت اولیه، تراز میله ای را در وضعیت d قرار می دهیم و به همان روش قبلی نیمی از تراز را با پیچ C و نیم دیگر را با چرخاندن پیچ خاری مربوط به پایه C انجام می دهیم. در این حالت تراز دستگاه تنظیم شده است و آلیداد در هر وضعیتی که قرار بگیرد حباب در وسط تراز واقع خواهد شد (شکل ۳-۳ ج).



شکل (۳-۳ ج): وضعیت ایده آل پس از تنظیم

## ۳.۲.۲. حذف خطای کلیماسیون افقی

خطای کلیماسیون افقی عبارتست از خطای ناشی از عمود نبودن محور گردش تلسکوپ (ثانویه) بر صفحه قائمی که شامل محور دیدگانی می شود و یا می توان گفت خطای کلیماسیون افقی در اثر عمود نبودن امتداد کلیماسیون افق (شکل ۳-۱) بر محور ثانویه بوجود می آید. این خطا را می توان با انجام تنظیمات دستگاهی بنحو قابل توجهی کاهش داد، توجه به این نکته ضروری است که تنظیم کلیماسیون افقی را پس از انجام تنظیم تراز دستگاه و حصول اطمینان از قائم بودن محور اصلی باید انجام داد. روش حذف خطای کلیماسیون افقی به شرح زیر است:

۱- زاویه یاب را مستقر کرده و آنرا تراز می کنیم.

۲- علامت نشانه ای<sup>۷</sup> را در فاصله نسبتاً دوری از زاویه یاب و با اختلاف ارتفاعی کم نسبت به نقطه استقرار دستگاه انتخاب کرده و به سمت آن قراولروی می کنیم. قرائت زاویه افق را در حالت دایره به چپ<sup>۸</sup> (F.L.) انجام می دهیم.

۳- با چرخاندن لوله تلسکوپ به اندازه ۱۸۰ درجه و قراولروی مجدد زاویه افق را در حالت دایره به راست<sup>۹</sup> (F.R.) قرائت کنید.

۴- دو قرائت انجام شده با یکدیگر تفاوت داشته باشند و در غیر این صورت وجود خطای کلیماسیون افقی به اثبات می رسد. تصور کنید که قرائت های (F.L.) و (F.R.) بیشتر یا کمتر از نیم دایره اختلاف داشته باشند مثلاً:

"209°42'12" (F.L.) → و "29°41'40" (F.R.) →، اختلاف این دو زاویه "180°00'32" است و بنابراین انحراف امتداد

کلیماسیون نسبت به امتداد قائم بر محور ثانویه به اندازه  $\frac{1}{2}(32")$  یعنی (16") خواهد بود که این همان مقدار خطای کلیماسیون

افقی می باشد. بر این اساس در صورت عدم وجود خطای کلیماسیون افقی قرائت ها باید به صورت ذیل باشد:

$$(F.L.) \quad 209^{\circ}42'12'' - 16'' = 209^{\circ}41'56''$$

$$(F.R.) \quad 29^{\circ}41'40'' + 16'' = 29^{\circ}41'56''$$

۵- در حالیکه زاویه یاب هنوز در حالت دایره به راست قرار دارد و تنظیم آن به هم نخورده است با استفاده از پیچ میکرومتر و پیچ حرکت بطئی لمب افق زاویه را به "29°41'56" تغییر دهید که اینکار باعث خواهد شد تار قائم از روی علامت نشانه کنار برود.

۶- تار رتیکول قائم را با استفاده از پیچ مخصوص طوری جابجا کنید که دقیقاً بر روی علامت نشانه قرار بگیرد. با انجام اینکار امتداد کلیماسیون در امتداد عمود بر محور ثانویه قرار خواهد گرفت.

۷- مراحل ۲ و ۳ را برای مقادیر دیگری از زاویه افق تکرار کنید و در صورت مشاهده اختلاف قابل توجه نسبت به ۱۸۰ درجه مجدداً مراحل بعدی را تکرار کنید. خطای کلیماسیون افق را بطور کامل نمی توان حذف کرد و فقط می شود مقدار آنرا به طرز قابل توجهی کاهش دهیم، بطور کلی اختلاف F.L. و F.R. از ۱۸۰ درجه به اندازه "5" برای دوربینی با دقت "1" و یا "30" برای دوربینی با دقت "20" قابل قبول است و نیازی به تنظیم کلیماسیون افقی نیست.

## ۳.۲.۳. توجیه تارهای نشانه روی

تنظیم قبلی لزوم تغییر مکان تارهای رتیکول را ایجاد می نمود بنابراین لازم است این مسئله تحقیق شود که آیا واقعا تار قائم در صفحه ای عمود بر محور ثانویه واقع می باشد؟ مراحل تنظیم به شرح ذیل است:

۱- دوربین را با دقت مستقر کرده و تراز نمائید.

۲- نشانه ای را شبیه به آنچه که در تنظیم قبلی انجام داده شد انتخاب نمائید و تار قائم را روی آن قرارد دهید.

<sup>۷</sup> Target

<sup>۸</sup> Face left

<sup>۹</sup> Face right The if



- ۳- با استفاده از پیچ حرکت بطئی قائم امتداد محور دیدگانی را حول محور ثانویه دوران دهید اگر در تمامی حالات تار قائم بر روی نشانه قرار گرفت نیازی به توجیه تار نیست و اشکالی وجود نخواهد داشت.
- ۴- اگر تار قائم از روی نشانه کنار می رود با چرخاندن پیچهای قفل رتیکول آن را شل کنید و رتیکول را طوری دوران دهید که تار قائم آن در جهت کاملاً عمودی قرار گیرد و با دوران محور دیدگانی حول محور ثانویه تار قائم از روی علامت نشانه کنار نرود. مجدداً پیچهای مربوط به قفل رتیکول را سفت کنید.
- ۵- آزمایش را تا حصول قطعی نتیجه تکرار نمایید.
- اگر این تنظیم را بعد از تنظیم کلیماسیون افق انجام می دهید لازم است تا یکبار از عدم وجود خطای کلیماسیون افقی پس از توجیه تارهای رتیکول مجدداً اطمینان پیدا کنید. توجه داشته باشید که برای این تنظیم از دوران تارهای عمود بر هم استفاده می شود و هر تار مستقل از تار دیگر قابلیت دوران ندارد و مسئولیت عمود بودن تارها بر یکدیگر به عهده کارخانه سازنده است.

### ۳. ۲. ۴. حذف خطای کلیماسیون قائم

- این تنظیم باید هنگامی انجام شود که تنظیم بند های ۲. ۲. ۳ و ۳. ۲. ۳ برای تاررتیکول انجام شده باشد. تنظیم کلیماسیون قائم و یا تنظیم صفر لمب قائم برای حصول اطمینان از این مطلب انجام می شود که در هنگامی که زاویه شیب صفر قرائت می گردد (و یا زاویه قائم ۹۰ درجه خوانده می شود) محور دیدگانی در صفحه افق واقع باشد یا به عبارت دیگر امتداد کلیماسیون افقی دقیقاً عمود بر محور اصلی (امتداد شاقولی) قرار گرفته باشد. روش کار به شرح ذیل است:
- ۱- دستگاه را با دقت مستقر نموده و تراز کنید.
  - ۲- نشانه ای را در فاصله ای نسبتاً دور انتخاب کنید بطوری که حدود چند درجه ای نسبت به امتداد افق بالاتر و یا پائین تر باشد و بعلاوه برای نشانه روی به منظور تنظیم دقیق تار رتیکول افقی روی آن مناسب باشد. تار افق را در حالت دایره به چپ (F.L.) روی علامت نشانه تنظیم نموده و تراز لویبائی را (در صورت وجود) تنظیم نمائید سپس زاویه قائم را قرائت کنید.
  - ۳- مرحله ۲ را این بار برای حالت دایره به راست (F.R.) تکرار نمایید.
  - ۴- اگر خطای کلیماسیون قائم وجود نداشته باشد زاویای شیب بدست آمده از قرائت های چپ و راست با یکدیگر مساوی خواهند بود و اگر این دو زاویه مساوی نباشند مقدار میانگین این دو زاویه صحیح تلقی می شود و مقدار خطای کلیماسیون قائم عبارت از تفاوت بین میانگین و هریک از زاویای شیب اندازه گیری شده خواهد بود. برای مثال فرض کنید:

$$(F.L.) \rightarrow 92^{\circ}14'30''$$

$$(F.R.) \rightarrow 267^{\circ}43'48''$$

- توجه کنید که در اینجا مجموع قرائت های زاویه قائم در حالت های دایره به چپ و دایره به راست باید ۳۶۰ درجه بشود. مقادیر زاویای شیب قرائت شده به قرار ذیل خواهد بود:

$$(F.L.) \rightarrow -2^{\circ}14'30''$$

$$(F.R.) \rightarrow -2^{\circ}16'12''$$

- مقدار میانگین  $2^{\circ}15'21'' -$  است و بنابراین خطای کلیماسیون قائم  $51''$  می باشد. روش دیگر این است که F.L. و F.R. را با هم جمع کرده و از ۳۶۰ درجه کم می کنیم و سپس حاصل تقسیم بر دو می شود:

$$[360^{\circ} - (92^{\circ}14'30'' + 267^{\circ}43'48'')] / 2 = 51''$$

- ۵- پس از بدست آوردن مقدار خطا در حالیکه زاویه یاب هنوز در وضعیت دایره به راست قرار دارد تصحیح را به زاویه قرائت شده اعمال می کنیم و با پیچاندن حرکت بطئی قائم و تنظیم توسط میکرومتر کاری می کنیم که زاویه صحیح قرائت شود، در مثال مطرح شده داریم:
- $$270^{\circ} - 2^{\circ}15'21'' = 267^{\circ}44'39''$$

- ۶- عمل فوق باعث می شود که تار افق نسبت به علامت نشانه تغییر کند و بسته به تصحیح اعمال شده بالاتر و یا پایین تر قرار بگیرد، حال با پیچاندن پیچ تنظیم تار افق توسط آچار مخصوص کاری می کنیم که تار افق دقیقاً بر روی علامت نشانه قرار بگیرد.
- ۷- این عملیات را با یک نشانه دیگر تکرار می کنیم تا هنگامی که مقدار خطا به حد استاندارد ذکر شده در بند ۲.۲.۳ برسد.

### ۳.۲.۵. تنظیم عدسی چشمی و حذف پارالاکس

منظور از این دو تنظیم اولاً تنظیم عدسی چشمی تلسکوپ است بطوری که تصویر رتیکول بین یک نقطه نزدیک و یک نقطه دور نسبت به مشاهده کننده قرار بگیرد و ثانیاً تصویر میانی<sup>۱۱</sup> (جلوتر توضیح داده می شود) در صفحه رتیکول واقع گردد.

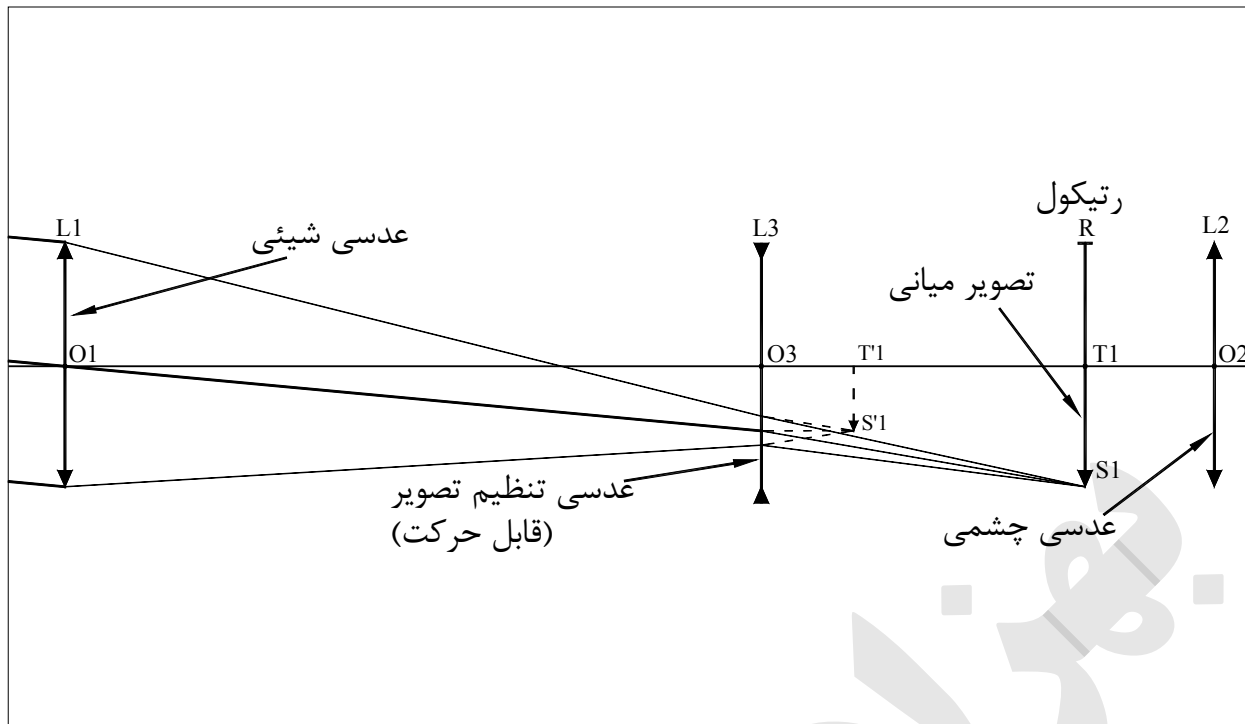
**الف- تنظیم چشمی:** اگر عدسی چشمی به تدریج از موقعیت داخلی خودش به سمت بیرون پیچانده شده باشد، مشاهده کننده متوجه این اتفاقات می شود: تارهای متقاطع رتیکول با نگاه اول قابل رویت نیستند و وقتی که با گرداندن پیچ تنظیم ظاهر می شوند و به تدریج پررنگ تر و بهتر دیده می شوند، این وضعیت مدت زمان کوتاهی ادامه پیدا می کند و به تدریج کمرنگ و غیر قابل رویت می شوند. هنگامی که چشمی به سمت خارج چرخانده می شود تصویر تار رتیکول از جلوی چشم مشاهده کننده به سمت عقب حرکت می کند و هنگامی که تصویر نقطه ای نزدیک رویت می شود رتیکول واضح است و به محض دور شدن تصویر رتیکول تار می شود. برای راحتی چشم مشاهده کننده و فشار نیامدن به ماهیچه های قرنیه چشم لازم است که تصویر تارهای رتیکول همواره در نقطه ای دور از مشاهده کننده باشد، مراحل بدست آوردن شرایط مطلوب برای مشاهده به این شرح است:

- ۱- تلسکوپ را به سمت نقطه ای در آسمان نشانه روی کنید و یا با نگاهداشتن یک دست در فاصله ای کوتاه جلوی عدسی شیئی تصویری با روشنایی یکنواخت بدست آورید.
- ۲- پیچ عدسی چشمی را طوری بپیچانید که در داخلی ترین وضعیتش قرار بگیرد و سپس به تدریج آنرا بچرخانید تا به سمت خارج بیاید تا هنگامی که تارهای رتیکول به وضوح دیده شوند.
- ۳- به این کار ادامه دهید تا هنگامی که تصویر رتیکول مجدداً از حالت وضوح خارج شده و به سمت تار شدن گرایش پیدا کند، حال پیچ تنظیم را در خلاف جهت قبل بپیچانید تا مجدداً تصویر واضح دیده شود. به عددی را که بروی درجه بندی پیچ تنظیم عدسی چشمی قرائت می شود توجه کرده و آنرا به خاطر بسپارید یا جایی یادداشت کنید. با داشتن این عدد می توانید هر دفعه قبل از شروع به کار پیچ چشمی را روی آن تنظیم کنید. این تنظیم و کلیه مشاهداتی که با زاویه یاب یا تراز یاب انجام می شوند باید در حالی که هر دو چشم باز هستند انجام شوند که این کار باعث کمتر خسته شدن و فشار نیامدن به عضلات و ماهیچه های چشم می شود و البته این کار نیاز به تمرین دارد.

**ب- تنظیم تصویر میانی (حذف پارالاکس):** شکل (۳-۴) بصورت ساده ساختمان نوری دستگاه زاویه یاب را نشان می دهد که تشکیل شده است از عدسی شیئی، عدسی چشمی و عدسی تنظیم تصویر<sup>۱۱</sup>، پرتوهای موازی از شیئی که در فاصله ای دور قرار گرفته  $ST$  ابتدا به عدسی شیئی که همگرا است برخورد کرده و تصویر حقیقی و معکوس  $T_1'S_1'$  را ایجاد می کنند به منظور بوجود آوردن امکان تنظیم تصویر نقاط در فواصل مختلف دور و نزدیک، عدسی واگرای  $L_3$  در تلسکوپ تعبیه شده است و این باعث می شود که تصویر میانی  $T_1'S_1'$  در محل صفحه تار رتیکول تشکیل گردد. اگر که تصویر میانی در صفحه تارهای رتیکول واقع شود، آنگاه مشاهده کننده می تواند تصویر را به سادگی و کاملاً واضح ببیند. در غیر این صورت بین تصویر میانی و تار رتیکول اختلاف منظر (پارالاکس) وجود خواهد داشت.

<sup>۱۱</sup> Intermediate image

<sup>۱۱</sup> Focusing lens



شکل (۳-۴) : ساختار اپتیکی تلسکوپ دستگاه زاویه یاب

تنظیم حذف پارالاکس بعد از تنظیم عدسی شیئی انجام می شود و مراحل آن به ترتیب زیر می باشد :

- ۱- نشانه را در میدان دید پیدا کنید
  - ۲- با ثابت نگاهداشتن چشم بر روی تارهای رتیکول پیچ تنظیم تصویر را طوری بچرخانید که تصویر علامت نشانه کاملاً واضح گردد.
  - ۳- تنظیم نهائی مربوط به پیچ تنظیم تصویر را انجام دهید به گونه ای که وقتی چشم به آرامی از یک گوشه تصویر به گوشه دیگر حرکت می کند، هیچ حرکت نسبی بین تصویر علامت نشانه و تصویر تارهای رتیکول دیده نشود (اختلاف منظر بین تصویر این دو وجود نداشته باشد). عدم وجود اختلاف منظر به منزله قرار گرفتن دو تصویر در یک صفحه می باشد.
- اگر علائم نشانه در فواصل نسبتاً دوری واقع باشند، رفع پارالاکس برای یکی از آنها، پارالاکس را برای بقیه هم حذف خواهد کرد ولی اگر نشانه در فاصله نزدیک (۳۰متر و کمتر) باشد انجام این تنظیم برای هر بار نشانه روی الزامی است.

### ۳. ۲. ۶. تنظیم شاقول نوری<sup>۱۲</sup>

در زاویه یابها بسته مدل و نوع و دقت آنها شاقول های مختلفی ممکن است وجود داشته باشد که در بخشهای بعدی راجع به دقت آنها صحبت خواهد شد ولی در اکثر زاویه یابهای دقیق شاقول نوری وجود دارد که در این بخش به بررسی نحوه تنظیم آن می پردازیم. هدف از این تنظیم در امتداد قرار دادن راستای شاقول نوری بر محور اصلی است. بطور کلی برای تنظیم شاقول نوری دو حالت وجود دارد، یکی برای دستگاههایی که شاقول نوری آنها بر روی آلیداد قرار گرفته است و دیگری برای دستگاههایی که شاقول نوری آنها روی ترابراک واقع شده است.

<sup>۱۲</sup> Optical plummet

**حالت اول:** ابتدا دستگاه را روی یک زمین صاف و مسطح مستقر می کنیم و آنرا به دقت تراز می نماییم. سپس قطعه ای کاغذ سفید را بروی زمین زیردستگاه، طوری می چسبانیم که دقیقاً زیر شاقول نوری قرار بگیرد و توجه کنید که کاغذ نباید در طول این تنظیم به هیچ وجه کوچکترین جابجائی پیدا کند. به کمک یک نفر دیگر بر روی کاغذ و دقیقاً در محل تقاطع تارهای شاقول با مداد علامت گذاری می کنیم. آلیداد را به اندازه ۱۸۰ درجه حول محور اصلی دوران می دهیم با انجام این کار محور شاقولی نیز دوران خواهد کرد و اگر واقعا قائم باشد مجدداً محل تقاطع تارهای آن بروی نقطه ای که بر روی کاغذ مشخص کرده ایم می افتد در غیر اینصورت محل جدید قرار گرفتن این نقطه را روی کاغذ علامت گذاری می کنیم و نقطه وسط بین دو نقطه نشانه گذاری شده را روی کاغذ مشخص می کنیم و با چرخاندن پیچ تنظیم شاقول نوری توسط آچار مخصوص کاری می کنیم که محل تقاطع تارها بر روی این نقطه قرار گیرد.

**حالت دوم:** اگر شاقول نوری بر روی تراپراک واقع شده باشد (مانند T<sub>2</sub>-WILD)، دوران دادن آلیداد به تنظیم شاقول نوری کمکی نخواهد کرد، برای تنظیم شاقول نوری این نوع از دستگاهها روش های مختلفی وجود دارد که بیشتر آنها نیاز به ابزار کارگاهی دارند یکی از این روشها استفاده از ظرف جیوه است، در این روش ظرف جیوه در زیر دستگاهی که به دقت مستقر و تراز شده است قرار می گیرد با استفاده از خاصیت انعکاس نور توسط جیوه و در سطح افق قرار گرفتن اتوماتیک آن، توسط پیچ تنظیم شاقول محل تقاطع تارهای شاقول دقیقاً بر روی مرکز عدسی شیئی شاقول نوری قرار داده می شود. روش دیگری نیز وجود دارد که از دقت کمتری برخوردار است ولی برای تنظیم شاقول نوری در سرزمین مناسب است در این روش پس از استقرار و تراز دستگاه به همان روش حالت اول کاغذی را بروی زمین می چسبانیم و علامت گذاری می کنیم با استفاده از یک مداد نرم و با دقت تمام دور تراپراک را روی صفحه سه پایه علامت گذاری می کنیم طوری که اگر دستگاه از روی سه پایه برداشته شد کاملاً محل قرار گرفتن آن معلوم شود سپس با شل کردن پیچ قفل سه پایه تراپراک را به آرامی و به اندازه ۱۲۰ درجه می چرخانیم به گونه ای که دقیقاً در محل علامت گذاری قرار بگیرد و مجدداً مراحل قبل را تکرار نموده و بر روی کاغذ نشانه گذاری می کنیم دوباره تراپراک را ۱۲۰ درجه می چرخانیم و این عمل را تکرار می کنیم در صورتی نقاط نشانه گذاری شده بر روی کاغذ روی یکدیگر قرار بگیرند نیازی به تنظیم نیست و حالت دیگر اینست که سه نقطه مجزا از یکدیگر خواهیم داشت که در این صورت مرکز ثقل مثلث را بدست آورده و علامت گذاری می کنیم و با استفاده از پیچ مخصوص تنظیم، محل تقاطع تارها را روی مرکز ثقل مثلث قرار می دهیم.

توجه داشته باشید که این تنظیم باید بعد از تنظیم تراز انجام شود و تراز نمودن دقیق دستگاه در کلیه مراحل از اهمیت ویژه ای برخوردار است.

### ۳.۳. روشهای مشاهداتی خاص برای اندازه گیری زاویه

روشهای مشاهداتی خاص به آن دسته از روشها یا تکنیک هایی اطلاق می گردد که به کمک آنها می توان تعدادی از خطاهای مربوط به فرآیند اندازه گیری را اعم از اینکه عامل انسانی، دستگاهی و یا محیطی داشته باشند، کاهش داده و یا حذف نمود. این روشها معمولاً پس از بررسی دقیق توسط سازندگان دستگاهها و متخصصین فن به صورت دستور العمل برای اندازه گیری ارائه می شوند که رعایت آنها برای عوامل اندازه گیری ضروری است. در ارتباط با زاویه یاب، خطاهائی را که با استفاده از روشهای مشاهداتی خاص می توان حذف نمود عمدتاً خطاهای دستگاهی هستند این خطاها را به دو گروه می توان تقسیم نمود: خطاهائی که قابلیت تنظیم و کاهش آنها توسط نقشه بردار، از طرف کارخانه سازنده دستگاه تدارک دیده شده است و قابل تنظیم می باشند و خطاهائی که عامل درون دستگاهی دارند و قابل حذف توسط عامل استفاده کننده از دستگاه نمی باشند. خطاهای دستگاهی نوع اول را در بخش قبل بررسی کردیم، خطاهای درون دستگاهی به ماهیت و ساختمان دستگاه و دقت تدارک دیده شده برای اندازه گیری

توسط کارخانه سازنده بستگی دارند و اغلب اثر بسیار کمی بر روی مشاهدات نقشه برداری دارند و تنها راهی که برای مقابله با این خطاها وجود دارد روشهای مشاهداتی خاص می باشد، تعدادی از این خطاها که دارای اهمیت بیشتری هستند و همچنین روش حذف آنها در جدول (۱-۳) آمده است:

نام و شرح خطا	روش کاهش یا حذف خطا
۱- خطای عمود نبودن محور ثانویه بر محور اصلی	مشاهدات را به صورت دایره به چپ و دایره به راست قرائت کنید (روش کوپل).
۲- خطای عمود نبودن صفحه های لمب افق و لمب قائم بر محورهای اصلی و ثانویه	در عمل اندازه این خطا کوچک و قابل اغماض است ولی اگر وجود چنین خطائی در حد قابل توجه به اثبات برسد نباید از زاویه یاب استفاده کرد و باید به موسسات تنظیم دستگاه تحویل داده شود.
۳- خطای خروج از مرکزی لمب	مشاهدات را به صورت دایره به چپ و دایره به راست قرائت کنید (روش کوپل).
۴- خطای درجه بندی لمب	زاویه را چند بار و در درجات مختلف قرائت کنید و از آنها میانگین بگیرید.
۵- خطای استرین محوری <sup>۱۳</sup>	مشاهدات را در چند سری و به صورت مستقل از یکدیگر انجام دهید و پس از انجام هر دسته از مشاهدات ترابراک را بر روی سه پایه یا پیلار به اندازه ۱۲۰ درجه بچرخانید.

جدول (۱-۳): خطاهای درون دستگاهی

بعضی از خطاهائی که با تنظیم دستگاهی کاهش می یابند را با انجام روشهای مشاهداتی خاص می توان حذف نموده و مقدار آنها را به حداقل ممکن رساند. این خطاها عبارتند از خطاهای کلیماسیون افق و قائم که با مشاهده زاویه به روش کوپل و میانگین گیری از قرائت های دایره به چپ و دایره به راست حذف می شوند و خطای توجیه تاررتیکول که با قراولروی و تقاطع دادن همان نقطه از تاررتیکول با علامت نشانه در حالت های دایره به چپ و دایره به راست و سپس میانگین گیری از حاصل آن حذف می گردد.

برای انجام هر پروژه نقشه برداری با توجه به دقتی که برای اندازه گیری زاویه مورد نظر ماست می توانیم هریک از خطاهای دستگاهی یا محیطی را مورد توجه قرار بدهیم یا اینکه با توجه به برآوردی که از اثر آن خطا بر روی زاویه مورد نظر می توانیم داشته باشیم (مدلسازی ریاضی خطا) می توانیم از آن خطا صرفنظر کرده و روش مشاهداتی مربوط به آن خطا را استفاده نکنیم بنابراین دقت از پیش تعیین شده برای اندازه گیری زاویه است که تا حدودی تعیین می کند روش مشاهداتی خاصی را بکار بگیریم یا خیر؟ البته رعایت روشهایی که تاثیر زیادی بر دقت اندازه گیری می گذارند (مانند کوپل کردن و میانگین گیری) به هیچ وجه قابل چشم پوشی نیست. تجربه نشان داده است که با اتخاذ یک سری روشها و دستور العملهای خاص می توان بسیاری از خطاها را به نحو قابل توجهی تقلیل داد. رعایت موارد عمومی که در صفحه بعد ذکر می شود، برای انجام هر مشاهده زاویه ای ضروری است و بهتر است دقیقاً رعایت گردد.

<sup>۱۳</sup> Axis strain

- ۱- هر چقدر مشاهدات سریعتر انجام شوند نتایج بهتر و با ثبات تری<sup>۱۴</sup> بدست می آیند. اگر سه پایه چوبی باشد تغییرات درجه حرارت و رطوبت ممکن است باعث شود بتدریج دستگاه از حالت تراز و همچنین سانتراژ خارج شود و یا اینکه سه پایه ممکن است نشست کند و باعث اینگونه خطاها بشود و اگر که مدت زمان زیادی برای یک دور قرائت زاویه صرف شود احتمال ورود یک خطای سیستماتیک وابسته به زمان در مشاهدات قوت خواهد گرفت.
- ۲- زاویه یاب به هیچ وجه در طول انجام مشاهدات نباید مجددا تراز شود یا مجددا سانتراژ گردد و پیش از انجام یک دسته از مشاهدات حتما باید تراز بودن و سانتراژ دستگاه کنترل گردد.
- ۳- هیچ احتیاجی به محکم نمودن پیچ قفل لمب های افق و قائم بیش از حد معمول نیست زیرا که این کار باعث تکان خوردن قسمت های مختلف اپتیکی و مکا نیکی دستگاه و در نتیجه وارد شدن خطا در مشاهدات می گردد.
- ۴- از زاویه یاب باید به آرامی و دقت استفاده شود و در حین انجام مشاهدات، مشاهده کننده نباید به سه پایه دست بزند و همینطور در هنگام استقرار سه پایه باید جای آن را طوری محکم کرد که بعدا به راحتی تکان نخورد.
- ۵- چرخاندن پیچهای مربوط به حرکت بطئی لمب، میکرومتر، تلسکوپ، تراز لوبیائی و غیره باید به آرامی و حتما در خلاف جهت عقربه های ساعت باشد تا از خطاهای جزئی مربوط به آنها پرهیز گردد.
- ۶- برای بدست آمدن نتایج مطلوب، زوایای افقی و قائم باید جدای از یکدیگر قرائت بشوند و در صورت امکان زوایای قائم برای فواصل بیش از یک کیلومتر در اول بعد از ظهر هنگامی که شرایط جوی ثابت است و انکسار در حداقل مقدار است، انجام شوند.
- ۷- زاویه یاب باید در یک ارتفاع مناسب برای عامل مشاهده کننده نصب شود و اگر ارتفاع دستگاه خیلی بیشتر و یا خیلی کمتر از قد عامل باشد، دقت اندازه گیری مورد تردید قرار می گیرد.
- ۸- اگر مشاهده کننده شخصی بعنوان نویسنده در اختیار دارد آنگاه باید اطمینان حاصل کند که نویسنده قرائت ها را در حین انجام شدن برای یافتن اشتباهات احتمالی کنترل می کند.
- ۹- پس از پایان انجام قرائت ها و پیش از جمع کردن دوربین از روی سه پایه بهتر است چند دقیقه ای وقت صرف چک کردن قرائت ها و اعمال تصحیحات احتمالی بشود زیرا که بازگشتن به ایستگاه و تنظیم مجدد دستگاه، زمان و هزینه اضافی تحمیل خواهد کرد.
- ۱۰- هنگامی که قصد دارید زاویه افقی را بین بیش از دو ایستگاه اندازه گیری کنید بهتر است ایستگاهی را که قابل نشانه روی بهتر است به عنوان مبدا مشاهدات امتدادی انتخاب کنید.
- ۱۱- با توجه به فاصله اندازه گیری نشانه ها باید به گونه ای انتخاب شوند که هنگامی که نشانه روی به سمت آنها انجام می شود کلفتی علامت نشانه از کلفتی تار رتیکول بیشتر نباشد.
- ۱۲- برای اندازه گیری های دقیق، در حالت دایره به چپ وقتی قفل آلیداد باز می شود آلیداد باید به صورتی چرخانده شود که قسمت چشمی تلسکوپ به سمت راست حرکت کند ( یعنی وقتی از بالا نگاه می کنیم در جهت عقربه های ساعت چرخانده شود) و بالعکس، این کار باعث می شود که از تغییرات ناگهانی در توجیه محور اصلی پرهیز گردد.

<sup>۱۴</sup> Consistent results

## ۴.۳. مدل ریاضی خطاهای اندازه گیری زاویه

اثر بیشتر خطاهای اندازه گیری زاویه را می توان با تشکیل مدل ریاضی آنها بر روی زوایای اندازه گیری شده برآورد نمود، در این بخش به تشکیل مدل ریاضی برای خطاهایی می پردازیم که اثر بیشتر و موثرتری بر روی اندازه گیری زوایا دارند و رفع بعضی از آنها به روشهایی که در بخشهای قبل گفته شد به طور کامل میسر نیست. با تشکیل مدل ریاضی خطاها و برآورد مقدار این خطاها می توانیم دقت اندازه گیری دستگاه را تعیین کنیم. خطاهایی را که در این بخش به بررسی آنها می پردازیم عبارتند از:

۱- خطای تراز کردن

۲- خطای نشانه روی<sup>۱۵</sup>

۳- خطای قرائت کردن

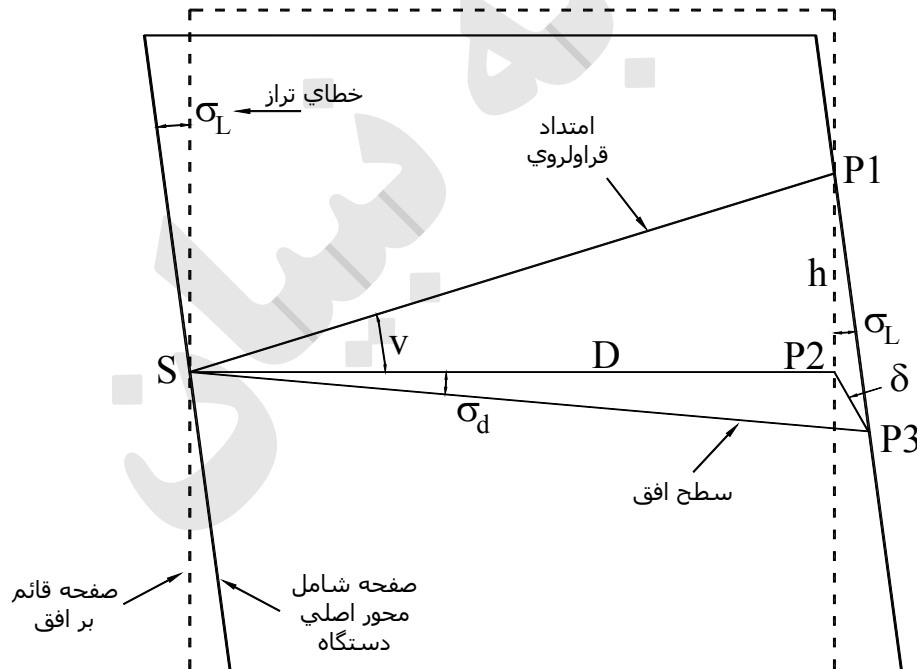
۴- خطای ایستگاه گذاری

۵- خطای انکسار

بیشتر خطاهایی که در ارتباط با دستگاه زاویه یاب وجود دارند بر روی زاویه افقی تاثیر می گذارند و تاثیر اغلب آنها بر روی زاویه قائم اغلب ناچیز و قابل صرف نظر کردن است به همین جهت اثر خطاها را بر روی زاویه افقی بررسی می کنیم.

## ۴.۳.۱. خطای تراز کردن

اگر خطای تراز (انحراف محور اصلی از امتداد شاقولی) به اندازه  $\sigma_L$  وجود داشته باشد، آنگاه صفحه ای که شامل محور دیدگانی می گردد نسبت به حالت قائم انحراف  $\sigma_L$  خواهد داشت (شکل ۳-۵).



شکل ۳-۵: خطای تراز و تاثیر آن بر اندازه گیری زوایای افقی

<sup>۱۵</sup> Pointing error

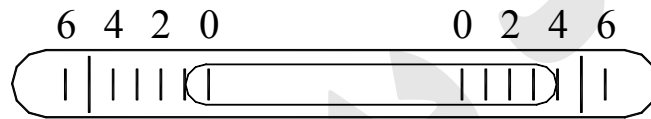
همانطوری که در شکل (۳-۵) ملاحظه می گردد در صورت وجود اختلاف ارتفاع بین ایستگاه اندازه گیری (S) و نقطه نشانه روی (P۱)، انحراف محور اصلی از امتداد شاقولی باعث بوجود آمدن انحراف در تصویر امتداد قراولروی بر روی صفحه افق می شود. میزان این انحراف در امتداد افقی را با  $\sigma_d$  نمایش می دهیم. مطابق شکل :

$$\begin{aligned} h &= D \tan(v) \\ \delta &= h \sigma_L = D \tan(v) \sigma_L \quad (1-3) \\ \sigma_d &= \frac{\delta}{D} = \sigma_L \tan(v) \end{aligned}$$

در رابطه فوق  $h$  اختلاف ارتفاع بین دو نقطه،  $D$  فاصله بین دو نقطه و  $v$  زاویه شیب بین دو نقطه است و همانطور که ملاحظه می شود اثر این خطا بر روی امتداد افق رابطه مستقیم با زاویه شیب و میزان خطا دارد. برای محاسبه اندازه خطای تراز  $\sigma_L$  از رابطه زیر استفاده می شود:

$$\sigma_L'' = \frac{(\Sigma L - \Sigma R)}{2n} c'' \quad (2-3)$$

که در آن  $\Sigma L$  مجموع قرائت های سمت چپ حساب تراز میله ای افقی و  $\Sigma R$  مجموع قرائت های سمت راست حساب تراز میله ای افقی می باشد،  $n$  تعداد دفعات اندازه گیریست و  $c''$  مقدار عددی یک تقسیم از تقسیمات تراز میله ای بر حسب ثانیه است و مقدار آن در دوربینهای دقیق معمولاً بین ۱۰ تا ۴۰ ثانیه می باشد. برای مثال در حالت نشان داده شده در شکل (۳-۶)  $L=1$  و  $R=4$  خوانده می شود و اگر  $c = 20''$  باشد برای یکبار اندازه گیری امتداد، خطای تراز  $\sigma_L = -30''$  است.



شکل ۳-۶: نحوه قرائت تراز میله ای افقی

با استفاده از روابط (۳-۱) و (۳-۲) می توان اثر خطای تراز بر روی اندازه گیری امتداد افقی را به صورت ذیل برآورد کرد:

$$\sigma_d'' = \frac{(\Sigma L - \Sigma R)}{2n} c'' \tan(v) \quad (3-3)$$

حال اگر بخواهیم زاویه ای افقی مانند  $\alpha$  را اندازه گیری کنیم (در صورتی که از مقدار خطای  $\sigma_L$  بی اطلاع باشیم و آنرا اتفاقی فرض کنیم)، با استفاده از قانون انتشار خطاها می توان اثر کلی خطای انکسار بر روی اندازه گیری زاویه افقی را به شکل ذیل محاسبه نمود:

$$\alpha = d2 - d1 \rightarrow \sigma_\alpha^2 = \sigma_{d1}^2 + \sigma_{d2}^2 = \sigma_L^2 (\tan^2(v_1) + \tan^2(v_2)) \quad (4-3)$$

که در این فرمول  $v_1$  و  $v_2$  زوایای شیب مربوط به دو امتداد اندازه گیری ( $d_1, d_2$ ) می باشند. آنچه که در روابط فوق کاملاً مشهود است بستگی کامل خطای تراز در راستای افق به اختلاف ارتفاع بین ایستگاه اندازه گیری و نقاط نشانه است بنابراین در صورتی که اندازه گیری در مناطق کوهستانی و با شیب زیاد انجام می شود باید اثر این خطا را جدی گرفت در مناطق دشت و مسطح اثر این خطا بر روی زوایای افقی ناچیز و قابل صرف نظر کردن است. در عملیات نجوم نیز (اندازه گیری آزیموت)، این خطا دارای اثر قابل توجهی است و درجه بندی تراز معمولاً قرائت می شود بعلاوه اینکه یک تراز لوبیائی اضافی با حساسیت زیاد نیز در روی محور چرخش دوربین های مخصوص مشاهدات زوایای نجوم تعبیه شده است. لازم به ذکر است که اثر این خطا بر روی کلیه مشاهدات زاویه ای قائم ناچیز و قابل چشم پوشی است.



## ۳. ۴. ۲. خطای نشانه روی

خطای ناشی از نشانه روی به عوامل مختلفی بستگی دارد که عبارتند از:

الف- حد تشخیص سیستم نوری دستگاه<sup>۱۶</sup>

ب- طرح علامت نشانه<sup>۱۷</sup>

ج- خطای میزان کردن (تنظیم) تصویر<sup>۱۸</sup>

د- تموج حرارتی هوا<sup>۱۹</sup>

ه- شرایط دید<sup>۲۰</sup>

در دوربین های نقشه برداری معمولاً منظور از حد تشخیص، حداقل فاصله ای زاویه ای بین دو نقطه مورد نظر است به صورتی که بتوانیم بین آن دو نقطه تمایز قائل شویم و از رابطه ذیل حساب می شود:

$$\varepsilon'' = 1.22 \frac{\lambda}{d} \rho'' \quad (5-3)$$

که در این رابطه  $\lambda$  طول موج نور رسیده و  $d$  قطر عدسی شیئی دوربین می باشد و  $\rho'' = 206265''$  ضریب تبدیل رادیان به ثانیه است. بنابراین برای تشخیص دو نقطه از یکدیگر با دوربین نقشه برداری باید فاصله زاویه ای آن دو نقطه بزرگتر از  $\varepsilon$  باشد. همانطور که از این رابطه معلوم می شود هر چقدر قطر عدسی شیئی بزرگتر باشد حد تشخیص دوربین عدد کوچکتری می شود و بنابراین قدرت تمایز و تشخیص نقاط دور از یکدیگر بیشتر خواهد شد. بزرگنمایی<sup>۲۱</sup> دوربین نقشه برداری با استفاده از فرمول زیر

$$M = \frac{\varepsilon_e}{\varepsilon_T} = \frac{d_T}{d_e} \quad (6-3) \quad \text{تعریف می شود:}$$

که در رابطه فوق  $\varepsilon_e$  و  $\varepsilon_T$  به ترتیب حد تشخیص فاصله زاویه ای چشم انسان و دوربین و  $d_e$  و  $d_T$  نیز قطر مردمک چشم انسان و قطر عدسی شیئی دوربین می باشند. با توجه به اینکه قطر مردمک چشم بین ۲ تا ۳ میلی متر است دوربینی با بزرگنمایی ۴۰ حداقل نیاز به عدسی شیئی به قطر ۸۰ میلی متر دارد. معمولاً در دوربینهای نقشه برداری قطر عدسی شیئی حدود ۲۵ درصد کمتر از مقدار محاسبه شده می باشد به عبارت دیگر بزرگنمایی دوربین بزرگتر از مقدار لازم با توجه به حد تشخیص فاصله زاویه ای می باشد. بعنوان مثال در دوربین T3-wild بزرگنمایی برابر ۴۰ می باشد و قطر عدسی شیئی ۶۰ میلی متر است. نور مرئی<sup>۲۲</sup> طول موجی بین حدود  $1 \times 10^{-7}$  و  $1 \times 10^{-6}$  متر دارد برای این فاصله از طول موج حد تشخیص چشم انسان بین حدود ۱۰ ثانیه تا ۱۲۰ ثانیه خواهد بود که معمولاً در شرایط طبیعی برای انجام عملیات نقشه برداری ۳۰ ثانیه تا ۶۰ ثانیه در نظر گرفته می شود و بنابراین با توجه به رابطه (۶-۳) می توان دقت تشخیص هر دوربین نقشه برداری را با توجه به شرایط فیزیکی و عامل مشاهده کننده بین  $\frac{30''}{M}$  و  $\frac{60''}{M}$

در نظر گرفت که به عنوان حد نرمال طول موج نور  $5/6 \times 10^{-7}$  متر در نظر گرفته شده و دقت تشخیص  $\frac{45''}{M}$  بدست می آید. علائمی که معمولاً برای نشانه روی در نقشه برداری مورد استفاده قرار می گیرند با توجه به فاصله اندازه گیری می توانند به صورت یک نقطه نورانی و یا استوانه و یا صفحات مسطح باشند. چنانچه نقطه نورانی دقیقاً ایستگاه گذاری شده باشد و با توجه به فاصله از ایستگاه و شرایط جوی نور آن تنظیم شده باشد بهترین علامت برای نشانه روی خواهد بود (برای طولهای بلند و اندازه گیری در

<sup>۱۶</sup> Resolving power of optical system

<sup>۱۷</sup> Target design

<sup>۱۸</sup> Focusing error

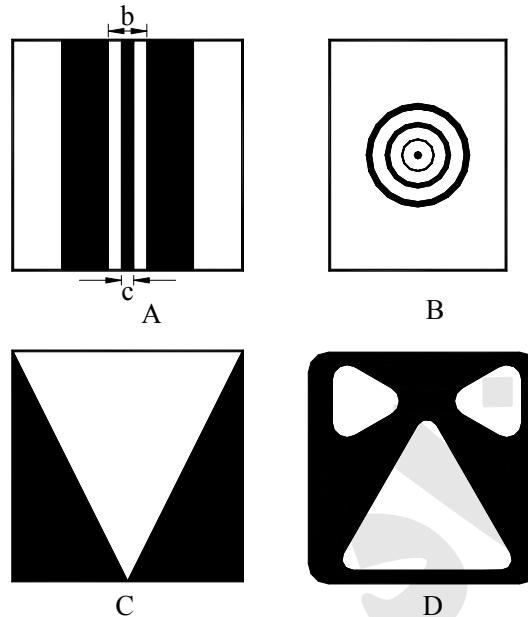
<sup>۱۹</sup> Thermal turbulence of air

<sup>۲۰</sup> Visibility conditions

<sup>۲۱</sup> Magnification

<sup>۲۲</sup> Visible light

شب). علائم استوانه ای بلند که معمولا در روز و برای طولهای بلند مورد استفاده دارند، بدلیل خطائی که در تصویر و بعلت عدم تقارن روشنائی در آنها بوجود می آید دقت کمتری در بر خواهند داشت. علائم به شکل صفحات مسطح، چنانچه اجسام خارجی سایه ای در روی آنها ایجاد نکنند میرا از خطای فوق بوده و دقت خوبی را نیز برای نشان روی دارا می باشند. در شکل ۳-۷ برخی از علائم نشانه متداول برای اندازه گیری زوایا نشان داده شده اند.



شکل (۳-۷): اشکال مختلفی از طرح صفحات مسطح برای علائم نشانه

در بین اشکال فوق شکل **A** بهترین نشانه برای فراولروی در روز به منظور قرائت زاویه افقی است زیرا که دارای سطح تقارن وسیعی می باشد که مناسب برای نشانه روی توسط تار رتیکول قائم است. در این نوع علامت نشانه :  $b = 2a + c$  که در آن  $a = \frac{120D}{M\rho''}$  و  $c$  عبارتست از عرض تار رتیکول دوربین در نقطه نشانه که مقدار آن معمولا بین  $\frac{2''D}{\rho''}$  و  $\frac{4''D}{\rho''}$  می باشد (  $D$  فاصله نشانه از دوربین و  $M$  درشت نمائی آنست). نشانه های مسطح با دوایر متحد المركز ( **B** ) یا طرحهای مثلثی شکل ( **C** ) و ( **D** ) بترتیب علائمی هستند که بعد از شکل **A** مورد توجه می باشند و می توان از آنها در کارهای دقیق استفاده نمود. استفاده از ترکیب دو رنگ زرد و سیاه در این علائم برای نشانه روی بهتر توصیه شده است.

مثال ۳-۱: مقدار کمیت های  $a$  و  $b$  و  $c$  از علامت نشانه **A** در شکل (۳-۷) را برای دوربینی با بزرگنمائی ۳۰ که در فاصله ۱ کیلومتری از نشانه قرار دارد، تعیین کنید.

$$\text{حل: } a = \frac{120 \times 1000}{30 \times 206265} = 0.019m \quad \text{و} \quad b = 2a + c = 52mm \Leftarrow c = \frac{3'' \times 1000}{206265} = 0.014m$$

بنابراین با این روش قادر خواهیم بود علامت های نشانه را برای اندازه گیری در فواصل مختلف بر اساس مشخصات اپتیکی دوربین اندازه گیری زاویه طراحی کنیم. خطای میزان کردن (تنظیم تصویر میانی و حذف پارالاکس) عامل دیگری برای محدود شدن دقت نشانه روی است این خطا در دوربین های دقیق معمولا از یک ثانیه تجاوز نمی کند و با قرائت زاویه به روش کوپل مقدار آن کاهش پیدا می کند همچنین اگر فاصله دو نشانه در اندازه گیری تقریبا برابر و یا بزرگتر از یک کیلومتر باشد این خطا قابل حذف خواهد بود. رعایت روش تنظیمی ذکر شده در بخش ۳.۲.۵ برای حذف این خطا الزامیست. تموج حرارتی هوا و شرایط دید از دیگر عوامل بوجود آورنده خطا در نشانه رویست که برای پرهیز از آنها و حداقل تاثیر آنها بر روی زوایای اندازه گیری شده مشاهدات در

هنگامی که حداقل تغییرات درجه حرارت در طول مسیر اندازه گیری وجود دارد انجام شوند و از نظر میزان روشنایی شرایطی برای دیدن علائم نشانه رعایت شود که وضوح کامل تصویر وجود داشته باشد. بطور کلی خطای استاندارد برای نشانه روی روی فواصل کوتاه تا چند صد متر برابر با مقدار ذیل است :

$$\sigma_p = \frac{45''}{M} \quad (7-3)$$

در صورتی که زاویه ای مانند  $\alpha$  در  $n$  کوپل اندازه گیری شده باشد با فرض مساوی بودن خطای نشانه روی برای دو امتداد آن ،

$$\sigma_{\alpha p} = \frac{45''}{M\sqrt{n}} \quad (8-3)$$

همانطور که ملاحظه گردید مدل ریاضی خطای نشانه روی فقط مربوط به حد تشخیص دوربین می شود و برای سایر موارد تکنیک های مشاهداتی وجود دارد.

### ۳.۴.۳. خطای قرائت کردن

خطای استاندارد برای قرائت زوایای افقی بستگی به نوع دوربین بکار برده شده دارد و مقدار آن برای دوربین های مختلف به شرح زیر می باشد :

الف- زاویه یابهایی با میکرومتر اپتیکی که کوچکترین تقسیمات آنها برابر ۵/۰ ثانیه تا ۱ ثانیه است :

$$\sigma_r = 2.5 d'' \quad (9-3)$$

ب- زاویه یابهایی که کوچکترین تقسیمات آنها از ۱۰ ثانیه تا ۱ دقیقه می باشد:  $\sigma_r = 0.3 d'' \quad (10-3)$

که در آنها  $d$  کوچکترین تقسیمات لمب دوربین می باشد. البته این مقادیر ممکن است در اثر خطای خارج از مرکزی لمب و یا خطای تقسیمات لمب و میکرومتر کمی زیادتیر گردد که در هر صورت مقدار آن در دوربین های دقیق از یک ثانیه تجاوز نخواهد

کرد. حال چنانچه زاویه ای مانند  $\alpha$  در  $n$  کوپل اندازه گیری شود مقدار خطای قرائت در آن  $\sigma_{\alpha r} = \frac{\sigma_r}{\sqrt{n}}$  خواهد بود. لازم است

توجه شود که در چنین حالتی علاوه بر اینکه قرائت ها می بایست در قسمتهای مختلف لمب بوسیله گرداندن آن به اندازه  $\frac{180}{n}$  بین هر کوپل انجام پذیرد میکرومتر نیز باید در قسمتهای مختلف آن قرائت گردد تا خطای مساوی نبودن درجه بندی لمب و همچنین میکرومتر به حداقل ممکن برسد.

### ۳.۴.۴. خطای ایستگاه گذاری

معمولاً از چهار نوع شاقول برای استقرار دوربین نقشه برداری بر روی ایستگاه، ممکن است که استفاده شود :

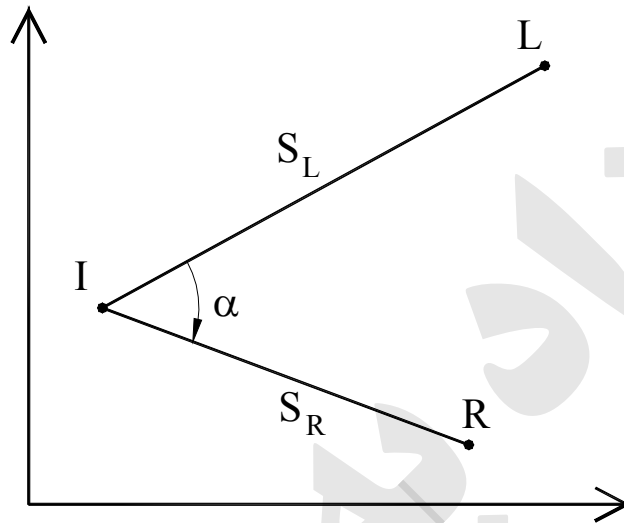
الف- شاقول نوری (اپتیکی)

ب- شاقول میله ای

ج- شاقول نخ

د- شاقول لیزری

خطای استاندارد استقراردوربین بوسیله شاقول نوری ۱ میلیمتر به ازای ۱/۵ متر ارتفاع دوربین می باشد. لازم به یادآوری است که این فقط در صورتی است که دستگاه کاملاً تنظیم و کالیبره باشد. شاقول میله ای شبیه به آنچه در بعضی از دوربین های قدیمی کرن وجود دارد در صورت تراز بودن ترازکروی آن می تواند دقتی مشابه شاقول نوری ارائه دهد. شاقول نخی در هوایی بدون باد به ازای ۱/۵ متر ارتفاع دوربین دقتی حدود ۱/۵ میلی متر را حداکثر بدست خواهد داد و شاقول لیزری نیز که از پرتوی لیزر در آن به جای نخ یا میله استفاده می شود و در دستگاههای جدید وجود دارد دقتی معادل شاقول نوری یعنی ۱ میلی متر به ازای ۱/۵ متر ارتفاع دوربین بدست می دهد. به هر صورت از هر نوع شاقولی که استفاده شود هدف ما در این بخش فرمولاسیون اثر خطای ایستگاه گذاری بر روی اندازه زاویه افقی است. به شکل (۸-۳) توجه نمایید، فرض می کنیم زاویه  $\alpha$  از ایستگاه I در حال اندازه گیری است:



شکل (۸-۳): بررسی اثر خطای استقرار بر روی اندازه گیری زوایای افقی

از آنجائیکه خطای ایستگاه گذاری مستقیماً بر روی مختصات نقاط اثر گذاشته و مختصات یک نقطه را در جهت X و Y دستخوش تغییر می کند زاویه  $\alpha$  را به صورت تابعی از مختصات نقاط می نویسیم:

$$\alpha = \tan^{-1} \left( \frac{x_R - x_I}{y_R - y_I} \right) - \tan^{-1} \left( \frac{x_L - x_I}{y_L - y_I} \right) \quad (11-3)$$

بر اساس قانون انتشار خطاها و با فرض مستقل بودن خطاهای ایستگاه گذاری در جهات X و Y از یکدیگر، خواهیم داشت:

$$\sigma_\alpha^2 = \left( \frac{\partial \alpha}{\partial x_I} \right)^2 \sigma_{x_I}^2 + \left( \frac{\partial \alpha}{\partial y_I} \right)^2 \sigma_{y_I}^2 + \left( \frac{\partial \alpha}{\partial x_L} \right)^2 \sigma_{x_L}^2 + \left( \frac{\partial \alpha}{\partial y_L} \right)^2 \sigma_{y_L}^2 + \left( \frac{\partial \alpha}{\partial x_R} \right)^2 \sigma_{x_R}^2 + \left( \frac{\partial \alpha}{\partial y_R} \right)^2 \sigma_{y_R}^2 \quad (12-3)$$

با مشتق گیری از کمیت های متغییر و فرض:  $\sigma_{x_L} = \sigma_{y_L} = \sigma_L$  و  $\sigma_{x_I} = \sigma_{y_I} = \sigma_I$

$$\sigma_\alpha^2 = \frac{\sigma_L^2}{S_L^2} + \frac{\sigma_R^2}{S_R^2} + \frac{\sigma_I^2}{S_L^2 S_R^2} (S_L^2 + S_R^2 - 2S_L S_R \cos(\alpha)) \quad (13-3) \quad : \sigma_{x_R} = \sigma_{y_R} = \sigma_R$$

که در رابطه فوق  $\sigma_I$  و  $\sigma_L$  و  $\sigma_R$  به ترتیب خطای استقراردوربین و نشانه ها و  $S_L$  و  $S_R$  نیز طولهای بین آنها می باشند. در حالت خاص وقتی که تقریباً  $\sigma_L = \sigma_R = \sigma_I = \sigma_C$  و  $S_L = S_R = S$ ، فرمول تقریبی خطای استقرار برای یک زاویه افقی  $\alpha$  برابر مقدار ذیل می شود:

$$\sigma_\alpha'' = \rho'' \frac{2\sigma_C}{S} \quad (14-3)$$

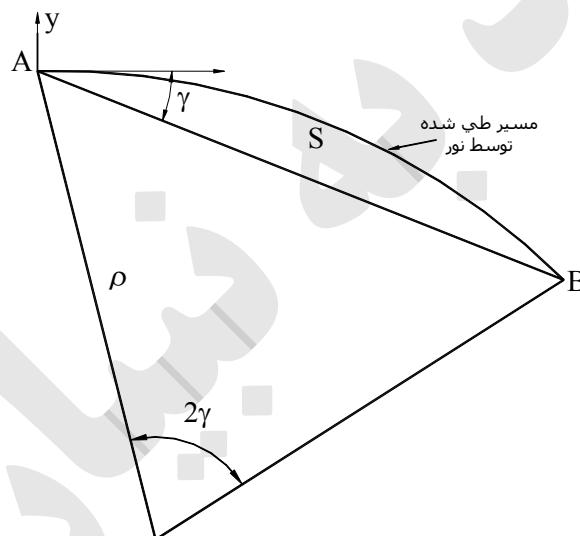
مجددا لازم به یاد آوریم که چنانچه یک زاویه  $n$  کوپل اندازه گیری و بین هر کوپل اندازه گیری نشانه ها و دوربین به اندازه  $\frac{180}{n}$  چرخانده شوند و دوباره ایستگاه گذاری انجام گیرد، خطای فوق تقسیم بر  $\sqrt{n}$  می گردد. آنچه که از فرمول فوق مشهود است اینست که اثر خطای ایستگاه گذاری بر زاویه افق با کاهش فاصله بین ایستگاه و نشانه افزایش می یابد و بنابراین برای طولهای بلند (مثل ژئودزی درجه ۱ و ۲) کمتر اهمیت دارد و در عوض هر چقدر فاصله بین نقاط کمتر باشد اثر این خطا بیشتر است.

### ۳. ۴. ۵. خطای انکسار

انکسار جوی مهمترین منبع خطای محیطی برای اندازه گیری زاویه است زیرا که باعث بوجود آمدن انحنای در مسیر پرتوهای نور می گردد. به دلیل متغیر بودن چگالی جو در مسیر طی شده از نشانه تا ایستگاه اندازه گیری نور به جای یک مسیر مستقیم مسیری منحنی شکل را طی می کند (شکل ۳-۹). انحنای مسیر طی شده توسط نور متناسب با گرادیان ضریب شکست نور می باشد و از فرمول ذیل محاسبه می گردد:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{n} \text{grad}(n) \quad (۱۵-۳)$$

که در آن  $n$  ضریب شکست هوا و  $\text{grad}(n)$  تغییرات ضریب شکست در امتداد عمود بر مسیر نور در صفحه افق (امتداد محور  $y$ ) می باشد،  $\rho$  شعاع انحنای پرتو نور در اثر انکسار جوی است.



شکل (۳-۹): انحنای مسیر نور در اثر انکسار

ضریب شکست نور در اتمسفر تابعی از فشار هوا، درجه حرارت هوا و فشار بخار آب موجود در هوا می باشد. برای محاسبه ضریب شکست نور از متغیرهای فوق، فرمول ذیل [Barrell and Sears, ۱۹۳۹] ارائه شده است:

$$(n-1) = (n_s-1) \left( \frac{273}{273+t} \right) \left( \frac{P}{760} \right) - \left( \frac{15.02E}{273+t} \right) \cdot 10^{-6} \quad (۱۶-۳)$$

که در رابطه فوق  $t$  درجه حرارت محیط بر حسب درجه سلسیوس می باشد و  $P$  فشار هوا بر حسب میلی متر جیوه است و  $E$  فشار بخار آب موجود در هواست،  $n_s$  ضریب شکست هوای خشک در دمای صفر درجه سانتیگراد و فشار ۷۶۰ میلی متر جیوه و با حجم ۰/۰۳٪ دی اکسید کربن در آن می باشد. ضریب شکست  $n_s$  را می توان با استفاده از رابطه ذیل که ابتدا توسط Cauchy کشف شده و سپس توسط [Edlen, ۱۹۵۳] تکمیل گردیده است، محاسبه نمود:

$$(n_s - 1) \cdot 10^6 = 287.604 + \frac{1.6288}{\lambda_0^2} + \frac{0.0136}{\lambda_0^4} \quad (17-3)$$

که در این رابطه  $\lambda_0$  طول موج نوردر خلا بر حسب میکرون می باشد و  $n_s$  ضریب شکست آن طول موج است در شرایط استاندارد فشار و دمائی که توضیح داده شد. اگر شرایط محیطی تغییر کند اعداد ثابت ذکر شده در فرمول فوق تغییر می کنند به عبارت دیگر این اعداد وابسته به محیط عبور پرتو می باشند. برای محاسبه گرادیان ضریب شکست باید از آن در جهت محوری (عمود بر مسیر پرتو) مشتق گرفت و چون درجه حرارت  $t$  را می توان به صورت تابعی از  $y$  در نظر گرفت، رابطه ذیل بدست می آید:

$$\text{grad}(n) = \frac{dn}{dy} = \frac{dn}{dt} \cdot \frac{dt}{dy} \quad (18-3)$$

بر اساس رابطه ۳-۱۶ ضریب شکست تابعی از دمای محیط عبور نور می باشد، با مشتق گیری از آن نسبت به  $t$  رابطه زیر حاصل می شود:

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{0.36(n_s - 1)P}{(273 + t)^2} + \frac{15.02E \cdot 10^{-6}}{(273 + t)^2} \quad (19-3)$$

باید توجه داشت که اثر مولفه های  $P$  و  $E$  بر روی ضریب شکست  $n$  نسبت به مولفه درجه حرارت مسیر ناچیز است بنابراین، در مشتق گیری هنگام محاسبه گرادیان از آنها صرف نظر نمودیم. بعلاوه اینکه با توجه به فرمول فوق می توان از قسمت دوم آن که شامل فشار بخار آب موجود در هوا می شود نیز صرف نظر نمود با این فرض و همچنین جایگزین نمودن رابطه (۳-۱۹) در روابط (۳-۱۸) و

$$\frac{1}{\rho} = \frac{0.36(n_s - 1)P}{(273 + t)^2} \cdot \frac{dt}{dy} \quad (20-3) \quad (15-3)$$

با توجه به روابط هندسی نشان داده شده در شکل (۳-۹) مقدار خطای انکسار برای امتداد قراولروی  $AB$  برابر است با:

$$\gamma = \frac{S}{2\rho} \quad (21-3) \quad \text{که در آن } S \text{ طول خط قراولروست، با جایگزینی رابطه (۳-۲۰) در (۳-۲۱):}$$

$$\gamma = \frac{0.36(n_s - 1)P \cdot S}{2(273 + t)^2} \cdot \frac{dt}{dy} \quad (24-3)$$

با فرض نمودن  $n_s = 1.000292$  و تبدیل رادیان به ثانیه رابطه فوق به شکل ذیل نوشته می شود:

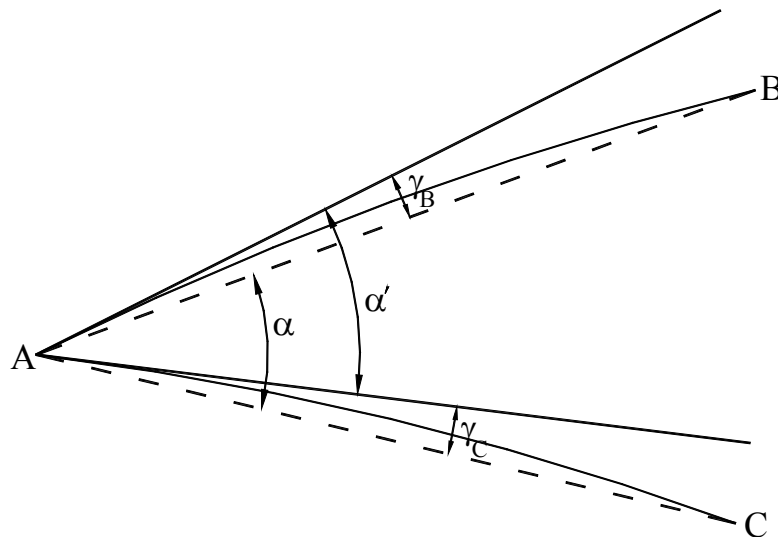
$$\gamma = 11'' \left( \frac{P \cdot S}{(273 + t)^2} \right) \cdot \frac{dt}{dy} \quad (25-3)$$

رابطه (۳-۲۵) نشان می دهد که خطای ناشی از انکسار بر روی اندازه گیری زاویه افقی تابعی از تغییرات دما در راستای قائم بر مسیر عبور پرتو، فشار و دمای متوسط محیط و همچنین تغییرات دما در طول مسیر اندازه گیری است. مثال (۳-۲): چنانچه امتداد  $AB$  بطول ۱۰ کیلومتر در کنار ساحلی اندازه گیری شود، مطلوبست محاسبه تصحیح انکسار برای این امتداد در صورتی که: درجه حرارت متوسط محیط ۲۰ درجه سلسیوس، فشار متوسط ۷۵۰ میلی متر جیوه و تغییرات درجه حرارت  $\frac{dt}{dy} = 0.05$  درجه سلسیوس بر متر باشد:

$$\gamma = 11'' \left( \frac{P \cdot S}{(273 + t)^2} \right) \cdot \frac{dt}{dy} = 11'' \left( \frac{750 \cdot 10000}{293^2} \right) \times 0.05 = 48''$$

حال اگر بجای یک امتداد، یک زاویه را در نظر بگیریم (شکل ۳-۱۰)، با توجه به شکل مقدار زاویه ( $\alpha$ ) پس از تصحیح به صورت

$$\alpha = \alpha' + \gamma_C - \gamma_B \quad (26-3) \quad \text{ذیل خواهد بود:}$$



شکل (۳-۱۰): اثر انکسار بر روی زاویه افقی

### ۵.۳. سیستم های زاویه یاب الکترونیکی

همانطور که در ابتدای فصل هم گفته شد تفاوت اصلی زاویه یابهای اپتیکی با زاویه یابهای الکترونیکی در سیستم قرائت زاویه توسط آنهاست. در این قسمت بصورت خلاصه نحوه قرائت در زاویه یابهای الکترونیکی بیان می شود. موقعیت زاویه ای یک نقطه بر روی نقاله قرائت زاویه از دستگاه زاویه یاب یک کمیت متغیر پیوسته است. برای قرائت یک متغیر زاویه ای پیوسته توسط سیستم الکترونیکی ابتدا باید آنرا به عدد در مبنای دو<sup>۳۳</sup> تبدیل کنیم، سپس آنرا به صورتی کد گذاری کنیم که هنگامی که جابجائی زاویه ای در فواصل مساوی روی نقاله انجام می گیرد فقط یک رقم از عدد مذکور تغییر کند یعنی فقط مجاز هستیم یکی از ارقام را جابجا کنیم. به جدول (۳-۲) توجه نمایید، در ستون اول از این جدول عدد در مبنای ۱۰ داده شده است و در ستون دوم همان عدد به مبنای ۲ تبدیل شده است و در ستون سوم کد گذاری انجام شده است. همانطوری که ملاحظه می گردد وقتی عددی در مبنای ۲ افزایش می یابد ممکن است یکدفعه دو رقم و یا سه رقم آن عوض شود مثلاً از ۳ به ۴ عدد ۰۰۱۱ به ۰۱۰۰ تغییر می کند که در آن دو ۱ به ۰ و یک ۰ به ۱ تغییر کرده است در حالیکه اگر به ستون سوم که ستون کدگذاری است توجه کنید ملاحظه می شود که در آن با تغییر عدد به اندازه یک واحد فقط ممکن است که یک ۰ به ۱ تبدیل شده و یا یک ۱ به ۰ تبدیل گردد. به این نوع کد گذاری، کدگذاری تصاعدی<sup>۲۴</sup> گفته می شود که یکی از ساده ترین انواع آن کد خاکستری<sup>۲۵</sup> است که در زاویه یابهای الکترونیکی استفاده شده و در جدول (۳-۲) همین نوع کد آمده است.

<sup>۳۳</sup> binary

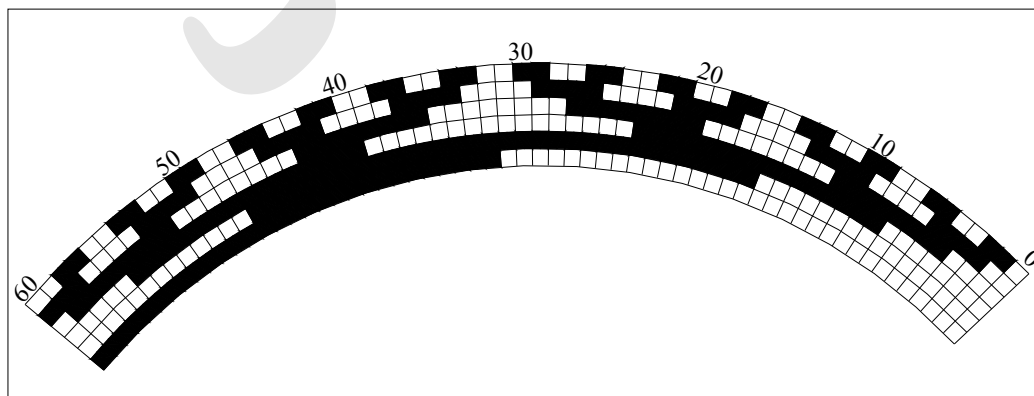
<sup>۲۴</sup> progressive coding

<sup>۲۵</sup> gray code

عدد در مبنای ۱۰	عدد در مبنای ۲	عدد کد گذاری شده
۰	۰۰۰۰	۰۰۰۰
۱	۰۰۰۱	۰۰۰۱
۲	۰۰۱۰	۰۰۱۱
۳	۰۰۱۱	۰۰۱۰
۴	۰۱۰۰	۰۱۱۰
۵	۰۱۰۱	۰۱۱۱
۶	۰۱۱۰	۰۱۰۱
۷	۰۱۱۱	۰۱۰۰
۸	۱۰۰۰	۱۱۰۰
۹	۱۰۰۱	۱۱۰۱
۱۰	۱۰۱۰	۱۱۱۱
۱۱	۱۰۱۱	۱۱۱۰
۱۲	۱۱۰۰	۱۰۱۰

جدول (۳-۲): کد گذاری اعداد برای قرائت زاویه توسط سیستم الکترونیکی

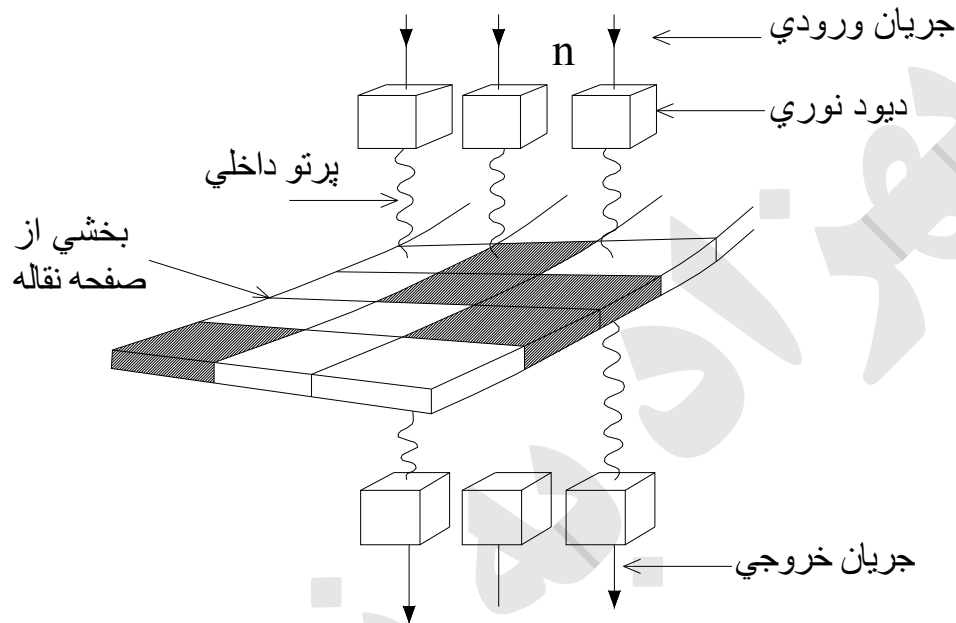
یکی دیگر از نکاتی که در مورد کد خاکستری وجود دارد اینست که اگر دقت کنیم متوجه می شویم که اگر ۱ رقم اول از سمت راست باشد بعد از تکرار در دو عدد عوض می شود اگر رقم دوم باشد بعد از تکرار در چهار عدد عوض می شود و اگر رقم سوم باشد بعد از تکرار در هشت عدد عوض می شود به همین صورت رابطه ای وجود دارد که اگر ۱ رقم  $n$ م از سمت راست باشد تا  $2^n$  بار در ارقام بعدی تکرار خواهد شد. این خاصیت بیانگر یک رابطه منطقی برای این نوع کد گذاریست. در شکل (۳-۱۱) قسمتی از یک نقاله قرائت زاویه الکترونیکی برای اعداد کد گذاری شده تا شش رقم، نمایش داده شده است که اگر دقت کنیم به نظام منطقی کد گذاری از سمت راست به چپ بر روی آن پی می بریم ترتیب قرار گیری ارقام مربوط به کدها از سمت بیرون به داخل دایره می باشد.



شکل (۳-۱۱): درجه بندی نقاله اندازه گیری زاویه بر اساس کد گذاری در زاویه یابهای الکترونیکی



برای درجه بندی ۱۰ ثانیه ای نقاله افقی بر اساس سیستم فوق ۱۲۹۶۰۰ قطع باید در پیرامون نقاله تقسیم بندی شود که اگر قطر دایره نقاله ۸۰ میلی متر در نظر گرفته شود، پهنای هر قطاع در محیط نقاله چیزی کمتر از ۲ میکرومتر می شود که به تکنولوژی بسیار بالایی برای درجه بندی نیاز دارد و بعلاوه بسیار هزینه بر است، البته در سالهای اخیر پیشرفت های زیادی در این زمینه ها بوجود آمده است و دقت قرائت زاویه با این روش به نحو موثری بهبود پیدا کرده است و همینطور هزینه ها کاهش پیدا کرده است. برای قرائت از روی این نوع نقاله از دیودهای نوری و همچنین ردیاب پرتو نوری استفاده می شود. همانطور که در شکل (۳-۱۲) به صورت سمبولیک نشان داده شده است، تشخیص زاویه توسط سیستم رقومی با عبور کردن یا عدم عبور پرتو نوری از علامت گذاری براساس کد مبنای ۲ صورت می گیرد و نتیجه به صفحه نمایشگر برای قرائت عامل نقشه بردار فرستاده می شود.



شکل (۳-۱۲): نمایش سمبولیک نحوه قرائت زاویه در ساختار درونی زاویه یاب الکترونیکی

### ۶.۳. روشهای اندازه گیری زوایای افقی

برای اندازه گیری زوایای افقی با توجه به اصل اندازه گیری زوایا بروش کوپل سه روش کلی ذیل وجود دارد:

الف- روش زوایای مستقل

ب- روش امتدادی

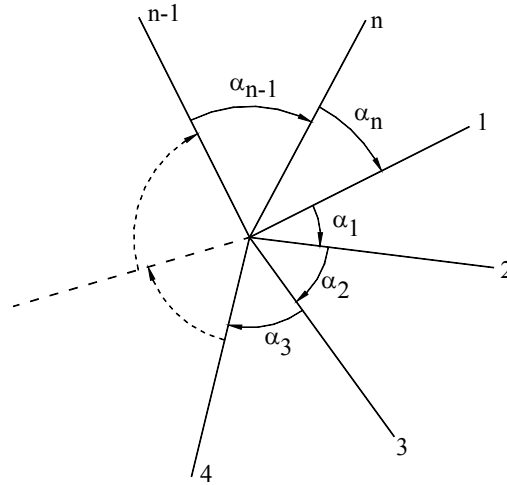
ج- روش کلیه زوایای ممکن یا اسکرایبر

که در هر کدام از این روشها چون تعداد مشاهدات بیش از مجهولات در نظر گرفته می شود نیاز به سرشکنی بروش کمترین مربعات وجود دارد. در این بخش به بررسی این روشها و نحوه سرشکنی خطاها در آنها می پردازیم.

#### ۶.۳.۱. اندازه گیری زوایا به روش مستقل

در این روش هر زاویه به طور کاملا مستقل از زوایای دیگر اندازه گیری می شود و هیچ زاویه ای با زاویه دیگر پوشش مشترک ندارد. این روش معمولا با تکمیل دور افق همراه است زیرا که در غیر این صورت تعداد مشاهدات با مجهولات یکی شده و عمل سرشکنی انجام نمی شود. برای مثال در یک ایستگاه با  $n$  امتداد  $n-1$  زاویه مورد لزوم است که معمولا با تکمیل دور افق  $n$

زاویه اندازه گیری می شود. به شکل (۳-۱۳) توجه نمائید، فرض کرده ایم که  $n$  امتداد داریم و زاویای بروش مستقل اندازه گیری شده اند.



شکل (۳-۱۳): اندازه گیری زاویای بروش مستقل

برای سرشکنی زاویا در وضعیت فوق به دو صورت می توان عمل کرد اول اینکه از روش معادله شرط استفاده کنیم و یا از روش معادلات مشاهدات (پارامتریک) استفاده نمائیم، که در اینجا ترجیحا از روش شرط استفاده می کنیم. ابتدا معادلات شرط را می نویسیم (که در اینجا فقط یک معادله داریم و بنابراین درجه آزادی ۱ می باشد):

$$360^\circ - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{n-1} + \alpha_n) = 0 \quad (27-3)$$

بردار مشاهدات و ماتریس ضرایب و بردار اختلاف بست<sup>۲۶</sup> به قرار ذیل خواهند بود:

$$\underline{\mathbf{l}} = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \dots \quad \alpha_n]^T \quad \underline{\mathbf{B}} = [1 \quad 1 \quad 1 \quad \dots \quad 1 \quad 1]_{1 \times n} \quad \underline{\mathbf{w}} = \left[ \sum_{i=1}^n \alpha_i - 360^\circ \right] \quad (28-3)$$

برای بدست آوردن بردار باقیمانده مشاهدات از رابطه ذیل استفاده می شود: (۲۹-۳)

$$\hat{\mathbf{v}} = -\underline{\mathbf{C}}_1 \underline{\mathbf{B}}^T (\underline{\mathbf{B}} \underline{\mathbf{C}}_1 \underline{\mathbf{B}}^T)^{-1} \underline{\mathbf{w}}$$

توجه داشته باشید که در فرمول فوق  $\sigma_0^2 = 1$  در نظر گرفته ایم. در صورتی که کلیه مشاهدات با دقت یکسان  $\sigma_i$  اندازه گیری شده باشند، با جایگذاری مقادیر رابطه (۲۸-۳) در (۲۹-۳) داریم:

$$\hat{\mathbf{v}} = -\underline{\mathbf{B}}^T (\underline{\mathbf{B}} \underline{\mathbf{B}}^T)^{-1} \underline{\mathbf{w}} = \begin{bmatrix} \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i - 360^\circ}{n} \\ \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i - 360^\circ}{n} \\ \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i - 360^\circ}{n} \\ \vdots \\ \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i - 360^\circ}{n} \\ \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i - 360^\circ}{n} \end{bmatrix}_{n \times 1} = \begin{bmatrix} \frac{-m_c}{n} \\ \frac{-m_c}{n} \\ \frac{-m_c}{n} \\ \vdots \\ \frac{-m_c}{n} \\ \frac{-m_c}{n} \end{bmatrix}_{n \times 1} \quad (30-3)$$

<sup>۲۶</sup> misclosure

که در رابطه (۳-۳۰) برای راحتی کار از عبارت  $m_c$  به جای خطای بست دور افق استفاده شده است، وریانس فاکتور ثانویه بر اساس رابطه زیر حساب می شود:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{df} = \frac{\sigma_l^{-2}(n) \left( \frac{m_c^2}{n^2} \right)}{1} = \sigma_l^{-2} \left( \frac{m_c^2}{n} \right) \quad (31-3)$$

مقدار مشاهدات سرشکن شده از رابطه مقابل بدست می آید:

$$\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \hat{\mathbf{v}}$$

و ماتریس وریانس- کوریانس بردار مشاهدات سرشکن شده از رابطه زیر محاسبه می گردد:

$$\underline{\mathbf{C}}_i = \underline{\mathbf{C}}_1 - \underline{\mathbf{C}}_{\hat{\mathbf{v}}} = \underline{\mathbf{C}}_1 - \underline{\mathbf{C}}_1 \mathbf{B}^T (\mathbf{B} \underline{\mathbf{C}}_1 \mathbf{B}^T)^{-1} \mathbf{B} \underline{\mathbf{C}}_1 = (\sigma_l^2 \mathbf{I}_{n \times n}) - (\mathbf{B}^T (\mathbf{B} \mathbf{B}^T)^{-1} \mathbf{B}) (\sigma_l^2 \mathbf{I}_{n \times n}) \quad (32-3)$$

با مقدار گذاری ماتریس ضرایب در رابطه (۳-۳۲)، به نتیجه ذیل می رسیم:

$$\mathbf{C}_i = \sigma_l^2 \begin{pmatrix} \frac{n-1}{n} & \frac{-1}{n} & \frac{-1}{n} & \dots & \frac{-1}{n} & \frac{-1}{n} \\ \frac{-1}{n} & \frac{n-1}{n} & \frac{-1}{n} & \dots & \frac{-1}{n} & \frac{-1}{n} \\ \frac{-1}{n} & \frac{-1}{n} & \frac{n-1}{n} & \dots & \frac{-1}{n} & \frac{-1}{n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{-1}{n} & \frac{-1}{n} & \frac{-1}{n} & \dots & \frac{n-1}{n} & \frac{-1}{n} \\ \frac{-1}{n} & \frac{-1}{n} & \frac{-1}{n} & \dots & \frac{-1}{n} & \frac{n-1}{n} \\ \frac{-1}{n} & \frac{-1}{n} & \frac{-1}{n} & \dots & \frac{-1}{n} & \frac{n-1}{n} \end{pmatrix}_{n \times n} \quad (33-3)$$

از رابطه فوق می توانیم مقدار وریانس را برای هریک از زوایا بدست آوریم:

$$\sigma_{\hat{\alpha}_i} = \sigma_l \sqrt{\frac{n-1}{n}} \quad (34-3)$$

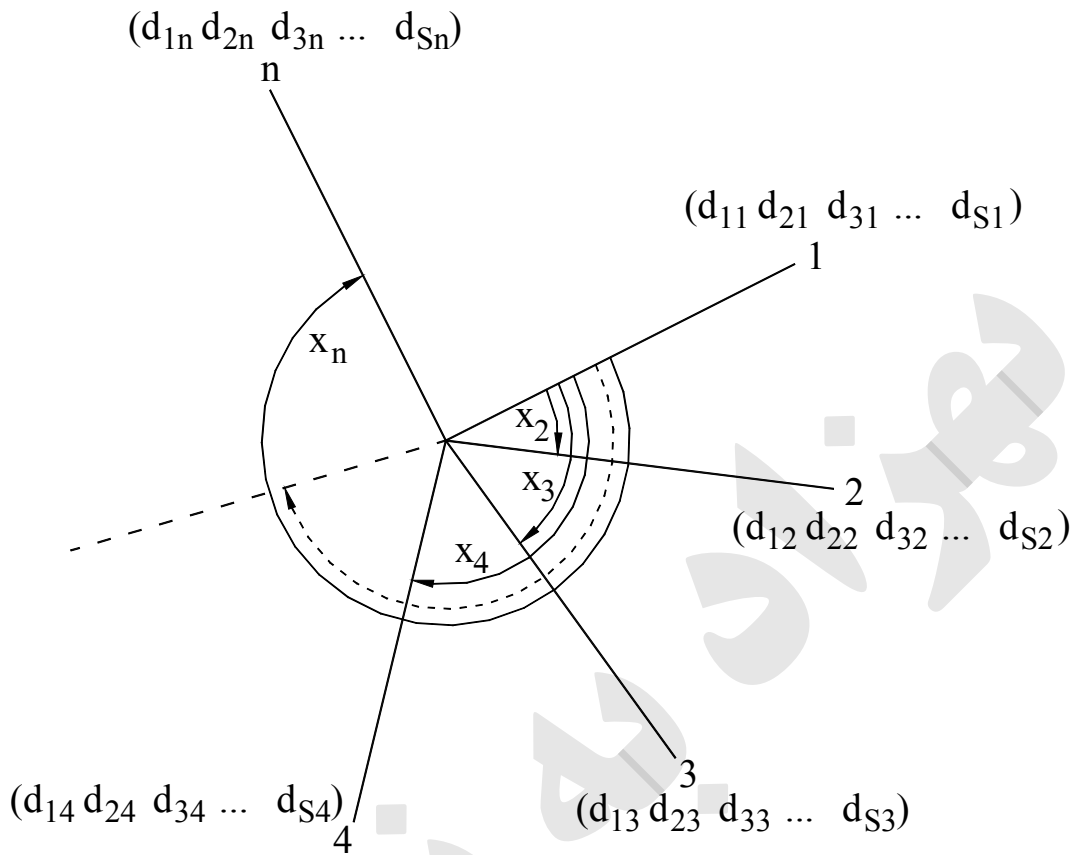
برای مثال اگر ۵ امتداد داشته باشیم و دقت اندازه گیری کلیه زوایا با یکدیگر مساوی بوده و برابر ۳ ثانیه باشد آنگاه:

$$\sigma_{\hat{\alpha}_i} = 3'' \sqrt{\frac{4}{5}} = 2.4''$$

### ۳.۶. اندازه گیری زوایا به روش امتدادی

روش امتدادی رایج ترین روش برای قرائت زوایا در ژئودزی کلاسیک می باشد در این روش یک امتداد به عنوان مبدا انتخاب گردیده و قرائت امتدادها از آن شروع می گردد پس از قرائت کلیه امتدادها در حالت دایره به چپ، تلسکوپ ۱۸۰ درجه چرخانده می شود و امتدادها از آخر به اول در حالت دایره به راست قرائت می شوند و بدین ترتیب یک کوپل از قرائت امتدادی کامل می گردد. یکی از مسائل مهمی که در این روش مطرح می گردد اینست که به جای زوایا، امتدادها مجهول فرض می شوند بنابراین هدف ما برآورد نمودن مقادیر سرشکن شده امتدادها می باشد و همانگونه که در فصول بعد خواهیم دید در سرشکنی شبکه نیز مقادیر برآورد شده برای خود امتدادها به عنوان مشاهدات معرفی می گردند. اگر  $n$  امتداد ایستگاهی مطابق شکل (۳-۱۴) داشته

باشیم و این امتدادها در  $S$  کوپل قرائت بشوند، تعداد مشاهدات انجام شده برابر با  $n \times S$  خواهد بود. باید توجه داشت که متوسط دواندازه گیری دایره به چپ و راست برای یک امتداد در هر کوپل اندازه گیری نتیجه اندازه گیری آن امتداد به حساب می آید.



شکل (۳-۱۴): اندازه گیری به روش امتدادی

هرامتداد مشاهده شده به صورت  $d_{ij}$  نمایش می دهیم که در آن  $i$  شماره کوپل و  $j$  شماره امتداد می باشد و میانگین کوپلهای مربوط به یک امتداد را با  $\bar{d}_j$  نشان می دهیم که از رابطه زیر محاسبه می گردد:

$$\bar{d}_j = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^S d_{ij} \quad (35-3)$$

مجهولات ما عبارتند از مقادیر صفر لمب (مربوط به امتداد مبدا) در هر کوپل مشاهده که با  $Z_j$  نمایش می دهیم و همچنین مقادیر متناظر با هرامتداد که از تفاضل مقدار مشاهده شده آن امتداد و صفر لمب آن امتداد بدست می آید. بر این اساس و با توجه به شکل فوق روابط بین مشاهدات و مجهولات را می نویسیم:

$$\begin{aligned} Z_1 &= d_{11}, Z_2 = d_{21}, Z_3 = d_{31}, \dots, Z_S = d_{S1} \\ x_2 &= d_{12} - Z_1 = d_{22} - Z_2 = d_{32} - Z_3 = \dots = d_{S2} - Z_S \\ x_3 &= d_{13} - Z_1 = d_{23} - Z_2 = d_{33} - Z_3 = \dots = d_{S3} - Z_S \quad (36-3) \\ &\vdots \\ x_n &= d_{1n} - Z_1 = d_{2n} - Z_2 = d_{3n} - Z_3 = \dots = d_{Sn} - Z_S \end{aligned}$$

بردار مشاهدات و مجهولات را به فرم ذیل خواهیم داشت:

$$\underline{\mathbf{l}} = \begin{bmatrix} d_{11} \\ d_{12} \\ \vdots \\ d_{1n} \\ d_{21} \\ d_{22} \\ \vdots \\ d_{2n} \\ \vdots \\ d_{s1} \\ d_{s2} \\ \vdots \\ d_{sn} \end{bmatrix}_{ns \times 1} \quad \underline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ \vdots \\ Z_s \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}_{(s+n-1) \times 1} \quad (37-3)$$

در اینجا هم می توانیم مسئله را به روش معادلات پارامتریک حل کنیم و هم به روش شرط، که برای راحتی روش شرط را ترجیح می دهیم، توجه داشته باشید چون تعداد معادلات برابر با درجه آزادی است و  $df = ns - s - n + 1 = (n-1)(s-1)$  می باشد که عدد بزرگی خواهد شد در حالت کلی قادر به حل مسئله نیستیم بلکه ابتدا سعی می کنیم مسئله برای یک وضعیت نوعی<sup>۳۷</sup> با تعداد کویلهای و امتدادهای محدود حل کنیم و سپس آنرا به وضعیت کلی تعمیم خواهیم داد. بنابراین ترجیحا حالت  $s = 4$  و  $n = 3$  را انتخاب می کنیم و معادلات شرط را به صورت زیر می توانیم بنویسیم (با توجه به شکل ۳-۱۴ و معادلات (۳۶-۳)):

$$\begin{cases} l_2 - l_1 - l_5 + l_4 = d_{12} - d_{11} - d_{22} + d_{21} = 0 \\ l_5 - l_4 - l_8 + l_7 = d_{22} - d_{21} - d_{32} + d_{31} = 0 \\ l_8 - l_7 - l_{11} + l_{10} = d_{32} - d_{31} - d_{42} + d_{41} = 0 \\ l_3 - l_1 - l_6 + l_4 = d_{13} - d_{11} - d_{23} + d_{21} = 0 \\ l_6 - l_4 - l_9 + l_7 = d_{23} - d_{21} - d_{33} + d_{31} = 0 \\ l_9 - l_7 - l_{12} + l_{10} = d_{33} - d_{31} - d_{43} + d_{41} = 0 \end{cases} \quad (38-3)$$

و همچنین ماتریس ضرایب مشاهدات و بردار اختلاف بست به صورت ذیل می باشند:

$$\underline{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \underline{\mathbf{w}} = \underline{\mathbf{B}}\underline{\mathbf{l}} - \underline{\mathbf{c}} = \begin{bmatrix} d_{12} - d_{11} - d_{22} + d_{21} \\ d_{22} - d_{21} - d_{32} + d_{31} \\ d_{32} - d_{31} - d_{42} + d_{41} \\ d_{13} - d_{11} - d_{23} + d_{21} \\ d_{23} - d_{21} - d_{33} + d_{31} \\ d_{33} - d_{31} - d_{43} + d_{41} \end{bmatrix} \quad (39-3)$$

<sup>۳۷</sup> typical

ماتریس وزن را به صورت  $\mathbf{P} = \sigma_1^{-2} \mathbf{I}$  در نظر می گیریم که در آن  $\sigma_1$  دقت اندازه گیری هر امتداد توسط دستگاه می باشد، با حل مسئله به نتایج ذیل می رسیم:

$$\hat{\mathbf{v}} = -\mathbf{B}^T (\mathbf{B}\mathbf{B}^T)^{-1} \mathbf{w} = \begin{bmatrix} -1/2d_{11} + 1/4(d_{12} + d_{13}) + 1/6(d_{21} + d_{31} + d_{41}) - 1/12(d_{22} + d_{32} + d_{42} + d_{23} + d_{33} + d_{43}) \\ -1/2d_{12} + 1/4(d_{11} + d_{13}) + 1/6(d_{22} + d_{32} + d_{42}) - 1/12(d_{21} + d_{31} + d_{41} + d_{23} + d_{33} + d_{43}) \\ -1/2d_{13} + 1/4(d_{11} + d_{12}) + 1/6(d_{23} + d_{33} + d_{43}) - 1/12(d_{21} + d_{31} + d_{41} + d_{22} + d_{32} + d_{42}) \\ -1/2d_{21} + 1/4(d_{22} + d_{23}) + 1/6(d_{11} + d_{31} + d_{41}) - 1/12(d_{12} + d_{32} + d_{42} + d_{13} + d_{33} + d_{43}) \\ -1/2d_{22} + 1/4(d_{21} + d_{23}) + 1/6(d_{12} + d_{32} + d_{42}) - 1/12(d_{11} + d_{31} + d_{41} + d_{13} + d_{33} + d_{43}) \\ -1/2d_{23} + 1/4(d_{21} + d_{22}) + 1/6(d_{13} + d_{33} + d_{43}) - 1/12(d_{11} + d_{31} + d_{41} + d_{12} + d_{32} + d_{42}) \\ -1/2d_{31} + 1/4(d_{32} + d_{33}) + 1/6(d_{11} + d_{21} + d_{41}) - 1/12(d_{12} + d_{22} + d_{42} + d_{13} + d_{23} + d_{43}) \\ -1/2d_{32} + 1/4(d_{31} + d_{33}) + 1/6(d_{12} + d_{22} + d_{42}) - 1/12(d_{11} + d_{21} + d_{41} + d_{13} + d_{23} + d_{43}) \\ -1/2d_{33} + 1/4(d_{31} + d_{32}) + 1/6(d_{13} + d_{23} + d_{43}) - 1/12(d_{11} + d_{21} + d_{41} + d_{12} + d_{22} + d_{42}) \\ -1/2d_{41} + 1/4(d_{42} + d_{43}) + 1/6(d_{11} + d_{21} + d_{31}) - 1/12(d_{12} + d_{22} + d_{32} + d_{13} + d_{23} + d_{33}) \\ -1/2d_{42} + 1/4(d_{41} + d_{43}) + 1/6(d_{12} + d_{22} + d_{32}) - 1/12(d_{11} + d_{21} + d_{31} + d_{13} + d_{23} + d_{33}) \\ -1/2d_{43} + 1/4(d_{41} + d_{42}) + 1/6(d_{13} + d_{23} + d_{33}) - 1/12(d_{11} + d_{21} + d_{31} + d_{12} + d_{22} + d_{32}) \end{bmatrix}$$

(۴۰-۳)

و همچنین مقدار برآورد شده برای مشاهدات از رابطه زیر بدست می آید:

$$\hat{\mathbf{I}} = \mathbf{I} + \hat{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} \hat{d}_{11} \\ \hat{d}_{12} \\ \hat{d}_{13} \\ \hat{d}_{21} \\ \hat{d}_{22} \\ \hat{d}_{23} \\ \hat{d}_{31} \\ \hat{d}_{32} \\ \hat{d}_{33} \\ \hat{d}_{41} \\ \hat{d}_{42} \\ \hat{d}_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2d_{11} + 1/4(d_{12} + d_{13}) + 1/6(d_{21} + d_{31} + d_{41}) - 1/12(d_{22} + d_{32} + d_{42} + d_{23} + d_{33} + d_{43}) \\ 1/2d_{12} + 1/4(d_{11} + d_{13}) + 1/6(d_{22} + d_{32} + d_{42}) - 1/12(d_{21} + d_{31} + d_{41} + d_{23} + d_{33} + d_{43}) \\ 1/2d_{13} + 1/4(d_{11} + d_{12}) + 1/6(d_{23} + d_{33} + d_{43}) - 1/12(d_{21} + d_{31} + d_{41} + d_{22} + d_{32} + d_{42}) \\ 1/2d_{21} + 1/4(d_{22} + d_{23}) + 1/6(d_{11} + d_{31} + d_{41}) - 1/12(d_{12} + d_{32} + d_{42} + d_{13} + d_{33} + d_{43}) \\ 1/2d_{22} + 1/4(d_{21} + d_{23}) + 1/6(d_{12} + d_{32} + d_{42}) - 1/12(d_{11} + d_{31} + d_{41} + d_{13} + d_{33} + d_{43}) \\ 1/2d_{23} + 1/4(d_{21} + d_{22}) + 1/6(d_{13} + d_{33} + d_{43}) - 1/12(d_{11} + d_{31} + d_{41} + d_{12} + d_{32} + d_{42}) \\ 1/2d_{31} + 1/4(d_{32} + d_{33}) + 1/6(d_{11} + d_{21} + d_{41}) - 1/12(d_{12} + d_{22} + d_{42} + d_{13} + d_{23} + d_{43}) \\ 1/2d_{32} + 1/4(d_{31} + d_{33}) + 1/6(d_{12} + d_{22} + d_{42}) - 1/12(d_{11} + d_{21} + d_{41} + d_{13} + d_{23} + d_{43}) \\ 1/2d_{33} + 1/4(d_{31} + d_{32}) + 1/6(d_{13} + d_{23} + d_{43}) - 1/12(d_{11} + d_{21} + d_{41} + d_{12} + d_{22} + d_{42}) \\ 1/2d_{41} + 1/4(d_{42} + d_{43}) + 1/6(d_{11} + d_{21} + d_{31}) - 1/12(d_{12} + d_{22} + d_{32} + d_{13} + d_{23} + d_{33}) \\ 1/2d_{42} + 1/4(d_{41} + d_{43}) + 1/6(d_{12} + d_{22} + d_{32}) - 1/12(d_{11} + d_{21} + d_{31} + d_{13} + d_{23} + d_{33}) \\ 1/2d_{43} + 1/4(d_{41} + d_{42}) + 1/6(d_{13} + d_{23} + d_{33}) - 1/12(d_{11} + d_{21} + d_{31} + d_{12} + d_{22} + d_{32}) \end{bmatrix}$$

(۴۱-۳)

و مجهولات با استفاده از رابطه (۳۶-۳) و رابطه فوق برآورد می گردند:

$$\begin{aligned} \hat{Z}_1 &= \hat{d}_{11} = 1/2d_{11} + 1/4(d_{12} + d_{13}) + 1/6(d_{21} + d_{31} + d_{41}) - 1/12(d_{22} + d_{32} + d_{42} + d_{23} + d_{33} + d_{43}) \\ \hat{Z}_2 &= \hat{d}_{21} = 1/2d_{21} + 1/4(d_{22} + d_{23}) + 1/6(d_{11} + d_{31} + d_{41}) - 1/12(d_{12} + d_{32} + d_{42} + d_{13} + d_{33} + d_{43}) \\ \hat{Z}_3 &= \hat{d}_{31} = 1/2d_{31} + 1/4(d_{32} + d_{33}) + 1/6(d_{11} + d_{21} + d_{41}) - 1/12(d_{12} + d_{22} + d_{42} + d_{13} + d_{23} + d_{43}) \\ \hat{Z}_4 &= \hat{d}_{41} = 1/2d_{41} + 1/4(d_{42} + d_{43}) + 1/6(d_{11} + d_{21} + d_{31}) - 1/12(d_{12} + d_{22} + d_{32} + d_{13} + d_{23} + d_{33}) \\ \hat{x}_2 &= \hat{d}_{12} - \hat{d}_{11} = \hat{d}_{22} - \hat{d}_{21} = \hat{d}_{32} - \hat{d}_{31} = \hat{d}_{42} - \hat{d}_{41} = 1/4[(d_{12} + d_{22} + d_{32} + d_{42}) - (d_{11} + d_{21} + d_{31} + d_{41})] \\ \hat{x}_3 &= \hat{d}_{13} - \hat{d}_{11} = \hat{d}_{23} - \hat{d}_{21} = \hat{d}_{33} - \hat{d}_{31} = \hat{d}_{43} - \hat{d}_{41} = 1/4[(d_{13} + d_{23} + d_{33} + d_{43}) - (d_{11} + d_{21} + d_{31} + d_{41})] \\ \hat{x}_3 &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 d_{i3} - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 d_{i1} = \bar{d}_3 - \bar{d}_1 \quad \text{و} \quad \hat{x}_2 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 d_{i2} - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 d_{i1} = \bar{d}_2 - \bar{d}_1 \end{aligned}$$

(۴۲-۳)

از رابطه (۳-۴۲) به سادگی می توان نتیجه گرفت که مقادیر امتدادهای مجهول ( $\hat{x}_j$ ) چیزی جز تفاضل میانگین حسابی امتداد مورد نظر از امتداد مبدا نیست و بنابراین با تعمیم این رابطه می توان رابطه ذیل را نتیجه گرفت :

$$\hat{x}_j = \frac{\sum_{i=1}^s d_{ij}}{S} - \frac{\sum_{i=1}^s d_{i1}}{S} = \bar{d}_j - \bar{d}_1 \quad (j = 2, 3, \dots, n) \quad (۳-۴۳)$$

و اما مسئله دیگر یافتن یک رابطه کلی برای مقادیر  $\hat{Z}_i$  ها می باشد. برای این منظور  $\hat{Z}_1$  را از رابطه (۳-۴۲) در نظر می گیریم :

$$\hat{Z}_1 = \frac{1}{2}d_{11} + \frac{1}{4}(d_{12} + d_{13}) + \frac{1}{6}(d_{21} + d_{31} + d_{41}) - \frac{1}{12}(d_{22} + d_{32} + d_{42} + d_{23} + d_{33} + d_{43})$$

سعی می کنیم مخارج کسری را به گونه ای تبدیل کنیم که مضاربی از  $s = 4$  و  $n = 3$  شوند، تا بتوانیم به یک قاعده کلی دست

پیدا کنیم، بر این مبنا:  $\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{12}$  و  $\frac{1}{4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{12}$  و  $\frac{1}{6} = \frac{1}{4} - \frac{1}{12}$  و همچنین :

$$\hat{Z}_1 = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{12}\right)d_{11} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{12}\right)(d_{12} + d_{13}) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{12}\right)(d_{21} + d_{31} + d_{41}) - \frac{1}{12}(d_{22} + d_{32} + d_{42} + d_{23} + d_{33} + d_{43})$$

از رابطه فوق به نتیجه جالبی دست پیدا می کنیم :

$$\begin{aligned} \hat{Z}_1 &= \frac{1}{4}(d_{11} + d_{21} + d_{31} + d_{41}) + \frac{1}{3}(d_{11} + d_{12} + d_{13}) - \frac{1}{12}(d_{11} + d_{12} + d_{13} + d_{21} + d_{31} + d_{41} + d_{22} + d_{32} + d_{42} \\ &+ d_{23} + d_{33} + d_{43}) = \bar{d}_1 + \frac{1}{3}(d_{11} + d_{12} + d_{13}) - \frac{1}{3}(\bar{d}_1 + \bar{d}_2 + \bar{d}_3) = \bar{d}_1 - \frac{1}{3}((\bar{d}_1 - d_{11}) + (\bar{d}_2 - d_{12}) + (\bar{d}_3 - d_{13})) \end{aligned}$$

و به طریق مشابه اثبات می گردد:

$$\begin{aligned} \hat{Z}_2 &= \bar{d}_1 - \frac{1}{3}[(\bar{d}_1 - d_{21}) + (\bar{d}_2 - d_{22}) + (\bar{d}_3 - d_{23})] \\ \hat{Z}_3 &= \bar{d}_1 - \frac{1}{3}[(\bar{d}_1 - d_{31}) + (\bar{d}_2 - d_{32}) + (\bar{d}_3 - d_{33})] \quad (۳-۴۴) \\ \hat{Z}_4 &= \bar{d}_1 - \frac{1}{3}[(\bar{d}_1 - d_{41}) + (\bar{d}_2 - d_{42}) + (\bar{d}_3 - d_{43})] \end{aligned}$$

و نهایتاً با تعمیم رابطه فوق به این نتیجه خواهیم رسید:  $(۳-۴۵) \quad \hat{Z}_i = \bar{d}_1 - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (\bar{d}_j - d_{ij}) \quad (i = 1, 2, \dots, s)$

می توان کمیت جدیدی را به صورت مقابل تعریف نمود:  $(۳-۴۶) \quad g_{ij} = \bar{d}_j - d_{ij}$  پس:  $(۳-۴۷) \quad \hat{Z}_i = \bar{d}_1 - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n g_{ij}$

و با استفاده از همین روش رابطه کلی برای محاسبه مقادیر باقیمانده ها بدست می آید:

$$\hat{v}_{dij} = (\bar{d}_j - d_{ij}) - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (\bar{d}_j - d_{ij}) = g_{ij} - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n g_{ij} \quad (۳-۴۸)$$

که در رابطه فوق  $\hat{v}_{dij}$  باقیمانده مربوط به مشاهده (امتداد)  $j$ ام در کوپل  $i$ ام می باشد. وریانس فاکتور ثانویه بر اساس رابطه زیر محاسبه می شود:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\hat{\mathbf{v}}^T \mathbf{P} \hat{\mathbf{v}}}{df} = \frac{\sigma_l^{-2} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^s \hat{v}_{dij}^2}{(n-1)(s-1)} \quad (۳-۴۹)$$

در عمل معمولاً برای راحتی محاسبات، ابتدا کلیه مشاهدات یک کوپل را از مقدار امتداد مبدا آن کوپل کم می کنند که اینکار باعث

می شود امتداد مبدا برای کلیه کوپلها مساوی صفر بشود:  $(۳-۵۰) \quad \forall i, j: d_{ij} = d_{ij} - Z_i$

و بنابراین:  $\hat{Z}_1 = \hat{Z}_2 = \dots = \hat{Z}_s = 0$  و آنرا با  $\hat{x}_1$  نشان می دهیم که بنا بر تعریف همیشه مساوی صفر خواهد بود و

رابطه (۴۳-۳) تبدیل به فرم مقابل می شود: (۵۱-۳)  $\hat{x}_j = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^s d_{ij} = \bar{d}_j$  (j = 2,3,...,n) زیرا که  $\bar{d}_1 = 0$  است. برای

برآورد وریانس امتدادها، قانون انتشار خطاها را بر رابطه فوق تاثیر می دهیم: (۵۲-۳)  $\sigma_{\hat{x}_j}^2 = \frac{\sigma_{d_{ij}}^2}{S} = \frac{\sigma_l^2}{S}$  و در اینجا چون معمولاً تعداد مشاهدات زیاد و قابل توجه می باشد (تعداد (ns) مشاهده داریم) بهتر است به جای استفاده از دقت اندازه گیری دستگاه ( $\sigma_l$ ) دقت امتدادهای برآورد شده را مستقیماً از روش کمترین مربعات برآورد کنیم پس باید در محاسبات مربوط به

$$\hat{\sigma}_{\hat{x}_j}^2 = \hat{\sigma}_0^2 \times \sigma_{\hat{x}_j}^2 = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{S} \quad (53-3) \quad :(\sigma_l = 1) \text{ در نظر گرفته شود}$$

در این قسمت به ذکر یک مثال در ارتباط با سرشکنی زوایا به روش امتدادی می پردازیم (واحد اندازه گیری زاویه گراد است):

قرائت های کاهش یافته نسبت به امتداد مبدأ $d_{ij}-d_{i1}$				
Set	stn1	stn2	stn3	stn4
1	0.0000g	105.4398	158.0868	211.6908
2	0.0000g	105.4400	158.0871	211.6906
3	0.0000g	105.4396	158.0872	211.6910
4	0.0000g	105.4404	158.0868	211.6905
5	0.0000g	105.4401	158.0864	211.6903
6	0.0000g	105.4395	158.0866	211.6908
Mean	0.0000g	105.43990	158.08682	211.69067
اختلاف قرائتها از متوسط (بر حسب ثانیه گرادی) $g_{ij}$				
میانگین	1	2	3	4
0.0	0.0	1.0	0.2	-1.3
-0.8	0.0	-1.0	-2.8	0.7
-1.0	0.0	3.0	-3.8	-3.3
-0.8	0.0	-5.0	0.2	1.7
1.5	0.0	-2.0	4.2	3.7
1.2	0.0	4.0	2.2	-1.3

مقادیر باقیمانده ها  $V_{ij}$

1	0.0	1.0	0.2	-1.3
2	0.8	-0.2	-2.0	1.5
3	1.0	4.0	-2.8	-2.3
4	0.8	-4.2	1.0	2.5
5	-1.5	-3.5	2.7	2.2
6	-1.2	2.8	1.0	-2.5

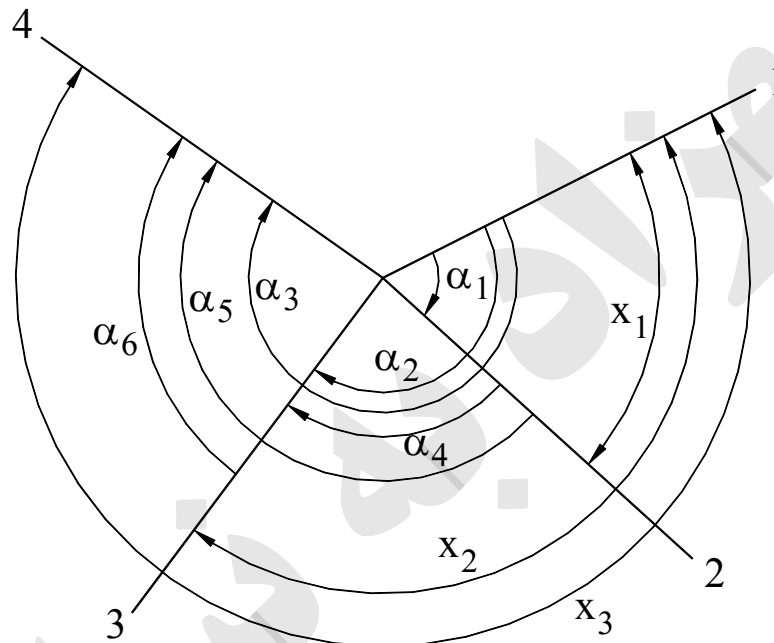
$$[\underline{\mathbf{v}}^T \underline{\mathbf{v}}] = 108.48 \quad s = 6, n = 4$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{108.48}{15} = 7.232 \quad \hat{\sigma}_{\hat{x}}^2 = \frac{7.232}{6} = 1.205$$



## ۳.۶.۳. اندازه گیری به روش کلیه زوایای ممکن

همانطور که از نام این روش پیداست کلیه زوایای ممکن برای کلیه امتدادها در این روش قرائت می شوند (شکل ۳-۱۵). در صورتی که  $n$  امتداد برای اندازه گیری در دست باشد از هر امتداد  $i$  به عنوان مبدا می توان  $i - 1$  زاویه قرائت نمود، مثلا از امتداد ۱ که شروع کنیم  $n - 1$  زاویه قرائت می شود برای امتداد ۲ تعداد  $n - 2$  زاویه و برای امتداد  $n - 1$  فقط ۱ زاویه قرائت می شود به این ترتیب مجموع زاویه هائی که قرائت می شوند برابر با  $1 + 2 + 3 + \dots + n - 2 + n - 1$  است که مساوی مقدار  $\frac{n(n-1)}{2}$  می باشد. در این روش چون معمولا تعداد زوایای قرائت شده خیلی بیشتر از حداقل تعداد مورد نیاز است نیاز به استفاده از روش سرشکنی خطاها به طریق کمترین مربعات داریم. مطابق شکل (۳-۱۵) اگر بخواهیم چهار امتداد ۱ و ۲ و ۳ و ۴ را قرائت کنیم زوایای قابل اندازه گیری در این روش برابر  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$  می باشند و تعداد زوایای مورد نیاز  $6 = (4 \times \frac{3}{2})$  خواهد بود.



شکل (۳-۱۵): اندازه گیری زوایا به روش کلیه زوایای ممکن

برای سرشکنی زوایا در اینجا از روش پارامتریک استفاده می کنیم، برای شکل فوق مدل ریاضی به شرح ذیل نوشته می شود:

$$\begin{aligned}
 l_1 &= x_1 \\
 l_2 &= x_2 \\
 l_3 &= x_3 \\
 l_4 &= x_2 - x_1 \\
 l_5 &= x_3 - x_1 \\
 l_6 &= x_3 - x_2
 \end{aligned}
 \quad \underline{l} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{bmatrix}
 \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}
 \quad \underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-54)$$

با بکار بردن شرط کمترین مربعات مقادیر مجهولات به صورت زیر محاسبه می گردد:

$$\hat{\underline{x}} = \begin{bmatrix} \frac{2\alpha_1 + (\alpha_2 - \alpha_4) + (\alpha_3 - \alpha_5)}{4} \\ \frac{2\alpha_2 + (\alpha_1 + \alpha_4) + (\alpha_3 - \alpha_6)}{4} \\ \frac{2\alpha_3 + (\alpha_1 + \alpha_5) + (\alpha_2 + \alpha_6)}{4} \end{bmatrix} \quad (3-55)$$

همانطور که از این جواب کاملا مشخص است نتیجه حاصل از سرشکنی نوعی میانگین وزنی است که در آن زاویه ای که مستقیما مقدار مجهول را مشاهده می کند با وزن ۲ و بقیه مشاهدات که از تفاضل زوایای اندازه گیری شده بدست می آیند با وزن ۱ ظاهر می شوند. مقدار ماتریس کوریانس مجهولات به فرض یکسان بودن وزن همه مشاهدات برابر مقدار ذیل خواهد بود:

$$\underline{C}_{\hat{x}} = (\underline{A}^T \underline{P} \underline{A})^{-1} = \sigma_l^2 (\underline{A}^T \underline{A})^{-1} = (\sigma_l^2) \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (56-3)$$

برای حالت عمومی که  $n$  امتداد داشته باشیم و زوایا را به همین روش مشاهده کنیم رابطه فوق به صورت ذیل تعمیم می یابد:

$$\underline{C}_{\hat{x}} = \frac{\sigma_l^2}{n} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2 \end{pmatrix} \quad (57-3)$$

$$df = \frac{n(n-1)}{2} - (n-1) = \frac{(n-1)(n-2)}{2} \quad (58-3) \quad \text{درجه آزادی بر اساس رابطه مقابل تعریف می گردد:}$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{2\sigma_l^2 \hat{V}^T \hat{V}}{(n-1)(n-2)} \quad (59-3) \quad \text{و بر این اساس وریانس فاکتور ثانویه بدین صورت خواهد بود:}$$

حال اگر کلیه مشاهدات را با وزن واحد فرض کنیم ( $\sigma_l = 1$ ) می توان با استفاده از وریانس فاکتور ثانویه مقدار وریانس مجهولات را محاسبه نمود:

$$\hat{C}_{\hat{x}} = \hat{\sigma}_0^2 \underline{C}_{\hat{x}} \Rightarrow \hat{\sigma}_{\hat{x}_i}^2 = \hat{\sigma}_0^2 \frac{2}{n} \quad (60-3)$$

قاعده اتریبسکی<sup>۲۸</sup>: برای برآورد نمودن مقدار وریانس مجهولات از مشاهدات یک قانون آماری مورد استفاده قرار می گیرد که به کمک آن می توان بدون صرف وقت فراوان برای برآورد نمودن وریانس مجهولات بدست آمده از سرشکنی کمترین مربعات، به سادگی آن را از روی مشاهدات بدست آورد. این قانون با استفاده از فرمول ذیل بیان می گردد:

$$\sigma_{\hat{x}_i}^2 = \sigma_l^2 \frac{N}{T} \quad (61-3)$$

که در رابطه فوق  $N$  تعداد مشاهدات لازم برای برآورد کمیت مجهول و  $T$  تعداد مشاهدات انجام شده می باشد. قاعده اتریبسکی دارای کاربردهای جالبی در زمینه برآورد نمودن دقت زوایایی است که در بخشهای قبل روش مشاهده و سرشکنی آنها را توضیح دادیم. مثلا در روش مشاهده زوایای مستقل تعداد زوایای لازم مساوی  $n-1$  و تعداد زوایای مشاهده شده  $n$  می باشد بنابراین قاعده:

$$\sigma_{\hat{x}_i}^2 = \sigma_l^2 \frac{n-1}{n} \quad \text{که دقیقا همان رابطه (3-34) را به دست می دهد. در مورد اندازه گیری به روش امتدادی نیز وضع به همین منوال است چون حداقل مشاهدات لازم  $n$  و تعداد مشاهدات انجام شده  $ns$  می باشد پس بر اساس قاعده اتریبسکی:}$$

$$\sigma_{\hat{x}_i}^2 = \sigma_l^2 \frac{n}{ns} = \frac{\sigma_l^2}{s}$$

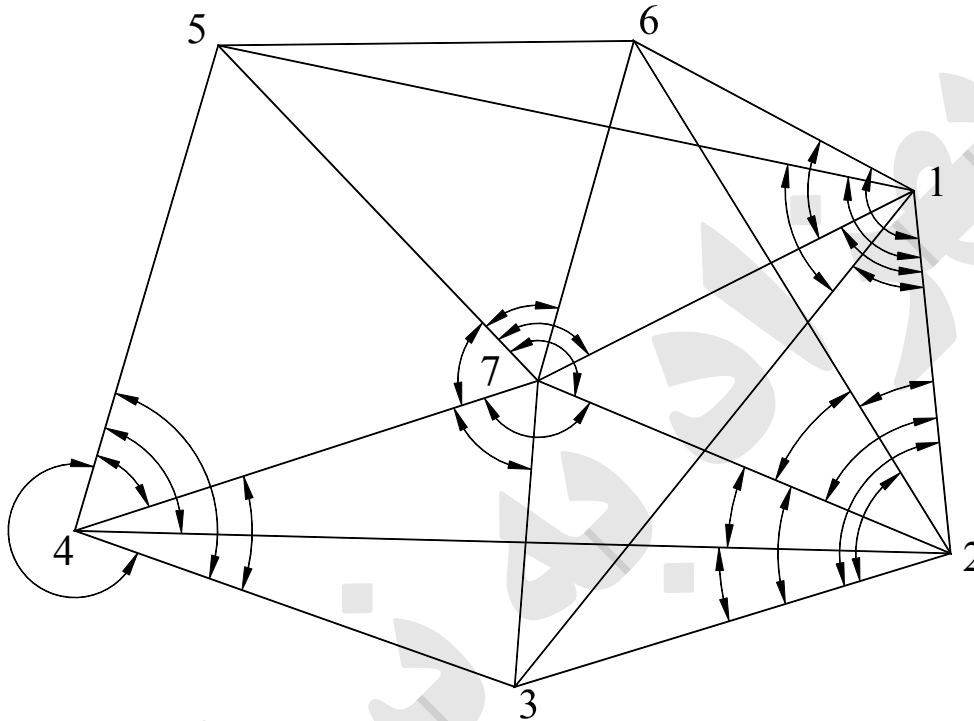
که همان رابطه (3-52) است.

<sup>۲۸</sup> Otrebski's rule

در مورد روش کلیه زوایای ممکن نیز تعداد مشاهدات لازم  $N = n - 1$  و تعداد مشاهدات انجام شده  $T = \frac{n(n-1)}{2}$  می باشد که با جایگذاری در فرمول اتریسکی به رابطه (۳-۵۷) می رسیم:

$$\sigma_{\hat{x}_i}^2 = \sigma_l^2 \frac{n-1}{n(n-1)} = \sigma_l^2 \frac{2}{n}$$

مثال (۳-۳): در شکل ذیل اگر دقت اندازه گیری کلیه زوایا با یکدیگر مساوی و برابر ۵ ثانیه باشد مطلوبست دقت زوایای مربوط به هر یک از ایستگاههای ۱ و ۲ و ۴ و ۷



شکل ۳-۱۶: کاربرد قاعده اتریسکی در محاسبه دقت زوایا

حل- بر اساس فرمول اتریسکی :

$$\sigma_{\hat{\alpha}_i(1)} = \sqrt{\frac{4}{6}} 5'' = 4.1'', \sigma_{\hat{\alpha}_i(2)} = \sqrt{\frac{4}{8}} 5'' = 3.5'', \sigma_{\hat{\alpha}_i(4)} = \sqrt{\frac{3}{5}} 5'' = 3.9'', \sigma_{\hat{\alpha}_i(7)} = \sqrt{\frac{5}{6}} 5'' = 4.6''$$

### پروژه های فصل سوم :

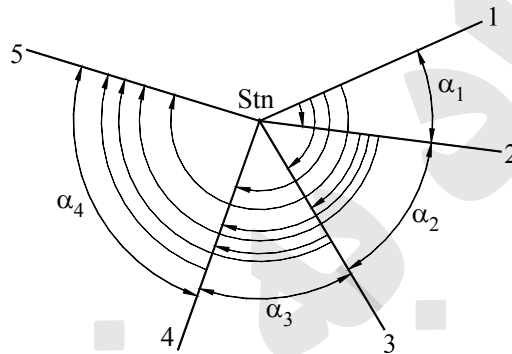
پروژه شماره ۱: بررسی دقت و تنظیم یک دستگاه زاویه یاب WILD-T<sub>2</sub> تهیه گزارش از کلیه مراحل عملیات به همراه اعداد و ارقام قرائت شده.

تبصره : در صورت در دسترس نبودن WILD-T<sub>2</sub> می توانید از زاویه یاب های سایر شرکتها به شرطی استفاده نمائید که دقتی معادل و یا بهتر از این نوع زاویه یاب برای آن ادعا شده باشد.

پروژه شماره ۲: یکی از موارد ذیل را انتخاب نموده و انجام دهید:

الف) نقطه ای را به عنوان ایستگاه انتخاب نموده و چهار امتداد برای آن در نظر بگیرید فواصل علائم نشانه حداقل ۲۰۰ متر رعایت گردد، زاویه بین امتداد ها بین ۴۰ تا ۷۵ درجه انتخاب گردد. هر امتداد را در شش کوپل قرائت کنید و نتایج را به روش امتدادی سرشکن نموده و مقدار بر آورد شده برای آن و همچنین مقدار برآورد شده برای دقت اندازه گیری امتدادها را در جدولی نمایش دهید (تعداد افراد هر گروه ۳ تا ۵ نفر و هر نفر یک گزارش).

ب) در شکل (۳-۱۷) از روش قرائت کلیه زوایای ممکن برای تعیین زوایای  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  استفاده شده است، مطلوبست انجام سرشکنی کمترین مربعات بر اساس اطلاعات ارائه شده در جدول و برآورد دقت کمیت های مجهول.



شکل (۳-۱۷) : پروژه شماره ۲

کوپل پنجم	کوپل چهارم	کوپل سوم	کوپل دوم	کوپل اول	زاویه اندازه گیری شده
31°23'11"	31°23'07"	31°23'08"	31°23'03"	31°23'01"	12
83°17'56"	83°17'58"	83°18'03"	83°17'59"	83°17'52"	13
133°42'06"	133°42'11"	133°42'09"	133°42'03"	133°42'14"	14
221°09'10"	221°09'04"	221°09'11"	221°09'07"	221°09'12"	15
51°54'57"	51°54'54"	51°54'55"	51°54'58"	51°54'53"	23
102°19'00"	102°18'58"	102°19'03"	102°19'05"	102°19'01"	24
189°46'07"	189°46'06"	189°46'05"	189°46'09"	189°46'07"	25
50°24'09"	50°24'11"	50°24'12"	50°24'14"	50°24'11"	34
137°51'11"	137°51'11"	137°51'08"	137°51'03"	137°51'09"	35
87°27'07"	87°27'04"	87°27'01"	87°27'05"	87°27'03"	45

## مسائل فصل سوم :

۱- در منطقه ای کوهستانی با شیب ۶۰٪ زاویه ای افقی را اندازه گیری کرده ایم، در صورتی که تراز دستگاه تنظیم باشد و ارزش تقسیمات تراز ۳۰ ثانیه باشد، حداکثر چقدر خطای تراز برای اندازه گیری این زاویه می توان انتظار داشت؟ الف) در صورتی که زاویه را یک کوپل قرائت کنیم. ب) در صورتی که زاویه را پنج کوپل قرائت کنیم.

۲- برای اندازه گیری زاویه در یک عملیات ژئودزی، در شب از چراغی با نور قرمز و طول موج  $9 \times 10^{-7}$  استفاده کرده ایم، در صورتی که هر زاویه را ۱۲ کوپل قرائت کرده باشیم و بزرگنمایی اسمی دوربین  $40 \times$  باشد، مطلوبست برآورد خطای نشانه روی.

۳- در یک عملیات پیمایش از شاقولهای نوری برای ایستگاه گذاری دوربین و نشانه ها استفاده کرده ایم، در صورتی که حداکثر خطای ۱/۵ میلی متر برای ایستگاه گذاری دوربین و نشانه ها انتظار داشته باشیم و فاصله متوسط بین اضلاع پیمایش حدود ۱۵۰ متر باشد، چه مقدار خطای ایستگاه گذاری برای اندازه گیری هر یک از زوایای افقی پیش بینی می کنید؟

۴- چنانچه بخواهیم در یک عملیات پیمایش ژئودزی درجه ۳ با اضلاع حدود ۸ کیلومتر زوایای افقی را در روز اندازه گیری کنیم، بطوری که درجه حرارت متوسط محیط ۳۸ درجه سلسیوس و فشار متوسط ۷۲۰ میلی متر جیوه و تغییرات متوسط درجه حرارت در راستای قائم بر امتداد اندازه گیری ۰/۱۲ درجه سلسیوس بر متر باشد، مطلوبست:

الف) محاسبه میزان تصحیح انکسار برای هر یک از امتدادهای اندازه گیری

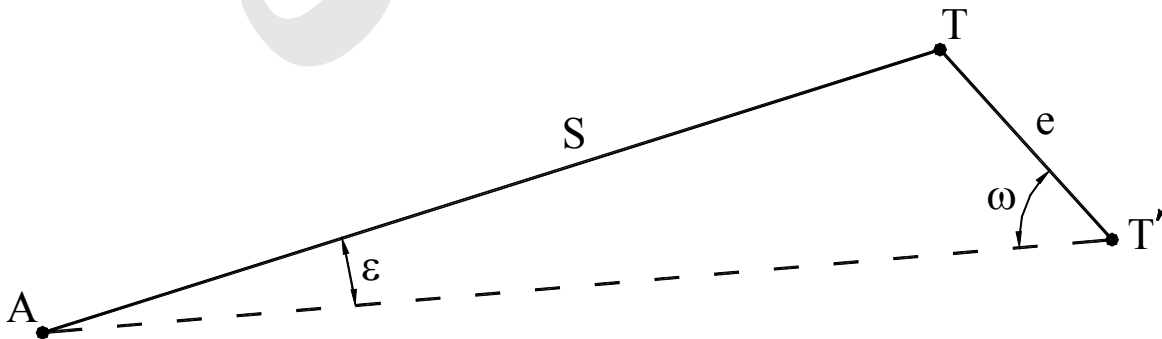
ب) در صورتی که برای دو امتداد اندازه گیری از یک زاویه تغییرات درجه حرارت در راستای قائم یکی ۰/۱۱ و دیگری ۰/۱۳ باشد، تصحیح انکسار را برای این زاویه محاسبه کنید.

۵- چنانچه بدلا بلی زوایای افقی در حالتی که نشانه و یا دوربین تغییر مکان یافته اند، اندازه گیری شوند، تصحیحی باید به اندازه زاویه افقی اعمال گردد که به آن تصحیح خارج از ایستگاهی گفته می شود. اگر مطابق شکل (۳-۱۸) محل اصلی نقطه نشانه از  $T$  به  $T'$  تغییر مکان داده باشد و مقادیر تقریبی  $\omega = 45^\circ$ ،  $S = 1000m$ ،  $e = 10m$  باشد، مطلوبست:

الف)- محاسبه مقدار تصحیح خارج از ایستگاهی  $\mathcal{E}$

ب)- در صورتی که دقت اندازه گیری ۵ ثانیه برای امتداد  $AT$  مد نظر باشد، آیا می توان  $\sin(\mathcal{E})$  را با  $\mathcal{E}$  برابر فرض نمود؟

ج)- در صورتی که دقت کمتر از یک ثانیه برای این تصحیح مد نظر باشد، مطلوبست تعیین دقت اندازه گیری کمتهای  $S, e, \omega$



شکل (۳-۱۸): تصحیح خارج از ایستگاهی نقطه نشانه

## فصل چهارم

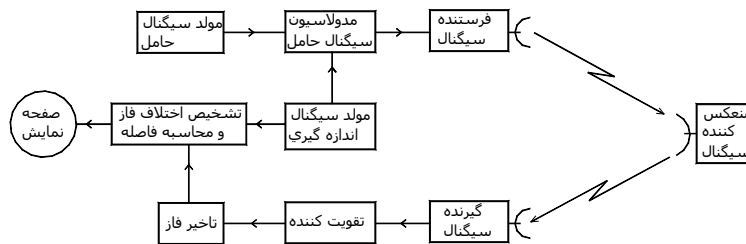
## ۴. سیستم های اندازه گیری طول

اندازه گیری فاصله مهمترین روش برای تعیین موقعیت بر روی زمین است و در حال حاضر تعیین کننده ترین عامل برای انجام کلیه عملیات اجرائی در علم مهندسی نقشه برداری می باشد. مسئله تعیین دقت در اندازه گیری طول بین دو نقطه دارای اهمیت ویژه ای است که بسته به نوع کاربرد و درخواستی که از سوی استفاده کننده وجود دارد می توان معیاری برای دقت اندازه گیری یک طول بدست آورد. آنچه که در این درس بدان می پردازیم بررسی و تحلیل دقت و شناخت خطاهای روشهای دقیق اندازه گیری طول می باشد. برای اندازه گیری طول روشهای مختلفی وجود دارد که بطور کلی عبارتند از: روشهای مکانیکی، روشهای اپتیکی و روشهای الکترونیکی. در درس نقشه برداری پایه با روشهای مکانیکی و اپتیکی و خطاها و تصحیحات آنها، آشنا شده اید. در این درس به بررسی دقت و خطاهای اندازه گیری با دستگاههای طولیاب الکترونیک و همچنین به صورت اجمالی به بررسی دقت اندازه گیری فاصله با استفاده از سیستم تعیین موقعیت ماهواره ای<sup>۱</sup> (GPS) خواهیم پرداخت.

## ۴.۱. اصول فاصله یابی الکترونیکی

در بیشتر دستگاههای طولیابی که در حال حاضر برای نقشه برداری زمینی مورد استفاده قرار می گیرند از روش اختلاف فاز<sup>۲</sup> بعنوان مبانی اندازه گیری فاصله استفاده می شود. در شکل (۴-۱) اصول اندازه گیری در دستگاههای طولیاب زمینی بصورت ساده ای نمایش داده شده است. همانطور که در شکل دیده می شود در دستگاه یک منبع مولد امواج الکترو مغناطیس وجود دارد که امواج حامل<sup>۳</sup> تولید می کند که این موج به تنهایی شامل هیچگونه اطلاعاتی نیست و از آن می توان بعنوان حمل کننده اطلاعات استفاده نمود که برای این منظور موج یا امواج دیگری را بر روی موج حامل سوار می کنند که در حقیقت آنها شامل اطلاعات می باشند به این عمل سوار نمودن موج، مدولاسیون<sup>۴</sup> گفته می شود. مدولاسیون می تواند به سه صورت کلی انجام پذیرد: مدولاسیون دامنه<sup>۵</sup> (AM)، مدولاسیون فرکانس<sup>۶</sup> (FM) و مدولاسیون فاز<sup>۷</sup> (PM). موجی که مدولاسیون بر روی آن انجام شده است توسط یک فرستنده به محیط خارج از دستگاه فرستاده می شود و با عبور از محیط واسطه<sup>۸</sup> به یک نشانه منعکس کننده<sup>۹</sup> (رفلکتور) برخورد می کند و پس از انعکاس توسط گیرنده سیگنال دریافت شده و تقویت می گردد در این مرحله تاخیر فاز بین موج رفت و موج برگشت تعیین می گردد و با استفاده از آن، فاصله بین دستگاه طولیاب و منعکس کننده محاسبه شده و به صفحه نمایش ارسال می گردد.

<sup>۱</sup> Global Positioning System<sup>۲</sup> Phase difference<sup>۳</sup> Carrier wave<sup>۴</sup> Modulation<sup>۵</sup> Amplitude modulation<sup>۶</sup> Frequency modulation<sup>۷</sup> Phase modulation<sup>۸</sup> Medium<sup>۹</sup> Reflector



شکل (۴-۱): نمایش سمبولیک نحوه اندازه گیری توسط یک دستگاه طولیاب الکترونیکی

#### ۴. ۱. ۱. طبقه بندی دستگاههای طولیاب الکترونیکی

در دستگاههای طولیاب مختلف بسته به نوع کاربرد، دقت و یا فاصله ای که برای اندازه گیری مورد نظر می باشد، از امواج الکترو مغناطیس با طول موجهای متفاوتی استفاده می شود و بعلاوه اینکه از روشهای متفاوت مدولاسیون نیز استفاده می گردد. بر این اساس یک نوع طبقه بندی برای دستگاههای طولیاب بوجود می آید که مبنای آن طول موج استفاده شده برای دستگاه است. با این طبقه بندی دستگاههای طولیاب به چهار گروه ذیل تقسیم می شوند:

الف - دستگاههایی که از امواج رادیویی با طول موج بلند<sup>۱۰</sup> استفاده می کنند که بیشتر این نوع سیستمها در هیدروگرافی و اقیانوس نگاری کاربرد دارند.

ب - دستگاههایی که از امواج مایکرو ویو<sup>۱۱</sup> استفاده می کنند که این سیستمها بیشتر در اندازه گیری طولهای بلند در ژئودزی کلاسیک کاربرد دارند.

ج - دستگاههایی که از امواج مادون قرمز<sup>۱۲</sup> برای اندازه گیری استفاده می کنند.

د - دستگاههایی که از امواج نور مرئی<sup>۱۳</sup> برای اندازه گیری استفاده می کنند.

دستگاههای گروه الف طول موج حاملی در حدود حداکثر ۲ کیلومتر و حداقل ۱۵۰ متر دارند (فرکانس ۱۰۰ کیلوهرتز تا ۲ مگاهرتز) و عموماً برای کاربری های هیدروگرافی و ناوبری<sup>۱۴</sup> مورد استفاده واقع می شوند. معمولاً در این نوع از دستگاهها از چند فرستنده و یک یا دو گیرنده استفاده می شود که برای آنها واژه های **slave** و **master** استفاده می گردد. برخی از دستگاههای این گروه عبارتند از: سیستم **Decca Lambda**، سیستم های **Loran** و **Toran** و همچنین سیستمهای **Syledis**، **Geoloc** و **Argo, Racial**. برد و دقت اندازه گیری این سیستمها که بیشتر برای تعیین موقعیت آنی<sup>۱۵</sup> کاربرد دارند بسته به طول موج استفاده

<sup>۱۰</sup> Long Radio Waves

<sup>۱۱</sup> Microwaves

<sup>۱۲</sup> Infra-red

<sup>۱۳</sup> Visible Light

<sup>۱۴</sup> Navigation

<sup>۱۵</sup> Real time positioning

شده و سیستم اندازه گیری بکار رفته در آنها متفاوت می باشد. برد دستگاههایی که از امواج رادیویی با طول موج بلند استفاده می کنند حداقل ۶۰ کیلومتر و حداکثر تا ۲۰۰۰ کیلومتر نیز می رسد. در این گروه معمولاً سیستمهایی که برد بیشتری دارند از طول موج بزرگتری در آنها استفاده می شود و به همان نسبت دقت تعیین موقعیت کمتری دارند. دقت اندازه گیری در این دستگاهها حداقل ۵۰ متر و حداکثر ۱ متر است.

دستگاههای گروه دوم از امواج رادیویی با طول موجی در حدود چند سانتیمتر استفاده می کنند (مایکروویو) که در بیشتر آنها طول موج در حدود ۱۰ سانتیمتر، ۳ سانتیمتر و بعضی ۸ میلی متر می باشد. این دستگاهها برای اندازه گیری نیاز به دید مستقیم دارند و برد اندازه گیری آنها حداقل ۳۰ و حداکثر ۱۵۰ کیلومتر است و تا حدودی هم بستگی به شرایط جوی دارد. از این دستگاهها می توان هم در روز و هم در شب استفاده نمود. در این نوع دستگاهها یک فرستنده بنام **master** و یک گیرنده بنام **remote** استفاده می گردد. مدولاسیون موج حامل در این دستگاهها از نوع (FM) می باشد. فرکانس موج حامل در این دستگاهها حدود حداقل ۳ و حداکثر ۳۶ گیگا هرتز می باشد. باید توجه داشت که امواج ارسالی توسط این دستگاهها بصورت مخروطی با زاویه راس بین ۲ تا ۲۰ درجه انتشار می یابند و بدین جهت نشانه روی بین دو ایستگاه خیلی مشکل نمی باشد. جدول ۴-۱ مشخصات تعدادی از این دستگاهها را به همراه دقت و برد آنها نشان می دهد.

دستگاههای گروه (ج) که از امواج مادون قرمز استفاده می کنند دارای طول موج حاملی در حدود ۰/۹ میکرومتر (میکرون) می باشند و بنابراین فرکانس استفاده شده در این دستگاهها در حدود ۳۳۰ ترا هرتز می باشد. در این دستگاهها از یک فرستنده و یک منعکس کننده نظیر آنچه که در شکل (۴-۱) نشان داده شده است، استفاده می شود. اندازه گیری در این دستگاهها بستگی به شرایط جوی نظیر فشار، دما و رطوبت دارد. برد اندازه گیری این دستگاهها توسط قدرت منع تولید پرتو مادون قرمز محدود می گردد. منع تولید پرتو مادون قرمز معمولاً یک دیود نوری گالیوم - آرسناید<sup>۱۶</sup> است که این نوع دیودها معمولاً تشعشعات نسبتاً نامنظمی با طول موج ۰/۹ میکرون تولید می کنند که پهنای باند آن ۰/۰۵ میکرون می باشد. این تشعشعات الکترومغناطیسی قدرت خروجی خیلی کمی در حدود ۴۰ میلی وات دارند که فقط نیمی از آن از دستگاه خارج می شود بنابراین بیشتر دستگاههای این گروه بردی در حدود یک تا دو کیلومتر بیشتر ندارند که البته در برخی از انواع آنها که از نوعی پرتو لیزر مادون قرمز استفاده می شود برد تا ۳ کیلومتر هم می رسد. با افزایش فاصله تعداد منشورهای مورد استفاده برای دستگاههای مادون قرمز افزایش پیدا می کند بطوری که در بعضی از آنها برای فواصل بیش از دو تا حداکثر ۳ کیلومتر باید از ۱۹ منشور استفاده نمود. بیشتر دستگاههای توتال استیشن و دستگاههای تاکنومتری نقشه برداری که امروزه رواج فراوانی دارند در زمره این گروه قرار می گیرند زیرا که برای عملیات معمولی نقشه برداری حداکثر برد ۱/۵ کیلومتر کفایت که این نوع از دستگاهها آنها پوشش می دهند سرعت اندازه گیری در این دستگاهها سریع است و برای مدولاسیون موج حامل از مدولاسیون شدت که نوعی از مدولاسیون دامنه (AM) می باشد، در این دستگاهها استفاده می شود (به جدول ۴-۱ توجه کنید).

دستگاههای گروه (د) آنهایی هستند که از نور مرئی به عنوان موج حامل استفاده می کنند و طول موجشان کمی بیشتر از نصف طول موج دستگاههای مادون قرمز است برای مثال طول موج نوری که برای دستگاه ژئودیمتر استفاده شده، در حدود ۰/۵۶۰۰ آنگستروم

<sup>۱۶</sup> GaAs luminescent diode



(۰/۵۶ میکرون) می باشد. انعکاسات ناخواسته در اندازه گیری با این دستگاهها کمتر اتفاق می افتند زیرا که بیشتر سطوحی که در طبیعت یافت می شوند انعکاسات قوی را در این طول موج ایجاد نمی کنند ولی در عوض خصوصا در ساعات روز به دلیل وجود خورشید همیشه این احتمال وجود دارد که امواج نوری ناخواسته وارد سیستم نوری شده و باعث نویز در سیستم بشوند که آن باعث خواهد شد تا حساسیت سیستم اندازه گیری کاهش یابد به همین دلیل معمولا از این سیستمها در شب استفاده می گردد. در مدل‌های قدیمی از این دستگاهها برای تولید پرتوهای نوری، از لامپ بخار جیوه و یا لامپ تنگستن استفاده می شده است که امروزه فقط نوع لیزری آن تولید می شود که معمولا در آن از لامپ هلیوم - نئون استفاده می گردد. برد این نوع از دستگاهها از دستگاههای مادون قرمز بیشتر است و در برخی انواع لیزری آن حتی به حدود حداکثر ۶۰ کیلومتر هم رسیده است (البته با ۳۰ منشور) ولی بطور متوسط می توان بردی بین ۲ متر تا ۲۰ کیلومتر را از آنها بسته به نوع دستگاه، انتظار داشت به دلیل طول موج کوچکتر استفاده شده در این دستگاهها، نسبت به دستگاههای مادون قرمز دارای دقت بهتری هستند. نوع خاصی از دستگاههای اندازه گیری لیزری در این گروه وجود دارند که به دلیل استفاده از تکنولوژی ویژه ای که در آنها بکار رفته است از دقت بسیار بالایی برخوردار هستند که معروفترین آنها **Mekometer Kern** می باشد، در این نوع دستگاه مولد سیگنال حامل، لامپ فلاش گزنون<sup>۱۷</sup> می باشد که نوری سفید رنگ از مخلوط طول موجهای بین ۰/۴ تا ۰/۹ میکرون تولید می کند و قادر است مانند چیزی شبیه به فلاش زدن دوربین عکاسی برق هائی قوی از نور را برای مدت زمان یک میکروثانیه از خود ساعت کند که این کار در یک ثانیه یکصد بار تکرار می شود. این نوع دستگاه که بسیار گرانقیمت نیز هست در اندازه گیریهای بسیار دقیق میکروژئودزی و تحلیل تغییر شکل<sup>۱۸</sup> کاربرد دارد (جدول ۴-۱).

امروزه با ظهور سیستمهای اندازه گیری ماهواره ای **GPS** که دارای مزایای عمده بسیار زیادی نیز هستند بیشتر دستگاههایی که در گروههای الف و ب قرار می گیرند یعنی دستگاههای با طول موج بلند و دستگاههای مایکرو ویو یا کلا منسوخ شده اند و یا اینکه به ندرت مورد استفاده قرار می گیرند. از دستگاههای نور مرئی عموما برای اندازه گیری طولهای متوسط می توان استفاده کرد که باز هم می توان این طولها را با **GPS** نیز اندازه گیری نمود. فقط در مقابل **GPS** دو دسته از دستگاهها باقی می ماند: ۱- دستگاههای مادون قرمز لیزری که عموم سیستمهای توتال استیشن امروزی از این نوع هستند و در عملیات روزمره نقشه برداری کاربرد دارند. ۲- دستگاههای طولیاب لیزری بسیار دقیق که از نظر دقت اندازه گیری فاصله از **GPS** دقیق تر هستند و کاربردهای محدودی هم دارند. البته نمی توان استفاده از دستگاههای نور مرئی را برای اندازه گیری طولهای متوسط (مورد استفاده در ژئودزی درجه ۳ و پیمایش با طولهای بلند)، بطور کامل رد کرد زیرا که از نظر قیمت و هزینه در مقایسه با گیرنده های گرانقیمت ژئودتیکی **GPS** در حال حاضر به صرفه تر هستند.

<sup>۱۷</sup> Xenon flash tube<sup>۱۸</sup> Deformation analysis

جدول ۴-۱: فهرست تعدادی از دستگاههای طولیاب الکترونیکی به عنوان نمونه

نام دستگاه	دقت اندازه گیری دستگاه (amm+bppm)	برد دستگاه	ملاحظات
------------	--------------------------------------	------------	---------

دستگاههای با طول موج رادیویی بلند (گروه الف)

Loran C	۵۰__۲۰۰ ft	۸۰۰_۱۲۰۰ mile	مناسب برای ناوبری دریائی
Pulse/λ system	۲۵m	۵۰۰ mile	مناسب برای ناوبری دریائی و هیدروگرافی
Toran	۱m	۷۰۰ Km	مناسب برای هیدروگرافی
Syledis	۱m__ ۵m	۲۷۰ Km	مناسب برای هیدروگرافی
Geoloc system	(۲m+۱۵ppm)	۱۲۰۰ km	مناسب برای هیدروگرافی
Argo system	۵۰m	۴۸۰ __۷۴۰ Km	مناسب برای ناوبری دریائی
Racal Micro-fix	۱m	۷۰ km	مناسب برای هیدروگرافی

دستگاههای مایکرو ویو (گروه ب)

Tellurometer MRA-۴	(۳mm+۳ppm)	۴۰ Km	ژئودزی درجه ۳ و ۲ و ۱
Tellurometer MRA-۵	(۱۰mm+۱۰ppm)	۱۰۰m__۵۰Km	ژئودزی درجه ۳ و ۲ و ۱
Tellurometer CA-۱۰۰	(۱۵mm+۵ppm)	۳۰Km__۶۰Km	ژئودزی درجه ۲ و ۱
Tellurometer MRA-۷	(۱۵mm+۳ppm)	۲۰m__۱۲۲Km	ژئودزی درجه ۳ و ۲ و ۱ و هیدروگرافی
Siemens – Albis MD ۶۰	(۱۰mm+۳ppm)	۲۰m__۱۵۰Km	ژئودزی درجه ۳ و ۲ و ۱
Cubic Autotape DM۴۰ & DM۴۳	(۰.۵m+۱۰ppm)	۱۰۰Km	طراحی شده برای کاربری در هیدروگرافی

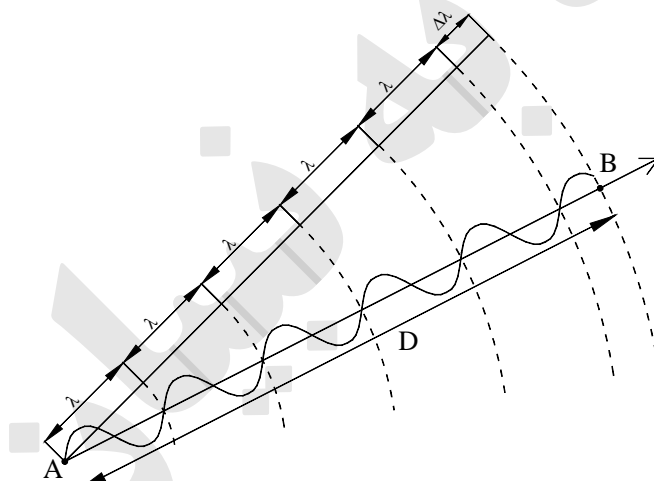
دستگاههای مادون قرمز (گروه ج)

Leica (Wild-Leitz) DI-۴	(۵mm+۵ppm)	۲m__۲Km	برداشت تاکنومتری - فاصله یابی برد کوتاه
Leica (Wild-Leitz) Tachymat TC ۱۶۰۰	(۳mm+۲ppm)	۲m__۲Km	برداشت تاکنومتری - فاصله یابی برد کوتاه
Leica (Wild-Leitz) DI ۱۶۰۰	(۳mm+۲ppm) ۲s , (۱۰mm+۲ppm) ۰.۳s	۳m__۲.۵Km	برداشت تاکنومتری - فاصله یابی برد کوتاه
Leica (Wild-Leitz) DI ۲۰۰۲	(۱mm+۱ppm) ۳s , (۵mm+۱ppm) ۰.۳s	۳m__۲.۵Km	برداشت تاکنومتری - فاصله یابی برد کوتاه
Leica (Wild-Leitz) DI ۳۰۰۰	(۳mm+۱ppm) ۳.۵s, (۱۰mm+۱ppm) ۰.۳s	۳m__۶Km	برداشت تاکنومتری - فاصله یابی برد کوتاه و برد متوسط
Aga Geodimeter ۴۰۰ series (Geotronics)	(۲mm+۳ppm)	۳.۳Km	برداشت تاکنومتری - فاصله یابی برد کوتاه
Sokkisha T.S SET۲	(۳mm+۲ppm)	۲Km	برداشت تاکنومتری - فاصله یابی برد کوتاه

نام دستگاه	دقت اندازه گیری	برد دستگاه	ملاحظات
دستگاههای با نور مرئی (گروه د) (با دقت بسیار بالا)			
Kern Mekometer ME ۳۰۰۰	(۰.۲۸mm+۳ppm)& (۰.۳۸mm+۰.۳۵ppm)	۲Km	مدت زمان قرائت ۶ دقیقه ، مناسب برای میکرو ژئودزی و تحلیل تغییر شکل
Com-Rad Geomensor ۲۰۴	(۰.۱mm+۰.۱ppm)	۵۰m __ ۵km	مناسب برای میکرو ژئودزی و تحلیل تغییر شکل
Georan I Two-colour Instrument	(۰.۲mm+۰.۲ppm)& (۰.۵mm+۰.۵ppm)	۳۰Km	مناسب برای میکرو ژئودزی و تحلیل تغییر شکل و مطالعات ژئودینامیک
Two- Colour Terrameter LDM۲	(۰.۱mm+۰.۱ppm)	۲۰Km	مناسب برای میکرو ژئودزی و تحلیل تغییر شکل و مطالعات ژئودینامیک

#### ۴. ۱. ۲. روشهای اندازه گیری فاصله

همانطور که در ابتدای فصل اشاره شد اندازه گیری فاصله در دستگاههای طولیاب الکترونیکی با استفاده از تعیین اختلاف فاز بین سیگنال ارسالی و سیگنال دریافتی انجام می پذیرد. بر این اساس فاصله اندازه گیری شده مضرب صحیحی از طول موج مدوله شده (سیگنال اندازه گیری در شکل ۴-۱) بعلاوه مقدار باقیمانده از طول موج می باشد (به شکل ۴-۲ توجه کنید).



شکل (۴-۲): اصل اندازه گیری فاصله توسط امواج الکترومغناطیسی

باتوجه به شکل فوق، می توان فاصله را به صورت مقابل بیان نمود:  $D = m\lambda + \Delta\lambda$  (۴-۱)

که در این رابطه  $m$  تعداد ارقام صحیح طول موج سیگنال اندازه گیری و  $\Delta\lambda$  مقدار باقیمانده ایست که دستگاه می تواند با اندازه گیری اختلاف فاز سیگنالهای ارسال و دریافت آنرا محاسبه کند. برای تعیین فاصله  $D$  در رابطه فوق باید مقادیر  $\lambda$ ،  $\Delta\lambda$  و  $m$  تعیین گردند. مقدار  $\lambda$  یعنی طول موج سیگنال اندازه گیری که توسط دستگاه تولید می شود از قبل معلوم است ولی عوامل فیزیکی مانند سرعت انتشار موج الکترومغناطیس در محیط واسطه و تغییرات فرکانس تولید شده توسط مولد سیگنال اندازه گیری، کمیت هائی هستند که بر روی دقت برآورد آن تاثیر می گذارند ( $\lambda = v/f$ ) و جلوتر به این موضوع خواهیم پرداخت. دو مسئله اساسی که دستگاه طولیاب باید آنها را حل کند یکی مسئله حل ابهام<sup>۱۹</sup> می باشد که دستگاه باید بتواند به طریقی معلوم کند که چند

<sup>۱۹</sup> Resolving ambiguity

سیکل طی شده است تا موج از **A** به **B** برسد به عبارت دیگر باید مقدار **m** محاسبه شود که برای اینکار روشهای مختلفی وجود دارد مثلا در دستگاههای تلورومتر<sup>۲۰</sup> طول موج اندازه گیری ارسالی هر بار در مضاربی از ۱۰ متر افزایش پیدا می کند تا هنگامی که بطور تقریبی فاصله تعیین شود در این حالت مقدار **m** برای اندازه گیری با طول موج اصلی اندازه گیری محاسبه شده است و اندازه گیری دقیق با این طول موج صورت می گیرد. روش دیگر برای حل ضریب ابهام استفاده از دو یا چند طول موج اندازه گیریست. در این روش به مولدی برای سیگنالهای اندازه گیری نیاز داریم که بتواند فرکانسهائی با ثبات بسیار زیاد تولید کند. اختلاف فازهای اندازه گیری شده از هر کدام از این فرکانسها می تواند برای حل معادلات خطی زیر بکار برده شود:

$$D = m_1 \lambda_1 + \Delta \lambda_1 \quad (1)$$

$$D = m_2 \lambda_2 + \Delta \lambda_2 \quad (2) \quad (2-4)$$

$$D = m_3 \lambda_3 + \Delta \lambda_3 \quad (3)$$

⋮

برای حل معادلات (۲-۴) مقادیر اختلاف فاز و طول موجها توسط دستگاه مشخص می شوند تنها چیزی که باقی می ماند معلوم نمودن مقادیر **m** و **D** است که برای حل آنها هم همیشه تعداد مجهولات یکی بیشتر از معادلات می شود بنابراین در دستگاههای مختلف با در نظر گرفتن یک شرط اضافی حل ابهام انجام می شود. در دستگاههای ژئودیمتر معادلات (۱)، (۲)، (۳) به صورت همزمان حل می شوند با این شرط که مقدار **m** در هر سه آنها یکی باشد در این روش هر چقدر که فرکانسهای اندازه گیری فاصله به یکدیگر نزدیکتر باشند فاصله ابهام بلندتری را می توان تعیین کرد ولی دقت پائین می آید. در بسیاری از دستگاههای مادون قرمز به دلیل برد محدودی که دارند فقط از دو فرکانس برای مدولاسیون موج حامل استفاده می شود و برد فاقد ابهام معمولا ۱۹۹۹/۹ متر می باشد. و رای این موضوع فرکانس سومی نیز مورد نیاز است. پایین ترین فرکانس باید به گونه ای باشد که مقدار نصف طول موج آن بزرگتر از فاصله اندازه گیری شده باشد به صورتی که مقدار **m** مساوی صفر گردد. برای حل ابهام فاز در دستگاههای بسیار دقیق نظیر **Mekometer** روشهای دیگری نیز وجود دارد که از حوصله این جزوه خارج است ولی به طور کلی و به عنوان یک اصل باید گفت هر چقدر فرکانسهای با ثباتر و با طول موج کوچکتری توسط نوسان ساز امواج مدولاسیون تولید شود دقت بهتری برای اندازه گیری فاصله مورد انتظار خواهد بود.

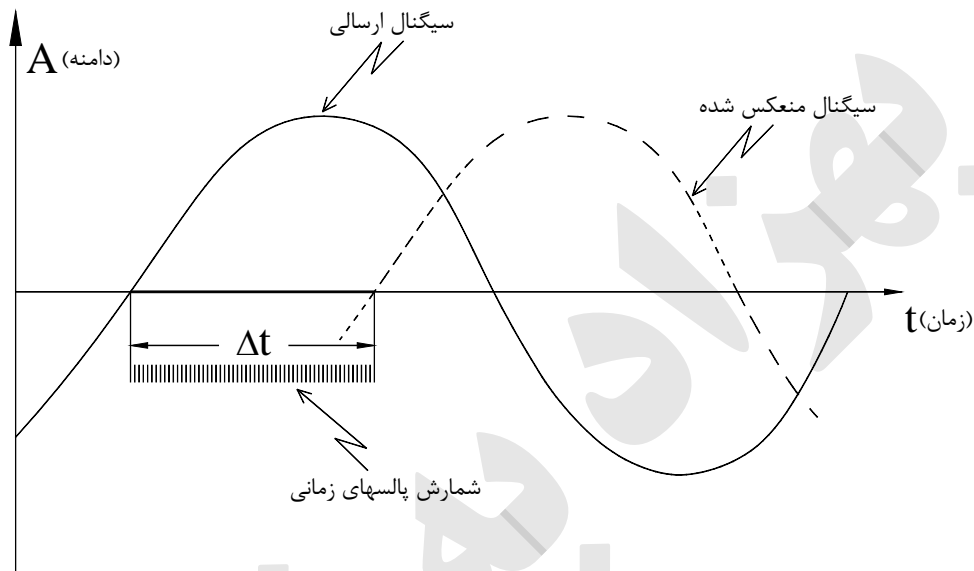
برای تعیین اختلاف فاز  $\Delta \lambda$  روشهای متفاوتی وجود دارد که این روشها در طی سی سال گذشته دارای پیشرفت های چشمگیری بوده اند. در حالیکه در دستگاههای طولیاب اولیه دقتی در حدود یکصدم یک سیکل معمول بوده است هم اکنون حداقل دقت مورد انتظار برای اندازه گیری اختلاف فاز یک دههزارم سیکل می باشد. به طور کلی این روشها را می توان به دو دسته آنالوگ و دیجیتال تقسیم بندی کرد که روشهای آنالوگ عبارتند از روش استفاده از مدار ممیزی فاز<sup>۲۱</sup> که برای دستگاههای با برد زیاد و دقت کم استفاده می شده است و روشهای موسوم به نال پوینت<sup>۲۲</sup> که برای دستگاههای با دقت بالا استفاده می شود. امروزه در اکثر دستگاههای طولیاب مادون قرمز، توتال استیشن ها و تاکنومترهای الکترونیکی روش دیجیتالی برای تعیین مقدار  $\Delta \lambda$  بکار برده می شود. در این روش ابتدا دو سیگنالی که باید با یکدیگر مقایسه گردند (رفت و برگشت) هر دو به یک فرکانس خیلی پایتتر تبدیل می گردند، البته اینکار بصورتی انجام می شود که اختلاف فاز اصلی و اولیه بین دو سیگنال کاملا حفظ شده و دست نخورده باقی بماند. سپس عمل تبدیل اختلاف سیگنال مدولاسیون رفت و برگشت به پالسهای زمانی بسیار کوچک صورت می گیرد. این پالسهای زمانی توسط سیستم رقومی با دقت شمارش می شوند. فاصله پالسهای زمانی به حدی کوچک است که هر کدام دقتی معادل ۱ میلیمتر در اندازه گیری  $\Delta \lambda$  ارائه می کنند (به شکل ۳-۴ توجه نمایند).

<sup>۲۰</sup> Tellurometer

<sup>۲۱</sup> Phase discriminator circuit

<sup>۲۲</sup> Null – point methods

به عنوان مثال، فرض کنید فرکانس مدولاسیون حدود ۱۵ مگاهرتز باشد (طول موج ۲۰ متر) و دو سیگنال رفت و برگشتی به فرکانس ۱/۵ کیلوهرتز کاهش داده شوند. سپس عمل تبدیل فرکانس به پالس زمانی<sup>۳۳</sup> انجام می گردد و با این حساب چون فرکانس اولیه ۱۰۰۰۰ بار کوچکتر شده است، اختلاف فازی به اندازه  $2\pi$  از فرکانس اولیه را می توان به ۱۰۰۰۰ پالس زمانی تقسیم نمود و چون این مقدار اختلاف فاز معادل ۱۰ متر (نصف طول موج) از فاصله مورد اندازه گیری (در رفت و برگشت) می باشد بنابراین هر یک پالس معادل ۱ میلی متر از طول خواهد بود. معمولاً عمل شمارش پالسها به دفعات زیاد انجام می شود و سپس میانگین گیری از مقادیر بدست آمده صورت می گیرد. این روش در اوایل دهه ۸۰ میلادی بکار برده شد و از آن زمان تاکنون شاهد تحولات و پیشرفت های زیادی بوده است بطوریکه امروزه دقت اندازه گیری فاز به اندازه یک دههزارم سیکل برای دستگاههای طولیاب امری کاملاً عادی و رایج است.



شکل (۳-۴): اندازه گیری اختلاف فاز با استفاده از روش دیجیتالی

## ۲.۴. تحلیل دقت اندازه گیری در دستگاههای طولیاب الکترونیکی

عوامل مختلفی بر روی دقت اندازه گیری فاصله توسط یک دستگاه طولیاب الکترونیکی (EDM) تاثیر گذار می باشند که برخی از آنها منشا درون دستگاهی دارند و برخی به عوامل محیطی و شرایط اندازه گیری مربوط می شوند. رابطه اصلی که معمولاً هر سیستم EDM از آن برای محاسبه فاصله بین دو نقطه استفاده می کند، همانطور که در بخش قبل ملاحظه گردید به صورت ذیل

$$D = m\lambda + \Delta\lambda \quad \text{است:}$$

رابطه فوق بستگی مستقیم با طول موج سیگنال اندازه گیری ( $\lambda$ ) دارد ولی  $\lambda$  خودش تابعی از عوامل دیگر است. با در نظر گرفتن رابطه بنیادی (۳-۴)  $\lambda = v/f$ ، که در آن  $v$  سرعت انتشار امواج الکترومغناطیس در محیط واسطه و  $f$  فرکانس موج مدوله شده می باشد و همچنین ملاحظه این مطلب که  $v = c/n$  (۴-۵)، که در آن  $c$  سرعت انتشار امواج الکترومغناطیس در خلا می باشد و  $n$

$$\lambda = c/nf \quad \text{(۵-۴) ضریب شکست محیط عبور موج است. می توان } \lambda \text{ را به این صورت بیان نمود:}$$

و همانطور که از فصل قبل می دانیم، ضریب شکست محیط خودش تابعی از فشار، دما و رطوبت موجود در هوا می باشد و بنابراین این عوامل فیزیکی به صورت مستقیم می توانند بر اندازه گیری فاصله تاثیر گذار باشند که جلوتر به تحلیل تاثیر هر یک از این عوامل خواهیم پرداخت. معمولاً کارخانه سازنده دستگاه عددی را به عنوان ضریب شکست متوسط محیط در نظر می گیرد و عددی را که

<sup>۳۳</sup> Time pulse

صفحه نمایشگر دستگاه طولیاب به ما نشان می دهد در حقیقت با استفاده از همین ضریب شکست می باشد و مقدار آن حدود  $n_0 = 1.00032$  می باشد. پس طولی که دستگاه به ما نشان می دهد از رابطه ذیل بدست می آید:

$$D_0 = m\lambda_0 + \Delta\lambda_0 \quad (6-4)$$

که در آن مقادیر طول موج از روی ضریب شکست متوسطی که کارخانه سازنده دستگاه مجبور به در نظر گرفتن آن می باشد بدست می آید. حال اگر در زمان اندازه گیری شرایط محیطی به گونه ای باشد که نتوانیم ضریب شکست را مساوی  $n_0$  فرض کنیم و مقدار

$$D_1 = m\lambda_1 + \Delta\lambda_1 \quad (7-4) \quad \text{واقعی آن } n_1 \text{ باشد آنگاه:}$$

$$\lambda_1 = \lambda_0 \left( \frac{n_0}{n_1} \right) \quad (8-4) \quad \text{می توان گفت: } \lambda_1 = \frac{c}{n_1 f} \text{ و } \lambda_0 = \frac{c}{n_0 f}$$

$$D_1 = \left( \frac{n_0}{n_1} \right) (m\lambda_0 + \Delta\lambda_0) = \left( \frac{n_0}{n_1} \right) D_0 \quad (9-4) \quad \text{با جانشین سازی رابطه (8-4) در (7-4) به این رابطه می رسیم:}$$

پس می بینیم برای اینکه بتوانیم اثر ضریب شکست واقعی محیط را به صورت یک تصحیح ریاضی به طول اندازه گیری شده توسط دستگاه طولیاب اعمال کنیم، باید ابتدا ضریب شکست واقعی محیط را برآورد کنیم سپس با در دست داشتن عددی که دستگاه بطور ثابت و خودکار آنرا به عنوان ضریب شکست متوسط محیط فرض می کند می توانیم میزان تصحیح را محاسبه کرده و آنرا در طول ارائه شده توسط دستگاه ضرب کنیم. علاوه بر خطای محیطی ضریب شکست خطاهای دیگری نیز وجود دارند که بر دقت اندازه گیری دستگاه تاثیر گذار هستند که یکی از مهمترین این خطاها، خطائی است بنام خطای صفر (یا تصحیح صفر) که از عدم انطباق دقیق مرکز الکترونیکی ارسال امواج بر مرکز هندسی دستگاه (که منطبق بر محور اصلی دستگاه می باشد) ناشی می گردد. در بخشهای بعدی بطور مفصل راجع به برآورد دقیق این خطا صحبت خواهیم کرد. این خطا را با  $Z_0$  نشان می دهیم و اثر آن بر روی فاصله

$$D = D_1 + Z_0 = \left( \frac{n_0}{n_1} \right) D_0 + Z_0 = m \left( \frac{c}{n_1 f} \right) + \Delta\lambda_0 \left( \frac{n_0}{n_1} \right) + Z_0 \quad (10-4) \quad \text{مورد اندازه گیری به این صورت است:}$$

در رابطه (10-4) منابع خطای متعددی برای اندازه گیری فاصله ملاحظه می شود، که با اعمال قانون انتشار خطاها بر روی آن وریانس طول اندازه گیری شده بصورت ذیل تعیین می گردد:

$$\sigma_D^2 = \left( \frac{n_0}{n_1} \right)^2 \sigma_{\Delta\lambda_0}^2 + \sigma_{Z_0}^2 + \left( \frac{m}{n_1 f} \right)^2 \sigma_c^2 + \left( \frac{mc}{n_1 f^2} \right)^2 \sigma_f^2 + \left( \frac{mc}{n_1^2 f} + \frac{\Delta\lambda_0 n_0}{n_1^2} \right)^2 \sigma_{n_1}^2 \quad (11-4)$$

رابطه (11-4) را می توان با تقریبهایی  $\frac{\Delta\lambda_0 n_0}{n_1^2} \approx 0$  و  $\frac{mc}{n_1 f^2} \approx 0$  و  $D \approx m\lambda = \frac{mc}{nf}$  و  $\frac{n_0}{n_1} \approx 1$  به صورت ذیل ساده نمود:

$$\sigma_D^2 = \sigma_{\Delta\lambda}^2 + \sigma_{Z_0}^2 + \left[ \left( \frac{\sigma_c}{c} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_f}{f} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_n}{n} \right)^2 \right] D^2 \quad (11-4)$$

معادله فوق را می توان در حالت کلی به صورت زیر خلاصه نمود:

$$\sigma_D^2 = a^2 + b^2 D^2 \quad (12-4)$$

این رابطه که توصیف کننده دقت اندازه گیری برای کلیه دستگاههای طولیاب الکترونیک می باشد از دو بخش مختلف تشکیل شده است که یک بخش از آن ثابت  $a^2 = \sigma_{\Delta\lambda}^2 + \sigma_{Z_0}^2$  و بخش دیگر آن وابسته به طول مورد اندازه گیری می باشد

و  $b^2 = \left( \frac{\sigma_c^2}{c^2} \right) + \left( \frac{\sigma_f^2}{f^2} \right) + \left( \frac{\sigma_n^2}{n^2} \right)$  و بنابراین هرچه قدر فاصله مورد اندازه گیری بلندتر باشد میزان خطای ناشی از بخش دوم که

ناشی از دقت برآورد سرعت نور در خلا، خطای ثبات فرکانس و خطای ناشی از انکسار می باشد بیشتر خواهد بود و خطای قسمت اول که به دقت تعیین تصحیح صفر و همچنین دقت تعیین اختلاف فاز بستگی دارد معمولاً برای فواصل مختلف یکسان در نظر گرفته می شود. معمولاً کلیه کارخانه های سازنده دستگاههای طولیاب، دقت ادعا شده برای دستگاههای خود را بر مبنای رابطه (12-4) ارائه می کنند و البته با در نظر گرفتن برخی ملاحظات آنرا به صورت  $\sigma_s = \pm(am + bppm)$  (13-4) بیان می کنند

که در آن S طول مورد اندازه گیری می باشد. در بخش های بعدی راجع به عوامل فیزیکی که در رابطه (۴-۱۲) منشا خطا هستند بحث می شود.

### ۴. ۳. خطاها و تصحیحات سیستماتیک در دستگاههای طولیاب الکترونیکی

در اندازه گیری با دستگاههای طولیاب الکترونیکی با خطاهای مختلفی مواجه می شویم که دارای منشا سیستماتیک هستند و باید بر اساس تعاریفی که در فصل ۱ بیان کردیم با استفاده از یکی از سه روش کالیبراسیون، روشهای مشاهدهای خاص و یا مدلسازی ریاضی با این خطاها برخورد شود و اثر آنها به حداقل ممکن رسانیده شود. بسیاری از خطاهای سیستماتیک که در دستگاههای طولیاب ممکن است اتفاق بیافتند معمولاً توسط کارخانه های سازنده از قبل پیش بینی می شوند و با اطمینان از کالیبره بودن دستگاه و رعایت دستورالعمل هائی که برای اندازه گیری با دستگاه وجود دارد معمولاً می توان با در صد اطمینان بالائی به دقت ادعا شده توسط تولید کننده دستگاه دست پیدا کرد که در این صورت این خطاها دیگر به عنوان خطای سیستماتیک تلقی نمی شوند و از قانون انتشار خطاهای اتفاقی برای آنها استفاده می شود زیرا اثر سیستماتیک آنها حذف شده و ماهیتی اتفاقی پیدا می کنند. بطور کلی خطاهائی که در ارتباط با دستگاههای طولیاب وجود دارند، عبارتند از: ۱- خطای تعیین سرعت نور ۲- خطای مقیاس<sup>۲۴</sup> ۳- خطای انکسار جوی ۴- خطای اندکس (تصحیح صفر)<sup>۲۵</sup> ۵- خطای دوری<sup>۲۶</sup> ۶- خطای تعیین اختلاف فاز ۷- خطای ناشی از انعکاسات زمینی<sup>۲۷</sup>

#### ۴. ۳. ۱. خطای تعیین سرعت نور در خلا

این خطا همانطور که در بخش ۴. ۲ ملاحظه گردید به صورت  $\frac{\sigma_c}{c}$  در رابطه ۴. ۱۱ ظاهر می گردد و بستگی به دقت تعیین سرعت نور در خلا دارد. در سال ۱۹۸۳ میلادی کمیته بین المللی مشاور در تعریف استاندارد متر، مقدار سرعت نور در خلا را به صورت عدد (۴-۱۴)  $c = 299792458.6 \pm 3 \text{ m/s}$  برای استفاده در کلیه کاربردهای عملی توصیه نموده است. دقت تعیین سرعت نور در این رابطه به دقت تعیین دو عامل استاندارد اندازه گیری طول و زمان بستگی دارد. تعیین استاندارد طول بر اساس طول موج طیف نارنجی از اتم کریپتون-۸۶ و تشعشعات تثبیت شده<sup>۲۸</sup> لیزر صورت گرفته است و با دقت نسبی  $3 \times 10^{-9}$  بیان شده است. از سوی دیگر برای تعیین استاندارد واحد زمان از ساعت های اتمی با دقت نسبی بسیار بالای  $1 \times 10^{-13}$  استفاده شده است. با توجه به اینکه از معادله (۴-۱۴)، دقت نسبی تعیین سرعت نور به صورت  $\frac{\sigma_c}{c} = 1 \times 10^{-8} = 0.01 \text{ ppm}$  محاسبه می گردد و این مقدار از دقت حتی برای دستگاههای بسیار دقیق نیز مشکل خاصی ایجاد نمی کند و قابل صرف نظر کردن است.

#### ۴. ۳. ۲. خطای مقیاس

مقیاس خطائی است که به صورت خطی متناسب با فاصله مورد اندازه گیریست و می تواند هم عامل درون دستگاهی داشته باشد و هم اینکه عامل برون دستگاهی باعث بوجود آمدن آن شود. اگر نوسانساز سیگنال مدوله شونده، فرکانس اندازه گیری در نظر گرفته شده برای دستگاه را تولید نکند و فرکانس سیگنال تولید شده توسط آن مقداری با فرکانس طراحی شده برای نوسانساز

<sup>۲۴</sup> Scale error

<sup>۲۵</sup> Zero (Index) error

<sup>۲۶</sup> Cyclic error

<sup>۲۷</sup> Ground swing

<sup>۲۸</sup> Stabilised

فرق داشته باشد آنگاه با خطای مقیاس در اندازه گیری مواجه می شویم. این خطا بدین دلیل اتفاق می افتد که محاسبه فاصله بر اساس فرکانس طراحی شده برای نوسانساز صورت می گیرد و در صورت تفاوت فرکانس واقعی با فرکانس طرح، برای اصلاح طول اندازه گیری شده باید آن را در یک عدد ثابت ضرب کنیم. عامل برون دستگاهی که می تواند در وجود آمدن خطای مقیاس سهیم باشد صحیح اعمال نشدن ضریب انکسار محیط است و همانطور که از رابطه (۴-۹) می دانیم تصحیح انکسار بصورت یک ضریب بر روی طول مورد اندازه گیری اثر می کند. از نقطه نظر آسیب پذیری به طور مشخص دستگاههایی که برد زیادی در اندازه گیری دارند مانند سیستمهای مایکروویو بیشتر در معرض خطر این خطا قرار دارند و دستگاههای برد کوتاه مثل گروه مادون قرمز کمتر تحت تاثیر این نوع خطا می باشند. در دستگاههای طولیاب معمولاً از یک نوسانساز کریستالی استفاده می شود (عموماً کریستال کوارتز) که مهمترین خاصیت آن ثبات فرکانس می باشد ولی مهمترین مشکلی که وجود دارد اینست که اگر شرایط محیطی (معمولاً دما) مناسب نباشد آنگاه ثبات فرکانس این نوع کریستالها بهم می خورد و خطای مقیاس بوجود می آید. برای رفع معضل مربوط به این خطا راههای مختلفی وجود دارد که از آن جمله است بررسی و کنترل خطای نوسانساز در آزمایشگاه توسط دستگاههای دقیق (هر چند سال یکبار)، استفاده از دستگاه در شرایط جوی و دمائی توصیه شده توسط کارخانه سازنده آن و در بعضی از دستگاهها باید مدت زمانی را قبل از اندازه گیری صبر کرد تا دمای درون دستگاه به حد استاندارد برای کریستال برسد و سپس اندازه گیری انجام می شود و نهایتاً روش دیگر انجام کالیبراسیون با استفاده از باز مبنای<sup>۲۹</sup> می باشد که در بخش بعدی راجع به آن توضیح داده می شود.

#### ۴.۳.۳. خطای انکسار جوی

همانطور که می دانیم اساس اندازه فاصله توسط کلیه سیستم های طولیاب الکترونیکی بر مبنای ارسال و دریافت امواج الکترومغناطیسی محاسبه اختلاف زمان رفت و برگشت می باشد و از آنجا با معلوم بودن سرعت انتشار موج در محیط واسطه می توان فاصله را برآورد نمود ( $x = v.t$ ). ولی مشکلی که وجود دارد اینست که سرعت در محیط واسطه همیشه یکسان نیست و با تغییر شرایط آب و هوایی تغییر می کند. برای برآورد دقیق سرعت امواج الکترومغناطیس در محیط واسطه باید از ضریب شکست آن محیط مطلع باشیم که توسط رابطه  $n = \frac{c}{v}$  تعریف می گردد. ضریب شکست امواج الکترومغناطیس در محیط جو سطحی زمین تابعی از عوامل ذیل است:

الف - ترکیب عناصر گازی موجود در هوا

ب- مقدار بخار آب موجود در هوا

ج- درجه حرارت و فشار مخلوط گازهای موجود در هوا

د- فرکانس سیگنال مورد استفاده

اثر ترکیب عناصر گازی هوا بر روی اندازه گیری با EDM معمولاً خیلی کم بوده و قابل صرفنظر کردن است ولی اثر فرکانس سیگنال برای بعضی از امواج قابل توجه است به گونه ای که ضریب شکست برای دستگاههای مایکرو ویو و دستگاههای نوری دارای دو فرمول متفاوت می باشد. برای محاسبه ضریب شکست محیط آن دسته از دستگاههایی که با مایکرو ویو کار می کنند از فرمولی بنام Froome & Essen استفاده می شود:

$$(n-1).10^6 = \frac{103.49}{T}[P-E] + \frac{86.26}{T}\left[1 + \frac{5748}{T}\right]E \quad (۱۵-۴)$$

در رابطه فوق  $E$  و  $P$  و  $T$  به ترتیب فشار بخار آب موجود در هوا بر حسب میلی متر جیوه، فشار هوای اتمسفر و درجه حرارت محیط بر حسب درجه کلونین می باشد. این رابطه برای هوایی که به طور متوسط حاوی  $۰.۰۳\%$  دی اکسید کربن باشد صدق می کند.

<sup>۲۹</sup> Base line



برای نور مرئی و امواج مادون قرمز رابطه دیگری وجود دارد که در فصل قبل از آن برای بررسی اثر ضریب شکست بر روی انحنای مسیر پرتو نورانی استفاده کردیم بنام **Barrell & sears** و همانطور که می دانید:

$$(n_t - 1) = (n_s - 1) \left( \frac{273}{273 + t} \right) \left( \frac{P}{760} \right) - \left( \frac{15.02E}{273 + t} \right) \cdot 10^{-6} \quad (16-4)$$

و همانطور که می دانید  $n_s$  ضریب شکست هوای خشک در دمای صفر درجه سلسیوس و فشار ۷۶۰ میلی متر جیوه است که توسط رابطه **Edlen** محاسبه می گردد. برای اندازه گیری دقیق یک فاصله با طول بیش از ۱ کیلومتر به برآورد دقیق مقدار ضریب شکست هوا در طول مسیر نیاز داریم ولی معمولاً پارامترهای محاسبه ضریب شکست  $P$  و  $E$  و  $t$  در نقطه ابتدا و انتهای مسیر اندازه گیری شده و از آنجا مقدار متوسط آن در یکی از دو فرمول فوق (بسته به نوع دستگاه) قرار داده می شود و سپس میزان تصحیح ضریب شکست محاسبه می گردد. با این روش عملاً تغییرات ضریب شکست در طول مسیر خطی فرض می گردد شرایط آرمانی برای اندازه گیری فاصله بین دو نقطه، اندازه گیری در یک هوای نسبتاً خشک و آسمان نیمه ابری و وزیدن نسیم یکنواخت می باشد. برای تحقیق در مورد میزان تاثیر خطای اندازه گیری کمیت های  $P$  و  $E$  و  $T$  بر  $n$ ، ابتدا امواج مایکروویو را بررسی می کنیم و از فرمول (۱۵-۴) نسبت به هر یک از این متغیرها مشتق می گیریم، برای دما خواهیم داشت:

$$\frac{\partial n}{\partial T} = \left[ -103.49 \frac{P}{T^2} + 17.23 \frac{E}{T^2} - 99.16 \frac{E}{T^3} \times 10^4 \right] \times 10^{-6} \quad (17-4)$$

به ازای  $P = 760 \text{ mmHg}$  و  $T = 293 \text{ k}$  و  $E = 7.6 \text{ mmHg}$  رابطه ذیل بدست می آید:

$$dn = -1.2 \times 10^{-6} dT \quad (18-4)$$

حال اگر بخواهیم به دقت ۱ ppm در برآورد  $n$  دست پیدا کنیم:

$$\frac{dn}{n} = 1 \times 10^{-6} \Rightarrow \begin{cases} dn = n \times 10^{-6} \\ n \approx 1 \end{cases} \Rightarrow dn \approx 10^{-6} \quad (19-4)$$

از جانشین سازی (۱۹-۴) در (۱۸-۴) نتیجه زیر بدست می آید:

$$dT = \pm \frac{1}{1.2} = \pm 0.8 \text{ k} \quad (20-4)$$

پس به این نتیجه می رسیم که اگر بخواهیم  $n$  را با دقت ۱ ppm برای دستگاههای مایکرو ویو برآورد کنیم ناگزیر خواهیم بود تا  $T$  را با دقت  $\pm 0.8 \text{ k}$  اندازه گیری کنیم و در غیر این صورت به دقت از پیش تعیین شده برای تخمین  $n$  دست پیدا نخواهیم کرد. به طریق مشابه برای  $P$  و  $E$  نیز دقت اندازه گیری تعیین می گردد:

$$dE = \pm 0.17 \text{ mmHg} \quad \text{و} \quad dP = \pm 2.9 \text{ mmHg} \quad (21-4)$$

اندازه گیری فشار هوا و دما با دقتهای بدست آمده کار مشکلی نیست و بسیاری از ابزارهای ساده برای اندازه گیری این کمیتها دارای دقتهای مذکور می باشند و مسئله ای که باقی می ماند تعیین فشار بخار آب موجود در هواست که با ید با دقت بسیار بالائی صورت بگیرد پس می توان نتیجه گرفت که دقت اندازه گیری فشار بخار آب موجود در هوا تاثیر به سزائی بر روی اندازه گیری طول با دستگاههای مایکرو ویو خواهد داشت. مقدار  $E$  با استفاده از این رابطه محاسبه می شود:

$$E = E' - 6.6(1 + 0.00115T').P.(T - T').10^{-4} \quad (22-4)$$

که در این رابطه  $E'$  فشار بخار آب اشباع بر حسب میلی بار و  $T'$  درجه حرارت تر می باشد. مقادیر مر بوط به  $E'$  از جداولی بنام **Smithsonian Meteorological** استخراج می گردد. برای دستگاههایی که از امواج مادون قرمز و نور مرئی استفاده می کنند نیز این تحلیل را انجام می دهیم و نتایج ذیل بدست خواهد آمد:

$$dE = \pm 20 \text{ mmHg} \quad \text{و} \quad dP = \pm 2.7 \text{ mmHg} \quad \text{و} \quad dt = \pm 1.0^\circ \text{ C} \quad (23-4)$$

با مقایسه روابط (۲۱-۴) و (۲۳-۴) متوجه می شویم که دقت اندازه گیری فشار بخار آب موجود در هوا یک عامل بسیار محدود کننده برای تعیین دقت اندازه گیری دستگاههای مایکروویو است و رسیدن به دقت ادعا شده برای این دستگاهها (مثلاً

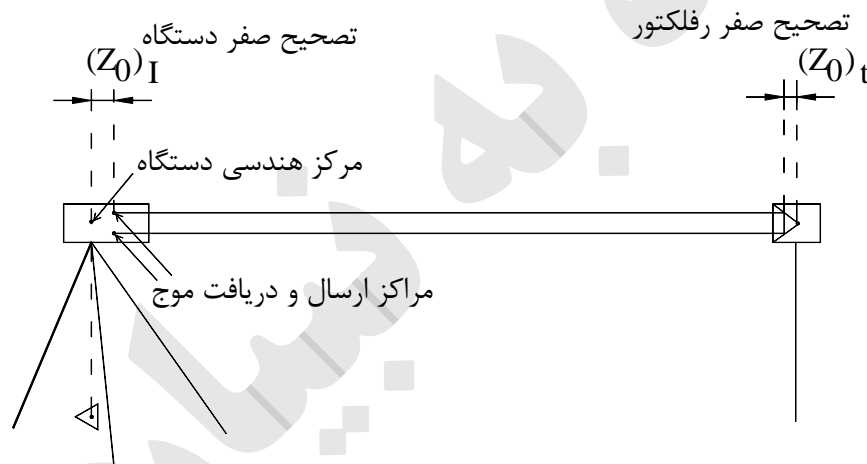
( $\pm (5mm + 10ppm)$ ) بسیار مشکل گاهی اوقات تقریبا غیر ممکن است. خوشبختانه برای دستگاههای برد کوتاه مادون قرمز و همچنین دستگاههای نور مرئی اثر این نوع خطا بسیار کوچک است و مشکل خاصی ایجاد نمی گردد.

نهایتا پس از محاسبه تصحیح انکسار با هریک از روابط (۴-۱۵) و یا (۴-۱۶) با استفاده از رابطه زیر طول واقعی روی زمین بدست

$$D = D_0 \times \left( \frac{n_0}{n} \right) \quad (۴-۲۴) \quad \text{می آید:}$$

۴.۳.۴. خطای اندکس  $Z_0$

خطای  $Z_0$  از عدم انطباق مرکز ارسال امواج الکترو مغناطیسی بر مرکز هندسی دستگاه که منطبق بر محور اصلی دستگاه نیز می باشد، بوجود می آید (شکل ۴-۴). بدین معنی که در صورت وجود خطای صفر کلیه طولهای را که با طولیاب اندازه گیری می کنیم یا از مقدار واقعی کوچکتر و یا بزرگتر هستند و میزان بزرگتر و کوچکتر بودن آنها ربطی به فاصله مورد اندازه گیری ندارد به عبارت دیگر میزان این خطا برای کلیه فواصل مورد اندازه گیری ثابت می باشد. در دستگاههای امروزی مقدار این خطا خیلی کم و در حدود چند میلی متر است و معمولا از طرف کارخانه سازنده سعی می شود که این خطا حداقل ممکن را داشته باشد و یا در صورت وجود به صورت یک تصحیح با طول مورد اندازه گیری جمع گردیده و به عامل قرائت کننده نمایش داده شود. مورد دیگری که باید ذکر گردد اینست که این خطا برای برخی از انواع منعکس کننده ها نیز ممکن است وجود داشته باشد. نحوه برآورد این خطا در بخش کالیبراسیون توضیح داده می شود.



شکل (۴-۴): نمایش سمبولیک خطای اندکس در دستگاه طولیاب و رفلکتور

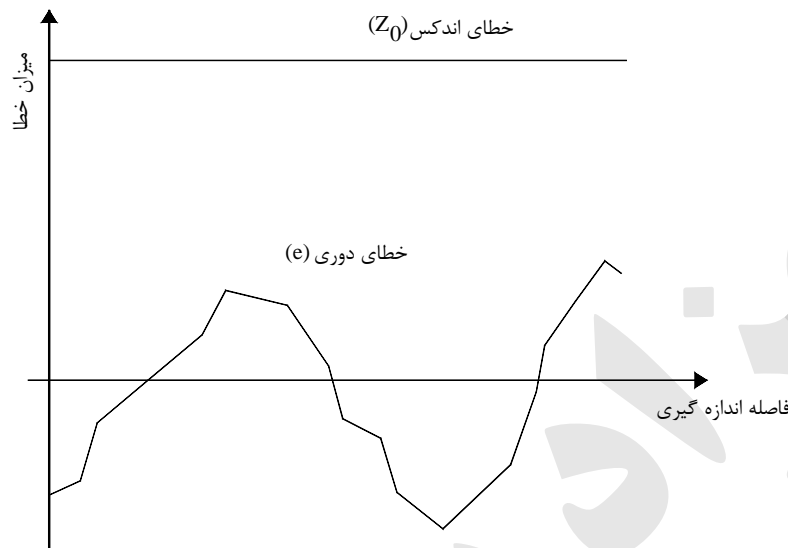
۴.۳.۵. خطای دوری در دستگاههای طولیاب الکترونیکی

این خطا به صورت یک تابع متناوب از طول موج اندازه گیری و اختلاف فاز بین سیگنال اندازه گیری و سیگنال مرجع<sup>۳۰</sup> شناخته می شود. بر خلاف خطای اندکس که دارای یک مقدار ثابت به ازای کلیه فواصل مورد اندازه گیریست، اندازه خطای دوری به ازای فواصل مختلف متغیر است و رفتاری مشابه منحنی سینوسی دارد (شکل ۴-۵). البته در دستگاههای جدید مقدار این خطا به شدت کاهش داده شده است و اثر بسیار کمی بر روی فواصل اندازه گیری شده دارد. برای برآورد نمودن این خطا روشهای آزمایشگاهی و سرزمینی<sup>۳۱</sup> وجود دارد. در این روش ها با توجه به ماهیت سینوسی شکل خطای دوری یک تابع متناوب سینوسی

<sup>۳۰</sup> Reference signal

<sup>۳۱</sup> Field

شکل در مدل ریاضی برای آن در نظر می گیرند و با استفاده از اطلاعاتی که مربوط به فاصله یابی در مضارب مختلف طول موج می شود، مقدار این خطای سیستماتیک را برآورد می کنند. با توجه به رفتار تناوبی و اندازه کوچکی که این خطا از خود نشان می دهد در عموم اندازه گیریهای که با طولیابهای امروزی انجام می شود از این خطا صرف نظر می کنند و به جز موارد اندازه گیریهای بسیار دقیق مدل سازی ریاضی برای این نوع از خطا انجام نمی شود.



شکل (۴-۵): مقایسه منحنی تناوبی خطای دوری با مقدار ثابت خطای اندکس ( $Z_0$ ) برای اندازه گیری فواصل مختلف

#### ۴.۳.۶. خطای تعیین اختلاف فاز

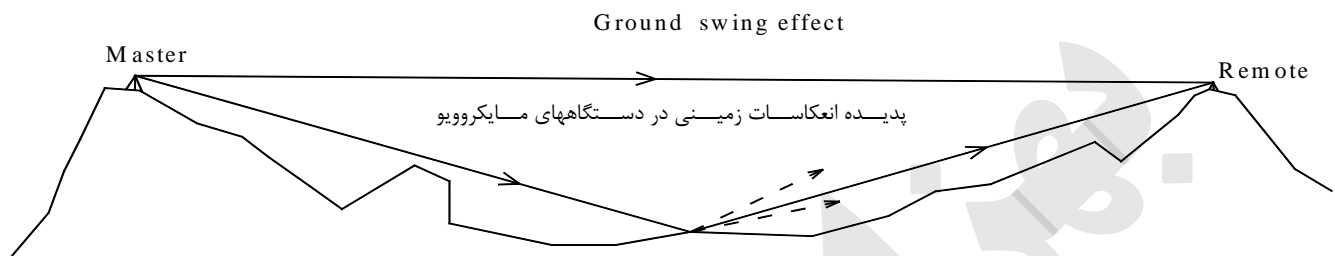
این خطا به دقت تعیین اختلاف فاز توسط دستگاههای طولیاب مربوط می شود ( $\sigma_{\Delta\lambda}$ ) و همانگونه که در بخش ۴.۱.۲ ملاحظه شد در دستگاههای جدید با استفاده از سیستمهای پالس زمانی اندازه این خطا به شدت کاهش پیدا کرده است. معمولا کارخانه سازنده دستگاه مقدار این خطا را برآورد نموده و آنرا به صورت بخشی از جمله ثابت مربوط به دقت اندازه گیری خطا بیان می کند ( $a^2 = \sigma_{Z_0}^2 + \sigma_{\Delta\lambda}^2$ ). برای حداقل شدن مقدار این خطا باید اندازه گیری در مدت زمان تعیین شده از طرف کارخانه سازنده انجام شود مثلا اگر برای رسیدن به دقت  $3\text{mm} + 3\text{ppm}$  مدت زمان ۳ ثانیه تعیین شده باشد و ما اندازه گیری را در مدت زمانی کوتاهتر انجام دهیم میزان خطای  $\sigma_{\Delta\lambda}^2$  افزایش پیدا می کند و تاثیر آن مستقیما بر روی مقدار  $a$  نشان داده می شود کما اینکه در جدول ۴-۱ (بخش دستگاههای مادون قرمز) اگر توجه کنیم برای حالت tracking که معمولا زمان اندازه گیری ۰/۳ ثانیه است دقت اندازه گیری کم می شود و فقط مقدار  $a$  بزرگ شده و  $b$  ثابت می ماند. دلیل کم شدن دقت اندازه گیری به خاطر کاهش تعداد اندازه گیریهاست زیرا عددی که توسط دستگاه به عنوان  $\Delta\lambda$  ارائه می گردد در نتیجه میانگین گیری از تعداد زیادی اندازه گیری بدست می آید و هر قدر زمان اندازه گیری طولانی تر باشد تعداد اندازه گیری ها بیشتر شده و دقت افزایش می یابد.

#### ۴.۳.۷. خطای انعکاسات زمینی<sup>۳۲</sup>

این خطا همانطور که از نام آن معلوم می باشد در اثر منعکس شدن پرتوهای امواج ارسالی توسط دستگاه طولیاب از سطح زمین اتفاق می افتد (شکل ۴-۶). این خطا فقط برای دستگاههای میکروویو که برد زیادی هم دارند بوجود می آید و سایر دستگاهها را شامل نمی شود زیرا که اشعه میکرو ویو فرستاده شونده توسط دستگاه دارای واگرایی نسبتا بزرگی است و این امواج به صورت

<sup>۳۲</sup> Ground swing

مخروطی شکل ساعت می‌شوند که زاویه راس این مخروط برای دستگاه‌های مختلف متفاوت است. خطای انعکاس زمینی باعث بوجود آمدن یک سری شیفت‌های مصنوعی<sup>۳۳</sup> در فاز اندازه‌گیری می‌شود و در بعضی موارد اثر آن به حدی شدید است که کلا اندازه‌گیری را غیر ممکن می‌سازد و برای اندازه‌گیری ناگزیر به تغییر محل ایستگاهها می‌شوند (معمولاً به ارتفاع بالاتر). برای برآورد نمودن اثر این خطا به صورت تقریبی فرمولهائی وجود دارد و یا اینکه با استفاده از یک گراف میزان تصحیح مربوط به این خطا به ازای فواصل مورد اندازه‌گیری و همچنین ارتفاع موج عبور کننده، محاسبه می‌گردد.



شکل (۴-۶): نمایش سمبولیک چگونگی اتفاق افتادن خطای انعکاس زمینی در سیستم‌های مایکروویو

#### ۴. ۴. کالیبراسیون دستگاه‌های طولیاب الکترونیکی

برای کالیبره نمودن دستگاه‌های EDM روش‌های مختلفی وجود دارد که مهمترین آنها استفاده از روش اندازه‌گیری بازهای مینا با دستگاه و سپس محاسبه میزان تصحیحاتی است که باید به دستگاه اعمال گردد. اصولاً با این روش سه نوع خطا را می‌توان فرموله نمود: خطای دوری، خطای مقیاس و خطای اندکس اگر فاصله صحیح و واقعی بین دو نقطه  $D$  باشد و فاصله اندازه‌گیری شده توسط دستگاه پس از اعمال تصحیحات معمول (مانند انکسار، شیب و غیره)  $D'$  بشود، می‌توان این خطاها را به صورت تصحیحات به شکل زیر نشان داد:

$$D = mD' + Z_0 + e \quad (۴-۲۵)$$

که در این رابطه  $m$  تصحیح مقیاس است (دقت کنید با  $m$  ابهام فاز در رابطه (۴-۱) اشتباه نشود).  $Z_0$  میزان تصحیح اندکس (خطای صفر) می‌باشد که مقداری ثابت دارد و  $e$  خطای دوری است که برای مقادیر مختلف  $D$  مقدار آن فرق می‌کند و رفتار تناوبی دارد. امروزه خطای دوری فقط در دستگاه‌های بسیار دقیق مورد توجه است و برای دستگاه‌های معمولی کمتر بدان اهمیت داده می‌شود چون مقداری کوچک و ماهیتی تناوبی دارد آنرا در مدل ریاضی کمتر دخالت می‌دهند. آنچه که در اینجا بررسی می‌گردد، انجام کالیبراسیون برای برآورد دو خطای دیگر با استفاده از باز مینا می‌باشد. باز مینا تشکیل شده است از یک سری ایستگاه‌های ثابت بتونی بنام پیلار<sup>۳۴</sup> که در فواصلی معین از یکدیگر قرار گرفته‌اند و این فواصل معمولاً مضارب صحیحی از یک فاصله معین متناسب با طول موج اندازه‌گیری می‌باشند (جدول ۴-۲). معمولاً شیب مسیر باز مینا بسیار کم و در حد صفر باید باشد و پیلارها باید دقیقاً بر روی یک امتداد مستقیم قرار گرفته باشند.

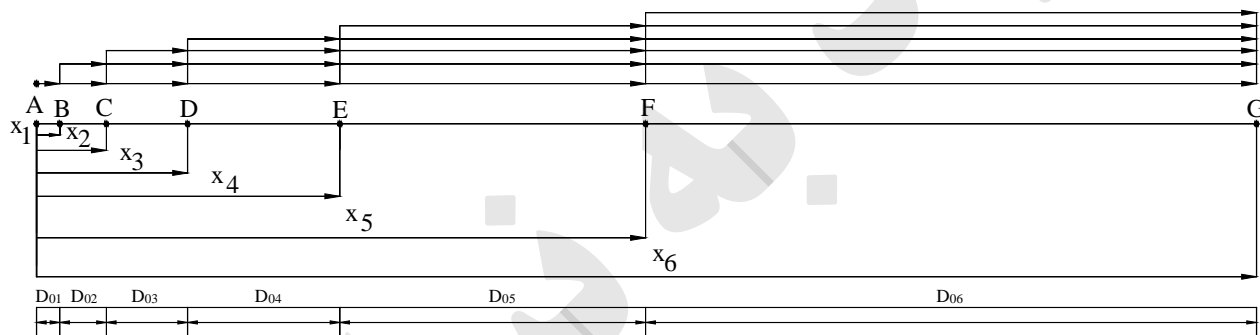
<sup>۳۳</sup> Spurious shifts

<sup>۳۴</sup> Pillar

	A	B	C	D	E	F
B	۱۹.۵	-	-	-	-	-
C	۵۸.۵	۳۹.۰	-	-	-	-
D	۱۲۶.۵	۱۰۷.۰	۶۸.۰	-	-	-
E	۲۵۴.۰	۲۳۴.۵	۱۹۵.۵	۱۲۷.۵	-	-
F	۵۱۰.۰	۴۹۰.۵	۴۵۱.۵	۳۸۳.۵	۲۵۶.۰	-
G	۱۰۲۱.۵	۱۰۰۲.۰	۹۶۳.۰	۸۹۵.۰	۷۶۷.۵	۵۱۱.۵

جدول (۴-۲): فواصل بین پیلارها برای کالیبراسیون دستگاههای طولیاب پیشنهاد شده توسط Schwendener

ابتدا باید توسط یک دستگاه بسیار دقیق نظیر **Mekometer** و یا **Terrameter** فواصل بین پیلارها با دقت اندازه گیری شده و تعیین گردیده باشد و سپس با استقرار دستگاه طولیاب مورد نظر بر روی پیلارها و اندازه گیری کلیه فواصل ممکن توسط آن مشاهدات مربوط به کالیبراسیون انجام می شود، تصحیحات انکسار، شیب و سایر تصحیحات در صورت وجود به فواصل اندازه گیری اعمال می شوند، به شکل (۴-۷) توجه کنید.



شکل (۴-۷): فواصل مورد اندازه گیری برای کالیبراسیون دستگاه طولیاب

برای این شکل بردار مشاهدات انجام شده و بردار مجهولات و مدل ریاضی مشاهدات را به صورت زیر می توانیم بنویسیم :

$$\underline{\mathbf{l}}_{obs} = \underline{\mathbf{l}}_s = \begin{bmatrix} D_{AB} \\ D_{AC} \\ D_{AD} \\ D_{AE} \\ D_{AF} \\ D_{AG} \\ D_{BC} \\ D_{BD} \\ D_{BE} \\ D_{BF} \\ D_{BG} \\ D_{CD} \\ D_{CE} \\ D_{CF} \\ D_{CG} \\ D_{DE} \\ D_{DF} \\ D_{DG} \\ D_{EF} \\ D_{EG} \\ D_{FG} \end{bmatrix}_{21 \times 1}, \quad \underline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ Z_0 \\ m \end{bmatrix}_{8 \times 1}, \quad \begin{cases} ml_1 + Z_0 = x_1 \\ ml_2 + Z_0 = x_2 \\ ml_3 + Z_0 = x_3 \\ ml_4 + Z_0 = x_4 \\ ml_5 + Z_0 = x_5 \\ ml_6 + Z_0 = x_6 \\ ml_7 + Z_0 = x_2 - x_1 \\ ml_8 + Z_0 = x_3 - x_1 \\ ml_9 + Z_0 = x_4 - x_1 \\ ml_{10} + Z_0 = x_5 - x_1 \\ ml_{11} + Z_0 = x_6 - x_1 \\ ml_{12} + Z_0 = x_3 - x_2 \\ ml_{13} + Z_0 = x_4 - x_2 \\ ml_{14} + Z_0 = x_5 - x_2 \\ ml_{15} + Z_0 = x_6 - x_2 \\ ml_{16} + Z_0 = x_4 - x_3 \\ ml_{17} + Z_0 = x_5 - x_3 \\ ml_{18} + Z_0 = x_6 - x_3 \\ ml_{19} + Z_0 = x_5 - x_4 \\ ml_{20} + Z_0 = x_6 - x_4 \\ ml_{21} + Z_0 = x_6 - x_5 \end{cases} \quad (26-ع)$$

در مدل فوق هنوز طولهای معلوم باز مبنا وارد نشده است که با اضافه شدن آن طولها، سرشکنی با استفاده از پارامترهای معلوم انجام می شود به روابط صفحه بعد توجه کنید.

بردار مشاهدات مربوط به طولهای باز معلوم و مدل ریاضی مربوط به آن به شرح زیر است :

$$\underline{\mathbf{l}}_{baseline} = \underline{\mathbf{l}}_D = \begin{bmatrix} D_{01} \\ D_{02} \\ D_{03} \\ D_{04} \\ D_{05} \\ D_{06} \end{bmatrix}_{6 \times 1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 \\ x_4 - x_3 \\ x_5 - x_4 \\ x_6 - x_5 \end{bmatrix}_{6 \times 1} \quad (27-ع)$$

بردار مشاهدات انجام شده به همراه ماتریس وریانس-کوریانس مربوطه آنها  $\underline{\mathbf{C}}_{I_s}$  و  $\underline{\mathbf{l}}_s$  و بردار مشاهدات باز مبنا به همراه ماتریس وریانس آن  $\underline{\mathbf{C}}_{I_D}$  و  $\underline{\mathbf{l}}_D$  که از روی دقتهای از قبل معلوم شده بدست می آید به شکل ذیل مدل ریاضی نهائی را تشکیل می دهند:

$$\underline{\mathbf{C}}_1 = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{C}}_{I_s} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \underline{\mathbf{C}}_{I_D} \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{l}} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{l}}_s \\ \underline{\mathbf{l}}_D \end{bmatrix} \quad (28-ع)$$

$$\underline{\mathbf{l}} = \underline{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{x}}) = \underline{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{x}}^0) + \left. \frac{\partial \underline{\mathbf{f}}}{\partial \underline{\mathbf{x}}} \right|_{\underline{\mathbf{x}}=\underline{\mathbf{x}}^0} (\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{x}}^0) \Rightarrow \underline{\delta \mathbf{l}} = \underline{\mathbf{A}} \delta \underline{\mathbf{x}} \quad (29-ع) \quad \text{مدل ریاضی به صورت مقابل خطی می شود:}$$

و از آنجا به روش تکرار<sup>۳۰</sup> مقدار مجهولات برآورد می گردد: (۳۰-۴)  $\hat{\delta x} = (A^T P A)^{-1} A^T P \delta l$  که در آن ماتریس وزن به این صورت می باشد:  $P = Q^{-1}$ ,  $\sigma_0^2 Q = C_1$  ماتریس وریانس - کووریانس مجهولات را نیز به شکل ذیل برآورد می کنند که با استفاده از آن می توان دقت محاسبه مقادیر تصحیح مقیاس و تصحیح اندکس را بدست آورد:

$$C_{\hat{x}} = \sigma_0^2 (A^T P A)^{-1} \quad (۳۱-۴)$$

معمولا مقدار وریانس فاکتور اولیه ( $\sigma_0^2$ ) مساوی یک در نظر گرفته می شود و وریانس فاکتور ثانویه از رابطه زیر بدست می آید:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\hat{v}^T P \hat{v}}{df} \quad (۳۲-۴)$$

که برای وضعیتی که در شکل (۷-۴) نشان داده شده است درجه آزادی  $df = 27 - 8 = 19$  می باشد. با استفاده از وریانس فاکتور ثانویه مقدار برآورد شده برای ماتریس وریانس - کووریانس مجهولات نیز بدست می آید:

$$\hat{C}_{\hat{x}} = \hat{\sigma}_0^2 (A^T P A)^{-1} \quad (۳۳-۴)$$

حالت دیگری که ممکن است اتفاق بیفتد اینست که به دستگاههای بسیار دقیق دسترسی نداشته باشیم بنابراین طولهای مربوط به باز مبنا نیز برای ما مجهول باشند و در نتیجه مشاهدات (۲۷-۴) حذف می شوند و درجه آزادی نیز کم می شود ولی با این وجود باز هم می توان مقادیر تصحیحات مقیاس و اندکس را برآورد نمود با این تفاوت که مقدار بدست آمده برای آنها متاثر از دقت اسمی دستگاه خواهد بود. به عبارت دیگر در حالتی که باز مبنا معلوم است صحت اندازه گیریها نیز آزمایش می شود ولی در حالت دوم فقط دقت اندازه گیریهاست که بررسی می گردد و به اعتبار آن نمی توان به صحت اندازه گیری توسط دستگاه اطمینان نمود.

## پروژه فصل چهارم

برای انجام کالیبراسیون یک دستگاه طولیاب الکترونیکی مطابق شکل (۷-۴) اندازه گیری های زیر بر روی یک باز مبنا انجام شده است (واحد: متر)، (دقت اسمی دستگاه  $1.0 \text{ ppm} + 0.5 \text{ mm}$  می باشد):

	A	B	C	D	E	F
B	۱۹.۵۳۳	-	-	-	-	-
C	۵۸.۵۱۵	۳۸.۹۸۹	-	-	-	-
D	۱۲۶.۵۳۸	۱۰۷.۰۰۴	۶۸.۰۲۹	-	-	-
E	۲۵۴.۳۰۳	۲۳۴.۷۷۴	۱۹۵.۷۸۱	۱۲۷.۷۷۰	-	-
F	۵۱۰.۲۶۹	۴۹۰.۷۵۰	۴۵۱.۷۶۴	۳۸۳.۷۴۹	۲۵۵.۹۷۵	-
G	۱۰۲۲.۶۳۸	۱۰۰۳.۰۹۹	۹۶۴.۱۲۷	۸۹۶.۱۱۴	۷۶۸.۳۳۳	۵۱۲.۳۷۶

در صورتی که مقادیر مربوط به باز مبنا به همراه دقت برآورد شده برای آن به شرح ذیل باشد:

	D۰۱	D۰۲	D۰۳	D۰۴	D۰۵	D۰۶
فاصله به متر	۱۹.۵۲۴۱	۳۸.۹۸۷۰	۶۸.۰۱۵۵	۱۲۷.۷۶۵۰	۲۵۵.۹۷۳۳	۵۱۲.۳۶۳۶
دقت به میلی متر	۰.۲۱	۰.۲۳	۰.۲۹	۰.۳۱	۰.۳۵	۰.۵۱

مطلوبست برآورد مقادیر تصحیح  $Z_0$  و تصحیح مقیاس برای اندازه گیریهای مربوط به این دستگاه به همراه دقت هریک از آنها به روش کمترین مربعات، ارائه برنامه کامپیوتری به همراه ریز نتایج الزامیست.

<sup>۳۰</sup> Iteration

## فصل پنجم

## ۵. تحلیل و طراحی شبکه های کنترل

در فصل دوم با مفهوم تحلیل اولیه برای انجام مشاهدات نقشه برداری آشنا شدیم در اینجا قصد داریم تحلیل اولیه را برای شبکه های کنترل بررسی کنیم. یک شبکه کنترل برای یک منظور یا مقصود خاص طراحی، اندازه گیری و محاسبه می گردد و گاهی ممکن است از ایجاد یک شبکه کنترل مقاصد متعدد و مختلفی را دنبال کنیم. معمولا دو هدف اصلی برای ایجاد شبکه های کنترل وجود دارد: ۱- ایجاد یک زیربنا و اساس مطمئن، دقیق و قابل اطمینان برای انجام اندازه گیری های دقیق نقشه برداری، مانند تهیه نقشه توپوگرافی دقیق، پیاده نمودن پروژه های دقیق مانند سد، تونل، پل، اسکله و سازه هایی که نیاز به دقت بالای هندسی در پیاده شدن اجزای خود دارند. ۲- مطالعه و تعیین تغییر شکل و جابجائی سازه های عظیم مانند سدها و یا پوسته زمین در اطراف گسلها و مکانهایی که از نظر زمین شناسی احتمال جابجائی و تغییر شکل برای آنها وجود دارد. تفاوت اصلی شبکه کنترل با شبکه های معمولی مانند پیمایشهای ساده در بحث اهمیت دقت و صحت اندازه گیریهاست. برای شبکه های معمولی هیچگاه تحلیل دقت و طراحی صورت نمی گیرد بلکه به برآوردهای تقریبی و گاهی تجربه در حصول دقت این شبکه ها اکتفا می گردد در حالیکه برای یک شبکه کنترل انجام طراحی الزامیست و بعلاوه اینکه طراح ناگزیر است شبکه را بگونه ای طراحی نماید که لزوما اهداف از پیش تعیین شده را در یک سطح اطمینان قابل قبول پوشش دهد زیرا که نرسیدن به دقت از پیش تعیین شده ممکن است خسارات و صدمات بسیار سنگین مالی و حتی جانی در بر داشته باشد. برای مثال ایجاد شبکه کنترل در هدایت حفاری تونل و یا پیاده سازی یک بنای عظیم مانند سد و یا نیروگاه اتمی را در نظر بگیرید. شبکه های کنترل معمولا اشکال پیچیده ای دارند که مشاهدات زیادی برای آنها باید انجام شود، فرمهای ساده این شبکه ها چهار ضلعی با دو قطر و ترکیبی از مثلثهای به هم پیوسته است که برای کارهای معمولی استفاده می شوند. طراحی حالت پیچیده تر و پیشرفته تری از تحلیل اولیه است که در آن نه فقط از نظر دقت بلکه کلیه عواملی که به نحوی در کیفیت و نتیجه نهائی یک شبکه کنترل مشارکت دارند بررسی می گردند. برای طراحی متناسب با هدف طرح عموما نیاز به استفاده مدل‌های پیچیده ریاضی و تحلیلهای بسیار دقیق از رفتار تک تک مشاهدات و اثر آنها بر یکدیگر و بر مجهولات می باشد. از نقطه نظر علمی در دهه های هفتاد و هشتاد میلادی یکی از زمینه های گسترده تحقیقاتی و پژوهشی در بین بسیاری از محققین مطرح ژئودزی، مبحث طراحی شبکه بوده است و تحقیقات زیادی در این زمینه انجام شده است که حتی برخی از آنها تا به امروز نیز ادامه دارد. پیش از وارد شدن به مبحث طراحی شبکه لازم است تا مختصری به بحث در مورد تحلیل شبکه های کنترل بپردازیم.

۵. ۱. مختصری از تحلیل شبکه های کنترل<sup>۱</sup>

به دلیل اهمیت ویژه ای که شبکه های کنترل دارند، تجزیه و تحلیل دقیق و علمی اثر خطاهای مختلفی که در مشاهدات نقشه برداری ممکن است وجود داشته باشند (اعم از اتفاقی، سیستماتیک و یا اشتباهات) امری اجتناب ناپذیر و ضروریست. بعلاوه اینکه نحوه برخورد با این خطاها بسیار حائز اهمیت است. برای برآورد مختصات نقاط این شبکه ها از روش سرشکنی کمترین مربعات استفاده می شود که در این قسمت قصد داریم به صورت اجمالی آنرا بررسی نماییم. در سرشکنی به روش کمترین مربعات فرض اولیه بر اینست که مشاهدات ما عاری از هر نوع خطای سیستماتیک و یا اشتباه می باشند و فقط فرض می کنیم که مقداری خطای اتفاقی در مشاهدات وجود دارد که ما توانسته ایم میزان آنرا تا حد اطمینان قابل قبولی بر آورد نماییم ( $\sigma_1$ ). در صورت وجود خطای سیستماتیک و یا اشتباه در مشاهدات نتایج بدست آمده از روش کمترین مربعات به هیچ وجه قابل قبول نیستند و ما را

<sup>۱</sup> Control network analysis



از واقعیت (مقدار واقعی و ناشناخته کمیتهای مجهول) دور می کنند. بطور کلی مراحل انجام یک پروژه نقشه برداری ژئودتیک را می توان به این ترتیب بیان نمود: ۱- طراحی و تحلیل اولیه ۲- انجام مشاهدات و انجام پردازشهای مقدماتی روی مشاهدات (مانند میانگین گیری، برآورد دقت مشاهده، اعمال تصحیحات سیستماتیک و کنترل اولیه مشاهدات از نظر نبود اشتباه) ۳- ارزیابی مقدماتی مشاهدات (آزمونهای پیش از سرشکنی) ۴- انجام سرشکنی به روش کمترین مربعات ۵- انجام آزمونهای پس از سرشکنی برای اطمینان از عدم وجود اشتباه و یا خطای سیستماتیک (قابل تشخیص) در بین مشاهدات ۶- ارزیابی و ارائه کمیتهای مجهول و برآورد حدود و فواصل اطمینان برای مجهولات. در اینجا بر روی مبحث سرشکنی تمرکز خواهیم نمود.

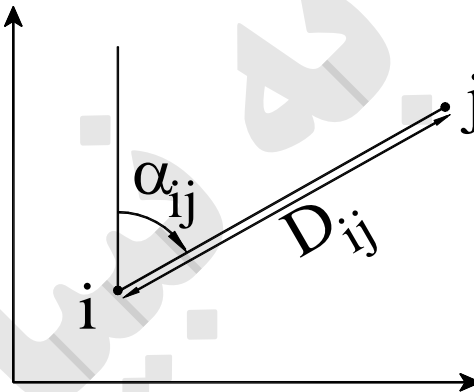
### ۵. ۱. ۱. سرشکنی شبکه<sup>۲</sup>

در سرشکنی شبکه های کنترل معمولاً از روش معادلات مشاهدات (روش پارامتریک) استفاده می شود و بنابراین معادلات مشاهدات دارای فرم برداری:  $\mathbf{l} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  (۱-۵) می باشند. که در آن  $\mathbf{l}$  بردار مشاهدات می باشد که معمولاً از یک سری مشاهدات طول، زاویه (یا امتداد زاویه ای)، احتمالاً آزیموت و یا آنگونه که جلوتر خواهیم دید می تواند شامل یک سری مختصات از قبل معلوم (با دقت معین) هم باشد و اگر مشاهدات GPS داشته باشیم اختلاف مختصات بین نقاط  $(\Delta x, \Delta y)$  جزو مشاهدات هستند و  $\mathbf{x}$  بردار مجهولات است که عناصر آن را مختصات مجهول نقاط شبکه تشکیل می دهند. مشاهدات طولی و یا زاویه ای را به صورت تابعی از مختصات نقاط شبکه (نقاط مرتبط با آن مشاهده خاص می نویسیم)، برای مثال:

$$D_{ij} = \left( (x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 \right)^{1/2} = \left( \Delta x_{ij}^2 + \Delta y_{ij}^2 \right)^{1/2}$$

$$\alpha_{ij} = \tan^{-1} \left( \frac{\Delta x_{ij}}{\Delta y_{ij}} \right) \quad (2-5)$$

که در رابطه فوق دو کمیت  $D_{ij}$  و  $\alpha_{ij}$  به ترتیب طول بین دو نقطه  $i, j$  و آزیموت بین دو نقطه می باشند (شکل ۱-۵).



شکل (۱-۵): ارائه مشاهدات طول و زاویه به عنوان تابعی از مختصات نقاط شبکه

برای تشکیل معادلات پارامتریک به منظور سرشکنی، لازم است تا رابطه (۱-۵) با بسط به سری تیلور به شکل خطی تبدیل شود:

$$\mathbf{l} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^0) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^0} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) + \dots \Rightarrow \mathbf{l} - \mathbf{f}(\mathbf{x}^0) = \delta \mathbf{l} = \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) = \mathbf{A} \delta \mathbf{x} \quad (3-5)$$

و نهایتاً جواب کمترین مربعات برای مسئله فوق بدین صورت خواهد بود:  $\delta \hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \delta \mathbf{l}$  (۴-۵)

که در آن (۵-۵)  $\mathbf{P} = \mathbf{Q}^{-1} = \sigma_0^2 \mathbf{C}_1^{-1}$  ماتریس وزن مشاهدات است در این رابطه  $\mathbf{Q}$  ماتریس کوفاکتور است و رابطه آن با ماتریس وریانس-کوریانس مشاهدات به صورت (۶-۵)  $\mathbf{C}_1 = \sigma_0^2 \mathbf{Q}$  می باشد،  $\sigma_0^2$  وریانس فاکتور اولیه است. رابطه (۴-۵) باید به روش تکرار حل شود و به این منظور مجهولات با استفاده از رابطه ذیل برآورد می شوند:

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^0 + \delta \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^0 + [(\mathbf{A}^T \mathbf{C}_1^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{C}_1^{-1} (\mathbf{l} - \mathbf{f}(\mathbf{x}^0))] \quad (7-5)$$

<sup>۲</sup> Network adjustment

و همبند ماتریس کووریانس مختصات برآورد شده نقاط شبکه از این رابطه بدست می آید: (۸-۵)  $\underline{\hat{C}}_{\hat{x}} = \sigma_0^2 (\underline{\mathbf{A}}^T \underline{\mathbf{P}} \underline{\mathbf{A}})^{-1}$  مقدار برآورد شده برای مشاهدات و بردار باقیمانده ها از روابط ذیل محاسبه می شوند:

$$\underline{\hat{\mathbf{I}}} = \underline{\mathbf{f}}(\underline{\hat{\mathbf{x}}}), \quad \underline{\hat{\mathbf{v}}} = \underline{\hat{\mathbf{I}}} - \underline{\mathbf{1}} \quad (9-5)$$

و از آنجا مقدار وریانس فاکتور ثانویه محاسبه می گردد: (۱۰-۵)  $\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\underline{\hat{\mathbf{v}}}^T \underline{\mathbf{P}} \underline{\hat{\mathbf{v}}}}{df}$  که  $df$  درجه آزادی شبکه است.

حال می توانیم ماتریس کووریانس مجهولات برآورد شده را با استفاده از کمیت فوق برآورد نماییم (۱۱-۵)  $\underline{\hat{C}}_{\hat{x}} = \hat{\sigma}_0^2 (\underline{\mathbf{A}}^T \underline{\mathbf{P}} \underline{\mathbf{A}})^{-1}$  ماتریس کووریانس مشاهدات برآورد شده  $\underline{\hat{C}}_{\hat{y}}$  و باقیمانده های برآورد شده  $\underline{\hat{C}}_{\hat{v}}$  با استفاده از روابط زیر بدست می آیند:

$$\underline{\hat{C}}_{\hat{v}} = \underline{\hat{C}}_{\hat{y}} - \underline{\hat{C}}_{\hat{x}} \quad (13-5) \quad \text{و} \quad \underline{\hat{C}}_{\hat{y}} = \underline{\mathbf{A}} \underline{\hat{C}}_{\hat{x}} \underline{\mathbf{A}}^T \quad (12-5)$$

و همبند مقادیر برآورد شده برای کمیت های فوق به طریق ذیل محاسبه می گردند:

$$\underline{\hat{C}}_{\hat{v}} = \hat{\sigma}_0^2 \underline{\mathbf{Q}} - \underline{\hat{C}}_{\hat{x}} \quad (15-5) \quad \text{و} \quad \underline{\hat{C}}_{\hat{y}} = \underline{\mathbf{A}} \underline{\hat{C}}_{\hat{x}} \underline{\mathbf{A}}^T \quad (14-5)$$

### ۵.۱.۲. روشهای سرشکنی شبکه

یکی از مباحث مهمی که در سرشکنی شبکه های کنترل همیشه مطرح است مسئله کمبود مرتبه<sup>۳</sup> ماتریس ساختار شبکه  $(\underline{\mathbf{A}})$  و در نظر گرفتن شروطی<sup>۴</sup> برای رفع این کمبود مرتبه است. فرض کنید در یک شبکه مسطحاتی فقط مشاهدات زاویه ای انجام داده باشیم و هیچ طول و یا آزیموتی برای ما معلوم نباشد اگر هیچ نقطه ای را نیز به عنوان ثابت و یا مبدا انتخاب نکنیم در اینصورت ماتریس نرمال  $\underline{\mathbf{N}} = (\underline{\mathbf{A}}^T \underline{\mathbf{P}} \underline{\mathbf{A}})$  یک ماتریس منفرد<sup>۵</sup> خواهد شد و دلیل این امر وجود کمبود مرتبه ستونی از مرتبه ۴ در ماتریس ساختار شبکه می باشد. این کمبود مرتبه ناشی از عدم معرفی سیستم مختصات مرجع برای شبکه می باشد. برای تعریف سیستم مختصات یک شبکه دو بعدی نیاز به معرفی چهار پارامتر معلوم داریم که دو تای آن مختصات یک نقطه از شبکه به عنوان مبدا است  $(x, y)$  و دو تای دیگر یکی توجیه زاویه ای شبکه (آزیموت) و دیگری تعریف مقیاس (معلوم بودن حداقل یک طول از شبکه) می باشند. اگر شبکه سه بعدی باشد آنگاه نیاز به معرفی هفت پارامتر معلوم برای تعیین سیستم مختصات مرجع داریم که سه تا از آنها مختصات مبدا هستند و سه تای دیگر توجیه زاویه ای محورهای سه گانه مختصات می باشند و پارامتر هفتم مقیاس طولی است. برای معرفی این پارامترها لازم است تا شروطی را به معادلات مشاهدات اضافه کنیم که به آنها کنسترنیت گفته می شود. در این شروط مقادیر پارامترهای معرفی سیستم مختصات شبکه به صورت ثوابتی که فاقد خطا هستند به مشاهدات اضافه شده و یا به شکلی در لیست مشاهدات دخالت می نمایند. البته در صورتی که مقادیر آنها را که از یک سیستم مختصات مرجع بزرگتر (مثلا یک شبکه ژئودزی) بدست آمده و از قبل موجود باشد به همراه خطای مربوطه داشته باشیم می توان خطا نیز برای عناصر معرفی کننده سیستم مختصات در نظر گرفت و در حقیقت این عناصر خودشان به عنوان چند مشاهده وارد معادلات مشاهدات می شوند و وریانس مربوط به آنها نیز لحاظ می گردد (سرشکنی با پارامترهای معلوم). بر این اساس اگر حداقل کنسترنیت های لازم برای تعریف سیستم مختصات رعایت گردد (مثلا معرفی یک آزیموت، یک طول و یک نقطه به عنوان مبدا و یا معرفی دو نقطه معلوم از شبکه) آنگاه این نوع سرشکنی را مینیمم کنسترنیت (minimum constraints) می گویند. اگر تعداد کنسترنیت ها از حداقل لازم بیشتر باشد (مثلا مختصات سه نقطه و یا بیشتر از یک شبکه دو بعدی معلوم باشد) آنگاه سرشکنی را over constraints می گویند. نکته مهمی که در ارتباط با تعریف سیستم مختصات مبنا برای شبکه وجود دارد اینست که مختصات بدست آمده از سرشکنی  $(\underline{\hat{\mathbf{x}}})$  و همبند عناصر ماتریس کووریانس آنها  $\underline{\hat{C}}_{\hat{x}}$  مستقیماً تحت تاثیر تعریف سیستم مختصات می باشند که توجه به این مطلب در

<sup>۳</sup> Rank deficiency

<sup>۴</sup> Constraints

<sup>۵</sup> Singular

تحلیل شبکه بسیار ضروری و با اهمیت است و در بخشهای جلوتر بیشتر بدان خواهیم پرداخت. برای خلاصی از این وابستگی تاکنون تکنیک های مختلفی توسط محققین ارائه گردیده است که مهمترین آنها انجام سرشکنی به طریقه قیود داخلی یا اینر کنسترنیت<sup>۱</sup> بوده است. در روش اینر کنسترنیت مسئله کمبود مرتبه ماتریس ساختار به طریقه ای مجازی حل می شود، شروطنی که برای این نوع سرشکنی بکار گرفته می شوند عبارتند از:

۱- ثابت ماندن مختصات مرکز ثقل نقاط شبکه

۲- ثابت ماندن میانگین آزیموت مرکز ثقل به سمت کلیه ایستگاههای شبکه

۳- ثابت ماندن میانگین فاصله مرکز ثقل تا کلیه ایستگاههای شبکه

برای شرط اول دو معادله و برای دو شرط دیگر هرکدام یک معادله می توان نوشت که جمعا چهار معادله کنسترنیت خواهیم داشت. روش سرشکنی اینر کنسترنیت دارای معایب مختلفی است از جمله اینکه سیستم مختصات شدیداً تحت تاثیر سیستم مختصات اولیه ایستگاهها می باشد (که از همان نیز برای محاسبه مختصات مرکز ثقل استفاده می گردد). اشکال دیگر اینجاست که موقعیت مرکز ثقل، میانگین فاصله مرکز ثقل تا ایستگاهها و میانگین آزیموت مرکز ثقل تا ایستگاهها قبل و بعد از سرشکنی یکی است و ثابت باقی می ماند و باید برای آن منطقی وجود داشته باشد. این نوع سرشکنی دارای کاربرد بسیار محدودی است و از آن بیشتر برای تحلیل تغییر شکل و جابجائی شبکه های کنترل در مباحث میکرو ژئودزی استفاده می کنند.

### ۵. ۱. ۳. آزمونهای بعد از سرشکنی

پس از سرشکنی به روش کمترین مربعات اولین کاری که باید انجام بدهیم برگزاری آزمونهای آماری برای اطمینان از صحت نتایج بدست آمده می باشد و نخستین و مهمترین آزمونی که بلافاصله انجام می شود آزمون وریانس فاکتور ثانویه است. مقدار وریانس فاکتور اولیه معمولاً و نه لزوماً مساوی یک در نظر گرفته می شود و می توان پس از سرشکنی کمترین مربعات یک برآورد نارایب از وریانس فاکتور اولیه ( $\sigma_0^2$ ) بدست آورد که به آن وریانس فاکتور ثانویه ( $\hat{\sigma}_0^2$ ) گفته می شود. در آزمون وریانس فاکتور ثانویه فرضهای صفر و مقابل بدین صورت هستند:

$$H_0 : \hat{\sigma}_0^2 = \sigma_0^2 \quad \text{vs} \quad H_1 : \hat{\sigma}_0^2 \neq \sigma_0^2$$

و آماره مورد استفاده  $\frac{df \hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} \sim \chi_{df, \alpha/2}^2$  می باشد و همانطور که دیده می شود از توزیع کای اسکور تبعیت می کند. در

صورت رد شدن  $H_0$  در این آزمون، صحت سرشکنی مورد تردید قرار می گیرد و این به معنای وجود یکی از اشکالات ذیل است:

الف- وجود اشتباه در مشاهدات

ب- وجود خطای سیستماتیک در مشاهدات

ج- صحیح انتخاب نشدن مقدار وریانس فاکتور اولیه ( $\sigma_0^2$  (مقیاس غلط Q)

د- تکمیل نبودن مدل ریاضی (نوعی خطای سیستماتیک)

ن- نرمال نبودن تابع توزیع باقیمانده ها

معمولاً برای سرشکنی شبکه های کنترل مسطحاتی مقدار وریانس فاکتور اولیه را یک فرض می کنند ( $\sigma_0^2 = 1$ ) و اصولاً در سرشکنی کمترین مربعات برای مدلهای ریاضی مختلف کم اتفاق می افتد که مجبور باشیم مقدار  $\sigma_0^2$  را چیز دیگری اختیار کنیم در مسائلی مانند ترازبایی گاهی اوقات باید اینکار را انجام دهیم پس برای شبکه های کنترل اتفاق افتادن وضعیت (ج) بعید است و بعلاوه اینکه حتماً باید از صحیح بودن مدل ریاضی مطمئن شویم و در این صورت می توان وقوع وضعیت (د) را نیز منتفی در نظر گرفت. آنچه که باقی می ماند احتمال وقوع حالتی (الف)، (ب) و یا (ن) می باشد که برای آنها آزمونهای پس از سرشکنی وجود دارد که عبارتند از آزمون تشخیص اشتباه در مشاهدات، آزمون تشخیص خطای سیستماتیک در مشاهدات و آزمون نرمال بودن تابع

<sup>۱</sup> Inner constraints or Free network adjustment

توزیع باقیمانده ها که در بین این آزمونها مهمترینشان آزمون تشخیص مشاهدات اشتباه<sup>۷</sup> پس از سرشکنی است که در اینجا بدان می پردازیم، برای بررسی سایر آزمونها به منابع درس سرشکنی نظیر کتاب مفاهیم ژئودزی و نیچک و کراکوفسکی مراجعه نمائید.

از نقطه نظر آماری مشاهدات اشتباه<sup>۸</sup> مشاهداتی هستند که با سایر مشاهدات سازگاری ندارند. فرض بر این است که این ناسازگاری توسط یک اشتباه در اندازه گیری بوجود آمده است و یا اینکه نوعی اختلال بر کارائی سیستم اندازه گیری تاثیر گذاشته است. مشاهدات اشتباه را می توان با آزمایش نمودن باقیمانده مشاهدات که از برآورد کمترین مربعات بدست می آیند، تشخیص داد. از آنجائی که باقیمانده ها از نظر ریاضی به یکدیگر وابسته هستند مجبور خواهیم بود تا با یک تابع توزیع احتمال چند بعدی کار کنیم و این انجام آزمون را بسیار پیچیده و مشکل خواهد کرد. روش ساده تر و موثرتر اینست که با یک توزیع یک بعدی کار کنیم و برای این منظور ناگزیر به استاندارد نمودن باقیمانده ها هستیم. چون فرض بر اینست که همه باقیمانده ها از یک جامعه یکسان ولی با توابع چگالی نرمال مختلف بدست می آیند، استاندارد سازی به صورت مستقیم می باشد. این نوع استاندارد سازی برای مشاهده<sup>۹</sup> ام

که دارای باقیمانده  $\hat{v}_i$  با انحراف معیار  $\sigma_{\hat{v}_i}$  است، توسط رابطه مقابل انجام می شود:  $\tilde{v}_i = \frac{\hat{v}_i}{\sigma_{\hat{v}_i}}$  البته این در صورتی است که وریانس فاکتور اولیه  $(\sigma_0^2)$  معلوم باشد. اگر  $(\sigma_0^2)$  مجهول باشد به جای آن از  $(\hat{\sigma}_0^2)$  استفاده می کنیم و به جای  $(\sigma_{\hat{v}_i})$  از برآورد ناآرب آن یعنی  $(\hat{\sigma}_{\hat{v}_i})$  استفاده می کنیم. آزمون تشخیص مشاهدات اشتباه برای این دو حالت مختلف از دو آماره متفاوت استفاده می کند که توزیع احتمال یکی نرمال استاندارد و دیگری توزیع تاو ( $\tau$ ) می باشد:

$$\begin{cases} \tilde{v}_i = \frac{\hat{v}_i}{\sigma_{\hat{v}_i}} \sim N(0,1) & \sigma_0^2 \text{ (known)} \\ \tilde{v}_i = \frac{\hat{v}_i}{\hat{\sigma}_{\hat{v}_i}} \sim \tau_{df} & \sigma_0^2 \text{ (unknown)} \end{cases} \quad (16-5)$$

توزیع تاو که مخترع آن Pope می باشد با توزیع  $t$  استیودنت دارای رابطه ذیل است و از این طریق محاسبه می گردد:

$$\tau_n = t_{n-1} \sqrt{n(n-1+t_{n-1}^2)} \quad (17-5)$$

لازم است تا تک تک مشاهدات را پس از سرشکنی، از نظر عدم وجود اشتباه در آنها با استفاده از آزمون فوق بررسی کنیم. روش انجام کار به ترتیب ذیل می باشد:

- ۱- مشاهدات را به ترتیب تست می کنیم در صورت رد شدن آزمون برای هریک از مشاهدات آنرا علامت گذاری می کنیم.
- ۲- اگر فقط یک مشاهده رد شده باشد آنرا از لیست حذف می کنیم و سرشکنی را تکرار می کنیم ولی اگر بیش از یک مشاهده رد شود فقط مشاهده ای را که دارای بزرگترین باقیمانده است را حذف کرده و سرشکنی را تکرار می کنیم.
- ۳- مراحل فوق را آنقدر تکرار می کنیم تا هیچ مشاهده ای رد نشود سپس اولین مشاهده حذف شده را وارد لیست مشاهدات می کنیم، سرشکنی و سپس آزمون را تکرار می کنیم. اگر این مشاهده رد نشد آنرا در لیست نگه می داریم و مشاهده حذف شده دوم را به همین طریق امتحان می کنیم.
- ۴- مرحله امتحان مجدد مشاهدات حذف شده را تا هنگامی ادامه می دهیم تا از عدم حضور مشاهده فاقد اشتباه در بین مشاهدات حذف شده اطمینان کامل پیدا کنیم.

<sup>۷</sup> Outlier detection test

<sup>۸</sup> Outliers

۵- هر مشاهده ای که وارد نمودن آن در لیست مشاهدات باعث رد شدن باقیمانده مربوط به خودش و یا احیاناً سایر مشاهدات شود مشاهده اشتباه تلقی می گردد و باید از فهرست مشاهدات حذف گردد.

پس از انجام آزمونهای بعد از سرشکنی حدود و فواصل اطمینان را برای کمیتهای برآورد شده تعیین می کنیم که برای شبکه های مسطحاتی (دوبعدی) به صورت بیضی خطای مطلق خواهد بود و برای شبکه های سه بعدی به شکل یک بیضوی سه محوری می باشد. در مبحث دقت از بخش طراحی راجع به این موضوع بیشتر صحبت خواهد شد.

## ۵.۲. مراتب طراحی شبکه

در سال در حدود ۱۳۰ سال پیش، هلمرت<sup>۹</sup> ژئودزیست مشهور آلمانی در مورد امکان یافتن قوانینی برای مکان گزینی بهینه یک شبکه ژئودتیک به عنوان تابعی از نوع و تعداد اندازه گیریهای ممکن، مبحثی را طرح نمود. در سال ۱۹۷۴ گرافارند<sup>۱۰</sup> ژئودزیست هموطن هلمرت در مقاله خود ایده هلمرت را با عنوان نمودن مراتب طراحی توسعه بخشید. گرافارند طراحی را در چهار مرتبه بیان می کند: طراحی مرتبه صفر، طراحی مرتبه یک، طراحی مرتبه دو و طراحی مرتبه سه. طراحی مرتبه صفر تعیین چهارچوب مرجع<sup>۱۱</sup> برای تعریف مختصات نقاط شبکه و ماتریس کوورینانس آنهاست. طراحی مرتبه یک عبارت از تعیین عناصر مورد اندازه گیریست. طراحی مرتبه دو تعیین وزن (و یا دقت) مشاهداتی است که در مرتبه یک معلوم گردیده اند و طراحی مرتبه سه انتخاب مشاهدات و وزن مشاهدات برای بهسازی یک شبکه موجود است و یا به عبارت بهتر بهینه سازی شبکه از کلیه جهات چه از نظر فنی و چه اقتصادی در این مرتبه از طراحی باید انجام شود. شماره بندی مراتب طراحی لزوماً به معنی مستقل انجام شدن هر یک از این مراتب از دیگری نیست و معمولاً تصمیمهایی که در اثر یک مرتبه از طراحی ممکن است اتخاذ شوند بدون در نظر گرفتن شماره آن تاثیر مستقیمی بر روی مراتب دیگر خواهند داشت.

### ۵.۲.۱. طراحی مرتبه صفر

یک شبکه کنترل شامل یک سری نقاط و عناصر مشاهداتی می گردد که باید در فضای سه بعدی اندازه گیری بشوند. اگر از روش معادلات شرط برای سرشکنی کمترین مربعات استفاده کنیم نیازی به تعریف سیستم مختصات مرجع نداریم زیرا که معادلات شرط روابط هندسی بین مشاهدات را به شکل مستقیم تعریف می کنند و تصحیحات مشاهدات بر این مبنای برآورد می شوند ولی دشواری کار با روش شرط برای شبکه های بزرگ معمولاً مهندسی را وادار می کند که روش پارامتریک را ترجیح بدهند. در این روش پارامترهای برآورد شده از جنس مختصات هستند و بنابراین نیاز به تعریف سیستم مختصات برای شبکه مورد اندازه گیری خواهیم داشت. معمولاً در نقشه برداری کنترل مهندسی، چهارچوب مرجع اندازه گیری یک سیستم متعامد و سه بعدی کارترین می باشد و به ندرت از سیستم مرجع منحنی الخط بیضوی استفاده می گردد. انتخاب سیستم مرجع برای مختصات تنها بخشی از طراحی مرتبه صفر است بلکه لازم است تا به انتخاب سطح مرجعی<sup>۱۲</sup> که قرار است وریانس و کوورینانس مختصات نقاط در آن توصیف شود، توجه گردد. برای روشن شدن مطلب شبکه مسطحاتی را در نظر بگیرید که فقط زوایا در آن اندازه گیری شده باشند و هیچ طولی مشاهده نشده باشد. ماتریس ضرایب مجهولات<sup>۱۳</sup> دارای یک کمبود مرتبه ستونی از مرتبه چهار خواهد شد که راه حل برای رفع این کمبود مرتبه ثابت در نظر گرفتن مختصات دو نقطه از شبکه با اضافه نمودن معادلات کنسترنیت<sup>۱۳</sup> به معادلات

<sup>۹</sup> F.R. Helmert

<sup>۱۰</sup> E.W. Grafarend

<sup>۱۱</sup> Reference framework

<sup>۱۲</sup> Datum

<sup>۱۳</sup> Constraint equations

مشاهدات است این دو نقطه در حقیقت *وریانس صفر مبنای مرجع*<sup>۱۴</sup> را تشکیل می دهند. ماتریس کووریانسی که برای مختصات برآوردشده از سرشکنی کمترین مربعات بدست می آید  $\hat{C}_x$  مستقیماً تحت تاثیر انتخاب این سطح مبنای مرجع است و این در حالیتیست که برخی دیگر از معیارهای دقت که از روش کمترین مربعات بدست می آیند نظیر بردار باقیمانده مشاهدات  $\hat{V}$  و ماتریس کووریانس بردار باقیمانده مشاهدات  $\hat{C}_v$  مستقل از تعریف سطح مبنای مرجع می باشند. به کمیتهائی که مستقل از تعریف سطح مبنای مرجع باشند اصطلاحاً کمیتهای نامتغیر (*invariant*) گفته می شود و اینها همان کمیتهائی هستند که به کمک مشاهدات و بدون نیاز به کنسترنیت اضافی می توان آنها را برآورد نمود اصطلاح دیگری که برای این کمیتهای بکار برده می شود (*estimable*) است و برعکس آنها کمیتهائی مثل مختصات هستند که تعیین آنها الزاماً در نظر گرفتن شروطی (*constraints*) را طلب می کند و به کمیتهای (*inestimable*) معروف هستند.

### ۵.۲.۲. طراحی مرتبه یک

طراحی مرتبه یک عبارتست از یافتن شکل هندسی و پیکربندی<sup>۱۵</sup> مناسب برای نقاط و عناصر مشاهداتی در شبکه به گونه ای که حدود تعیین شده برای معیارهای طراحی تامین گردد. عموماً در نقشه برداری کنترل مهندسی، انتخاب موقعیت نقاط توسط عوامل طبیعی و فیزیکی نظیر شکل زمین، وجود ساختمانها، درختان و سایر عوامل از این دست محدود می گردد و فقط یکسری انتخابهای محدود برای طراح باقی می ماند. بعد دیگر طراحی در این مرحله انتخاب عناصر مشاهداتی است مثلاً اینکه طول مشاهده شود یا زاویه و یا تلفیقی از این دو و دیگر اینکه چه طولها و زوایائی باید لزوماً مشاهده شوند تا به دقت مورد نظر دست پیدا کنیم. طراحی مرتبه یک در حقیقت تعیین کننده ماتریس  $A$  در معادلات مشاهدات است، به این ماتریس، ماتریس طرح<sup>۱۶</sup> یا ماتریس ساختارگفته می شود و این ماتریس در برگیرنده اطلاعات هندسی مربوط به شبکه است.

### ۵.۲.۳. طراحی مرتبه دو

اگر شکل هندسی و پیکربندی شبکه معلوم باشد لازم است تا وزن مشاهدات به گونه ای تعیین شود که بتوانیم به دقت مورد نظر برای مجهولات دست پیدا کنیم. در طراحی مرتبه دو نوع دستگاههای مورد استفاده برای اندازه گیری و کیفیت و تعداد دفعات اندازه گیری مشاهدات برای رسیدن به معیارهای از پیش تعیین شده طراحی، معلوم می گردد و برای این منظور لازم است که کلیه جوانب از جمله مسائل اقتصادی و هزینه طرح در نظر گرفته شود. آنچه که معلوم است طراحی مرتبه یک و دو را نمی توان کلاً از یکدیگر مجزا در نظر گرفت زیرا که نتایج هر یک از این دو بر دیگری نیز تاثیر گذار خواهد بود بنابراین گاهی از اوقات لازم است تا با در نظر گرفتن چند وضعیت مختلف و مقایسه نتایج طراحی های مرتبه یک و دو از بین چند وضعیت مختلف جامعترین آنها را که کلیه معیارهای اولیه از نظر فنی و اقتصادی را تامین کند، انتخاب گردد.

### ۵.۲.۴. طراحی مرتبه سه

طراحی مرتبه سه عموماً هنگامی انجام می شود که یک شبکه کنترل از قبل در اختیار داریم و قصد داریم تا با اضافه نمودن یک سری از نقاط و مشاهدات دیگر استحکام شبکه را از نظر دقت و سایر معیارهای طراحی افزایش دهیم (افزایش تراکم شبکه<sup>۱۷</sup>) و یا اینکه کلاً قصد داشته باشیم که شبکه را گسترش دهیم و یا آنرا به شبکه دیگری متصل نمائیم. در این مرحله لازم است تا دقت مختصات شبکه اولیه نیز در سرشکنی دخالت داده شوند. در حقیقت این مختصات به عنوان پارامترهای اولیه وزن دار در سرشکنی

<sup>۱۴</sup> Zero-variance reference base (defined by Baarda)

<sup>۱۵</sup> Configuration

<sup>۱۶</sup> Design Matrix

<sup>۱۷</sup> Network densification

شرکت می کنند. بهینه سازی و تقویت شبکه های موجود با در نظر گرفتن معیارهای فنی و اقتصادی هدف اصلی از انجام این طراحی می باشد.

### ۳. ۵. معیارهای<sup>۱۸</sup> طراحی شبکه

برای انجام طراحی شبکه به طور کلی تعیین سه مسئله به عنوان معیارهای تعیین کننده در طراحی حائز اهمیت می باشد که عبارتند از: معیارهای دقت شبکه، معیارهای قابلیت اطمینان برای شبکه و معیارهای حساسیت شبکه<sup>۱۹</sup>

معیارهای دقت شبکه از روی ماتریس وریانس- کووریانس پارامترهای مجهول شبکه تعیین می گردند و به دو دسته دقت کل شبکه و دقت منطقه ای شبکه تقسیم بندی می شوند. قابلیت اطمینان به بحث در مورد قدرت تشخیص و ردیابی اشتباهات احتمالی در مشاهدات شبکه می پردازد و به دو بخش قابلیت اطمینان داخلی و قابلیت اطمینان خارجی تفکیک می گردد. معیار دیگر حساسیت شبکه نسبت به جابجائی در یک سری از جهات خاص می باشد که بیشترین احتمال برای جابجائی آنها وجود داشته باشد. حساسیت در مرحله ای مورد بحث قرار می گیرد که احتمال تغییر شکل و جابجائی شبکه وجود داشته باشد و یا اینکه بخواهیم یک شبکه پویا<sup>۲۰</sup> را مورد بررسی قرار دهیم. در این قسمت به بحث در مورد دو معیار اول که برای کلیه شبکه های کنترل اهمیت دارند می پردازیم و بحث در مورد حساسیت شبکه را به درس میکروژئودزی موکول می کنیم. البته معیارهای دیگری نیز اخیراً توسط ونیچک و کراکوفسکی برای طراحی شبکه مطرح گردیده اند که به عناصر توانمندی شبکه<sup>۲۱</sup> معروف هستند و در مبحث مربوط به تحلیل استرین مطرح می گردند.

### ۳. ۵. ۱. معیارهای برآورد دقت کل<sup>۲۲</sup> در شبکه های ژئودتیک

برای برآورد دقت کل در یک شبکه از دو معیار ممکن است استفاده شود یکی مجموع عناصر قطری ماتریس وریانس- کووریانس مجهولات  $C_{\hat{x}}$  است:  $trace(C_{\hat{x}})$  و دیگری نسبت بزرگترین مقدار ویژه ماتریس  $C_{\hat{x}}$  بر کوچکترین مقدار ویژه ماتریس فوق می باشد:  $\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$ . هر دو این تعاریف وابسته به سیستم مختصات هستند و با تغییر سیستم مختصات شبکه مقادیر آنها فرق خواهد کرد زیرا که برآورد کننده های آنها از نوع کمیتهای (inestimable) هستند. معیارهای برآورد دقت کل برای یک شبکه تعریف کاملی از چگونگی و کیفیت دقت پارامترهای برآورد شده ارائه نمی کنند و هرکدام از آنها دارای نقاط ضعفی می باشند که این امر باعث می شود این کمیتهای در درجه اول اهمیت قرار نگیرند و به برآوردکننده های دقت منطقه ای شبکه بیشتر اهمیت داده می شود.

### ۳. ۵. ۲. معیارهای برآورد دقت منطقه ای<sup>۲۳</sup> در شبکه های کنترل

دقت منطقه ای شبکه به دو صورت مطلق و نسبی بیان می شود. دقت منطقه ای مطلق شبکه به صورت بیضی خطای مطلق تعریف می گردد، به این صورت که فاصله اطمینان برای هر یک از نقاط برآورد شده در شبکه تعریف می گردد و همانطور که در درس سرشکنی آموخته اید این فاصله اطمینان به صورت معادله یک بیضی ظاهر می گردد و بهتر است به آن ناحیه اطمینان بگوئیم.

<sup>۱۸</sup> Network design criteria

<sup>۱۹</sup> Network sensitivity

<sup>۲۰</sup> Dynamic network

<sup>۲۱</sup> Network robustness elements

<sup>۲۲</sup> Global network precision measures

<sup>۲۳</sup> Local precision measures

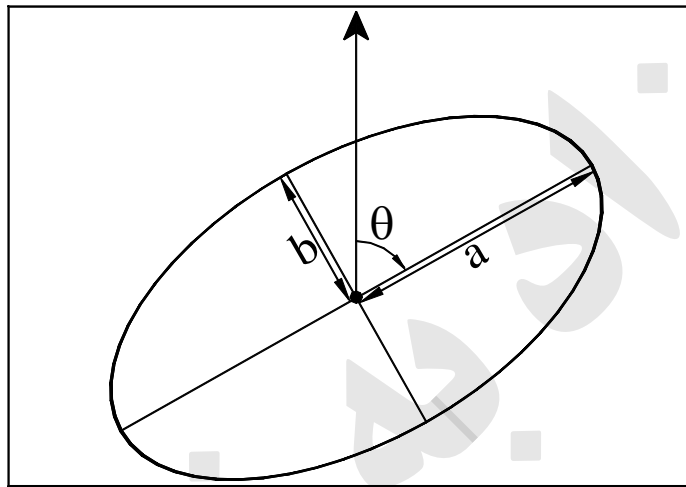
براین اساس مقادیر ویژه زیر ماتریسهای<sup>۲۴</sup> به فرم  $\begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_y^2 \end{bmatrix}$  از ماتریس  $C_{\hat{x}}$  برابر با مجذور نیم قطر اطول و نیم قطر اقصر بیضی های خطای نقاط شبکه خواهند بود. این مقادیر ویژه  $(\lambda_1, \lambda_2)$  از رابطه زیر محاسبه می شوند،  $a$  و  $b$  نیم قطرهای اطول و اقصر بیضی خطا می باشند.

$$\lambda_1 = a^2 = \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2 + 4\sigma_{xy}^2} \quad (18-5)$$

$$\lambda_2 = b^2 = \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2 + 4\sigma_{xy}^2}$$

و نحوه قرار گرفتن و توجیه بیضی خطا نسبت به محورهای مختصات توسط پارامتر دیگری توصیف می شود که آزیموت قطر اطول

را بیان می کند و با  $\theta$  نشان داده می شود (به شکل ۲-۵) توجه ننمائید): (۱۹-۵)  $\theta = -\frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2} \right)$



شکل (۲-۵): ناحیه اطمینان برای برآورد یک نقطه از شبکه که به صورت بیضی خطای مطلق نشان داده می شود

بیضی خطای حاصل از روابط (۱۸-۵) و (۱۹-۵) یک ناحیه اطمینان ۳۹/۴٪ به مرکز موقعیت واقعی نقطه مورد نظر ماست ولی عملاً به دلیل عدم دسترسی به موقعیت واقعی، آنرا به مرکز موقعیت برآورد شده ترسیم می کنند. برای افزایش سطح اطمینان باید مقادیر  $a, b$  را در ضرایبی که از جدول (۱-۵) بدست می آیند، ضرب نمود. به این ضرایب اصطلاحاً ضرایب بزرگنمایی<sup>۲۵</sup> گفته می شود و همانطور که ملاحظه می کنید، مقادیر آنها با افزایش درجه آزادی کاهش پیدا می کند و از توزیع آماری فیشر<sup>۲۶</sup> تبعیت می کند.

<sup>۲۴</sup> Sub matrix

<sup>۲۵</sup> Magnification factor

<sup>۲۶</sup> Fisher distribution function

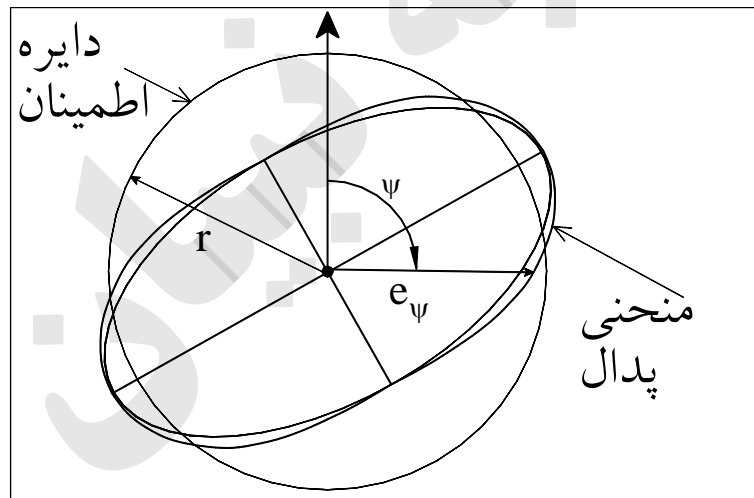


df	در صد احتمال (1-α)		
	95%	98%	99%
1	20.00	50.00	100.00
2	6.16	9.90	14.10
3	4.37	6.14	7.85
4	3.73	4.93	6.00
5	3.40	4.35	5.15
6	3.21	4.01	4.67
8	2.99	3.64	4.16
10	2.86	3.44	3.89
12	2.79	3.32	3.72
15	2.71	3.20	3.57
20	2.64	3.09	3.42
30	2.58	2.99	3.28
50	2.52	2.91	3.18
100	2.49	2.85	3.11
∞	2.45	2.80	3.03

جدول (۱-۵): مقادیر ضرایب بزرگنمایی برای بیضی های خطای دوبعدی  $\sqrt{2F_{2,df,\alpha}}$

مقادیر محاسبه شده برای جدول فوق برای فواصل اطمینان دو بعدی برآورد شده اند و ملاحظه می شود که با تغییر بعد مقادیر ضرایب نیز تغییر می کنند و افزایش می یابند. به جز بیضی خطا معیارهای دیگری نیز برای بیان دقت نقاط شبکه وجود دارد که مهمترین آنها منحنی پدال<sup>۳۷</sup> می باشد. منحنی پدال مکان هندسی انحراف معیار مختصات در جهات مختلف است، انحراف معیار در آزیموت  $\psi$  از رابطه ذیل بدست می آید (شکل ۳-۵):

$$e_{\psi} = \sqrt{(\sigma_y^2 \cos^2(\psi) + 2\sigma_{xy} \sin(\psi) \cos(\psi) + \sigma_x^2 \sin^2(\psi))} \quad (۲۰-۵)$$



شکل (۳-۵): بیضی خطا، منحنی پدال و دایره اطمینان

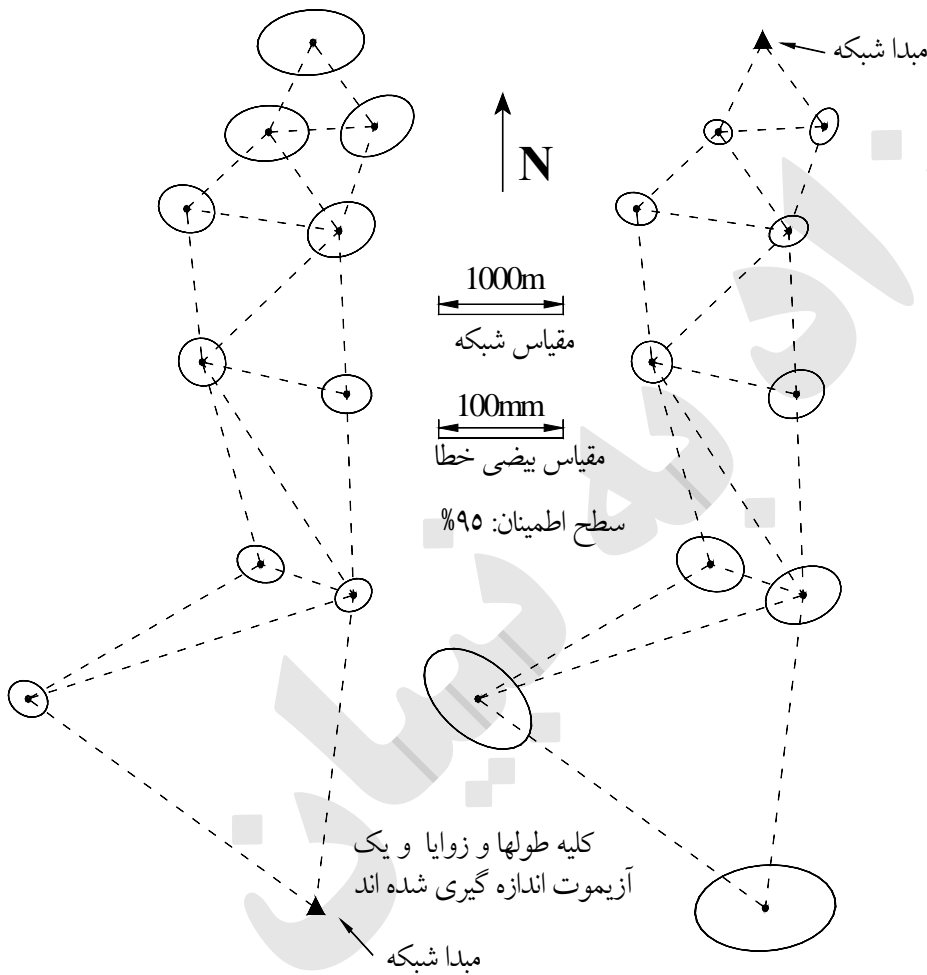
یکی دیگر از مفاهیمی که اخیراً در ایالات متحده آمریکا برای بیان دقت مختصات دو بعدی نقاط بکار برده می شود، دایره خطاست. دایره خطا در حقیقت به این منظور تعریف شده است که بتوانیم دقت مختصات را در کلیه جهات با یک مقدار واحد بیان کنیم که همان شعاع دایره می باشد و حسن آن در اینجاست که درک این مفهوم برای بسیاری از افراد غیر متخصص در نقشه برداری که ما برای بیان دقت و کیفیت محصولات کارمان (مختصات تعیین شده نقاط) با آنها سروکار داریم، خیلی ساده تر از بیضی خطا می باشد.

<sup>۳۷</sup> Pedal curve

شعاع این دایره از رابطه ذیل محاسبه می گردد:

$$r = K_p a \quad (21-5) \quad \text{که در آن } C = b/a \text{ و } K_p = 1.960790 + 0.004071C + 0.114276C^2 + 0.371625C^3$$

اگرچه بیضی خطای مطلق شمای کلی از دقت شبکه بدست می دهد، اما این کمیت نیز وابسته به سیستم مختصات است و اندازه اقطار آن  $(a, b)$  و همچنین آزیموت نیم قطر طول آن از جمله کمیت های (inestimable) می باشند زیرا هنگامی که سیستم مختصات یک شبکه را تغییر می دهیم ملاحظه می گردد که بیضی های خطای مطلق برای نقاط شبکه تغییر می کنند به این صورت که هرچقدر از مبدا دور می شویم ابعاد بیضی های خطای مطلق بزرگ و بزرگتر می شوند و با تغییر مبدا از نقطه ای به نقطه دیگر در شبکه همین اتفاق تکرار می گردد (شکل ۵-۴) و همینطور اگر آزیموت مرجع را تغییر دهیم (به جای آزیموت یک امتداد آزیموت امتداد دیگری را مرجع در نظر بگیریم) می بینیم بیضی های خطای مطلق متناسب با آن مقداری دوران می کنند.



شکل (۵-۴): نمایش وابسته بودن بیضی های خطای مطلق به سیستم مختصات انتخاب شده برای سرشکنی شبکه

حتی اگر سرشکنی اینر کنسترینت را هم انتخاب کنیم ملاحظه می گردد که با دور شدن از مرکز ثقل شبکه ابعاد بیضی های خطای مطلق بزرگتر می شوند و استفاده از این نوع سرشکنی هم کمکی به رفع معضل وابستگی بیضی های خطای مطلق به تعریف سیستم مختصات نخواهد کرد. برای اینکه معیاری از دقت داشته باشیم که دارای وابستگی کمتری نسبت به تعریف سیستم مختصات مرجع باشد، دقت منطقه ای نسبی را برای شبکه تعریف می کنند که به صورت **بیضی خطای نسبی** بیان می گردد. برای این منظور ناحیه اطمینان نسبی را برای تفاضل مختصات هر دو نقطه از شبکه تعریف می کنند. ناحیه اطمینان نسبی تابعی از عناصر یک زیر ماتریس

از ماتریس کووریانس تفاضل مختصات نقاط شبکه می باشد. این زیر ماتریس به صورت 
$$\begin{bmatrix} \sigma_{\Delta x}^2 & \sigma_{\Delta x, \Delta y} \\ \sigma_{\Delta y, \Delta x} & \sigma_{\Delta y}^2 \end{bmatrix}$$
 است و نحوه محاسبه اجزای بیضی خطای نسبی بین دو نقطه از این ماتریس دقیقاً همانند محاسبه اجزای بیضی خطای مطلق است که پیشتر توضیح داده شده است (روابط ۵-۱۸ و ۵-۱۹). ساده ترین راه برای محاسبه ماتریس کووریانس تفاضل مختصات بین دو نقطه، استفاده از قانون کووریانس می باشد:

$$\begin{cases} \Delta x = x_j - x_i \\ \Delta y = y_j - y_i \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ x_j \\ y_j \end{pmatrix}$$

$$\underline{C}_{\Delta x, \Delta y} = \begin{pmatrix} \sigma_{\Delta x}^2 & \sigma_{\Delta x, \Delta y} \\ \sigma_{\Delta y, \Delta x} & \sigma_{\Delta y}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{x_i}^2 & \sigma_{x_i, y_i} & \sigma_{x_i, x_j} & \sigma_{x_i, y_j} \\ \sigma_{y_i, x_i} & \sigma_{y_i}^2 & \sigma_{y_i, x_j} & \sigma_{y_i, y_j} \\ \sigma_{x_j, x_i} & \sigma_{x_j, y_i} & \sigma_{x_j}^2 & \sigma_{x_j, y_j} \\ \sigma_{y_j, x_i} & \sigma_{y_j, y_i} & \sigma_{y_j, x_j} & \sigma_{y_j}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

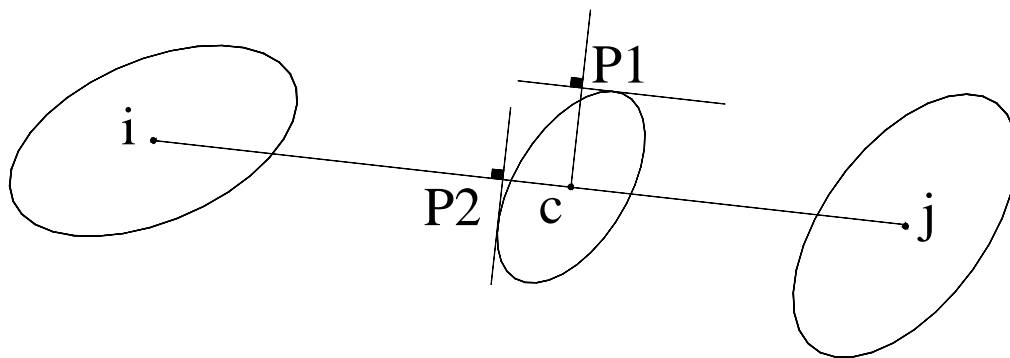
$$\underline{C}_{\Delta x, \Delta y} = \begin{pmatrix} \sigma_{x_i}^2 + \sigma_{x_j}^2 - 2\sigma_{x_i, x_j} & \sigma_{x_i, y_i} - \sigma_{x_j, y_i} - \sigma_{x_i, y_j} + \sigma_{x_j, y_j} \\ \sigma_{x_i, y_i} - \sigma_{x_j, y_i} - \sigma_{x_i, y_j} + \sigma_{x_j, y_j} & \sigma_{y_i}^2 + \sigma_{y_j}^2 - 2\sigma_{y_i, y_j} \end{pmatrix} \quad (۲۲-۵)$$

روش رایج برای ارائه اندازه ناحیه اطمینان نسبی آنست که آنرا به شکل بیضی خطا در وسط فاصله بین دو نقطه ترسیم نمائیم. به کمک این بیضی خطا می توان انحراف معیار آزمون و طول برآورد شده برای دو نقطه را بدست آورد و بدین منظور کفایت تا بر بیضی دو خط مماس چنان رسم کنیم که یکی عمود و دیگری موازی خط واصل بین دو نقطه باشد (شکل ۵-۵):

$$cp_1 = \hat{D}_{ij} \sigma_{\hat{\alpha}_{ij}} \quad \text{و} \quad cp_2 = \sigma_{\hat{D}_{ij}} \quad (۲۳-۵)$$

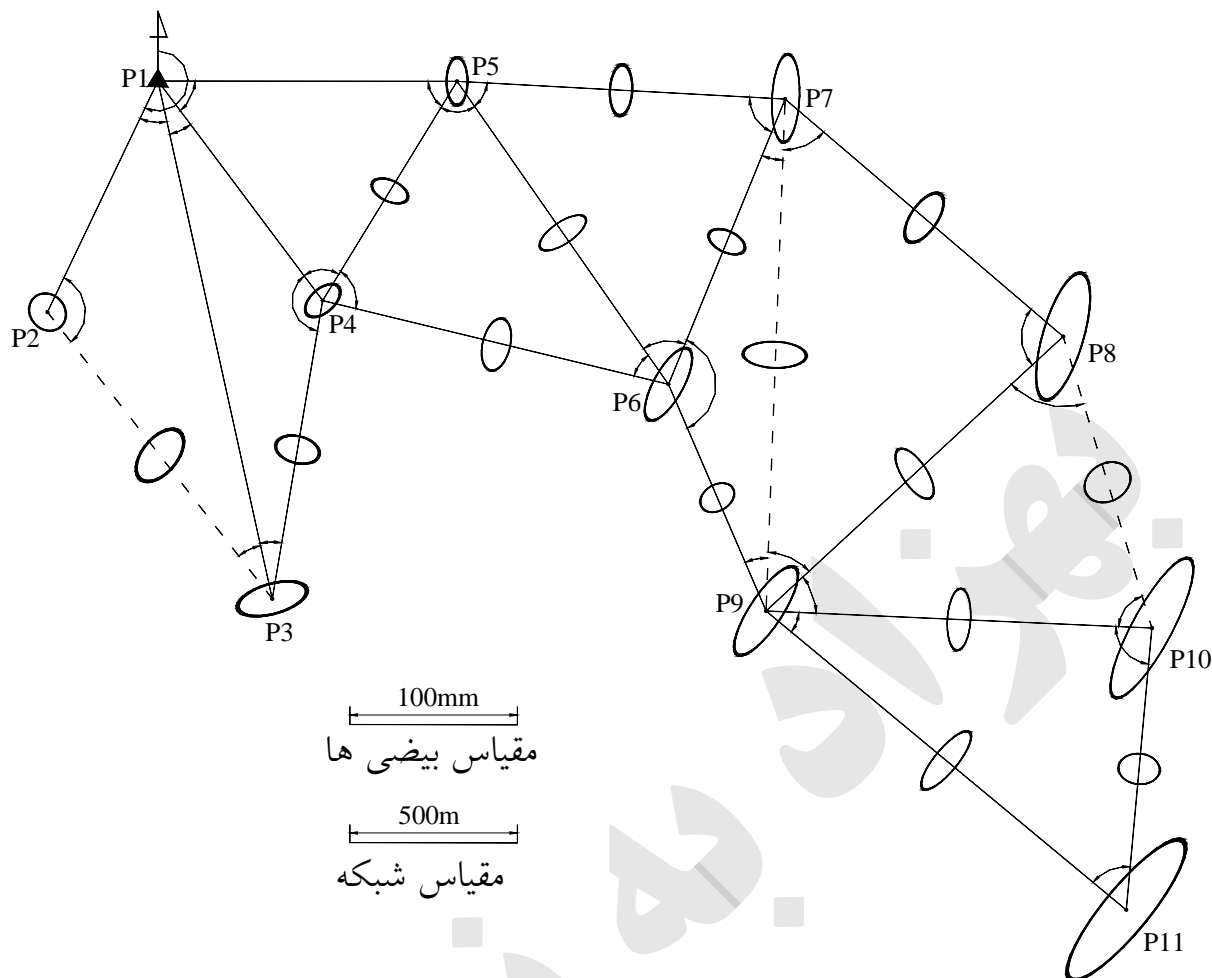
$$\hat{\alpha}_{ij} = \tan^{-1} \left( \frac{\hat{x}_j - \hat{x}_i}{\hat{y}_j - \hat{y}_i} \right) \quad \text{و} \quad \hat{D}_{ij} = \sqrt{(\hat{x}_j - \hat{x}_i)^2 + (\hat{y}_j - \hat{y}_i)^2}$$

مسئله حائز اهمیت در اینجا آنست که با مشاهده بیضی خطای نسبی بین دو نقطه می توان به دقت طولی و زاویه ای شبکه در راستای خطوط متصل کننده نقاط به یکدیگر پی برد و اگر ضعفی در دقت آنها وجود داشته باشد با اندیشیدن تدابیری نظیر افزودن مشاهدات در آن قسمت از شبکه و یا بهبود دادن دقت اندازه گیری مشاهدات برای آن قسمت از شبکه دقت شبکه را افزایش دهیم.



شکل (۵-۵): بیضی های خطای مطلق و نسبی برای تعیین موقعیت مسطحاتی دو نقطه  $i$  و  $j$

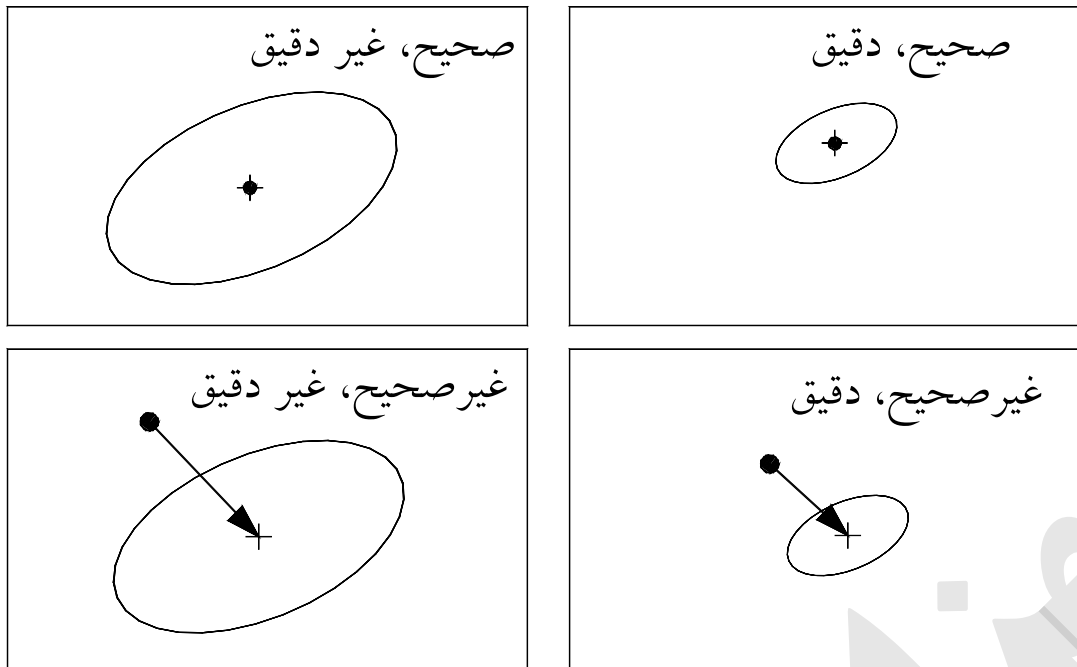
همانطور که می دانید دو پارامتر اصلی برای تعریف یک بیضی خطای نسبی یکی ابعاد آن (نیم قطر اطول و اقصر) می باشد و دیگری آزیموت نیم قطر اطول است. رفتار این دو کمیت نسبت به تعریف سیستم مختصات مبنای شبکه، متفاوت است بدین معنی که ابعاد بیضی خطای نسبی مستقل از تعریف مبدا و آزیموت مرجع شبکه می باشد و فقط به تعریف مقیاس در شبکه وابسته است و این وابستگی فقط وقتی خودش را نشان می دهد که مثلا دو نقطه ثابت برای تعریف سیستم مختصات داشته باشیم و فقط مشاهدات زاویه ای انجام داده باشیم و هیچ طولی را مشاهده نکرده باشیم در این حالت تنها عامل معرفی مقیاس در شبکه فاصله بین این دو نقطه است که تغییر دادن آن بر ابعاد بیضی های خطای نسبی تا حدودی تاثیر گذار است ولی امروزه با توجه به اینکه معمولا تمام طولهای ممکن در شبکه با دستگاههای طولیاب مدرن و یا GPS اندازه گیری می شوند مسئله مقیاس هیچگونه تاثیری بر روی ابعاد بیضی های خطای نسبی بین نقاط شبکه نخواهد داشت و تاثیر آن کاملا منفی است یعنی با وجود مشاهدات طولی فراوان در شبکه می توانیم ابعاد بیضی های خطای نسبی را کاملا مستقل از تعریف سیستم مختصات فرض کنیم (invariant). ولی آزیموت نیم قطر اطول که معرف توجیه زاویه ای بیضی خطای نسبی می باشد به تعریف آزیموت مرجع در شبکه کاملا وابسته است و با تغییر دادن آن، تغییر خواهد کرد. به طور کلی می توان گفت که طول نیم قطر اطول بیضی های خطای نسبی بین نقاط شبکه معتبرترین کمیت آماری شناخته شده برای تحلیل دقت و طراحی شبکه می باشد. در شکل ذیل این مطلب کاملا مشهود است زیرا که ملاحظه می کنید ابعاد بیضی های خطای نسبی ارتباطی به فاصله نقاط تا نقطه ثابت ( $P_1$ ) ندارند و برعکس آن بیضی های خطای مطلق هستند که ابعادشان با افزایش فاصله از نقطه ثابت افزایش پیدا می کند.



شکل (۵-۶): تحلیل دقت مطلق و نسبی منطقه ای در یک شبکه کنترل (کلیه زوایا و یک آزیموت مشاهده شده اند، خطوط پر طولی هستند که اندازه گیری شده اند و خطوط خط چین فواصلی که اندازه گیری نشده اند می باشند).

### ۵.۳.۳. صحت کمیت های برآورد شده در شبکه های کنترل

در بخش قبل مسئله ناحیه اطمینان و دقت را برای مختصات برآورد شده در شبکه مطرح نمودیم و سوالی که بلافاصله در ذهن شکل می گیرد اینست که چقدر می توانیم به این برآوردها اعتماد کنیم و چه اطمینان و تضمینی برای صحت این نتایج وجود دارد؟ به عبارت دیگر آیا ارائه کمیتی به عنوان دقت به تنهایی کفایت می کند؟ جواب اینست که ارائه دقت برای کمیتهای مجهول شرط لازم است ولی کافی نیست و ما نمی توانیم با اتکای به دقت بر صحیح بودن نتایج نیز پافشاری کنیم. با مفاهیم دقت و صحت در فصل یک آشنا شده اید در اینجا با یک شکل مسئله را نشان می دهیم، به شکل (۵-۷) توجه نمایید در این شکل چهار حالت مختلف که ممکن است برای یک مختصات مجهول برآورد شده در یک شبکه مسطحاتی اتفاق بیافتد، نشان داده شده است. همانطور که ملاحظه می کنید مختصات برآورد شده می تواند دقیق باشد ولی صحیح نباشد و بالعکس و یا اینکه نه دقیق باشد و نه صحیح باشد و یا هم دقیق باشد و هم صحیح باشد که این همان وضعیت ایده آل برای ما است.



● مقدار واقعی  
+ مقدار برآورد شده

بردار انحراف از واقعیت

ناحیه اطمینان

شکل (۵-۷): نمایش حالات مختلفی از دقت و صحت که برای مختصات دو بعدی برآورد شده ممکن است اتفاق بیافتد.

عاملی که می تواند مختصات برآورد شده را از اوقیت منحرف کند (بردار انحراف از واقعیت) در اثر وجود اشتباه و یا خطای سیستماتیک در یک یا چند مشاهده بوجود خواهد آمد زیرا که اثر اینگونه خطاها مستقیماً از مشاهدات به مجهولات برآورد شده انتقال می یابد و جالب اینجاست که اینگونه خطاها هیچ تاثیری بر روی دقت ندارند و فقط صحت برآورد کمترین مربعات را هدف قرار می دهند. همانطور که در قسمت تحلیل شبکه گفته شد برای تشخیص خطاهای سیستماتیک و اشتباهات و حذف آنها باید از آزمونهای بعد از سرشکنی استفاده کنیم ولی با این آزمونها فقط خطاهایی را می توان تشخیص داد که در یک و یا چند مشاهده از مجموعه مشاهدات حضور داشته باشند و در صورتی که کل مشاهدات آلوده به یک اثر سیستماتیک خاص باشند، این خطا قابل تشخیص نخواهد بود. برای مثال در اوائل دهه هشتاد میلادی در انگلستان ادعا می شد که دقت نسبی مثلث بندی این کشور حدود ۲.۵ ppm می باشد ولی هنگامی که در اواخر همین دهه از دستگاههای GPS برای اندازه گیری این شبکه استفاده شد معلوم گردید که دقت نسبی واقعی شبکه ۱۰ ppm بوده است و این به دلیل وجود یک خطای سیستماتیک یکسان بر روی کلیه طولهای اندازه گیری شده در شبکه توسط طولیابهای میکروویو بود و خطائی بود که هیچ آزمون پس از سرشکنی قادر به تشخیص آن نبود و فقط استفاده از یک ابزار دقیق اندازه گیری فاصله می توانست وجود آنرا اثبات کند. نکته دیگری که در ارتباط با وجود اشتباه و یا خطای سیستماتیک وجود دارد اینست که بدانیم آزمون تشخیص مشاهدات اشتباه تا چه اندازه ای می تواند وجود اشکال در مشاهده را به اثبات برساند به عبارت دیگر می خواهیم بدانیم اشتباه یا خطای سیستماتیک چه اندازه ای باید داشته باشد که آزمون بتواند آنرا تشخیص بدهد؟ و بعلاوه اینکه اگر یک مقدار معینی (غیر قابل تشخیص) خطای سیستماتیک یا اشتباه در مشاهدات ما موجود باشد چقدر می تواند بر روی مختصات نهائی بر آورد شده تاثیر بگذارد و چقدر آنرا جابجا خواهد کرد؟ اینها سوالاتی است که برای پاسخ

به آن یک ژئودزیست هلندی به نام بارد<sup>۲۸</sup> در سال ۱۹۶۸ نظریه قابلیت اطمینان<sup>۲۹</sup> را ارائه نمود. برای پاسخ به سوال اول قابلیت اطمینان داخلی<sup>۳۰</sup> و برای پاسخ به سوال دوم قابلیت اطمینان خارجی<sup>۳۱</sup> را در ادامه مطرح می کنیم.

### ۵.۳.۴. قابلیت اطمینان داخلی

قابلیت اطمینان داخلی برآوردی از بزرگترین خطائست که در آزمون تشخیص مشاهدات اشتباه رد نشود و آزمون نتواند وجود آنرا تشخیص بدهد (یعنی برآورد آخرین حد خطای مشاهدات قابل قبول در آزمون). قابلیت اطمینان داخلی یکی از معیارهای اساسی برای طراحی شبکه می باشد. برای برآورد قابلیت اطمینان داخلی ابتدا لازم است تا عدد آزادی هر مشاهده را تعریف نمائیم، بنابر تعریف عدد آزادی مشاهده  $i$  ام از بردار مشاهدات  $\mathbf{I}$  عبارتست از عنصر متناظر با شماره آن مشاهده بر روی قطر اصلی ماتریس حاصل از ضرب  $\mathbf{C}_{\hat{v}}$  در  $\mathbf{C}_I^{-1}$ ، به زبان ریاضی می توان عدد آزادی را به شکل زیر نشان داد:

$$r_i = \left( \mathbf{C}_{\hat{v}} \mathbf{C}_I^{-1} \right)_{ii} = \left( \mathbf{I} - \mathbf{C}_{\hat{I}} \mathbf{C}_I^{-1} \right)_{ii} \quad (24-5)$$

عدد آزادی به عنوان یک عنصر کلیدی در تعریف قابلیت اطمینان داخلی ایفای نقش می کند و حتی گاهی از اوقات به جای قابلیت اطمینان داخلی از عدد آزادی به تنهایی به عنوان معیار استفاده می گردد. بر این اساس مشاهده کاملا قابل اطمینان مشاهده ای است که عدد آزادی ۱ داشته باشد و مشاهده کاملا غیر قابل اطمینان مشاهده ای است که عدد آزادی آن صفر باشد. به عنوان یک معیار برای طراحی شبکه سعی می کنند طراحی شبکه به صورتی باشد که عدد آزادی هیچ مشاهده ای کمتر ۰/۳ نشود و در بعضی شبکه ها معیار ۰/۵ و یا بزرگتر ممکن باشد. می توان ثابت کرد که مجموع اعداد آزادی یک شبکه برابر درجه آزادی آن شبکه است:

$$df = \sum_{i=1}^n r_i \quad (25-5)$$

که در رابطه فوق  $n$  تعداد مشاهدات است. قابلیت اطمینان داخلی یعنی حداکثر اشتباهی که ممکن است در یک مشاهده وجود داشته باشد ولی آزمون یافتن مشاهدات اشتباه موفق به تشخیص آن نشود از رابطه زیر بدست می آید:

$$\nabla_0 l_i = \sigma_{l_i} \frac{\sqrt{\lambda_0}}{\sqrt{r_i}} \quad (26-5)$$

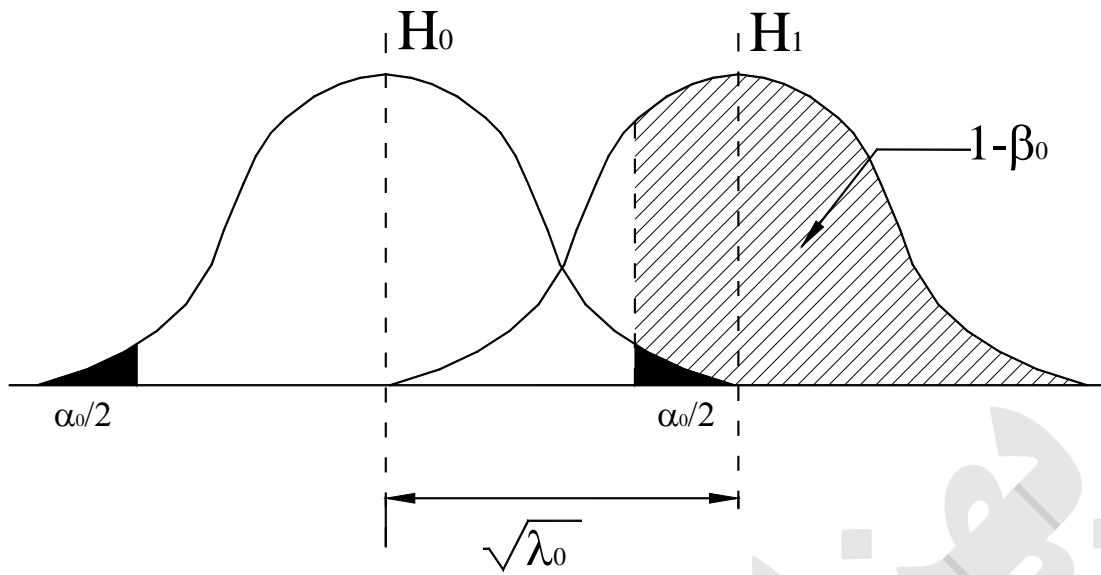
در رابطه فوق  $\sigma_{l_i}$  وریانس مشاهده ای است که می خواهیم قابلیت اطمینان را برای آن تعریف کنیم و  $\sqrt{\lambda_0}$  یک کمیت آماری است که از این رابطه بدست می آید:  $(27-5) \sqrt{\lambda_0} = \zeta_{N(0,1), 1-\alpha/2} + \zeta_{N(0,1), 1-\beta}$  که در این رابطه  $\alpha$  خطای نوع اول و  $\beta$  خطای نوع دوم در نظر گرفته شده برای آزمون تشخیص مشاهدات اشتباه است و  $\zeta$  مقدار بدست آمده از جدول توزیع نرمال به ازای سطوح معنی دار متناظر می باشد. خطای نوع اول ( $\alpha$ ) در اینجا احتمال رد کردن مشاهده ای است که در واقع صحیح است و خطای نوع دوم ( $\beta$ ) احتمال پذیرفتن مشاهده ای است که در واقع غلط می باشد و ما باید در اینجا سعی کنیم مقادیر هر دوی آنها می نیم شود (شکل (۸-۵)). فرض صفر به این صورت می باشد که (مشاهده  $l_i$  فاقد اشتباه است:  $H_0$ ) و فرض مقابل به صورت (مشاهده  $l_i$  حامل اشتباه است:  $H_1$ ) می باشد.

<sup>۲۸</sup> W.Baarda

<sup>۲۹</sup> Reliability theory

<sup>۳۰</sup> Internal reliability

<sup>۳۱</sup> External reliability



شکل (۵-۸):  $\sqrt{\lambda_0}$  جابجائی توزیع نرمال استاندارد باقیمانده مشاهده  $(\tilde{v}_i)$  را هنگامی که  $H_1$  درست است نشان می دهد.

معمولاً مقدار  $\alpha$  را بین ۰.۰۱ تا ۰.۰۵ اختیار می کنند و برای  $\beta$  مقادیر ۰.۲، ۰.۱ و ۰.۳ در نظر می گیرند. برای مثال مشاهده طولی را در شبکه فرض کنید که عدد آزادی آن  $r_i = 0.6$  و دقت آن  $\sigma_{l_i} = \pm 7mm$  باشد آنگاه قابلیت اطمینان داخلی آن به ازای  $\alpha = 0.05$  و  $\beta = 0.15$  برابر است با:

$$\sqrt{\lambda_0} = \zeta_{N(0,1),0.975} + \zeta_{N(0,1),0.85} = 1.96 + 1.037 = 2.997, \nabla_0 l_i = (\pm 7) \frac{2.997}{\sqrt{0.6}} = \pm 27.08mm$$

و این بدان معناست که بزرگترین اشتباهی که آزمون باقیمانده های استاندارد نمی تواند آنرا تشخیص بدهد حداکثر ۳۵ میلی متر می باشد و اگر اشتباهی بزرگتر این مقدار در این مشاهده موجود باشد حتماً کشف خواهد گردید.

### ۵.۳.۴. قابلیت اطمینان خارجی

قابلیت اطمینان خارجی برآوردیست از میزان تاثیر بزرگترین خطای غیر قابل تشخیص  $(\nabla_0 l_i)$  بر روی مختصات است که از سرشکنی کمترین مربعات بدست می آیند و جالب اینجاست که اثر این اشتباهات بر روی کمیت های برآورد شده می تواند به مراتب بزرگتر و قابل ملاحظه تر از اندازه خود اشتباه باشد. بنابر تعریف و با استفاده از رابطه بنیادی سرشکنی کمترین مربعات اثر بزرگترین اشتباه غیر قابل تشخیص مشاهده  $i$  ام یعنی  $(\nabla_0 l_i)$  بر بردار مجهولات بر آورد شده که قابلیت اطمینان خارجی آن مشاهده

$$\nabla_0 \hat{x}_i = [(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{E}_i] (\nabla_0 l_i) \quad (5-27)$$

نامیده شود از رابطه مقابل محاسبه می گردد: در رابطه فوق  $\mathbf{E}_i$  برداری ستونی است که ابعاد آن با بردار مشاهدات یکی است و عنصر متناظر با مشاهده  $i$  ام در آن ۱ می باشد و بقیه عناصر آن مساوی صفر هستند. همانطور که ملاحظه می کنید بر اساس رابطه فوق به ازای هر یک از مشاهدات یک بردار به عنوان قابلیت اطمینان خارجی آن مشاهده بدست می آید که دقیقاً اثر اشتباه موجود در آن مشاهده را بر روی تک تک مجهولات برآورد شونده نشان می دهد. نکته ای که در مورد قابلیت اطمینان خارجی در رابطه (۵-۲۷) وجود دارد اینست که  $\nabla_0 \hat{x}_i$  یک کمیت وابسته به سیستم مختصات مرجع<sup>۳۲</sup> می باشد و بدین جهت کمیت مناسبی برای تحلیل و طراحی شبکه نیست. باردا در سال ۱۹۷۶ نوع دیگری از قابلیت اطمینان خارجی را معرفی نمود که از رابطه زیر بدست می آید:

<sup>۳۲</sup> Datum dependent



$$\lambda_{0i} = (\nabla_0 \hat{\mathbf{x}}_i)^T \mathbf{C}_i^{-1} (\nabla_0 \hat{\mathbf{x}}_i) \quad (28-5)$$

و به این کمیت اندازه اطمینان خارجی نسبی گفته می شود و امروزه این کمیت معمولاً به عنوان قابلیت اطمینان خارجی شناخته می شود و به جای یک بردار یک عدد را به هر مشاهده به عنوان قابلیت اطمینان خارجی نسبت می دهد.

## ۵. ۴. روشهای طراحی شبکه

روشهای انجام طراحی شبکه را می توان به دو گروه کلی تقسیم نمود:

الف- روش تکرار (سعی و خطا<sup>۳۳</sup>)      ب- روش مستقیم

در روش تکرار ابتدا مقادیر اولیه ای را به عنوان پیش فرض برای بر آورد معیارهای طراحی در نظر می گیریم و پس از مشاهده نتایج بدست آمده با تغییر دادن فرضها و مقادیر اولیه سعی می کنیم نتایج را به اهداف اولیه نزدیک کنیم و آنقدر این عمل را باید تکرار کنیم تا به اندازه های مد نظر از قبل برای معیارهای طراحی دست پیدا کنیم. معمولاً سعی می شود معیارهایی که برای طراحی در نظر گرفته می شوند وابسته به تعریف سیستم مختصات نباشند از آن دسته می توان به اندازه بیضی های خطای نسبی و قابلیت اطمینان داخلی مشاهدات (یا اعداد آزادی آنها اشاره نمود) ولی گاهی از اوقات هم از ما می خواهند که ابعاد بیضی های خطای مطلق (علیرغم وابسته بودنشان به سیستم مختصات) را نیز به عنوان معیار در نظر بگیریم که در اینصورت هم باید سعی کنیم سیستم مختصات و همچنین سایر کمیتهای شرکت کننده در تعیین ابعاد این بیضی ها را به گونه ای تعیین نماییم که به این معیار هم دست پیدا کنیم. در اینجا برای روش تکرار یک مثال عنوان می کنیم فرض کنید از ما می خواهند شبکه ای با شش نقطه به گونه ای طراحی کنیم که قطر طول بیضی های خطای نسبی ۹۵٪ آن از ۲۰ میلی متر تجاوز نکند و عدد آزادی کلیه مشاهدات بزرگتر از ۰/۵ باشد. در این جا ابتدا با توجه به موقعیت زمین مورد نظر و در نظر گرفتن شرایط دید و ایستگاه گذاری و همچنین متعادل گرفتن ابعاد شبکه یک شکل هندسی پیشنهادی را برای شبکه طراحی می کنیم سپس با در نظر گرفتن امکانات دستگاهی دقیقی را که فکر می کنیم بتوانیم از آنها تامین کنیم برآورد کرده و بدین شکل ماتریسهای ساختار هندسی شبکه و وریانس- کووریانس مجهولات را می توانیم تشکیل دهیم ( $\mathbf{A}, \mathbf{C}_1$ ) به کمک این دو کمیت معیارهای طراحی را محاسبه می کنیم سه حالت ممکن است بوجود بیاید یکی اینکه اعداد بدست آمده خیلی بزرگتر از معیارهای اولیه طراحی باشند دوم اینکه مقادیر آنها نزدیک به معیارهای اولیه طراحی باشد و سوم اینکه خیلی کوچکتر باشند. در صورتی که اعداد بدست آمده مقدار قابل توجهی بزرگتر مقادیر اولیه و مورد انتظار باشند باید یک فکر اساسی کنیم و با تغییر در شکل شبکه، افزودن مشاهدات به شبکه (علی الخصوص برای قسمتهایی که تفاوت معیارها از یکدیگر زیاد مشهود باشد) و افزایش دقت اولیه برای مشاهدات (انتخاب دستگاههای با دقت بالاتر و یا افزایش تعداد دفعات مشاهده هر کمیت) سعی می کنیم که این اختلاف را به نحو قابل توجهی کاهش دهیم. در حالتی که اختلاف کم باشد می توانیم با مختصر تغییری در فرضهای اولیه به دقت خواسته دست بیابیم و اگر مقادیر معیارهای بدست آمده به نحو قابل توجهی کوچکتر از مقادیر اولیه در نظر گرفته شده باشند آنگاه منطقی آنست که با کاهش تعداد مشاهدات و استفاده از دستگاههای ارزان قیمت تر و اندازه گیری در زمان کوتاهتر کاری کنیم که هزینه انجام پروژه کاهش یابد دقت کنید که همیشه دستیابی به بالاترین و بهترین حدود برای معیارهای طراحی مطلوب نیست بلکه اندازه اولیه آنها باید متناسب با ظرفیت و ماهیت پروژه تعیین گردد. روش تکرار علیرغم منطقی ساده ای که دارد و اینکه می تواند نتایج خوبی ارائه کند ولی به دلیل زمان بر بودن و حجم بالای محاسبات در آن تا حدودی دشوار است البته امروزه با پیشرفت مداوم توانائی و کارائی رایانه ها در ارتباط با این معایب خیلی نگران نیستیم ولی مسئله دیگری که وجود دارد اینست که انتخاب طرح اولیه که اسکلت کار را تشکیل می دهد نیاز به تجربه و مهارت دارد و رسیدن به طرح بهینه بطور مطلق در این روش کمتر اتفاق می افتد. برای انجام طراحی به روش سعی و خطا می توان از نرم افزارهای معمولی سرشکنی

<sup>۳۳</sup> Trial and error

کمترین مربعات استفاده نمود و نیاز به استفاده از نرم افزار خاص و یا پیچیده ای نیست البته بعضی از نرم افزارها که مسئله طراحی هم در آنها لحاظ شده است روش تکرار را به صورت **interactive network design** ارائه می کنند.

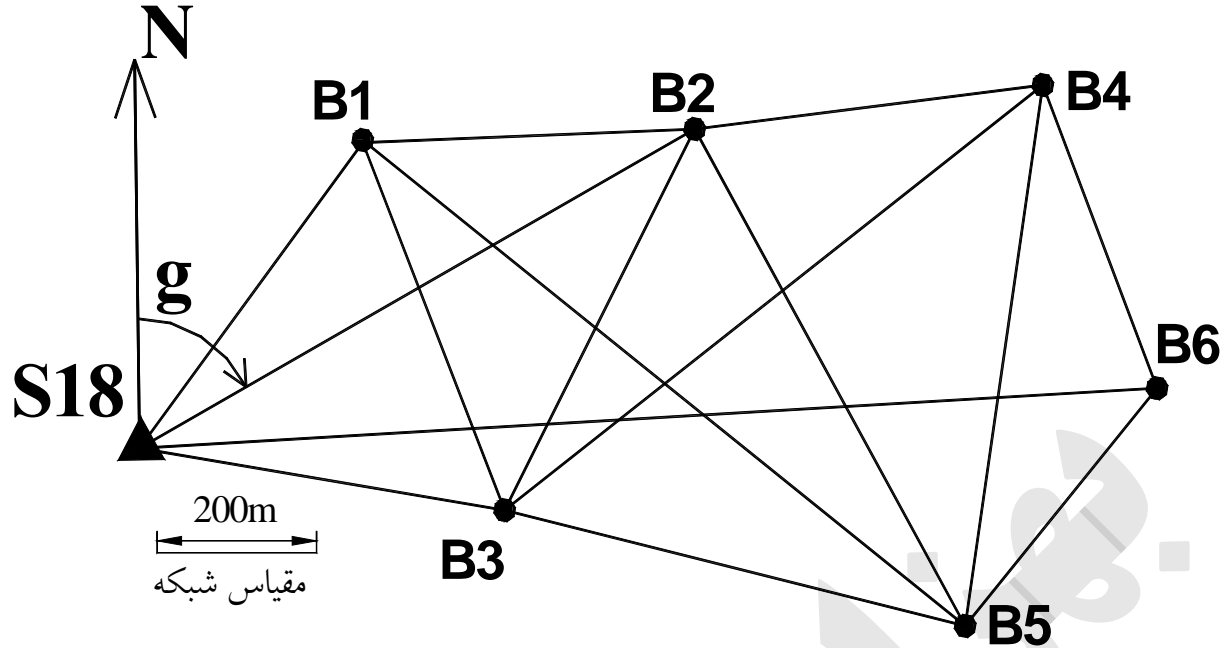
در روشهای مستقیم طراحی شبکه سعی می گردد تا بر حسب مراتبی که برای طراحی شبکه دیده شده است و با در دست داشتن معیارهای اولیه طراحی از روی این معیارها کمیت های مجهول یعنی سیستم مختصات مبنا، شکل هندسی و پیکر بندی شبکه و دقت لازم برای مشاهدات تعیین گردند. این روشها تا حدودی دشوار هستند و معمولاً از منطقیهای پیچیده ای در آنها استفاده می شود ولی بطور کلی با این روشها به تنهایی نمی توان شبکه را طراحی نمود بلکه نهایتاً باید نتایج به گونه ای با روش سعی خطا منطبق بر معیارهای اولیه گردند و حسن این روشها در اینست که نتایجی که بدست می آیند چون مستقیماً از معیارهای اولیه منتج شده اند خیلی پرت از این معیارها نخواهند شد. معمولاً این گونه روشها منجر به تهیه معیارهای اولیه و دستورالعملهایی برای طراحی شبکه می گردند که می توان از آنها به عنوان پیش فرضهای اولیه استفاده نمود مثلاً برای دقت های مختلف اشکال هندسی مختلفی می توانند پیشنهاد گردند و یا دقتهای اولیه نیز به همین صورت می تواند باشد. به عنوان یک اصل کلی در طراحی شبکه همیشه به خاطر داشته باشید که مشاهدات طولی همواره دارای اهمیت ویژه و فوق العاده ای نسبت به مشاهدات زاویه ای هستند و وجود آنها همواره الزامیست بعلاوه اینکه با افزایش تعداد مشاهدات طولی معیارهای طراحی شبکه همیشه به نحو موثری بهبود پیدا می کنند.

## پروژه فصل ۵:

برای یک شبکه کنترل مطابق شکل صفحه بعد مشاهدات طولی به منظور تعیین موقعیت نقاط  $B_1$  تا  $B_6$  انجام گردیده است. این مشاهدات همگی توسط یک دستگاه طولیاب اندازه گیری شده اند که دقت اسمی آن  $mm+ppm$  می باشد. فهرست مشاهدات و همچنین مختصات نقطه ثابت  $S_{18}$  و آزمون امتداد  $S_{18} \rightarrow B_2$  در جدول ۵-۲ آمده است. مطلوبست:

الف) انجام محاسبات سرشکنی شبکه، انجام آزمون وریانس فاکتور ثانویه و در صورت رد شدن آن، آزمون یافتن مشاهدات اشتباه و حذف مشاهده یا مشاهدات اشتباه احتمالی، نهایتاً ارائه فهرست مختصات سرشکن شده هر یک از نقاط شبکه به همراه مشخصات بیضی خطای مطلق ۹۵٪ آنها با ترسیم شکل

ب) محاسبه و ترسیم بیضی خطای نسبی ۹۵٪ مختصات نقاط، عدد آزادی و قابلیت اطمینان داخلی تک تک مشاهدات و همچنین قابلیت اطمینان خارجی نسبی برای کلیه مشاهدات با استفاده از رابطه (۵-۲۸)



شکل (۹-۵): شبکه کنترل با یک نقطه ثابت

فاصله	مقدار اندازه گیری	فاصله	مقدار اندازه گیری
S18 -- B1	444 .510	B2 -- B4	429 .817
S18 -- B2	772 .848	B2 -- B5	659 .001
S18 -- B3	453 .288	B3 -- B4	820 .331
S18 -- B6	1249.700	B3 -- B5	580 .137
B1 -- B2	407 .344	B4 -- B5	627.182
B1 -- B3	455 .784	B4 -- B6	374.630
B1 -- B5	925 .124	B5 -- B6	360.037
B2 -- B3	495 .518		

آزیموت مشاهده شده:  $g = 51^{\circ}12'07''$  ( $\sigma_g = \pm 30''$ )

$$X_{S18} = 10000.00$$

مختصات نقطه ثابت:

$$Y_{S18} = 10000.00$$

جدول (۲-۵): فهرست مقادیر معلوم و مشاهدات انجام شده برای انجام تحلیل یک شبکه کنترل نمونه