



بِسْمِ



جزوه تخصصی درس حسابان

فصل اول: محاسبات جبری، معادلات و نامعادلات

مدرس : جواد حبیبی

شامل درس نامه ، سوالات کنگور سراسری و امتحانات

نهایی مرتبط با سرفصل ها

موسسه ای بزرگ تدریس خصوصی فانوس
اگر مقصدی برای رسیدن دارید ،
ما فانوس راهتان هستیم.

www.Fanoosedu.ir



دنباله های حسابی

یادآوری:

تعریف: هر دنباله ای از اعداد که رابطه ی مابین تمام جفت عضوهای متوالی آن با جمع تعریف شود حسابی است. به بیان ساده تر هر جمله دنباله از جمع جمله ی قبلی دنباله با یک عدد ثابت که آن را قدر نسبت (d) می نامیم، بدست خواهد آمد.

فانوس: جملات دنباله حسابی را عموماً با a نام گذاری می کنند و شماره جمله را نیز به شکل اندیس آن نمایش می دهند. مثلاً a_0 جمله ی اول و a_3 جمله ی چهارم است.

مجموع جملات دنباله های حسابی

برای بدست آوردن جمع دنباله های حسابی از روش گوس استفاده می کنیم که به شکل زیر است:

1	2	3	n-1	n
---	---	---	------	-----	---

n+1	n+1	n+1	n+1	n+1
-----	-----	-----	------	-----	-----

مشاهده می کنیم که اگر اولین جمله ی یک دنباله را با آخرین جمله ی آن جمع کنیم و همچنین دومین جمله را با جمله ی یکی به آخر و به همین ترتیب الی آخر . بنا براین برای محاسبه ی حاصل جمع کار سختی در پیش نداریم:

$$S_n = \frac{(n+1)n}{2}$$

چرا که n جمله داریم که مقدار آنها n+1 است و از آن جهت که ما حاصل جمع 1 تا n را می خواستیم نه 2 تا 1 تا n را! بنابراین حاصل ضرب را بر 2 تقسیم می کنیم.

نظر تو چیه؟ حاصل جمع 5 تا 10 را چگونه حساب کنیم؟ (یعنی دنباله از یک شروع نشه!)

برای حل این مشکل باید اول استخوان بندی! دنباله ها را به شکل زیر نگاه کنیم:

$$a_0, a_0+d, a_0+2d, \dots, a_0+(n-1)d$$

حالا می توانیم a_0 ها را با هم و قدر نسبت ها را هم با هم جمع کنیم:

$$S_n = \frac{(n-1)n}{2} * d + (n * a_0)$$



$$S_n = \frac{n}{2} (2a + (n-1)d)$$

مثال: مجموع جمله ی سوم و هفتم یک دنباله ی حسابی 21 می باشد. حاصل جمع نه جمله اول آن را بیابید.

پاسخ:

$$(a+3d) + (a+7d) = 2a+10d = 21$$

$$S_9 = \frac{9}{2} (2a + (9-1)d) = \frac{9}{2} (2a + 8d) = (21/2) * 9 = 94.5$$

مثال: دنباله ای حسابی مفروض است. میدانیم مجموع جملات چهارم و پنجم و ششم و هفتم آن 32 است. مجموع 10 جمله اول از

یک دنباله حسابی را بدست بیاورید!

پاسخ:

$$(a+3d) + (a+4d) + (a+5d) + (a+6d) = 4a + 18d = 32$$

$$S_{10} = \frac{10}{2} (2a + (10-1)d) = 5(2a + 9d) = 5(8) = 40$$

سوال امتحان نهایی شهریور ماه 92

در دنباله ی حسابی زیر مجموع بیست جمله ی اول را بیابید.

-5, 0, 5, 10, ...

پاسخ:

$$S_n = \frac{n}{2} (2a + (n-1)d)$$

$$S_{20} = \frac{20}{2} (2(-5) + (20-1)5) = 850$$

سوال امتحان نهایی شهریور 90:

در دنباله حسابی 1, 4, 9, 16, 25, ... حداقل چند جمله را باید جمع کنیم تا حاصل از 200 بیشتر شود.

پاسخ:



$$S = \frac{n[2a + (n-1)d]}{2} \quad (0/25) \Rightarrow \frac{n[4 + (n-1)4]}{2} > 200 \quad (0/25)$$

$$4n^2 > 400 \quad (0/25) \Rightarrow n > 10 \Rightarrow \text{حداقل ۱۱ جمله باید جمع کنیم}$$

سوال کنکور سراسری ریاضی خارج از کشور 86 :

اعداد $\frac{5}{2}, y, x, 1$ به ترتیب، چهار جمله‌ی اول از یک تصاعد عددی اند. مجموع پانزده جمله‌ی اول این تصاعد کدام است؟

68 (4)

67/5 (3)

62/5 (2)

57 (1)

پاسخ :

$$d = \frac{a_n - a_m}{n - m} = \frac{a_4 - a_1}{4 - 1} = \frac{\frac{5}{2} - 1}{4 - 1} = \frac{1}{2}$$

1 و $\frac{5}{2}$ به ترتیب جملات اول و چهارم دنباله هستند، داریم:

$$S_{15} = \frac{15}{2}(2a_1 + (15-1)d) = \frac{15}{2}(2 + 14 \times \frac{1}{2}) = 67/5$$

سوال کنکور سراسری ریاضی 83 :

در یک تصاعد عددی با جمله اول a اگر یک واحد به قدر نسبت جملات افزوده شود آن‌گاه به مجموع 20 جمله اول چقدر افزوده خواهد شد؟

190 (4)

180 (3)

170 (2)

160 (1)

پاسخ :

$$S_1 = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \rightarrow S_1 = 10(2a_1 + 19d) \rightarrow S_2 = 10(2a_1 + 19(d+1))$$

$$S_2 = 190 + S_1$$

سوال کنکور سراسری ریاضی خارج از کشور 90 :

مجموع n جمله‌ی اول از یک دنباله‌ی عددی به صورت $S_n = \frac{n(n-15)}{6}$ است. در این دنباله مجموع جملات با شروع از جمله‌ی هفتم و

ختم به جمله‌ی هجدهم، کدام است؟

18 (4)

$\frac{49}{3}$ (3)

$\frac{29}{3}$ (2)

9 (1)

اگر جملات دنباله‌ی حسابی (عددی) را با a_1, a_2, \dots نشان دهیم، داریم:

$$a_7 + a_8 + \dots + a_{17} + a_{18} = S_{18} - S_6 = \frac{18(18-15)}{6} - \frac{6(6-15)}{6} = 9 + 9 = 18$$



دنباله های هندسی

هر دنباله ای از اعداد که رابطه ی مابین تمام جفت عضوهای متوالی آن با ضرب تعریف شود هندسی است. به بیان ساده تر هر جمله دنباله از ضرب جمله ی قبلی دنباله در یک عدد ثابت که آن را قدر نسبت (q) می نامیم، بدست خواهد آمد.

حاصل جمع دنباله های هندسی

به مراحل زیر دقت کنید:

$$S_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1}$$

$$qS_n = aq + aq^2 + aq^3 + \dots + aq^n$$

$$(1-q)S_n = a - aq^n$$

$$S_n = \frac{a(1-qn)}{1-q}$$

حال با توجه به همین رابطه ی توان حاصل را برای حالت نامتناهی نیز بدست آورد. (n به سمت بی نهایت) پس در n به سمت بی نهایت رابطه به شکل زیر ساده می شود:

$$S_\infty = \frac{a}{1-q}$$

البته باید دقت شود که قدر نسبت (q) حتما باید از یک کوچکتر باشد (تا وقتی توان q به بی نهایت میل می کند q^n به صفر و $1 - qn$ به یک میل کند!)

مثال: اگر در یک دنباله ی هندسی نسبت حاصل جمع 8 جمله نخست، 3^8 برابر 16 جمله نخست می باشد. جمله دهم چند برابر جمله هفتم است؟!

پاسخ:

$$\frac{(1-q)^{16}}{(1-q)^8} = \frac{(1-q)^8(1+q)^8}{(1-q)^8} = (1+q)^8 = 3^8$$

$$q = 2$$

$$\frac{aq^9}{aq^6} = q^3 = 2$$

$$q = \sqrt[3]{2}$$



مثال: در دنباله ی هندسی زیر مجموع ۴ جمله ی اول چند برابر ۴ جمله ی دوم می باشد؟

$$۳۲، ۸، ۲، \dots$$

پاسخ: $a=32$ و $q=1/4$ می باشد. یعنی جمله ی شماره ۵، برابر خواهر بود با $aq^4 = \frac{1}{2}$

بنا براین خواهیم داشت:

$$A = \frac{32(1 - (\frac{1}{4})^4)}{1 - \frac{1}{4}}$$

$$B = \frac{\frac{1}{2}(1 - (\frac{1}{4})^4)}{1 - \frac{1}{4}}$$

$$\frac{A}{B} = 32 * 2 = 64$$

مثال: در یک دنباله هندسی جمله ی اول ۱۶ و حد مجموع جملات $\frac{۳۲}{۳}$ می باشد. جمله چهارم دنباله کدام است؟

پاسخ:

$$S = \frac{a}{1-q} = \frac{16}{1-q} = \frac{32}{3}$$

$$1-q = \frac{3}{2}$$

$$q = \frac{1}{2}$$

$$aq^3 = 16 * \frac{1}{8} = 2$$

سوال امتحان نهایی خرداد 91:

پاسخ:

در دنباله ی هندسی نامتناهی زیر، مجموع تمام جملات را بیابید.

$$\frac{1}{۳}، \frac{1}{۹}، \frac{1}{۲۷}، \dots$$

$$\text{مجموع تمام جملات} = \frac{a}{1-q} = \frac{\frac{1}{۳}}{1 - \frac{1}{۳}} = \frac{1}{۲} = \frac{1}{۲} (۰/۵) = \frac{1}{۲} (۰/۲۵)$$

سوال امتحان نهایی خرداد 90:



توبی در اختیار داریم که از هر ارتفاعی که رها شود، پس از زمین خوردن به اندازه $\frac{1}{3}$ ارتفاع اولیه خود بالا می رود فرض کنید این توپ را از زمین به هوا پرتاب کرده ایم تا به ارتفاع ۵ متری برسد، می خواهیم بدانیم پس از شروع پرتاب تا زمان ایستادن، این توپ چقدر مسافت طی می کند؟

پاسخ:

ارتفاع توپ قبل از n امین برخورد با زمین را A_n می نامیم. روشن است که

$$A_1 = 5, A_2 = \frac{5}{3}, A_3 = \frac{5}{9}, \dots, A_n = \frac{5}{3^{n-1}}, \dots \quad (./25)$$

بنابر این مسافت طی شده توسط توپ بین هر دو برخورد متوالی توپ با زمین عبارت است از:

$$10, \frac{10}{3}, \frac{10}{9}, \dots, \frac{10}{3^{n-1}}, \dots \quad (./25) \quad a = 10, q = \frac{1}{3} \Rightarrow s_n = \frac{a}{1-q} \quad (./25) \Rightarrow s_n = \frac{10}{1-\frac{1}{3}} \quad (./25) \Rightarrow$$

$$s_{\infty} = 15 \quad (./25)$$

سوال کنکور سراسری ریاضی 86:

تصاعد هندسی \dots و $\frac{1}{3}$ و x و ۲ غیرنزولی است. مجموع شش جمله اول آن کدام است؟

$$\frac{23}{16} \quad (4) \qquad \frac{11}{8} \quad (3) \qquad \frac{21}{16} \quad (2) \qquad \frac{41}{32} \quad (1)$$

$$x^2 = 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} \xrightarrow{\text{غیرنزولی}} x = -1 \text{ و } q = \frac{-1}{3}$$

$$S_6 = \frac{a_1(1-q^6)}{1-q} = \frac{2\left(1 - \left(\frac{-1}{3}\right)^6\right)}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{64}\right) \Rightarrow S_6 = \frac{4}{3} \times \frac{63}{64} = \frac{21}{16}$$

سوال کنکور سراسری ریاضی 88:

در یک تصاعد هندسی، مجموع جملات اول و سوم برابر 1 و مجموع چهار جمله اول آن 3 می باشد، مجموع شش جمله اول کدام است؟

10/8 (4)

12/6 (3)

11/2 (2)

13/4 (1)

پاسخ:



$$a_1 + a_3 = 1 \Rightarrow a_1 + a_1 q^2 = 1 \quad (1)$$

$$S_4 = 3 \Rightarrow \frac{a_1(1 - q^4)}{1 - q} = 3 \quad (2)$$

$$(1) \div (2) \Rightarrow \frac{a_1(1 + q^2)}{a_1(1 - q^2)(1 + q^2)} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{1 - q} = \frac{1}{3} \Rightarrow q = 2$$

$$(1) : a_1 + a_1(2)^2 = 1 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{5}$$

$$S_6 = \frac{a_1(1 - q^6)}{1 - q} = \frac{\frac{1}{5}(1 - 64)}{1 - 2} = \frac{63}{5} = 12\frac{3}{5}$$

سوال کنکور سراسری ریاضی خارج از کشور 91 :

- بین دو عدد ۳۲۴ و ۴، سه عدد چنان درج شده است که پنج عدد حاصل تشکیل یک دنباله هندسی دهند مجموع این ۵ عدد مثبت کدام است؟

۴۸۸ (۴)

۴۸۶ (۳)

۴۸۴ (۲)

۴۸۲ (۱)

در این سؤال اگر قدرنسبت تصاعد هندسی را a فرض کنیم، جملات این تصاعد با شروع از عدد ۴ برابر

$4, 4a, 4a^2, 4a^3, \dots, 4a^n, \dots$ خواهند بود که در این حالت باید جمله ۵ام برابر ۳۲۴ باشد. یعنی:

$$4a^4 = 324 \Rightarrow a^4 = 81 \Rightarrow a = \pm 3$$

حال از آن جایی که صورت سوال جملات دنباله را مثبت فرض کرده پس $a = 3$ قابل قبول خواهد بود و در این صورت جملات دنباله به صورت $4, 12, 36, 108, 324, \dots$ درمی آیند. که مجموع پنج جمله اول آن برابر ۴۸۴ است.

سوال کنکور سراسری ریاضی 89 :

در یک تصاعد هندسی، مجموع سه جمله اول ۱۳۶ و مجموع شش جمله اول آن ۱۵۳ م. باشد. جمله اول چند برابر جمله پنجم است؟

۱۶ (۴)

۹ (۳)

۸ (۲)

$\frac{81}{16}$ (۱)

$$S_3 = 136 \Rightarrow \frac{a_1(q^3 - 1)}{q - 1} = 136$$

$$S_6 = 153 \Rightarrow \frac{a_1(q^6 - 1)}{q - 1} = 153$$

$$\Rightarrow \frac{S_6}{S_3} = \frac{q^6 - 1}{q^3 - 1} = \frac{153}{136} \Rightarrow q^3 + 1 = \frac{153}{136}$$

$$\Rightarrow q^3 = \frac{17}{136} \Rightarrow q^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow q = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a_1}{a_5} = \frac{1}{q^4} = 16$$

پاسخ :



سوال کنکور سراسری ریاضی 84:

موجی بر روی نیمدایره‌ها بالای یک محور حرکت می‌کند. با قطر اولیه‌ی ۱ واحد، هر بار که به محور برخورد کند ۲۰ درصد از طول قطر آن کاسته می‌شود، اندازه‌ی محیط این نیمدایره‌های متوالی دنباله‌ی اعداد حقیقی است، مجموع این دنباله کدام است؟



- (۱) 2π
 (۲) 3π
 (۳) $\frac{3}{2}\pi$
 (۴) $\frac{5}{2}\pi$

$$\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{5}, \frac{8\pi}{25}, \dots$$

$$a = \frac{\pi}{2} \Rightarrow S_{\infty} = \frac{\frac{\pi}{2}}{1 - \frac{4}{5}} = \frac{5\pi}{2}$$

$$q = \frac{4}{5}$$

$$\frac{\text{محیط نیم دایره ی } n\text{ام}}{\text{محیط نیم دایره ی } (n-1)\text{ام}} = \frac{\frac{\pi}{2} D_n}{\frac{\pi}{2} D_{n-1}} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{1}{2} \times 1 \times \pi = \frac{\pi}{2}$$

تقسیم چند جمله ای ها و بخش پذیری

یاد آوری:

در تقسیم چند جمله ای $P(x)$ بر چند جمله ای $B(x)$ چند جمله ای $Q(x)$ خارج قسمت است و $r(x)$ باقیمانده که یا صفر است و یا قطعا درجه ای کمتر از خارج قسمت $B(x)$ دارد.

بقیه جزوه رو سر کلاس با هم کار می کنیم!